ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DE GAUGE

Prem P. Srivastava

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ÍNDICE

I - *TEORIA DE GAUGE ABELIANA - GRUPO DE GAUGE U(1)*

Consideremos a Lagrangeana de um campo escalar complexo

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \tag{1}$$

$\mathcal{L}_0$ é invariante sob transformações globais(*)

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(\theta)\phi(x) \quad ,$$

$$U(\theta) \equiv e^{-iq\theta} \in \mathbf{U}(1) \tag{2}$$

sendo θ real e independente de coordenadas de espaço-tempo (transformação global). Associada a esta invariância existe a corrente conservada de Noether

$$j^\mu \equiv iq \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^*\right]$$

$$\partial_\mu j^\mu \doteq 0 \tag{3}$$

e a carga $Q \equiv \int j^0 d^3x$ é gerador das transformações infinitesimais

$$\delta\phi \equiv \phi'(x) - \phi(x) = -iq\epsilon\phi = -i\epsilon\left[\hat{Q},\hat{\phi}\right]$$

onde $\hat{Q},\hat{\phi}$ etc, representam operadores de teoria quantizada.

A Lagrangeana $\mathcal{L}_0$ não permanece invariante sob transformações locais ($\theta = \theta(\vec{x},t)$) de U(1), pois,

(*) q é um número real fixo.

$$\partial_\mu\phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\left[\partial_\mu\phi - iq\,(\partial_\mu\theta(x))\phi(x)\right]$$

$$\neq e^{-iq\theta(x)}\,(\partial_\mu\phi) \equiv U(x)(\partial_\mu\phi) \tag{4}$$

Para obter teoria invariante sob transformações locais podemos modificar a Lagrangeana introduzindo um novo campo vetorial $A_\mu(x)$ que serve para compensar o efeito do termo $(\partial_\mu\theta)$. Sugere-se que introduzamos uma derivada covariante

$$D_\mu(A) \equiv (\partial_\mu - ieqA_\mu) \tag{5}$$

tal que

$$(D_\mu\phi)' = e^{-iq\theta(x)}\,(D_\mu\phi) = U(x)(D_\mu\phi) \tag{6}$$

A Lagrangeana apropriada será então

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^+(D^\mu\phi) - m^2\phi^+\phi + (\text{termos cinéticos para } A_\mu)$$

Segue-se da equação (6)

$$(\partial_\mu - ieqA'_\mu(x))\, e^{-iq\theta(x)}\phi(x) = e^{-iq\theta(x)}(\partial_\mu - ieqA_\mu(x))\,\phi(x)$$

ou

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\frac{\partial\theta(x)}{\partial x^\mu}$$

$$= A_\mu(x) + \frac{i}{e}\,(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{7}$$

dando o modo pelo qual o <u>campo de gauge</u> $A_\mu(x)$ deverá transformar sob transformações (de gauge) locais de $U(1)$. Notamos que dado um potencial $A_\mu(x)$ é possível transformá-lo localmente a zero se e somente se $A_\mu(x)$ tem a forma especial de "gauge puro":

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{e}\,(\partial_\mu U)\,U(x)^{-1} \tag{8}$$

para algum $U(x) \in U(1)$. Segue-se então da eq. (8)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e}\,(\partial_\nu\partial_\mu - \partial_\mu\partial_\nu)U &= \partial_\nu(A_\mu U) - \partial_\mu(A_\nu U) \\ &= F_{\nu\mu}U = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

onde

$$\underset{\mu\nu}{F(x)} \equiv (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tag{10}$$

Em outras palavras, $A_\mu(x)$ é(localmente) gauge-equivalente ao potencial nulo tão somente quando o campo $F_{\mu\nu}(x)$ é nulo.

É fácil verificar

$$\left[D_\mu(A)\ ,\ D_\nu(A)\right] = -\,iq\,F_{\mu\nu}(A) \tag{11}$$

e da eq. (6) obtém-se:

$$D_\mu(A') = UD_\mu(A)U^{-1} \tag{12}$$

de modo que

$$F'_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}(A') = UF_{\mu\nu}(A)U^{-1} = F_{\mu\nu}(A) \tag{13}$$

Podemos assim obter a Lagrangeana completa invariante sob transformações de gauge locais como

$$\mathcal{L} = (D_\mu(A)\phi)^+(D^\mu(A)\phi) - m^2\phi^+\phi - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{14}$$

que nada mais é do que a Lagrangeana para a eletrodinâmica de um campo escalar complexo. O princípio de invariância sob transformações de gauge locais leva de maneira natural também à determinação da dinâmica de interação entre partículas carregadas e o campo de gauge que por sua vez gera interação entre partículas. A transformação de gauge (Eqs. (7), (13)) pode também ser vista como um mapeamento de um ponto x da variedade M do espaço-tempo à variedade de números complexos $e^{-iq\theta(x)}$.

Consideremos o caso de uma dimensão de tempo e uma de espaço. Para um x^0 fixo, temos um mapeamento do eixo real $-\infty < x^1 < \infty$ sobre os pontos de um círculo com raio unitário. Podemos identificar os pontos no infinito e projetar o eixo real sobre um outro círculo unitário

$$\cos\phi = \frac{(x^1)^2 - 1}{(x^1)^2 + 1} \quad , \quad \text{sen}\phi = \frac{2x^1}{(x^1)^2 + 1}$$

A transformação de gauge aqui pode então ser vista como mapeamento de um círculo unitário S_1 sobre um outro círculo unitário $S_1(U(x) \to U(\phi) = e^{-iq\theta(\phi)})$. Pelas considerações topológicas (ver, por exemplo, Marciano e Pagels), sabemos que tais mapeamentos podem ser sub-divididos em número infinito de classes distintas(*). Os elementos pertencentes a uma determinada classe podem ser deformados continuamente a um elemento da mesma classe, mas não a um elemento de classe distinta. Se interpretarmos que o vácuo da teoria de gauge quantizada corresponde à situação clássica $F_{\mu\nu} = 0$, chegaremos à conclusão de que (Eq. (8)) o estado de vácuo do campo de gauge, no caso em consideração, será infinitamente degenerado.

(*) $\pi_1(U(1)) = \pi_1(SO(2)) = \pi_1(S_1) = Z$, $\pi_1(SU(N)) = 0$,
$\pi_1(SO(N)) = Z_2$ $(N > 3)$; $\pi_2(SU(N)) = \pi_2(SU(N)) = 0$,
$\pi_3(U(1)) = 0$, $\pi_3(SU(N)) = Z$, $\pi_3(SO(3)) = Z$, etc.

II - *TEORIA DE GAUGE NÃO-ABELIANA. CAMPO DE YANG-MILLS*

Trataremos agora da teoria de gauge baseada em um grupo de Lie semisimples não-abeliano. Por conveniência de notação, escolheremos o grupo SU(3), embora a discussão seja completamente geral. Este grupo é usado na Cromodinâmica Quântica (QCD) para indicar as três "cores" dos "quarks". O grupo é constituído de matrizes (3 x 3) que são unitárias e unimodulares. Os oito ($3^2-1 = 8$) geradores T_a, $a = 1,2,\ldots,8$, obedecem à álgebra de Lie

$$\left[T_a, T_b\right] = i\, f_{abc}\, T_c \quad , \tag{1}$$

onde as constantes de estrutura f_{abc} são reais e completamente antisimétricas em a,b,c. Na representação regular {8} T_a são representados por matrizes (8 x 8) definidas como

$$T_a \to (L_a)_{bc} \equiv -\, i\, f_{abc} \tag{2}$$

Nas representações(*) {3} e {3*} os geradores são representados por matrizes (3 x 3)

$$\begin{aligned} \{3\} &: \quad T_a \to t_a \equiv \tfrac{1}{2}\lambda_a \\ \{3^*\} &: \quad T_a \to -t_a^* \end{aligned} \tag{3}$$

onde λ_a são matrizes de Gell-Mann. Temos

(*) Ao contrário do que ocorre para SU(2), as representações {3} e {3*} são inequivalentes.

$$
\begin{aligned}
T_r(\lambda_a\lambda_b) &= 2\,\delta_{ab}\\
[\lambda_a,\lambda_b] &= 2\,d_{abc}\,\lambda_c + \frac{4}{3}\,\delta_{ab}\,\mathbb{1}\\
T_r\lambda_c[\lambda_a,\lambda_b] &= 4\,i\,f_{abc}\\
T_r\lambda_c\{\lambda_a,\lambda_b\} &= 4\,d_{abc}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

sendo as constantes d_{abc} completamente simétricas.

