DINÂMICA DE AGLOMERADOS ESTELARES
E AGLOMERADOS DE GALÁXIAS

S.J. *Codina Landaberry*

Instituto Astronômico e Geofísico

U.S.P.

ÍNDICE

Pág.

1 - *EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE UM AGLOMERADO ISOLADO* 593

1.1 - *Equações Gerais de Movimento* 593
1.2 - *Equações do Movimento Referidas ao Centro de Massas* 596
1.3 - *Identidade de Lagrange-Jacobi* 597
1.4 - *Teorema do Virial e Desigualdade de Poincaré* 598
1.5 - *Dispersão de Velocidades* 600

2 - *TEMPOS DE RELAXAÇÃO* 601

2.1 - *Tempo de Relaxação Energético* 602
2.2 - *Tempo de Relaxação Dinâmico* 605

3 - *MÉDIO CAMINHO LIVRE* 607

4 - *VISCOSIDADE* 609

5 - *TEMPO DE RELAXAÇÃO NUM AGLOMERADO* 611

6 - *MÉDIO CAMINHO LIVRE NUM AGLOMERADO* 613

7 - *TAXA DE DESINTEGRAÇÃO* 615

7.1 - *Distribuição de Massas da Desintegração* 618

8 - *AGLOMERADOS GLOBULARES - DISTRIBUIÇÃO DE MASSAS* 623

8.1 - *Teoria das Esferas Politrópicas* 624

BIBLIOGRAFIA 627

1 - *EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE UM AGLOMERADO ISOLADO*

A dinâmica de um aglomerado isolado se reduz à dinâmica de n pontos sob atração mútua, ou seja o clássico problema dos n corpos da dinâmica clássica.

1.1 - *Equações Gerais do Movimento*

Sejam duas estrelas de massas m_i e m_j com distância r_{ij} entre ambas. As componentes da força que atua sobre a estrela i, num referencial x_k, k = 1,2,3, pela presença da estrela j são:

$$- G\, m_i m_j \, \frac{x_{ki} - x_{kj}}{r_{ij}^3} \tag{1}$$

ou

$$- \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_{ki}}$$

onde

$$\Omega_{ij} = - \frac{G\, m_i m_j}{r_{ij}}$$

As componentes da força total atuante sobre i serão:

$$- \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_{ki}} \tag{2}$$

onde

$$\Omega_i = \sum_j \Omega_{ij} = - G m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}} \tag{3}$$

é a energia potencial da estrela i no sistema:

Segundo (2), as componentes da força que atua sobre a estrela i é o gradiente da função (3), diferente de estrela para estrela.

Consideremos a função:

$$\Omega = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{4}$$

estendida a todos os pares i,j.

É imediato que:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{ki}} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_{ki}} \tag{5}$$

e que Ω representa a energia potencial de todo o sistema, estando considerado na (4) os $n(n-1)/2$ pares de estrelas que se podem formar entre as n estrelas.

As equações de movimento da estrela i:

$$m_i \ddot{x}_{ki} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_{ki}} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,n \\ k=1,2,3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Sômando para todas as estrelas e levando em conta(1):

$$\sum_i m_i \ddot{x}_{ki} = \sum_i -\frac{\partial \Omega}{\partial x_{ki}} = \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} = 0 \tag{7}$$

Integrando as equações dos membros extremos:

$$\sum_i m_i \dot{x}_{ki} = a_k$$

e

$$\sum_i m_i x_{ki} = \bar{x}_k \sum_i m_i = a_k t + b_k \tag{8}$$

onde $\bar{x}_k$ são as coordenadas do centro de massa do sistema e a_k,

b_k são seis constantes de integração.

Formando as somas:

$$\sum_i (x_{ki} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{k+1,i}} - x_{k+1,i} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{k,i}}) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (-x_{ki}x_{k+1,j} + x_{kj}x_{k+1,i}) = 0$$

Por outro lado:

$$\sum_i (x_{k,i} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{k+1,i}} - x_{k+1,i} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{ki}}) = \sum_i m_i(x_{ki}\ddot{x}_{k+1,i}-x_{k+1,i}\ddot{x}_{k,i})$$

Então, integrando:

$$\sum_i m_i (x_{ki}\dot{x}_{k+1,i} - x_{k+1,i}\dot{x}_{k,i}) = c_{k-1} \qquad (9)$$

onde c_k são constantes de integração. Estas (9) são as integrais do momento angular.

Das (6):

$$\sum_i \sum_j m_i \dot{x}_{ki}\ddot{x}_{ki} = - \sum_i \sum_j \dot{x}_{ik} \frac{\partial\Omega}{\partial x_k} = - \frac{d\Omega}{dt} \qquad (10)$$

por ser Ω homogênea de grau -1 nas coordenadas (T. de Euler).

Integrando esta (10):

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_k m_i \dot{x}_{ki}^2 + \Omega = h \qquad (11)$$

que é, com h constante, a integral da energia.

As (8), (9) e (11) representam as dez integrais do movimento do sistema de partículas sob suas mútuas atrações.

1.2 - *Equações do Movimento Referidas ao Centro de Massas*

Escolhendo um sistema de referência com eixos ξ_k no qual o centro de gravidade seja fixo:

$$\xi_k = x_k - \bar{x}_k \qquad k = 1, 2, 3 \tag{12}$$

onde $\bar{x}_k$ são definidas na (8).

Então

$$\sum_i m_i \, \xi_{ki} = 0 \tag{13}$$

As correspondentes equações do movimento são:

$$m_i \, \ddot{\xi}_{ki} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_{ki}} \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,3 \\ i=1,\dots,n \end{pmatrix} \tag{14}$$

onde Ω é definido na (4) e

$$r_{ij}^{\,2} = \sum_k (\xi_{ki} - \xi_{kj})^2 \tag{15}$$

É fácil ver, utilizando (12) e (13), que as integrais do movimento se transformam em:

$$C'_{k-1} = \sum_i m_i \, (\xi_{ki} \dot{\xi}_{k+1,i}) = C_{k-1} + \frac{(a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k)}{\sum_i m_i}$$
$$h' = h - \frac{1}{2} \frac{\sum_k a_k^2}{\sum_i m_i} \tag{16}$$

Chamando T à energia cinética total dos movimentos residuais no aglomerado, será:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k m_i \dot{\xi}_{ik}^2 \qquad (17)$$

Então, com a (11):

$$T + \Omega = E = \text{constante} \qquad (18)$$

1.3 - *Identidade de Lagrange-Jacobi*

Consideremos as somas:

$$2 \sum_{ij} m_i m_j (\xi_{ki} - \xi_{kj})^2 = \sum_i \sum_j (\xi_{ki}^2 + \xi_{kj}^2 - 2\xi_{ki}\xi_{kj}) =$$

$$= \sum_i m_i \xi_{ki}^2 \cdot \sum_j m_j + \sum_i m_i \sum_j m_j \xi_{kj}^2 - 2 \sum_i m_i \xi_{ki} \cdot \sum_j m_j \xi_{kj}$$

O último termo é nulo (13) e os dois primeiros iguais:

$$2 \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2 = \sum_i m_i \sum_i \left[m_i \sum_k \xi_{ki}^2 \right] \qquad (19)$$

onde r_{ij}^2 é dada pela (15).

Aplicando $\frac{1}{\sum_i m_i} \frac{d^2}{dt^2}$ à (19)

$$\frac{1}{\sum_i m_i} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2 \right) = 2 \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \sum_k \xi_{ki} \dot{\xi}_{ki} \right] =$$

$$= 2 \sum_i m_i \sum_k \dot{\xi}_{ki}^2 + 2 \sum_i m_i \sum_k \xi_{ki} \ddot{\xi}_{ki} \qquad (20)$$

E, pela (14):

$$\frac{1}{\sum\limits_i m_i} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2 \right) = 2 \sum_i m_i \sum_k \dot{\xi}_{ki}^2 - 2 \sum_i \sum_k \xi_{ik} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_{ki}}$$

Pela (17) e pelo teorema de Euler aplicado à Ω, homogênea nas coordenadas, de grau -1:

$$\frac{1}{2 \sum\limits_i m_i} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2 \right) = 2T + \Omega \qquad (21)$$

ou, alternativamente, pela (18):

$$\frac{1}{2 \sum\limits_i m_i} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2 \right) = 2E - \Omega \qquad (22)$$

As (21) e (22) são expressões da identidade de Lagrange-Jacobi. Elas permitem estabelecer um critério da estabilidade do aglomerado.

Por definição, (4), $\Omega < 0$. Se $E > 0$, a (22) mostra que $\frac{d}{dt} \sum m_i m_j r_{ij}^2$ cresce monotonicamente com o tempo, e segundo (19):

$$\frac{d}{dt} \sum m_i m_j r_{ij}^2 \propto \sum_i m_i \sum_k \xi_{ki} \dot{\xi}_{ki}$$

Então ou as coordenadas ou as velocidades crescem acima de qualquer cota e isso supõe dissipação do sistema. A condição necessária, mas não suficiente, para que o aglomerado seja estável é que $E < 0$.

1.4 - *Teorema do Virial e Desigualdade de Poincaré*

Diz-se que um sistema é estatisticamente estacionário se

$$\frac{d}{dt} \sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2 = \text{constante} \quad . \tag{22.5}$$

Então, num sistema estatisticamente estacionário:

$$2T + \Omega = 0 \tag{23}$$

segundo (21). Essa é a expressão do teorema do Virial.

A (23) é aproximadamente aplicável também a sistemas nos quais o primeiro membro de (22.5) varie suficientemente devagar.

A função do segundo membro da (19) se identifica com o momento de inércia do sistema, J, relativo ao centro de massas:

$$J = \sum_i m_i \sum_k \xi_{ki}^2 \tag{24}$$

Se o sistema considerado estivesse em rotação rígida com velocidade angular ω:

$$2T = \sum_i m_i \sum_k \dot{\xi}_{ik}^2 + J\omega^2$$

Substituindo este valor de 2T na (23)

$$\omega^2 = -\frac{\Omega}{J} - \frac{\sum_i m_i \sum_k \dot{\xi}_{ik}^2}{J}$$

ou seja

$$\omega^2 < -\Omega/J \tag{25}$$

que é a desigualdade de Poincaré, condição necessária para que o sistema em rotação rígida seja estável.

1.5 - *Dispersão de Velocidades*

Se assumirmos que as massas das estrelas no sistema original são iguais entre si, $m_i = m$,

$$2T = n\, m\, \overline{v^2} = M\, \overline{v^2} \tag{26}$$

onde $M = \sum_i m_i$ é a massa total do sistema e $\sqrt{\overline{v^2}}$ é a velocidade meia quadrática dos movimentos residuais. Neste caso, a equação (4) se escreve, levando em conta que a somatória corresponde a $n(n-1)/2$ termos:

$$\Omega = -\frac{1}{2}\frac{Gm^2 n(n-1)}{\overline{R}} \sim -\frac{1}{2}\frac{Gm^2 n^2}{\overline{R}} = \frac{1}{2}\frac{GM^2}{\overline{R}} \tag{27}$$

onde $\overline{R}$ denota um "raio meio" do aglomerado.

A (23), junto às (26) e (27) permitem escrever:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{2}\frac{GM}{\overline{R}} \tag{27.5}$$

ou, expressando M em massas solares e $\overline{R}$ em parsecs:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = 4.63 \times 10^{-2}\sqrt{M/\overline{R}}\ \text{km/s}\ . \tag{28}$$

Tipicamente, para as Pleiades, $M \sim 300\ M_\odot$, $\overline{R} \sim 35$pc, $\sqrt{\overline{v^2}} \sim 0.43$. Para um aglomerado globular típico, $\sqrt{\overline{v^2}}$ é uma ordem de grandeza maior.