Descrevemos por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\end{pmatrix} = (\psi_{\underline{a}}(x)) \quad ,$$

$\underline{a} = 1,2,3,$ um triplete de campos de Dirac (três estados de "cores" de um campo de "quark") que se transforma conforme a representação {3} do grupo SU(3) de simetria interna, isto é,

$$\psi_{\underline{a},\alpha}(x) \xrightarrow[SU(3)]{} U_{\underline{a},\underline{b}}\,\psi_{\underline{b},\alpha}(x) \equiv \psi'_{\underline{a},\alpha}(x) \tag{5}$$

onde $\alpha = 1,2,3,4$ representam os índices do spinor de Dirac e, $(\theta \to \omega_a)$:

$$U \equiv (U_{\underline{a},\underline{b}}) = (e^{-i\omega_a t_a}) \in SU(3) \tag{6}$$

Então:

$$\psi^*_{\underline{a},\alpha} \xrightarrow[SU(3)]{} \psi^*_{\underline{b},\alpha}U^{-1}_{\underline{b},\underline{a}}$$

ou

$$\psi^\dagger \xrightarrow[SU(3)]{} \psi^\dagger\,U^{-1}$$

$$\overline{\psi} \xrightarrow[SU(3)]{} \overline{\psi}U^{-1} \tag{7}$$

sendo

$$\overline{\psi}_{\underline{a},\alpha} = \psi^{\dagger}_{\underline{a},\beta}(\gamma^0)_{\beta\alpha} = \psi^{*}_{\underline{a},\beta}(\gamma^0)_{\beta\alpha}$$

A Lagrangeana livre invariante sob transformações globais de simetria interna SU(3) é

$$L = \overline{\psi}\ (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi$$

Com relação ãs transformações locais $\partial_{\mu}\psi' \neq U(\partial_{\mu}\psi)$ de modo que a teoria não é invariante sob as mesmas. Necessitamos agora de oito campos de gauge, um para cada gerador, para compensar os termos $(\partial_{\mu}\omega_a)t_a$. A derivada covariante é então definida como

$$D_{\mu}(A) = (\partial_{\mu} - ig\ T_a\ A^a_{\mu}) \tag{8}$$

$$(D_{\mu}\psi)' = U\ (D_{\mu}\psi) \tag{9}$$

sendo 'g' uma constante de acoplamento. Na representação regular (8), $T_a \to L_a$,

$$D^{ab}_{\mu} = (\delta_{ab}\partial_{\mu} - gf_{abc}A^c_{\mu}) \tag{10}$$

e na representação (3)

$$D_{\mu} = (\partial_{\mu} - igt_aA^a_{\mu}) \tag{11}$$

A transformada de campo de gauge $A^a_{\mu}(x)$ (gluons) sob transformações de grupo de gauge SU(3) é facilmente obtida, usando a Eq. (9)

$$\begin{aligned}(\partial_{\mu}-igt_aA'^{a}_{\mu})\psi'(x) &= U(x)(\partial_{\mu} - igt_aA^a)\psi(x)\\ &= U(x)(\partial_{\mu} - igt_aA^a)(U^{-1}\psi'(x))\end{aligned}$$

Segue-se

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U)U^{-1} \qquad (12)$$

onde

$$A_\mu \equiv t_a\ A^a_\mu \qquad (13)$$

É claro que a Eq. (12) é válida também em qualquer outra representação quando $U = e^{-i\omega_a T_a}$ e $A_\mu = T_a A^a_\mu$. Notamos que $A_\mu(x)$ se anula (localmente) por meio de uma transformação de gauge , tão somente quando é possível achar um $U(x) \in SU(3)$ tal que $A_\mu(x)$ seja "gauge puro":

$$A_\mu(x) = +\frac{i}{g}\ U^{-1}(\partial_\mu U) = -\frac{i}{g}\ (\partial_\mu U^{-1})U \qquad (14)$$

Resulta desta equação

$$-\frac{i}{g}\ (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)U^{-1} = \partial_\mu(A_\nu U^{-1}) - \partial_\nu(A_\mu U^{-1})$$

$$= F_{\mu\nu}(x)\ U^{-1} = 0 \qquad (15)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o campo dado pela expressão

$$F_{\mu\nu} \equiv T_a F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\ \left[A_\mu, A_\nu\right] \quad , \qquad (16)$$

ou

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\ f_{abc}\ A^b_\mu A^c_\nu \qquad (17)$$

$A_\mu(x)$ é assim equivalente de gauge (localmente) a potencial nulo ($A_\mu = 0$), tão somente quando $F_{\mu\nu}(x) = 0$.

Deduz-se facilmente

$$\left[D_\mu(A)\ ,\ D_\nu(A)\right] = -\ g^2 T_a T_b (A^a_\mu A^b_\nu - A^a_\nu A^b_\mu)$$

$$-\ igT_a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)$$

$$= -\ ig\ F_{\mu\nu}(A) \tag{18}$$

Da Eq. (9) resulta:

$$D_\mu(A') = UD_\mu(A)U^{-1} \tag{19}$$

onde A' é relacionado com A pela Eq. (12). Obtém-se então da Eq. (18) a transformada de gauge para $F_{\mu\nu}$ como

$$F'_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}(A') = UF_{\mu\nu}(A)U^{-1} \tag{20}$$

A Eq. (18) permite estabelecer certas identidades interessan - tes. Trabalhando na representação regular a qual tanto A^a_μ como $F^a_{\mu\nu}$ pertencem, temos

$$D^{ca}_\nu D^{ab}_\mu F^{\mu\nu}_b = \frac{1}{2}\ (D^{ca}_\nu D^{ab}_\mu - D^{ca}_\mu D^{ab}_\nu)F^{\mu\nu}_b$$

$$= -\ \frac{1}{2}\ \left[D_\mu , D_\nu\right]^{cb}\ F^{\mu\nu}_b$$

$$= +\ \frac{ig}{2}\ \cdot\ F^a_{\mu\nu}(L_a)_{cb}\ F^{\mu\nu}_b$$

$$= \frac{g}{2}\ f_{acb}\ F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_b = 0 \tag{21}$$

É claro que pela demonstração $D^{ca}_k\ D^{ab}_\ell\ F^{k\ell}_b = 0;\ k,\ell = 1,2,3$ e $D^{ca}_i\ D^{ab}_j\ F^{ij}_b = 0;\ i,j = 1,2$. A identidade de Jacobi

$$\sum\nolimits_{\text{cíclico}}\ \left[D_\mu , \left[D_\lambda , D_\nu\right]\right] \equiv 0 \tag{22}$$

nos dá (Eq. (18)) a identidade de Bianchi

$$\sum_{\text{cíclico}} D_\mu(A)F_{\lambda\nu} = 0 \qquad (23)$$

ou

$$D_\mu(A)\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad (24)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$ é o tensor dual.

Notamos um fenômeno interessante na teoria de gauge não-abeliana. Neste caso os campos $F^a_{\mu\nu}$ não determinam as potências módulo uma transformação de gauge. Em caso abeliano $F_{\mu\nu}(A) = F_{\mu\nu}(\bar{A})$ implica $(\partial_\mu\Delta_\nu - \partial_\mu\Delta_\mu) = 0$ onde $\Delta_\mu = (\bar{A}_\mu - A_\mu)$ e, portanto, $\Delta_\mu = \partial_\mu\theta$ e $\bar{A}, A$ são cópias de gauge. Em caso não-abeliano, a equação análoga permite achar duas potências distintas que não são ligadas por uma transformação de gauge e chamam-se "cópias de Field". Podemos construir também cópias de densidade da ação $(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a)$. Ocorre que as identidades acima não são suficientes para assegurar que existam somente as cópias de gauge. Não é bem claro, no momento, se os vínculos já existentes e os vínculos de gauge necessários a serem impostos para tornar uma teoria quântica de gauge bem definida, serão suficientes para proibir as cópias que não sejam as de gauge, no caso da teoria não-abeliana.

A Lagrangeana invariante sob grupo de gauge SU(3), em vista das Eqs. (9), (20), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu(A) - m)\psi - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu}_a \\ &= \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma\cdot A^a t^a\psi - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \end{aligned} \qquad (25)$$

As equações de Euler-Lagrange são:

$$D_{\mu}^{ab}F_{b}^{\mu\nu} = - g\overline{\psi}\gamma^{\nu}t^{a}\psi \tag{26}$$

$$(i\gamma.\partial-m)\psi = - gt_{a}\gamma_{\mu}A_{a}^{\mu}\psi \tag{27}$$

Decorre da Eq. (26)

$$\partial_{\mu}F_{a}^{\mu\nu} = g(f_{abc}A_{\mu}^{c}F_{b}^{\mu\nu} - \overline{\psi}\gamma^{\nu}t_{a}\psi) \equiv gZ_{a}^{\nu} \tag{28}$$

de modo que

$$\partial_{\mu}Z_{a}{}^{\mu} \doteq 0 \tag{29}$$

Z_{a}^{μ} é a corrente de Noether correspondente à invariância global sob SU(3). O termo $f_{abc}A_{\mu}^{c}F_{b}^{\mu\nu}$ é o termo de auto-corrente de campos de Yang-Mills enquanto que $\overline{\psi}\gamma^{\mu}t_{a}\psi$ representa a corrente dinâmica. Verificamos facilmente que $D_{\mu}[\overline{\psi}\gamma^{\mu}t_{a}\psi] = 0$ mas a auto-corrente não satisfaz esta equação.

Da Eq. (26) para $\nu = 0$ temos

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{a} + g\ f_{abc}\ \vec{E}_{b}\cdot\vec{A}_{c}) = - g\psi^{\dagger}t^{a}\psi \tag{30}$$

onde $\vec{E}_{a} = (F_{a}^{10}, F_{a}^{20}, F_{a}^{30})$. Esta equação, na teoria não-abeliana, corresponde à equação de Gauss da teoria abeliana. Na formulação canônica (Sec. III,IV) esta representaria um vínculo sobre espaço de fase.