2 - *TEMPOS DE RELAXAÇÃO*

O tempo de relaxação num sistema dinâmico está vinculado ao peso relativo das colisões nas interações entre os membros do sistema. Um aglomerado pode-se imaginar em princípio, como um sistema de n corpos com um potencial gravitacional ϕ determinado pela distribuição dos n corpos. Uma estrela determinada entre as n será atuada pela aceleração $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -\mathrm{grad}\phi$ e terá uma órbita teórica, univocamente especificada em termos da posição e velocidade iniciais. Na realidade a órbita real será diferente da teórica pela influência das colisões que a estrela sofre ao longo do tempo. Devido a estas, a estrela considerada não é realmente um sistema dinâmico independente conservativo. Porém, para lapso Δt suficientemente pequeno a aceleração da estrela será dada pelo grad ϕ e existirá uma integral da energia bem definida. Interessa determinar esse intervalo de tempo, $\Delta t = T_D$, durante o qual os efeitos acumulados das sucessivas colisões não são importantes, permitindo considerar as estrelas individuais como sistemas dinâmicos conservativos e independentes. É claro que para intervalos $\Delta T \ll T_D$ os efeitos das colisões nos movimentos das estrelas podem ser ignorados. E, vice-versa, para $\Delta t > T_D$ serão as colisões as que impõem os estados de movimento. T_D mede a importância relativa das colisões nos movimentos dos membros do aglomerado.

Utilizam-se dois critérios para avaliar o tempo de relaxação:

1) Supondo que os diferentes encontros podem ser tratados como colisões binárias independentes, cada encontro, j, produzirá uma deflexão $(\pi-2\Psi_j)$ na trajetória original da estre

la. O valor de $(\pi-2\Psi_j)$ dependerá das condições iniciais que definem o encontro. Considera-se que, quando os efeitos acumulados dos diferentes encont que uma estrela sofre atingem

$$\sum \operatorname{sen}^2 2\Psi \sim 1 \tag{29}$$

a estrela ter-se-á desviado consideravelmente da sua trajetória original. Então, chama-se Tempo de Relaxação dinâmico, T_D, ao lapso no qual uma estrela típica sofre uma deflexão total da ordem de $\pi/2$ na sua direção original, como consequência das colisões com outros membros do sistema, ou seja, quando se cumpre (29).

2) Nas mesmas condições de 1), cada encontro j da estrela típica com outra do aglomerado produzirá um intercâmbio de energia ΔE_j. Considera-se que, quando os efeitos acumulados das colisões fazem

$$\sqrt{\Sigma \Delta E_j^2} \sim E \tag{30}$$

denotando com E a energia cinética inicial da estrela típica, esta deixa de ser um sistema dinâmico conservativo e independente. Chama-se:

2.1 - *Tempo de Relaxação Energético*

Tempo de Relaxação Energético, T_E, ao lapso no qual a estrela típica alterou sua energia cinética original num valor da ordem dela mesma como consequência das colisões, ou seja, quando se verifica (30).

O cômputo de T_E é feito em Chandrasekhar (pag. 54 –

— 66) a partir das contribuições dos diferentes encontros ã so ma:

$$\Sigma\Delta E^2(v_1,\theta,\phi,D,\Xi) = 2\pi N(v_1,\theta,\phi)\Delta E^2 V D dD \frac{d\Xi}{2\pi}\, dv_1 d\theta d\phi dt$$

onde:

v_1 = módulo da velocidade das estrelas de campo

θ = ângulo entre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, sendo $\mathbf{v}_2$ a velocidade da estrela considerada.

ϕ = ângulo azimutal num sistema polar com eixo segundo $\mathbf{v}_2$

D = parâmetro de impacto da colisão

Ξ = ângulo entre o plano orbital da estrela 2 considerada e o plano de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

$N(v_1,\theta,\phi)$ = número de estrelas de campo por unidade de volume, com módulo de velocidade entre v_1 e v_1+dv_1

$$V = |\mathbf{V}| = |\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1| \tag{32}$$

A integração sobre todas as variáveis, para uma distribuição gaussiana das velocidades das estrelas de campo, dá:

$$\frac{\Sigma\Delta E^2}{E^2} = \frac{32\pi\, N\, G^2\, m_1^2\, G(x_o)\, \log q\, v_2{}^2}{v_2{}^3}\, dt \tag{33}$$

onde:

N = densidade numérica de estrelas

G = constante de gravitação

m_1 = massa das estrelas de campo

q = $D_o/G(m_1+m_2)$; com $D_o \sim D_{máx} \sim$ distância média entre estrelas de campo; m_2 = massa da estrela 2; e

$$G(x_0) = \frac{1}{x_0^2}\left[\varepsilon(x_0) - x_0\varepsilon'(x_0)\right] \quad \text{com}$$

$\varepsilon(x_0)$ = função erro e

$x_0 = j.v_2$, com j = módulo da distribuição das velocidades v_1:

$$N(v_1)dv_1 = \frac{4j^3N}{\sqrt{\pi}} e^{-j^2v_1^2} v_1^2 dv_1 \qquad (34)$$

A função $G(x_0)$ é acotada:

$$G(0) = G(\infty) = 0 \quad e \quad G_{máx} = G(0.8) \sim 0.21$$

com o qual $\overline{G(x_0)} \sim 0.18$.

Identificando:

$$\frac{\Sigma\Delta E^2}{E^2} = \frac{dt}{T_E} \quad . \qquad (35)$$

$$T_E = v_2^3 \Big/ 32\pi NG^2\, m_1^2\, G(x_0)\, \mathrm{Log}\left[D_0 v_2^2 \Big/ G(m_1+m_2)\right] \qquad (36)$$

Substituindo $G(x_0) = \overline{G(x_0)}$, expressando as massas em massas solares, v_2 em unidades de 20 km/s e distâncias em parsecs:

$$T_E = 10^{13}\, v_2^3 \Big/ N\, m_1^2\, \log\left[9.3\times10^4\, D_0\, v_2^2 / (m_1+m_2)\right] \text{ anos} \qquad (37)$$

As (36) e (37) dão T_E para uma estrela particular com massa m_2 movimentando-se no campo das restantes estrelas do aglomerado, com massas m_1. É interessante conhecer o intercâmbio de energia experimentado em média por um grupo de estrelas nas suas colisões com as de campo. Para isso é necessário promediar $\Sigma\Delta E^2$ sobre as v_1 e v_2. Assumindo a distribuição maxwelliana para ambas as velocidades, com módulos $j_1 = j_2 = j$, obtêm-se:

$$\Sigma\ \overline{\Delta E^2} = (8\pi)^{1/2}\ NG^2 m_1{}^2 m_2{}^2 j^{-1}\ \log q\ \overline{v^2}\ dt$$

O tempo de relaxação médio, $\overline{T_E}$, para o grupo é o lapso requerido para que:

$$\Sigma\ \overline{\Delta E^2} \sim \overline{E^2} = (\tfrac{1}{2}\ m_2\ \overline{v_2{}^2})^2 = (\tfrac{3}{4}\ m_2/j_2)^2$$

e então:

$$\overline{T_E} = \frac{1}{16}\ (\tfrac{3}{\pi})^{1/2}(\overline{v^2})^{3/2} \Big/ NG^2 m_1{}^2\ \mathrm{Log}\ q\ \overline{v^2} \qquad (38)$$

ou, expressando as massas em massas solares, distâncias em parsecs e velocidades em unidades de 20 km/s:

$$\overline{T_E} = 1.12\times10^{13}\ (\overline{v^2})^{3/2} \Big/ Nm_1{}^2\ \log\left[9.34\times10^4\ D_0\ \overline{v^2}/(m_1+m_2)\right] \text{anos} \qquad (39)$$

No caso em que

$$j_1 \neq j_2$$

$$\overline{T_E} = 9(j_1{}^2+j_2{}^2)^{3/2} \Big/ 128\pi^{1/2}\ NG^2 m_1{}^2 j_1 j_2{}^5\ \log q\ \overline{v^2} \qquad (39.5)$$

2.2 - *Tempo de Relaxação Dinâmico*

O tempo de relaxação dinâmico, T_D, para uma estrela de massa/velocidade m_2/v_2 movimentando-se entre as estrelas de campo, m_1/v_1, pode-se estimar considerando as contribuições dos sucessivos encontros ao valor de:

$$\Sigma sen^2 2\Psi(v_1,\theta,\phi,D,\Xi) = 2\pi N(v_1,\theta,\phi) sen^2 2\Psi D dD \frac{d\Xi}{2\pi} dv_1 d\theta d\phi dt \quad .$$

Integrando sobre todas as variações e ficando com os termos mais significativos do resultado (Chandrasekhar, pág. 67/73) obtêm-se:

$$\Sigma sen^2 2\Psi = \frac{8\pi N G^2 m_1{}^2}{v_2{}^3} \quad H(x_0) \log \left[D_0 \, v_2{}^2/G(m_1+m_2)\right] dt \qquad (40)$$

onde:

$$x_0 = j v_2$$

$$H(x_0) = \frac{1}{2x_0{}^2} \left[x_0 \, \varepsilon'(x_0) + (2x_0{}^2 - 1)\varepsilon(x_0)\right]$$

A função $H(x_0)$ é tabelada por Chandrasekhar, pág. 73, é de pequena $H'(x_0)$, com $H(0.6) = 0.421$ e $H(4) = 0.969$.

Sendo por definição $T_D = \Delta t$ para $\Sigma sen^2 2\Psi = 1$,

$$T_D = dt/\Sigma sen^2 2\Psi = v_2{}^3/8\pi G^2 N \, m_1{}^2 \, H(x_0) \log \left[D_0 v_2{}^2/G(m_1+m_2)\right] \qquad (41)$$

A relaxação dos tempos de relaxação resulta:

$$T_D/T_E = 4 \, G(x_0)/H(x_0) \qquad (42)$$

que é da ordem da unidade (1.7 para $x_0 = 0.6$; 0,35 para $x_0 = 2.5$)

3 - *MÉDIO CAMINHO LIVRE*

Os conceitos envolvidos nas definições dos tempos de relaxação permitem definir um médio caminho livre no aglomerado, analogamente ao que se faz na teoria cinética dos gases, assimilando as moléculas a esferas rígidas elásticas.

O caminho percorrido pela estrela 2 no lapso dt será:

$$d\ell = v_2\ dt$$

e, na (35):

$$\Sigma\ \Delta E^2/E^2 = d\ell/v_2 T_E \tag{43}$$

onde $v_2 T_E$ é um comprimento que chamaremos médio caminho livre, $\lambda_1(v_2)$.

Então:

$$\lambda_1(v_2) = v_2 T_E = v_2{}^4 \Big/ 32\pi N G^2 m_1{}^2\ G(x_0) \mathrm{Log}\left[D_0 v_2{}^2/G(m_1+m_2)\right] \tag{44}$$

De acordo com a (43), a probabilidade de que uma estrela com velocidade v_2 percorra uma distância ℓ sem sofrer uma variação de sua energia igual a $\sqrt{\Sigma\Delta E^2}$ é:

$$\exp\left[-\ell/\lambda_1(v_2)\right] \tag{45}$$

Se a estrela considerada tem uma velocidade igual à velocidade média das estrelas do aglomerado sua $\lambda_1(v_2)$ será dada pela (44) com $v_2 = \overline{v_2}$ e $x_0 = \overline{x_0}$. Se as velocidades no sistema têm uma distribuição maxweliana:

$$\overline{v_2} = 2/\pi^{1/2} j \tag{46}$$

$$\overline{x_0} = j\ \overline{v_2} = 2/\pi^{1/2} = 1.128 \qquad (47)$$

ou seja:

$$G(\overline{x_0}) = 0.212 \quad .$$

Então:

$$\lambda_1(\overline{v_2}) = 0.0204\ \overline{v_2}^4 \Big/ NG^2 m_1{}^2 \log\left[D_0\ \overline{v_2}^2 / G(m_1+m_2)\right] \qquad (48)$$