A estrutura do vácuo do campo de Gauss no presente caso, pode ser discutida como no caso abeliano. No caso de grupo SU(3) o estado de vácuo do campo de gauge é infinitamente degenerado (veja Marciano e Pagels). As Eqs. (26) são altamente não lineares, tendo autoacoplamento entre gluons. Os gluons coloridos são responsáveis pela força entre quarks e seu possí vel confinamento. A teoria de Yang-Mills também tem servido nos anos recentes para dar uma base quantitativa e matemática para a teoria fenomenológica de modelo de partons, que tem demonstrado grande sucesso para reação entre partículas elementares.

III - *FIXAÇÃO DE GAUGE E QUANTIZAÇÃO DA TEORIA DE YANG-MILLS*

Consideremos agora uma formulação Hamiltoniana para a teoria de gauge a fim de possibilitar a sua subsequente quantização. A quantização pode ser feita de modo canônico, isto é, substituindo os parênteses clássicos pelos comutadores ou anticomutadores, de uma maneira auto-consistente, entre os operadores correspondentes, ou por meio da formulação da integral funcional de Feynman sobre espaço de fase com modificações sugeridas, no caso de uma teoria de gauge, por Faddeev e Popov.

As dificuldades na quantização decorrem pelo fato de que estamos lidando com uma Lagrangeana singular. Um campo de massa nula, pela teoria geral de representações do grupo de Poincaré, só pode ter dois graus de liberdade independentes(dois estados de helicidade). Por conveniência de uma descrição covariante, introduzimos um potencial quadri-vetor A_μ que por sua vez introduziu na teoria uma invariância sob transformações de gauge. Entre outras consequências, notamos que a função de Green (propagador) da equação de movimento para A_μ não existe, pois, temos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu}\,\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\mu = - e(j^\nu + \bar{\psi}\gamma^\nu\psi) \equiv -eJ^\nu \qquad (1)$$

e $(g^{\mu\nu}\,\Box - \partial^\mu\partial^\nu)$ é um operador singular e a equação de movimento não determina A_μ univocamente. Para a quantização da teoria precisamos tornar o potencial bem definido, isto é, devemos (<u>ao menos parcialmente</u>) fixar o gauge. Por exemplo, podemos acrescentar à Lagrangeana um termo, $-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$, que quebra a simetria de gauge. A equação de movimento então toma a forma

$$- \left[g^{\mu\nu} \Box - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial^\mu\partial^\nu \right] A_\mu = + eJ^\nu \tag{2}$$

e a função de Green é solução da equação

$$-\left[g^{\mu\lambda} \Box - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial^\mu\partial^\lambda \right] G_{\lambda\nu} (x-x') = \delta(x - x')\, g^\mu_\nu \tag{3}$$

No espaço de momento escreve-se:

$$-\left[g^{\mu\lambda} k^2 - (1 - \frac{1}{\alpha})\, k^\mu k^\lambda \right] \tilde{G}_{\lambda\nu}(k) = g^\mu_\nu \tag{4}$$

Deduz-se facilmente ($\tilde{G}_{\lambda\nu} \equiv a(k^2)g_{\lambda\nu} + b(k^2)k_\lambda k_\nu$ etc) o propagador

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \alpha)\, \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{(k^2+i\epsilon)} \tag{5}$$

onde $\alpha = 1$ dá o gauge de Feynman ou Fermi, e $\alpha \to 0$ o de Landau. Entretanto, não é claro se o termo adicional acabou alterando o conteúdo físico da teoria e se o propagador acima é consistente com a unitaridade. De fato, por exemplo, no caso abeliano, como foi demonstrado por Gupta e Bleuer, devemos usar o espaço de Hilbert com métrica indefinida e os estados físicos satisfazem $\partial_\mu A^{\mu(+)}|\psi\rangle = 0$, assegurando desse modo, $\langle\psi|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = 0$

No caso não-abeliano a situação é mais complicada, devido a autointeração do campo de Yang-Mills. Temos agora,

$$-\left[g_{\mu\nu} \Box - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu_a = g\left[\bar{\psi}\gamma_\mu t_a \psi - f_{abc}(A^\nu_c F^b_{\nu\mu} - \partial^\mu(A^b_\nu A^c_\mu))\right] \tag{6}$$

Segue-se, então[*]

$$\square\, (\partial_\nu A_a^\nu) = \alpha g \partial^\mu \left[f_{abc} A_c^\nu F^b_{\nu\mu} - \bar{\psi}\gamma_\mu t_a \psi \right] \qquad (7)$$

O campo $(\partial_\nu A_a^\nu)$ não satisfaz ã equação de um campo livre e, portanto, uma condição anãloga a de Gupta-Bleuer, neste caso, tornaria a teoria inconsistente.

Um outro procedimento usado para tornar uma teoria de gauge sensível, ẽ tentar identificar e descartar de início, algumas das variáveis supérfluas. O princípio de Hamilton, então nos dã as equações de Euler-Lagrange para as variáveis restantes. Por exemplo, podemos fixar $A_a^0 = 0$, obtendo assim

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu k} = - g\bar{\psi}\gamma^k t^a \psi \qquad k = 1,2,3 \qquad (8)$$

onde $F_a^{0k} = \dot{A}_a^k$. Decorre destas equações ẽ a equação para ψ

$$(i\gamma\cdot\partial - m)\psi = - g\ t_a\ \gamma\cdot A_a \psi = - g\ t_a\ \vec{\gamma}\cdot\vec{A}_a \psi \qquad (9)$$

que

$$\partial_0 (D_\mu^{ab} F_b^{\mu 0} + g\psi^+ t^a \psi) = 0 \qquad (10)$$

No presente caso, a equação (de Gauss)

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu 0} = - g\bar{\psi}\gamma^0 t^a \psi \qquad (11)$$

serã consistente com as demais três equações. Esta equação, todavia, não decorre naturalmente. Por outro lado, se tentarmos

---

(*) No caso abeliano o lado direito ẽ nulo, pois $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$ e constantes de estruturas são nulos.

fixar $A_a^3 = 0$, obtemos somente três equações, que são as seguintes:

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu i} = - g\bar{\psi}\gamma^i t^a \psi \qquad i = 1,2 \tag{12}$$

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu 0} = - g\psi^+ t^a \psi \quad \text{(Gauss)} \tag{13}$$

Temos agora $F_a^{03} = \partial_3 A_a^0$, $F_a^{i3} = \partial_3 A_a^i$, etc. Verifica-se, entretanto, que agora a imposição da quarta equação

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu 3} = - g\bar{\psi}\gamma^3 t^a \psi \tag{14}$$

tornaria o conjunto mutualmente inconsistente, salvo, no caso da teoria abeliana, e, inclusive, no caso de campo não-abeliano livre(*) ($\psi \equiv 0$). Em outras palavras, devemos necessariamente impor $A_a^3 = 0$ na Lagrangeana antes de derivar as equações de movimento.

Discutiremos em seguida, a aplicação ao nosso caso do método sistemático de Dirac, para construir formulação Hamiltoniana para Lagrangeanas singulares.

(*) Por exemplo $\square$: $A_a^1 = A_a^2 = A_a^0 = x^3 g_a(-x^0 + x^1 + x^2) \to F_a^{03} = g_a$,

$F_a^{0i} = (\partial_0 + \partial_i)A_a^0 = 0$, $F_a^{12} = 0$, $F_a^{3i} = -g_a$, resulta
$D_\mu^{ab} F_b^{\mu i} = D_\mu^{ab} F_b^{\mu 0} = 0$ mas $D_\mu^{ab} F_b^{\mu 3} = g_a' \, (-x^0 + x' + x^2) \neq$
$\neq 0$.

$\square$ obtido em colaboração com R. Mondaini.

IV - *FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA TEORIA DE GAUGE: QUANTIZAÇÃO CANÔNICA*

IV.1 - *Formulação Canônica: Método de Dirac*

A densidade da Lagrangeana é dada por

$$L = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \overline{\psi}\,(i\gamma\cdot\partial - m)\psi + g\overline{\psi}\gamma\cdot A^a t^a \psi \tag{1}$$

e a ação

$$S = \int L(t)dt = \iint dt d^3x L \tag{2}$$

Os momentos canônicos são

$$\pi^a_\mu \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^\mu_a} = F^{0\mu}_a \tag{3}$$

$$\pi \;\equiv\; \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = i\psi^+ \tag{4}$$

onde a dinâmica é definida sobre hiperplanos t = const. bem como as variações δA^a_μ, $\delta\psi$ etc. Obtemos assim os vínculos primários (a = 1,2,..,n)

$$\pi^a_0 \;\approx\; 0 \tag{5}$$

O símbolo $\approx$ significa uma relação fraca e que deve ser usado após cálculos dos parênteses de Poisson, definido abaixo. Tomamos como Hamiltoniana preliminar

$$H' = H_c + \int \pi^a_0 \, v_a \, d^3x \tag{6}$$

onde v_a é um funcional arbitrário e H_c representa a Hamiltonia na canônica

$$H_c = \int (\pi_k \dot{A}_a^k + \pi\dot{\psi})\, d^3x - L$$

$$= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\, \vec{\pi}^a . \vec{\pi}^a + \frac{1}{4}\, F_a^{k\ell} F_{k\ell}^a \right.$$

$$\left. + \psi^\dagger \left[-i\vec{\alpha}.(\vec{\nabla} + igt_a\, \vec{A}_a) + \beta m \right] \psi + \chi_a A_a^0 \right\} \qquad (7)$$

sendo

$$\vec{A} = (A^1, A^2, A^3) \quad , \; \vec{\pi} \equiv (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

e

$$\chi_a \equiv \vec{D}^{ab}.\vec{\pi}_b - g\psi^\dagger t_a \psi \qquad (8)$$

Definem-se os parênteses de Poisson para tempos iguais:

$$\{f,g\} = \int d^3x \left\{ \frac{\delta f}{\delta A_a^\mu(x)} \frac{\delta g}{\delta \pi_\mu^a(x)} - \frac{\delta f}{\delta \pi_\mu^a(x)} \frac{\delta g}{\delta A_a^\mu(x)} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta f}{\delta \psi_{\underline{a}}(x)} \frac{\delta g}{\delta \pi_{\underline{a}}(x)} - \frac{\delta f}{\delta \pi_{\underline{a}}(x)} \frac{\delta g}{\delta \psi_{\underline{a}}(x)} \right\} \qquad (9)$$

e

$$\dot{f} \equiv \{f, H'\} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (10)$$

No segundo termo ao lado direito, são considerados fixos ψ, π, π_μ, A^μ e $\vec{x}$.