Em unidades de massas solares, parsecs e velocidades em unidades de 20 km/s:

$$\lambda_1(\overline{v_2}) = 1.77 \times 10^8\ \overline{v_2}^4 \Big/ Nm_1{}^2 \log\left[9.31 \times 10^4 D_0 \overline{v_2}^2 / (m_1+m_2)\right] \text{parsecs} \qquad (49)$$

Pode-se definir outro m.c.ℓ., $\lambda_2(v_2)$, com base no T_D, de modo que a probabilidade de que uma estrela com velocidade v_2 percorra uma distância ℓ sem sofrer uma deflexão $\mathrm{sen}^{-1}\sqrt{\Sigma \mathrm{sen}^2 2\Psi}$ ou seja:

$$\exp\left[-\ell/\lambda_2(v_2)\right] \qquad (50)$$

Então resulta:

$$\lambda_2(v_2) = v_2 T_D$$

e

$$\lambda_2(v_2) = \lambda_1(v_2) \cdot 4\ G(x_0)/H(x_0) \qquad (51)$$

e para uma estrela com velocidade $v_2 = \overline{v_2}$,

$$\lambda_2(\overline{v_2})/\lambda_1(\overline{v_2}) = 4G(1.128)\Big/H(1.128) = 1.24 \qquad (53)$$

4 - *VISCOSIDADE*

Vimos como se pode dar um significado à expressão médio caminho livre a um aglomerado. Não é, porém, trivial a extensão ao mesmo das noções vinculadas ao m.c.ℓ., como viscosidade, difusão, que se aplicam à teoria cinética dos gases. A diferença fundamental entre um sistema gasoso e um estelar neste sentido é que nos últimos o m.c.ℓ. é muito maior que as dimensões do sistema. Então, a noção de viscosidade e parâmetros vinculados perdem seu significado. No entanto, é interessante comparar as expressões do tempo de relaxação obtidas para aglomerados com a correspondente aos gases ordinários, para tratar de achar equivalências.

O tempo de relaxação Maxwell num gás é :

$$T_E = k/NkT \tag{54}$$

onde k, k e T são o coeficiente de viscosidade, constante de Boltzman e temperatura, respectivamente.

Para um aglomerado com distribuição de velocidades (34), pode-se identificar o elemento de energia:

$$kT = m/2j^2$$

Por outro lado, para a distribuição (34):

$$\overline{v_2} = 2/\pi^{1/2} j$$

e então,

$$k = T_E \, NkT = \frac{\pi}{8} T_E \, Nm \, \overline{v_2}^2 \tag{55}$$

e substituindo $T_E \overline{v_2}^2$ com (44) e (49):

$$k = \frac{\pi}{8}\, Nm\, \lambda_1(\overline{v_2})\, \overline{v_2} \tag{56}$$

análoga à expressão normal da viscosidade em termos do m.c.ℓ. dos gases ordinários.

$$k = \frac{1}{3}\, Nm \sqrt{\overline{v_2}^{2}}\, \lambda$$

A forma explícita do k no aglomerado obtém-se substituindo $\lambda(\overline{v_2})$ na (56), com $m_1 = m_2 = m$:

$$k = 8 \times 10^{-13}\, \overline{v_2}^{5}/G^2 m \log\left[D_0 \overline{v_2}^{2}/2m\right] \tag{57}$$

Em unidades de massas solares, parsecs e 20 km/s:

$$k(\mathrm{CGS}) = 2.9 \times 10^{10}\, \overline{v_2}^{5}/m \log\left[4.66 \times 10^{4}\, D_0 \overline{v_2}^{2}/m\right]$$

A utilização deste coeficiente de viscosidade deve ser feita levando sempre em conta a diferença entre sistemas estelares e gasosos: num gás ordinário $\lambda \ll \overline{R}$, no entanto, como veremos mais abaixo, nos aglomerados de estrelas ou de galáxias temos $\lambda \gg \overline{R}$. Por exemplo, k poderia ser utilizado para determinar o número de Reynold, R, no aglomerado, mas o valor de R obtido com base ao k do sistema pode não ser representativo da turbulência do campo de velocidades.

5 - *TEMPO DE RELAXAÇÃO NUM AGLOMERADO*

Na (38) foi dado $\overline{T}_E$ para um aglomerado de n estrelas:

$$\overline{T}_E = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} (\overline{v^2})^{3/2} \Big/ NG^2m^2 \log\left[D_0\ \overline{v^2}/2Gm\right]$$

Sendo M = nm, a (27.5) nos permite escrever:

$$D_0\overline{v^2}/2Gm = nD_0/4\overline{R}$$

onde D_0, valor máximo do parâmetro de impacto pode ser considerado da ordem da distância média entre estrelas; n é o número total de estrelas; e $\overline{R}$ é um certo raio médio do sistema. Para relacionar D_0 e $\overline{R}$ consideremos as duas expressões do volume do aglomerado:

$$\frac{4}{3}\pi n\left(\frac{D_0}{2}\right)^3 \sim \frac{4}{3}\pi(\overline{R})^3$$

ou seja:

$$D_0/\overline{R} = 2/n^{1/3}$$

Então:

$$D_0\overline{v^2}/2Gm = n^{2/3}/2 \qquad (58)$$

A densidade numérica de estrelas:

$$N = n/\ \frac{4}{3}\pi(\overline{R})^3$$

e substituindo estes valores na expressão de T_E

$$\overline{T}_E = \frac{1}{16}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{n\overline{R}^3}{Gm}\right)^{1/2} \Big/ \mathrm{Log}(n/2^{3/2}) \qquad (59)$$

ou, expressando m e $\overline{R}$ em massas solares e parsecs:

$$\overline{T}_E = 8.8 \times 10^5 \left(\frac{n\overline{R}}{m}\right)^{1/2} \Big/ (\log n - 0.45) \text{ anos} \qquad (60)$$

A aplicação desta (60) a aglomerados de estrelas e de galáxias dá:

Agl.	Tipo	n	m $(M_\odot)$	R (ps)	$\overline{T}_E$ (anos)
Pleiades	Aberto	300	1	4	5×10^7
M3	Globul.	2.1×10^5	1	13	4×10^9
Virgo	de Gal.	2500	10^{11}	4×10^6	4×10^{11}
Médio	de Gal.	130	10^{11}	5×10^6	2×10^{11}

Conclui-se que em aglomerados de estrelas $\overline{T}_E$ é menor que os tempos de vida, T_v. Isto é especialmente certo para os aglomerados globulares, com $T_v \sim 10^{10}$a. Nos casos nos quais $T_v > \overline{T}_E$, pode-se esperar que a distribuição de velocidades no aglomerado seja maxweliana:

$$dN = N \frac{j^3}{\pi^{3/2}} e^{-j^2|v|^2} du dv dw \qquad (61)$$

com

$$1/j^2 = 2\overline{v^2}/3 = 4T/3M = -2\Omega/3M \qquad (62)$$

6 - *MÉDIO CAMINHO LIVRE NUM AGLOMERADO*

Para um aglomerado com distribuição de velocidades (61), o m.c.ℓ. é dado na (44):

$$\lambda(v) = v^4/32\pi NG^2m^2\ G(x_0)\ \mathrm{Log}\left[D_0 v^2/2Gm\right] \qquad (63)$$

onde $x_0 = jv$

Para estrelas com velocidade equivalente à média, $v = \bar{v}$:

$$\lambda(\bar{v}) = 0.0204\ \bar{v}^4/NG^2m^2\ \log\ \left[D_0\bar{v}^2/2Gm\right] \qquad (64)$$

Para a distribuição (61),

$$\bar{v}^2 = 8\ \overline{v^2}/3\pi \qquad (65)$$

e, pela (27.5)

$$\bar{v}^2 = \frac{4}{3\pi}\ G\ n\ m/\bar{R} \qquad (66)$$

Por outro lado, na (58) pode-se escrever, com (65):

$$D_0\ \bar{v}^2/2Gm = 4n^{2/3}/3\pi \qquad (67)$$

Substituindo (65) e (67) na (64), com $n = \frac{4}{3}\ \pi R^3 N$

$$\frac{\lambda(\bar{v})}{\bar{R}} = 0.023\ n/(\log n - 0.56) \qquad (68)$$

a qual mostra que $\lambda(\bar{v})/\bar{R}$ só depende do número de estrelas no aglomerado. Também pode-se ver que $\lambda/R \sim 1$ para $n \sim 50$ estrelas e $\lambda/R > 1$ para n maiores. Quando $n \geq 5000$ $\lambda/R >> 1$.

7 - TAXA DE DESINTEGRAÇÃO

O tempo de relaxação é essencialmente o requerido para que a distribuição de velocidades seja maxweliana. Se uma vez atingido o equilíbrio estatístico ele é alterado por qualquer causa, o sistema retornará ao mesmo num lapso $\overline{T}_E$. Se a distribuição de velocidades é maxweliana uma pequena fração do número total de estrelas corresponderá a membros com velocidades maiores que a de escape do sistema. Cada escape de estrelas supõe um afastamento do equilíbrio estatístico. Transcorrido um tempo T_E voltarão a existir estrelas com velocidades capazes de desintegrá-las do sistema, e assim sucessivamente. Este processo gera uma gradual desintegração do aglomerado, enquanto perdura.

Segundo (3), a energia potencial de uma estrela i do aglomerado é:

$$\Omega_i = - Gm_i \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{r_{ij}}$$

Para que essa estrela possa escapar do sistema, sua energia cinética deve atingir:

$$E_{\infty i} = - \Omega_i$$

Para estimar o valor médio de $E_{\infty i}$ no sistema promediamos as Ω :

$$\overline{E}_\infty = - \sum_i \Omega_i / n$$

Mas,

$$\sum_i \Omega_i = 2\Omega$$

onde Ω é a energia potencial total do aglomerado, dada na (4) e expressável em (27):

$$\overline{E_\infty} = \frac{Gm^2 n}{\overline{R}}$$

Chamando $\sqrt{\overline{v_\infty^2}}$ ao valor médio quadrático da velocidade de escape:

$$\overline{v_\infty^2} = 2\ \overline{E_\infty}/m \qquad (69)$$

e também

$$\overline{v_\infty^2} = 2Gmn/\overline{R} \qquad (70)$$

Comparando com (27.5):

$$\overline{v_\infty^2} = 4\ \overline{v^2} \qquad (71)$$

ou seja, a velocidade média quadrática de escape é duas vezes a velocidade média quadrática dos membros do sistema.

Em equilíbrio estatístico a distribuição das velocidades é dada pela (61). Chamando Q à fração do número total de estrelas com velocidades maiores que $\sqrt{\overline{v_\infty^2}}$ será:

$$Q = \frac{4j^3}{\pi^{1/2}} \int_{\sqrt{\overline{v_\infty^2}}}^{\infty} e^{-j^2 v^2}\ v^2 dv \qquad (72)$$

mas, segundo (62) e (71):

$$\overline{v_\infty^2} = 6/j^2 \qquad (73)$$

Mudando o integrando e limites de (72), com $x = jv$:

$$Q = \frac{4}{\pi^{1/2}} \int_{\sqrt{6}}^{\infty} e^{-x^2}\ x^2 dx$$

a qual, integrando dá:

$$Q = 2\ (\frac{6}{\pi})^{1/2}\ e^{-6} + 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{6}} e^{-x^2}\ dx = 0.0074 \qquad (74)$$

Assumindo que efetivamente toda estrela que atinge uma velocidade maior que $\sqrt{\overline{v_\infty^2}}$ escape do sistema, a fração de perda de estrelas no lapso Δt será:

$$\Delta n/n \sim -0.0074\ \Delta t/\overline{T}_E \qquad (75)$$

Para aglomerados galácticos com pequenos $\overline{T}_E$ a (75) dá taxas de desintegração relativamente grandes.