Exigimos agora que os vínculos $\pi_0^a \approx 0$ sejam válidos para qualquer tempo

$$\dot{\pi}_0^a = - \frac{\delta H'}{\delta A_a^0} \approx 0 \quad . \qquad (11)$$

obtendo assim os vínculos secundários

$$\chi_a \approx 0 \tag{12}$$

Verifica-se facilmente que $\dot{\chi}_a \approx 0$ se usarmos as equações de movimento e os vínculos já encontrados, de modo que os vínculos independentes da teoria são $\pi_0^a \approx 0$, $\chi_a \approx 0$. Obtêm-se também

$$\{\chi_a(\vec{x},t),\chi_b(\vec{y},t)\} = -\, gf_{abc}\, \chi_c\, (\vec{x},t)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \approx 0 \tag{13}$$

$$\{\chi_a,\pi_b^0\} = 0 \tag{14}$$

Sendo $\{\pi_a^0,H'\} \approx 0$, $\{\chi_a,H'\} \approx 0$, concluimos que os 2n vínculos são de primeira classe. Estes, de fato, são geradores infinitesimais das transformações de "gauge" (Eqs. II-12 e 5):

$$\begin{aligned} \delta A_a^\mu(\vec{x},t) &\equiv \{A_a^\mu(\vec{x},t),\ \varepsilon\, G(t)\} = -\,\frac{1}{g}\, D_{ab}^\mu \omega_b \\ \delta\psi &= -\, it_a\omega_a\psi \equiv \{\psi,\varepsilon G\} \end{aligned} \tag{15}$$

resultando-se

$$\begin{aligned} \varepsilon G(t) &= \int \left[\omega_a\psi^\dagger t_a\psi - \frac{1}{g}\,\pi_\mu^a\, D_{ab}^\mu\, \omega_b\right] d^3x \\ &= -\,\frac{1}{g}\int \left[\omega_b\chi_b + \pi_a^0\, D_0^{ab}\omega_b\right] d^3x \end{aligned} \tag{16}$$

caso que podemos desprezar o termo de superfície na última equação.

Podemos generalizar, de acordo com Dirac, a Hamiltoniana, acrescentando termos com todos os vínculos de primeira classe:

$$H = H_c + \int \pi_a^0\, v_a\, d^3x + \int \chi_a u_a d^3x\ , \tag{17}$$

onde u_a, v_a são funcionais arbitrários que podem somente ser fixados adicionando à teoria vínculos de "gauge", não decorrente do procedimento acima.

Entre outras equações obtemos agora:

$$
\begin{aligned}
&\dot{A}_a^0 = v_a \\
&\dot{\vec{A}}_a = \vec{\pi}_a - \vec{D}^{ab}\ (A_b^0 + u_b) \\
&\dot{\pi}_k^a = D_\ell^{ab} F_b^{k\ell} + g\ f_{abc}(A_c^0 + u_c)\, \pi_k^b - g\psi^\dagger \alpha_k t_a \psi \\
&i\dot{\psi} = \left[-i\vec{\alpha}.(\vec{\nabla}+igt_a\vec{A}_a) + \beta m\right]\psi - g\ t_a(A_a^0 + u_a)\psi \\
&\dot{\pi}_0^a \approx \chi_a \approx 0 \\
&\dot{\chi}_a \approx 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Estas equações são consistentes com as equações de Euler-Lagrange.

IV.2 - *Vínculos de "Gauge": Gauge $A_a^0 \approx 0$, $\dot{A}_a^3 \approx 0$ e Quantização*

Para fixar v^a e u^a, devemos introduzir à teoria vínculos suplementares. Iniciaremos impondo a condição

$$A_a^0 \approx 0 \qquad (\text{e} \ \ \dot{A}_a^0 \approx v_a \approx 0) \tag{19}$$

É claro que os vínculos $\chi_a \approx 0$ ainda continuam sendo de 1ª classe, mas os vínculos $\pi_0^a \approx 0$ (e $A_0^a \approx 0$) tornam-se agora os de 2ª classe, pois,

$$C_{ab}(\vec{x},\vec{y}) \equiv \{A_a^0(\vec{x},t), \pi_0^b(\vec{y},t)\} = \delta_{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \neq 0 \quad ,$$

e

$$\det\|C_{ab}\| \neq 0 \qquad (20)$$

Definimos então os parênteses de Dirac

$$\{f,g\}^* \equiv \{f,g\} - \int d^3z \int d^3z' \left[\{f, A_a^0(\vec{z},t)\} \, C_{ab}^{-1}(\vec{z},\vec{z}') \, \{\pi_0^b(\vec{z}',t), g\} \right]$$

$$= \{f,g\} + \int d^3z \left[\{f, A_0^a(z)\}\{\pi_0^a(z), g\} - \{f, \pi^a(z)\} \{A_0^a(z), g\} \right] \qquad (21)$$

onde

$$\int C_{ac}^{-1}(\vec{z},\vec{z}') \, C_{cb}(\vec{z},\vec{z}'')d^3z' = \delta_{ab}\delta^3(\vec{z}-\vec{z}'') \quad \text{etc.}$$

Então, resulta

$$\{f, A_a^0\}^* = \{f, \pi_0^a\}^* = 0 \qquad \forall f \quad , \qquad (22)$$

de modo que é legítimo usar relações fortes $A_a^0 = 0$ e $\pi_0^a = 0$, dentro dos parênteses, $\{f,g\}^*$, de Dirac.

Confirmamos também que as equações de Hamilton tomam a forma

$$\dot{f} = \{f,H\}^* + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (23)$$

pois $\{f,H\}^* \approx \{f,H\}$. Os parênteses $\{\ \}^*$ são obtidos das $\{\ \}$ suprimindo na definição destes os termos envolvendo $\delta/\delta A_0^a$. O "gauge temporal" usual é obtido se escolhermos arbitrariamente $u^a = 0$.

Podemos, entretanto, determinar u^a por processo iterativo, impondo novos vínculos suplementares, de modo que $\chi_a \approx 0$ torne-se de 2ª classe. Por exemplo,

$$A_a^3 \approx 0 \qquad (e \quad \dot{A}_a^3 \approx 0) \tag{24}$$

Temos

$$\begin{aligned} C_{ab}(\vec{x},\vec{y}) &\equiv \{\chi_a(\vec{x},t), A_b^3(\vec{y},t)\} \\ &= -\left[\delta_{ab}\partial_3^x\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + g\, f_{abc}\, A_c^3\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\right] \\ &\approx -\delta_{ab}\partial_3^x\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \end{aligned} \tag{25}$$

$$C_{ab}^{-1}\,(\vec{x},\vec{y}) = -\,\delta_{ab}\,F(\vec{x},\vec{y}) \quad , \tag{26}$$

onde

$$F(\vec{z},\vec{z}\,') = g(z^3,z'^3)\delta^2(\bar{z}-\bar{z}') \tag{27}$$

e $\bar{z}$ indica componentes z^1,z^2. A função de Green $g(\tau,\tau')$ satisfaz

$$\partial_\tau g(\tau,\tau') = -\,\partial_{\tau'} g(\tau,\tau') = \delta(\tau-\tau') \tag{28}$$

Sendo $\{A_a^0,A_a^3\} = \{\chi_a, A_0^a\} \approx 0$ podemos construir novos parênteses de Dirac por iteração. Obtemos

$$\begin{aligned} \{f,g\}^{**} = \{f,g\}^{*} + \int d^3z \int d^3z'\; F(\vec{z},\vec{z}\,')\, \Big[&\{f,\chi_a(z)\}^{*}\{A_a^3(z'),g\}^{*} \\ &+ \{f,A_a^3(z)\}^{*}\,\{\chi_a(z'),g\}^{*}\Big] \end{aligned} \tag{29}$$

e

$$\dot{f} = \{f,H\}^{**} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{30}$$

pois $\{f,H\}^{**} \approx \{f,H\}^{*} \approx \{f,H\}$. Verificamos que devido à sua construção

$$\{f,\chi_a\}^{**} = \{f,A_a^3\}^{**} = 0 \qquad \forall f \tag{31}$$

de maneira que, com relação aos $\{\ \}^{**}$, podemos usar as relações fortes $\chi_a = 0$ e $A^3_a = 0$.