Substituindo $\overline{T}_E$ pelo seu valor na (59):

$$\frac{dn}{dt} = -\ 16\ (\frac{2}{3\pi})^{1/2}\ Q(\frac{Gmn}{\overline{R}^3})^{1/2}\ \text{Log}\left[n/2^{3/2}\right] \qquad (76)$$

ou, em unidades de massas solares, parsecs e anos:

$$\frac{dn}{dt} = -\ 8.4 \times 10^{-9}\ (mn/\overline{R}^3)^{1/2}(\log n - 0.45) \qquad (77)$$

Esta taxa de desintegração corresponde a um valor má ximo possível porque foi calculada assumindo que toda estrela com velocidade maior que $\sqrt{\overline{v_\infty^2}}$ escapa do aglomerado. Isso se ria certo se ao longo de um caminho λ a variação da energia da estrela por colisões fosse desprezível. Mas, mesmo para estrelas de altas velocidades, $v > \sqrt{\overline{v_\infty^2}}$, que terão um m.c.$\ell$. bem maior que $\overline{R}$, existe uma alta probabilidade de perder uma fração considerável de sua energia cinética por encontros com outras estrelas na sua trajetória $\ell < \lambda$. No entanto, (77) é válida como cota da taxa de perda e certa em ordem de grandeza.

7.1 - *Distribuição de Massas da Desintegração*

O resultado precedente vale para massas iguais de todas as estrelas. Podemos supor que essa massa única é igual à média da distribuição massiva do aglomerado, $\overline{m}$. A (75) pode então ser escrita:

$$\frac{1}{n(\overline{m})}\frac{dn(\overline{m})}{dt} = -\frac{Q(\overline{m})}{\overline{T}_E(\overline{m})} \qquad (78)$$

onde:

$$Q(\overline{m}) = \frac{4\overline{J}^3}{\pi^{1/2}}\int_{\sqrt{\overline{v_\infty^2}}}^{\infty} e^{-\overline{J}^2v^2}\, v^2 dv \qquad (79)$$

onde $\overline{J}$ é um módulo médio dos j.

Suponhamos que existe no aglomerado um grupo parcial de estrelas com massa $m_2 \neq \overline{m}$, cujo número $n(m_2) \ll n(\overline{m})$. Podemos então ignorar os efeitos das colisões mútuas entre estrelas de massa m_2 e só levar em conta suas interações com as restantes. Nestas condições, segundo (39.5):

$$\overline{T}_E(m_2) = 9(\overline{J}^2+j_2{}^2)^{3/2} \Big/ 128\pi^{1/2}\, NG^2\, \overline{m}^2\, \overline{J} j_2{}^5 \log q\overline{v^2} \qquad (80)$$

resultando:

$$\overline{T}_E(m_2)\Big/\overline{T}_E(\overline{m}) = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overline{J}^2}{j_2^2}\right)\right]^{3/2}\frac{\overline{J}^2}{j_2^2} \qquad (81)$$

Em equilíbrio estatístico:

$$\bar{m}\,\overline{v^2} = m_2\,\overline{v_2^2} \qquad (82)$$

ou seja:

$$\bar{m}/m_2 = \bar{j}^2/j_2^2$$

Então:

$$I_{TE} = \bar{T}_E(m_2)/\bar{T}_E(\bar{m}) = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{m}}{m_2}\right)\right]^{3/2} \frac{\bar{m}}{m_2} \qquad (83)$$

Para estrelas com massas $m_2 < \bar{m}$, $I_{TE} > 1$. Por exemplo, para $\bar{m}/4 = m_2$, $I_{TE} \sim 16$. O acréscimo de T_E para estrelas de pequena massa reduz (75) à fração de estrelas perdidas por escape; porém as estrelas menos massivas terão maiores velocidades (82) e serão as mais propícias para atingir a $\sqrt{\overline{v_\infty^2}}$. Os dois efeitos são contrários e para conhecer o resultado conjunto de ambos temos que analisar a função : $Q(m_2)/I_{TE}$.

A fração do número total de estrelas com massa m_2 que tem $v_2 > \sqrt{\overline{v_\infty^2}}$ é:

$$Q(m_2) = \frac{4j_2^3}{\pi^{1/2}} \int_{\sqrt{\overline{v_\infty^2}}}^{\infty} e^{-j_2 v_2^2}\, v_2^2 dv_2$$

Segundo (70) e (82):

$$\overline{v_\infty^2} = 4\,\overline{v^2} = 4m_2\overline{v_2^2} \,/\, m_1 = 6m_2/m_1 j_2^2$$

Fazendo $x = j_2 v_2$, resulta:

$$Q(m_2) = \frac{4}{\pi^{1/2}} \int_{\sqrt{6m_2/\overline{m}}}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx$$

a qual, integrada, e anotando $m_2/\overline{m} = \gamma$ dá:

$$Q(m_2) = 2(6\gamma/\pi)^{1/2} e^{-6\gamma} + 1 - \phi(\sqrt{6\gamma}) \tag{84}$$

onde ϕ denota a função erro.