Construimos assim uma formulação Hamiltoniana levando em conta todos os vínculos da teoria, sem precisar resolver as equações de vínculos. A expressão para a Hamiltoniana efetiva torna-se $(\psi \equiv 0)$

$$H = \left[H_c\right]_{A^0_a = A^3_a = \chi_a = 0}$$

$$= \int d^3x \; \{\tfrac{1}{2}\, \overline{\pi}_a \cdot \overline{\pi}_a + \tfrac{1}{2}\, \pi^a_3 \pi^a_3 + \tfrac{1}{4}\, F^a_{k\ell} F^{k\ell}_a\} \tag{32}$$

Decorre de $A^3_a \simeq 0$, $\dot{A}^3_a \simeq 0$ que

$$\pi^a_3 = \partial_3 u_a \quad . \tag{33}$$

e

$$\chi_a \equiv \partial_3 \pi^a_3 + \overline{D}^{ab} \cdot \overline{\pi}_b = 0 \qquad \text{(Gauss)} \tag{34}$$

Usando as Eqs. (33) e (34), temos

$$\partial_3 \pi^a_3 = \partial^2_3 u_a = - \overline{D}^{ab} \cdot \overline{\pi}_b$$

ou

$$u_a(\vec{x},t) = - \frac{1}{\partial^2_3}\, \overline{D}^{ab} \cdot \overline{\pi}_b = - \int K(\vec{x},\vec{y}) \overline{D}^{ab} \cdot \pi_b(\vec{y},t)\; d^3y \tag{35}$$

onde

$$K(\vec{x},\vec{y}) = G(x^3,y^3)\,\delta^2(\overline{x}-\overline{y}) \tag{36}$$

e

$$\frac{\partial^2 G(\tau,\tau')}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 G(\tau,\tau')}{\partial \tau'^2} = \delta(\tau-\tau') \tag{37}$$

Obtém-se também

$$\int \frac{1}{2}\, \pi_3^a \pi_3^a d^3x = -\frac{1}{2}\int d^3x \int d^3y \left[\overline{D}^{ab}\cdot\overline{\pi}_b(\vec{y},t)\right] K(\vec{x},\vec{y})\overline{D}^{ad}\cdot\overline{\pi}_d(\vec{x},t) \quad (38)$$

A expressão ao lado direito contém a energia de auto-interação do campo de Yang-Mills (ver o caso abeliano abaixo nas Eqs. (51), (52)).

As equações de movimento são ($i = 1,2$)

$$\begin{aligned} \dot{A}_a^i &= \pi_i^a - D_i^{ab}\, u_b \\ \dot{\pi}_i^a &= D_\ell^{ab} F_b^{i\ell} + g\, f_{abc}\, u_c \pi_i^b \end{aligned} \qquad (39)$$

Expressando π_3^a em função de $\overline{\pi},\overline{A}$ podemos obter $\dot{\pi}_3^a$. As equações para variáveis independentes A_a^i, π_i^a são consistentes com as equações de Lagrange correspondentes, se identificamos, formalmente, u_a por A_a^0 Para $\{\ \}^{**}$ obtém-se

$$\{A_a^i(\vec{x},t),\pi_j^b(\vec{y},t)\}^{**} = \delta_{ab}\delta_j^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{A_a^i, A_b^j\}^{**} = \{\pi_a^i,\pi_b^j\}^{**} = 0$$

$$\{\psi_{\underline{a}}(\vec{x},t),\pi_{\underline{b}}(\vec{y},t)\}^{**} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad \text{etc.}$$

e

$$\{\pi_3^a(x),\pi_3^b(y)\}_t^{**} = -\, g\, f_{abc}\left[\pi_3^c(\vec{x},t)-\pi_3^c(\vec{y},t)\right].F(\vec{x},\vec{y})$$

$$\{\partial_3\pi_3^a(\vec{x},t), A_b^i(\vec{y},t)\}^{**} = -\, {}^{y}D_i^{ba}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{\partial_3\pi_3^a(\vec{x},t),\pi_i^b(\vec{y},t)\}^{**} = g\, f_{abc}\, \pi_i^c(\vec{y},t)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{\partial_3\pi_3^a(\vec{x},t),\psi(\vec{y},t)\}^{**} = i\, g\, t_a\psi(\vec{x},t)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \qquad (40)$$

A quantização canônica é feita substituindo $\{\ \}^{**}$ por comutadores ou anti-comutadores

$$\{f,g\}^{**} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{f},\hat{g}\right]_{\pm} \tag{41}$$

de maneira auto-consistente.

As últimas três relações na Eq. (40) demonstram que o operador, $(\hat{\bar{D}}^{ab}.\hat{\bar{\pi}}_b - g\hat{\psi}^{\dagger}t_a\hat{\psi}) \equiv -\partial_3\hat{\pi}_3^a$, gera as transformações de gauge (residual)(*) correspondente a $\omega_a \equiv \omega_a(x^1,x^2)$. Estas transformações, todavia, são realizadas por meio de uma transformação unitária. Notamos também que, ao contrário do que acontece com o gerador $\hat{\chi}_a$, agora temos $\partial_3\hat{\pi}_3^a \neq 0$ e sobre os autoestados do Hamiltoniano $(\hat{\bar{D}}^{ab}.\bar{\pi}_b - g\hat{\psi}^{\dagger}t_a\hat{\psi})|\bar{\psi}> \neq 0$ (contrariando algumas sugestões neste sentido, constantes da recente literatura).

O <u>Gauge Coulombiano</u> será obtido se tomarmos $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}^a \approx 0$ em lugar de $A_a^3 \approx 0$. Podemos formular o "gauge" alternativamente pelo vínculo

$$\chi_a' \equiv (\Lambda_a - c_a) \approx 0 \tag{42}$$

onde $\vec{\nabla}\Lambda_a$ representa o componente longitudinal do vetor $\vec{A}_a$ e c_a é uma constante. Verificamos que

$$\{\chi_b'(\vec{x},t),\chi_a(\vec{y},t)\}^* = +\delta_{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})+g\{\Lambda_b(\vec{x},t),f_{acd}\vec{A}_d\cdot\vec{\pi}_c\}^* \tag{43}$$

e

$$\dot{\chi}_b' = \{\Lambda_b,H_c\}^* + \int d^3x\ \{\chi_b',\chi_a\}^*\ u_a \approx 0 \tag{44}$$

(*) $A_a^0 \approx 0$, $A_a^3 \approx 0$ implica que ω_a não pode depender mais de x^0 e x^3.

Sendo $\det\| \{\chi_a', \chi_b\}\|$ agora dependente de potenciais de gauge, o mesmo poderá tornar-se singular para campos suficientemente fortes, de modo que u_a tornará ambiguo. Esta é, em nosso contexto, a ambiguidade de Gribov, descoberta em 1977. No caso anterior e para a teoria abeliana no gauge em discussão, não há ambiguidade. Para a teoria abeliana ($f_{abc} \to 0$) temos ($\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$)

$$\vec{\nabla}.\vec{\pi} = \nabla^2 u \tag{45}$$

(pois $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$)

ou

$$u = \frac{1}{\nabla^2} (\vec{\nabla}.\vec{\pi}) \tag{46}$$

Segue-se então, a relação bem conhecida

$$\vec{\pi}^T = \vec{\pi} - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} (\vec{\nabla}.\vec{\pi}) = \vec{\pi} - \vec{\nabla} u = \vec{A}^T \tag{47}$$

e os parênteses de Dirac

$$\{A_T^k(x), \pi_\ell^T(y)\}^{**} = (\delta_\ell^k + \frac{\partial^k \partial_\ell}{\nabla^2}) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad \text{etc.} \tag{48}$$

Para a teoria abeliana, no gauge $A^3 = 0$, $A^0 = 0$ obtemos

$$\partial_3 \pi_3 + \partial_i \pi_i - g\psi^\dagger \psi = \vec{\nabla}.\vec{\pi} - g\psi^\dagger\psi = 0 \tag{49}$$

e

$$H = \int d^3x \, \{\frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4} F_{k\ell}F^{k\ell} + \psi^\dagger \left[-i\vec{\alpha}.(\vec{\nabla} - ie\vec{A}) + \beta m\right] \psi \} \tag{50}$$

Escrevendo

$$\vec{\pi} \equiv \vec{\pi}_T + \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} (\vec{\nabla}.\vec{\pi}) \quad ,$$

onde $\vec{\nabla}.\vec{\pi}_T = 0$,

$$\int d^3x\ \frac{1}{2}\ \vec{\pi}^2 = \int \frac{1}{2}\ \vec{\pi}_T^2\ d^3x - \frac{g^2}{2} \iint d^3x d^3y\ \psi^\dagger(x)\psi(x)\langle\vec{x}|\frac{1}{\nabla^2}|\vec{y}\rangle \cdot \cdot\ \psi^\dagger(y)\psi(y) \qquad (51)$$

O segundo termo representa a energia Coulombiana de auto-interação. A Hamiltoniana coincide assim com a forma usual no gauge de Coulomb, exceto no termo em que aparece $\psi^\dagger\vec{\alpha}.\bar{A}\psi$ sendo $\bar{A} = (A^1, A^2, 0)$. Esta discrepância é, entretanto, irrelevante,pois podemos construir uma transformação unitária (na teoria quântica) tal que(*)

$$U^{-1}\hat{\psi}^\dagger \left[-i\vec{\alpha}.(\vec{\nabla}-ie\hat{\vec{A}})\right]\hat{\psi}U = \hat{\psi}^\dagger \left[-i\vec{\alpha}.(\vec{\nabla}-ie\hat{\vec{A}}^T)\right] \hat{\psi} \qquad (52)$$

onde

$$U = \exp\left[ie \int \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\Lambda}d^3x\right] \qquad (53)$$

Deste modo, para a teoria abeliana, o gauge axial é equivalente ao gauge de Coulomb. No caso não-abeliano , tal transformação não existe, e a discussão ora exposta, deixa bem claro que não é possível admitir uma condição $(\bar{D}^{ab}.\bar{\pi}_b)|\bar{\psi}\rangle = 0$ para que as transformações de gauge residuais sejam congeladas.

(*) $U\vec{\nabla}.\hat{\vec{\pi}}U^{-1} = \vec{\nabla}.\hat{\vec{\pi}} + e\hat{\psi}^\dagger\psi$, $U\hat{\vec{\pi}}_T U^{-1} = \vec{\pi}_T$, $U\hat{\vec{A}}U^{-1} = \hat{\vec{A}}$,
$U\hat{\psi}U^{-1} = e^{-ie\hat{\Lambda}}\psi$. Ver A0022/79, A0024/79, CBPF, P.P. Srivastava.

V - *QUANTIZAÇÃO PELA INTEGRAL FUNCIONAL*

A quantização de um sistema dinâmico com vínculos pode também ser feita expressando o funcional gerador para operador de evolução (matriz S) como integral funcional de Feynman sobre espaço de fase, introduzindo as modificações na medida sugeridas por Faddeev e Popov. Em nosso caso, $A_a^0 \approx 0$, $A_a^3 \approx 0$, a mesma é dada por ($\psi \equiv 0$)

$$Z = N \int \left[d\pi_\mu^a\right] \left[dA_a^\mu\right] \det\|\{A_a^0, \pi_b^0\}\| . \det\| \{A_a^3, \chi_b\}\| .$$
$$. \ \Pi \delta(A_a^0(x)) \delta(\pi_a^0(x)) \delta(A_a^3(x)) \delta(\chi_a(x)) \ e^{iS} \tag{1}$$

onde N é um fator de normalização,

$$S = \int \left[\pi_0^a \dot{A}_0^a - \dot{\vec{\pi}}_a \cdot \vec{A}_a - \frac{1}{2} \vec{\pi}_a \cdot \vec{\pi}_a - \frac{1}{4} F_a^{k\ell} F_{k\ell}^a \right] d^4x$$

e

$$\delta(A_a^3) \delta(\chi_a) = \delta(A_a^3) \delta(\partial_3 \pi_3^a + \overline{\nabla} . \overline{\pi}_a + g \ f_{abc} \ \overline{\pi}_b . \overline{A}_c) \tag{2}$$

Ao contrário do que ocorre nos casos de gauge coulombiano ou de Feynman, os determinantes não dependem de campos em nosso gauge. Podemos assim, absorver estes fatores no fator de normalização e então integrar sobre A_a^0, π_a^0 e A_a^3 usando funcionais delta. Podemos ainda, usar a representação exponencial

$$\delta(\chi) = \int e^{-i \int \omega \chi d^4x} \left[\frac{d\omega}{2\pi}\right] , \tag{3}$$

de modo que Z toma, agora, a seguinte forma:

$$Z = N \int \left[d\pi_k^a\right]\left[dA_a^i\right]\left[\frac{d\omega_a}{2\pi}\right] e^{iS} \tag{4}$$

onde $k = 1,2,3$; $i = 1,2$; $a = 1,2,\ldots,n$ e

$$S = \int d^4x \left[\bar{\pi}_a \cdot \dot{\bar{A}}_a - \frac{1}{2}\pi_3^a\pi_3^a - \frac{1}{2}\bar{\pi}_a\cdot\bar{\pi}_a - \frac{1}{4}F_{k\ell}^a F_a^{k\ell} - \omega_a(\partial_3\pi_3^a + \bar{D}^{ab}\cdot\bar{\pi}_b)\right] \tag{5}$$

sendo $\bar{D}^{ab}\cdot\bar{\pi}_b = (\delta_{ab}\,\bar{\nabla} + g\, f_{abc}\,\bar{A}_c)$, $\bar{A}_a = (A_a^1, A_a^2)$ etc.

A integração funcional sobre π_3^a é Gaussiana e resul ta em substituição de π_3^a por $(\partial_3\omega_a)$.

A integração funcional sobre ω_a em seguida é feita usando a transformação "shift", isto é $\omega_a \to \omega_a + \omega_a^0$, escolhendo ω_a^0 de modo que o termo linear $\omega_a(\bar{D}.\bar{\pi})_a$ esteja ausente. O ter mo envolvendo a integral funcional sobre ω_a é fatorizado

$$\int \left[\frac{d\omega_a}{2\pi}\right] e^{\int d^4x (\partial_3\omega_a)^2} \tag{6}$$

e pode ser absorvido na normalização. Obtém-se, finalmente, a representação:

$$Z = N \int \left[d\pi_1^a\right]\left[d\pi_2^a\right]\left[dA_a^1\right]\left[dA_a^2\right] e^{iS}$$

com

$$S = \int d^4x \left\{\left[\bar{\pi}_a\cdot\dot{\bar{A}}_a - \frac{1}{2}\bar{\pi}_a\cdot\bar{\pi}_a - \frac{1}{4}F_{k\ell}^a F_a^{k\ell}\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^3y \; \overline{D}^{ab} \cdot \overline{\pi}_b(\vec{y},t) K(\vec{x},\vec{y}) \overline{D}^{ad} \cdot \overline{\pi}_d(\vec{x},t) \Big\} \qquad (7)$$

que corresponde à Hamiltoniana anteriormente obtida na quantização canônica. Os vínculos de gauge $A_a^0 \approx 0$, $A_a^3 \approx 0$, sobre o espaço de fase "fixam" o gauge inclusive para campos de gauge arbitrariamente fortes e nós obtemos uma descrição dos campos de Yang-Mills, para qualquer grupo de gauge, em termos somente de graus de liberdade físicos.

Após ter visto que o gauge proposto, de fato, fixa o gauge (salvo liberdade de gauge residual implementável por uma transformação unitária, ver Seção IV), podemos integrar a expressão inicial sobre A_a^0, π_a^0, usando a Eq. (6) e integrar sobre $\vec{\pi}_a$ usando a transformação de "shift"

$$\begin{aligned} \pi_3^a &\to \pi_3^a + \partial_3 \omega_a \\ \overline{\pi}_a &\to \overline{\pi}_a + (\dot{\overline{A}}_a + \overline{D}^{ab} \omega_b) \end{aligned} \qquad (8)$$

A integração funcional sobre $\vec{\pi}_a$ é fatorizada e absorvida na normalização dando a seguinte representação:

$$Z = N \int \left[dA_a^k\right] \left[dA_a^0\right] \Pi \delta(A_a^3(x)) \;\; e^{iS}$$

onde

$$S = -\frac{1}{4} \int \left[\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu\right]^2 d^4x \qquad (9)$$

e temos feita uma mudança de notação $\omega_a \to A_a^0$. Esta representação é útil para passar para representações de Z com outras condições de gauge.

VI - *MONOPOLO DE DIRAC*

VI.1 - *Dualismo Entre Eletricidade e Magnetismo*

As equações de Maxwell para campo eletromagnético

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_e \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dot{\vec{E}} = \vec{j}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \tag{1}$$

tomam a seguinte forma na notação relativística(*)

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu$$
$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

onde

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \tag{3}$$

e

$$\vec{E} = (F^{01},F^{02},F^{03}) = (-\tilde{F}^{23},-\tilde{F}^{31},-\tilde{F}^{12}) \ ,$$
$$\vec{B} = (F^{23},F^{31},F^{12}) = (\tilde{F}^{01},\tilde{F}^{02},\tilde{F}^{03}) \ ,$$
$$\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = -\,F^{\mu\nu} \tag{4}$$

Admitindo a existência de cargas magnéticas as equações tomariam uma forma simétrica

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu$$
$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \tilde{j}^\nu \tag{5}$$

(*) Adotaremos aqui a métrica $g^{\mu\nu} = (-1,+1,+1,+1)$, $\varepsilon^{0123} = +1$, etc.

onde $j^{\nu} = (\rho_e, \vec{J})$ e $\mathfrak{J}^{\nu} = (\rho_m, \vec{K})$ são densidades de quadro-correntes correspondentes às cargas elétricas e magnéticas. Para partícula puntiforme $j^{\nu} = eJ^{\nu}$ e $\mathfrak{J}^{\nu} = gJ^{\nu}$ onde(*)

$$J^0(\vec{x},t) = \delta^3(\vec{x}-\vec{r}(t)) \quad , \quad \vec{J}(\vec{x},t) = \dot{\vec{r}}\delta^3(\vec{x}-\vec{r}(t)) \quad \text{e} \quad r^0 \equiv t \quad ,$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ descreve a trajetória da partícula. A equação de movimento de uma partícula carregada ($g=0$) é dada por

$$\frac{dp^{\mu}}{dt} = e\, F^{\mu\nu}\, \dot{r}_{\nu} \equiv f^{\mu} \tag{6}$$

Na presença de carga magnética devemos, por razão da situação simétrica, generalizar a força de Lorentz na forma

$$f^{\mu} \equiv (eF^{\mu\nu} + g\tilde{F}^{\mu\nu})\, \dot{r}_{\nu} = \begin{cases} (e\vec{E} + g\vec{B}).\dot{\vec{r}} & , \\ e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + g(\vec{B} - \dot{\vec{r}} \times \vec{E}) & \end{cases} \tag{7}$$

As equações (5) e (7) são invariantes sob rotações duais (chirais)(**)

(*) Para partícula não-relativística de massa unitária o tensor de energia-momento é dado por
$T^{k0} = \dot{r}^k\delta^3(\vec{x}-\vec{r})$, $T^{k\ell} = \dot{r}^k\dot{r}^{\ell}\delta^3(\vec{x}-\vec{r})$, $T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\delta^3(\vec{x}-\vec{r})$,
$T^{0k} = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\dot{r}^k\delta^3(\vec{x}-\vec{r})$. Nota-se que $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$, $\partial_{\mu}T^{\nu\mu} = 0$.

(**) $F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\cos\theta + \tilde{F}^{\mu\nu}\,\text{sen}\theta$, $\tilde{F}'^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}\cos\theta - F^{\mu\nu}\,\text{sen}\theta$,
$j'^{\mu} = j^{\mu}\cos\theta + \mathfrak{j}^{\mu}\,\text{sen}\theta$, $\mathfrak{j}'^{\mu} = \mathfrak{j}^{\mu}\cos\theta - j^{\mu}\,\text{sen}\theta$,
$\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$. Nota-se que para $g' = 0$, $\tan\theta = (g/e)$ e para $\theta = \pi/2$,
$\vec{E}' = \vec{B}$, $\vec{B}' = -\vec{E}$.

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}\cos\theta + \vec{B}\,\text{sen}\theta \\ \vec{B}' &= \vec{B}\cos\theta - \vec{E}\,\text{sen}\theta \\ e' &= e\cos\theta + g\,\text{sen}\theta \\ g' &= g\cos\theta - e\,\text{sen}\theta \end{aligned} \tag{8}$$

Verifica-se também que o tensor de energia-momentum usual

$$\theta^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu}\, F^{\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta} \tag{9}$$

também é invariante sob estas transformações, pois,

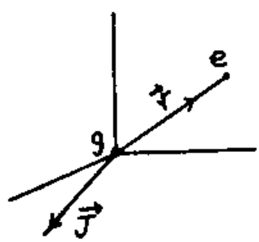
$$\theta^{00} = \frac{1}{2}\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad , \quad \theta^{0k} = (\vec{E}\times\vec{B})_k$$

e

$$\theta^{k\ell} = -\,(E_k E_\ell + B_k B_\ell) + \frac{1}{2}\,\delta_{k\ell}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad .$$

VI.2 - *Campo de um Monopolo Estático - Condição de Quantização de Dirac*

Consideremos agora o movimento de uma partícula carregada de massa m na presença de um monopolo (magnético) estático localizado na origem e que produz um campo tipo Coulombiano $\vec{B} = (\frac{g}{4\pi})\,\frac{\vec{r}}{r^3}$. Temos



$$m\ddot{\vec{r}} = e\,\dot{\vec{r}}\times\vec{B} \tag{10}$$

Sendo a força sobre a partícula não central o momento angular orbital não será conservado. Entretanto, obtemos

$$\frac{d}{dt}\,(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \frac{eg}{4\pi}\,\frac{d}{dt}\,(\frac{\vec{r}}{r}) \tag{11}$$

de modo que o momento angular total

$$\vec{J} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}}) - \frac{eg}{4\pi} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{12}$$

é conservado. É fácil demonstrar que o segundo termo representa o momento angular do campo eletromagnético. Segue-se então

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{J} = -\frac{eg}{4\pi} \tag{13}$$

A quantização do momento angular na mecânica quântica então sugere(*)

$$\left(\frac{eg}{4\pi}\right) = \frac{1}{2}\, n \qquad (n \text{ inteiro}) \tag{14}$$

que é a famosa condição de quantização de Dirac proposta em 1931. Obteremos esta condição abaixo usando argumentos mais rigorosos.

VI.3 - *Potencial Vetorial para Monopolo*

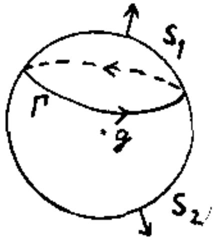
Definiremos agora um potencial vetorial A^μ para monopolo magnético. No caso estático acima temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv \left(\frac{g}{4\pi}\right) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = g\delta^3(\vec{r}) \tag{15}$$

Para $\vec{r} \neq 0$ a equação (15) é consistente com uma expressão do tipo $\vec{B} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})$. Consideremos agora $(\vec{B} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3})$

(*) M.N. Saha, Ind. Jl. Phys. 10, 145 (1936); Phys. Rev. 75, 1968 (1949).

$$g = \int_V (\vec{\nabla}.\vec{B})d^3x = \int_S \vec{B}.d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla}x\vec{A}).d\vec{S} \qquad (16)$$

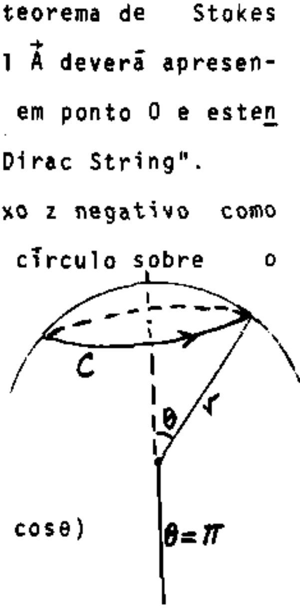


onde S é superfície de um volume esférico V em volta do monopolo. Podemos dividir S em duas partes S_1 e S_2, sendo Γ o contorno comum. Aplicando o teorema de Stokes, obtém-se para o lado direito

$$\left(\int_{S_1} + \int_{S_2}\right) (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_\Gamma A.d\vec{\ell} - \int_\Gamma \vec{A}.d\vec{\ell} = 0 \qquad (17)$$

Para impedir esta contradição entre as Eqs. (16) e (17), é necessário então que $\vec{A}$ seja singular sobre (ao menos) uma das superfícies S_1 e S_2, de modo que o teorema de Stokes seja violado. Deduz-se assim que o potencial $\vec{A}$ deverá apresentar uma cadeia de singularidades originando em ponto 0 e estendendo até ao infinito, formando o chamado "Dirac String".

Tomaremos, por simplicidade, o eixo z negativo como linha de singularidade para $\vec{A}$. Considere um círculo sobre o qual r,θ são fixos, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $\theta < \pi$. O fluxo do campo $\vec{B} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ através do C é



$$\frac{g}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta} \int_{\phi=0}^{2\pi} (\frac{\vec{r}}{r^3}).\frac{\vec{r}}{r}\, r^2 \,\text{sen}\theta d\phi d\theta = \frac{g}{4\pi} \cdot 2\pi(1 - \cos\theta)$$

enquanto que a circulação

$$\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell} = (2\pi\ r\ \mathrm{sen}\theta)\ A_\phi(r,\theta)$$

Resulta do teorema de Stokes

$$A_\phi(r,\theta) = (\tfrac{g}{4\pi})(\tfrac{1}{r})\ \frac{(1 - \cos\theta)}{\mathrm{sen}\theta} \tag{18}$$

e pela simetria axial do problema

$$\vec{A} = A_\phi(r,\theta)\vec{e}_\phi \tag{19}$$

ou usando $\vec{e}_\phi = (\vec{k} \times \vec{r})/r\ \mathrm{sen}\theta$

$$\vec{A} = + \frac{g}{4\pi}\ \frac{(\vec{k} \times \vec{r})}{r(r + \vec{k}.\vec{r})} \tag{20}$$

onde $\vec{k}$ é o vetor unitário ao longo do eixo z positivo e $r,\theta,\ \phi$ são coordenadas esféricas. Como o esperado $\vec{A}$ é singular ao longo $\theta = +\pi$. A expressão acima foi dada por Dirac, usando como modelo o campo de um solenoide infinitamente longo e raio infinitesimal estendendo ao longo o eixo de z negativo com seu polo positivo situado na origem.

Calculemos agora $\vec{\nabla} \times \vec{A}$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{g}{4\pi}\ \vec{\nabla} \times \left\{ (1 - \frac{\vec{k}.\vec{r}}{r})\ \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{[r^2 - (\vec{k}.\vec{r})^2]} \right\}$$

$$= + \frac{g}{4\pi} \left\{ - \vec{\nabla}\ (\frac{\vec{k}.\vec{r}}{r}) \times \frac{(\vec{k} \times \vec{r})}{|\vec{k} \times \vec{r}|^2} + (1 - \frac{\vec{k}.\vec{r}}{r})\vec{\nabla}\times\ (\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{|\vec{k}\times\vec{r}|^2}) \right\}$$

$$= \frac{g}{4\pi}. \left\{ (+\ \frac{\vec{r}}{r^3}\ (\vec{k}.\vec{r}) - \frac{\vec{k}}{r}) \times \frac{(\vec{k}\times\vec{r})}{|\vec{k}\times\vec{r}|^2} + (1 - \frac{\vec{k}.\vec{r}}{r})\ \vec{\nabla}\times\ (\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{|\vec{k}\times\vec{r}|^2}) \right\}$$

$$= \frac{g}{4\pi}\ (\frac{\vec{r}}{r^3}) + (1 - \frac{\vec{k}.\vec{r}}{r})\ \vec{\nabla} \times (\vec{k} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^2})$$

onde $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} \equiv \overline{\rho}$ e $\vec{k} \times \vec{r} = \vec{k} \times \vec{\rho}$. Usando

$$\vec{\nabla} \times (\vec{k} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^2}) = \vec{k}\nabla \cdot (\frac{\overline{\rho}}{\rho^2}) = \vec{k}(2\pi\delta(x)\delta(y))$$

onde $\overline{\nabla} = (\vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y)$, temos(*)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} + g\theta\,(-\vec{k}.\hat{r})\delta(x)\delta(y)\vec{k} \tag{21}$$

ou

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times A - g\theta\,(-\vec{k}.\hat{r})\delta(x)\delta(y)\vec{k} \tag{22}$$

onde $\theta(\xi) = 1$ para $\xi > 0$ e $\theta(\xi) = 0$ para $\xi < 0$. A generalização para o caso de "string" orientado ao longo da direção $\vec{n}$ é imediatamente

$$\vec{A}_{\vec{n}}(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{(\vec{n} \times \vec{r})}{r(r - \vec{n}.\vec{r})} \tag{23}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\vec{n}} + g\theta(\vec{n}.\vec{r})\;\delta^2_{\vec{n}}(\vec{r})\vec{n} \tag{24}$$

onde $\delta^2_{\vec{n}}(\vec{r})$ é função de delta de Dirac no plano perpendicular a $\vec{n}$ bem como a $\vec{r}$. Verificamos da Equação (22) (ou 24):

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 - g\left[(\vec{k}.\vec{\nabla})\theta(-\vec{k}.\vec{r})\right]\delta(x)\delta(y) = g\delta^3(\vec{r})$$

Deste modo, $\vec{B}$ é representado como rotacional de um vetor $\vec{A}_{\vec{n}}$, acrescido de um termo que não é nulo somente ao longo da linha de singularidade do potencial. Este "string" pode ser escolhido de maneira arbitrária, portanto não deveria afetar as gran-

---

(*) Ver por exemplo Wentzel, Supplement Prog.Theo.Phys. 37-38, 1966.

dezas observáveis.

VI.4 - *Formulação de Wu-Yang*

Consideremos duas potências $\vec{A}_{\vec{n}}$ e $\vec{A}_{\vec{n}'}$ tendo correspondentes linhas de singularidades $S_{\vec{n}}$ e $S_{\vec{n}'}$ nas direções $\vec{n}$ e $\vec{n}'$. Na região excluindo $S_{\vec{n}}$ e $S_{\vec{n}'}$ temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}_{\vec{n}} - \vec{A}_{\vec{n}'}) = 0 \tag{25}$$

de modo que

$$\vec{A}_{\vec{n}}(\vec{r}) - \vec{A}_{\vec{n}'}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\, \phi_{\vec{n},\vec{n}'}(\vec{r}) \tag{26}$$

Em outras palavras, os dois potenciais estão ligados através de uma transformação de "gauge". Nota-se

$$\phi_{\vec{n},\vec{n}'}(\vec{r}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{r}} d\vec{\xi}\cdot\left[\vec{A}_{\vec{n}}(\vec{\xi}) - \vec{A}_{\vec{n}'}(\vec{\xi})\right] + \text{const.} \tag{27}$$

onde a integral de linha estende-se ao longo de um caminho de um ponto $\vec{p}$ qualquer na região acima até o ponto $\vec{r}$.

Para simplificar a discussão escolhemos $\vec{n} \equiv -\vec{k}$ e $\vec{n}' \equiv + \vec{k}$. Temos

$$\vec{A}_{-\vec{k}} = \frac{g}{4\pi}\,\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{r(r+z)} = \frac{g}{4\pi}\,\frac{(1-\cos\theta)}{r\,\mathrm{sen}\theta}\;\vec{e}_\phi$$

$$\vec{A}_{+\vec{k}} = -\frac{g}{4\pi}\,\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{r(r-z)} = -\frac{g}{4\pi}\,\frac{(1+\cos\theta)}{r\,\mathrm{sen}\theta}\;\vec{e}_\phi$$

$$(\vec{A}_{-\vec{k}}-\vec{A}_{+\vec{k}}) = 2\left(\frac{g}{4\pi}\right)\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{(r^2-z^2)} = 2\left(\frac{g}{4\pi}\right)\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\right)\vec{e}_\phi = 2\left(\frac{g}{4\pi}\right)(\vec{\nabla}\phi) \tag{28}$$

pois

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Wu e Yang sugerem que na presença do monopolo o espaço divide-se em duas secções, R_a e R_b(correspondente cada monopolo), por exemplo, no caso em consideração podemos definir

$$\begin{aligned} R_a &: \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} + \delta \quad , \quad r > 0 \quad , \quad 0 \leq \phi < 2\pi \\ R_b &: \quad \frac{\pi}{2} - \delta < \theta \leq \pi \quad , \quad r > 0 \quad , \quad 0 \leq \phi < 2\pi \end{aligned} \tag{29}$$

onde $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$. O campo eletromagnético então é definido para cada região através dos potenciais

$$\begin{aligned} A_a^0 &= 0 \quad , \quad \vec{A}_a = \vec{A}_{-\vec{k}} \\ A_b^0 &= 0 \quad , \quad \vec{A}_b = \vec{A}_{+\vec{k}} \end{aligned} \tag{30}$$

$A_a{}^\mu$ e $A_b{}^\mu$ são regulares nos seus domínios de definição. Na região de interseção

$$R_{ab} : \quad \frac{\pi}{2} - \delta < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta \quad , \quad r > 0 \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{31}$$

os dois estão relacionados pela transformação de gauge (equação (28))

$$\begin{aligned} \vec{A}_a &= \vec{A}_b + \frac{i}{e} U \vec{\nabla} U^{-1} \\ U &= e^{i2e(\frac{g}{4\pi})\phi} \end{aligned} \tag{32}$$

A fim de que esta transformação seja unívoca, precisamos impor

$$U[\phi=0] = U[\phi=2\pi] \tag{33}$$

ou

$$e(\frac{g}{4\pi}) = \frac{1}{2}\, n \qquad , \text{ n inteiro}$$

obtendo assim, novamente a condição de quantização de Dirac.

O campo carregado ψ da matéria também é definido em cada região

$$\psi = \psi_a(x) \qquad\qquad x \in R_a$$

$$\psi = \psi_b(x) \qquad\qquad x \in R_b$$

Na região R_{ab}:

$$\psi_a = U\psi_b$$

As equações de movimento para o campo eletromagnético e campo ψ definidos em R_a e R_b são consistentes, pois na região de interseção R_{ab} os campos estão ligados por uma transformação de gauge.

REFERÊNCIAS

I e II

- C.N. Yang e R.Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954)
- R. Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956)
- E.S. Abers e B.W. Lee, Phys. Rep. 9c, 1 (1973)
- W. Marciano e H. Pagels, Phys. Rep. 36c, 137 (1978).

IV e V

- P.A.M. Dirac, Lectures in Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N. York, 1964.
- E.C.G. Sudarshan e N. Mukunda, Classical Dynamics; A Modern Perspective, Wiley, New York, 1974.
- A. Hanson, T. Regge e C. Teitelboim, Constrained Hamiltonian System, Academia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.
- P.P. Srivastava, Canonical and Functional Integral Quantization of Yang-Mills Theory, A0024/79, CBPF, preprint, 1979 e Canonical and Feynman Functional Integral Quantization of Electrodynamics in Temporal Gauge, A0022/79, CBPF preprint, 1979.
- R.P. Feynmann e A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integral, Mc-Graw Hill, N. York, 1965.
- L.D. Faddeev e V.N. Popov, Phys.Lett. 25B, 29 (1967).
- R. Arnowitt e S.I. Fickler, Phys. Rev. 127, 1821 (1962); R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D4, 2215 (1971); W. Konetschny and W. Kummer, Nucl. Phys. B100, 106 (1975).
- J. Goldstone e R. Jackiw, Preprint CTP-696 (1978); L.D. Faddeev, A.G. Izergin, V.Z. Korepin e M.A. Semenov-Tian-Shansky, Teo.Mat.Fiz. 38, 3 (1979).

VI

- P.A.M. Dirac, Proc.Roy.Soc. A133, 60 (1931); Phys. Rev. 74, 817 (1948); P. Goddard e Di Olive, Rep. Prog. Phys. 41, 1361 (1978); T.T. Wu e C.N. Yang, Phys. Rev. D13, 437 (1976); Phys Rev. D12, 3845 (1975); B. Zumino, Strong and Weak Interactions, Editor A. Zichichi, Academic Press 1966; D. Zwanziger, Phys. Rev. D3, 885 (1971).