Das eqs. (83) e (84) obtemos a fração do número de estrelas de massa m_2 que escapam do aglomerado no tempo $\overline{T}_E(\overline{m})$:

$$Q(m_2)/I_{TE}(m_2) = \gamma\left[2(6\gamma/\pi)^{1/2} e^{-6\gamma} + 1 - \phi(\sqrt{6\gamma})\right] \Big/ \frac{1}{2}(1 + 1/\gamma)^{\frac{3}{2}} \tag{85}$$

A (85) permite comparar a tendência à desintegração das estrelas com massas $m_2 \neq m$. O resultado, para alguns valores de $\gamma = m_2/\overline{m}$ é:

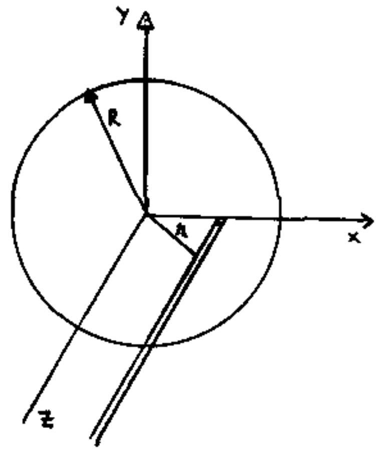
γ	Q/I_{TE}
0.05	0.0013
0.10	0.0058
0.20	0.0190
0.30	0.0290
0.40	0.0323
0.50	0.0304
0.70	0.0201
0.90	0.0107
1.0	0.0074
1.1	0.0050
1.2	0.0033
1.3	0.0021
1.5	0.0009

Pode-se ver na tabela que as estrelas com massa m $\bar{m}$ têm menor taxa de escape que as de massa média. O mesmo acontece com as de massa $m \leq \bar{m}/10$. A dissipação mais intensa se faz através de estrelas com massa $m \sim 0.4\ \bar{m}$, com taxa de perda de quatro vezes a de $\bar{m}$. Estas tendências levariam a uma distribuição de massas bimodal no aglomerado.

8 - *AGLOMERADOS GLOBULARES - DISTRIBUIÇÃO DE MASSAS*

Nestes aglomerados a distribuição de estrelas no espaço é de simetria central. As contagens de estrelas no plano tangente à esfera celeste permitem determinar a densidade superficial em estrelas por segundo quadrado; e, conhecida a distância ao aglomerado, a densidade superficial em estrelas por unidade de área projetada.

Sejam x, as coordenadas de cada ponto no plano tangente e Z a direção ao observador. Chamamos F(x) à dita densidade superficial ao longo do raio x = 0, e consideramos a z de cada ponto do cilindro segundo Z que passa por x:



$$Z = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$dZ = rdr \Big/ \sqrt{r^2 - x^2}$$

Seja N(r) a densidade volumétrica de estrelas, função exclusiva de r por simetria.

$$N(r)dZ = N(r)rdr \Big/ \sqrt{r^2-x^2}$$

A F(x) será o duplo da integral de N(r)dZ entre os limites r=x e r = R. Então:

$$F(x) = 2\int_x^R N(r)rdr \Big/ \sqrt{r^2-x^2}$$

que integrada por partes dá:

$$F(x) = 2\left[N(r)\sqrt{r^2-x^2}\right]_x^R - 2\int_x^R \frac{dN(r)}{dr}\sqrt{r^2-x^2}\;dr$$

Como o primeiro termo é nulo:

$$F(x) = 2\int_R^x \frac{dN(r)}{dr}\sqrt{r^2-x^2}\;dr \qquad (86)$$

Esta equação vincula F(x), conhecida pelos conteios de estrelas ou galáxias nas placas, à N(r). Ela é uma equação integral de Volterra de primeira espécie.

Como resultado das contagens de estrelas em diversos aglomerados globulares, conclue-se que a solução frequente de (86) é do tipo:

$$N(r) = A/(a^2+r^2)^{5/2} \qquad (87)$$

com a e A constantes dependentes do aglomerado particular.

8.1 - *Teoria das Esferas Politrópicas*

Numa assembléia de partículas cuja distribuição de velocidades seja esfericamente simétrica vale a equação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{1}{N}\frac{dP}{dr} = \frac{d\phi}{dr} \qquad (88)$$

onde N é a densidade volumétrica das partículas, P a pressão e ϕ o potencial. No caso de simetria esférica

$$d\phi/dr = -\,GM(r)/r^2 \qquad (89)$$

onde

$$M(r) = 4\pi m \int_0^r N(r)\, r^2 dr \qquad (90)$$

Substituindo (89) em (88) e derivando:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{N}\frac{dp}{dr}\right) = -\, 4\pi G m N r^2 \qquad (91)$$

Se a esfera considerada está constituida por gás com temperatura constante no volume, a pressão será função exclusiva de r:

$$P = kN^{\gamma} \qquad (92)$$

onde k e γ são constantes. Um meio onde se cumpre (92) é chamado politrópico.

Fazendo

$$\gamma = 1 + 1/\eta \qquad (93)$$

onde η é chamado índice politrópico do meio, e

$$N = \beta\, \theta^{n} \qquad (94)$$

com β constante, resulta para (92):

$$p = k\, \beta^{(n+1)/\eta}\, \theta^{n+1} \qquad (95)$$

Passando a um raio adimensionado:

$$\xi = r/\alpha$$

onde α é uma constante com dimensão de comprimento, a (91) se escreve:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) + \frac{4\pi G\, M\alpha^2}{k(n+1)\beta^{(1-n)/n}}\ \theta^n = 0 \tag{96}$$

Escolhendo a constante:

$$\alpha^2 = k\ (n+1)\beta^{(1-n)/n} \Big/ 4\pi G m \tag{97}$$

a (96) toma a forma

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0 \tag{98}$$

que é chamada equação de Emdem.

As condições de contorno saem de considerar β igual à densidade central e a continuidade no centro:

$$d\theta/d\xi = 0 \quad e \quad \theta = 1 \quad para \quad \xi = 0 \tag{99}$$

A equação de Emdem tem sido estudada extensamente.No caso $n = 5$ sua solução (de Schuster) é:

$$\theta = 1/(1 + \xi^2/3)^{1/2} \tag{100}$$

Esta solução se identifica com a (87):

$$N = \beta\theta^5 = 1/(1 + \xi^2/3)^{5/2} \tag{101}$$

com $\beta = 1$, $A = a = \sqrt{3}$.

Um aglomerado globular típico seria uma esfera politrópica de índice $n = 5$ com $p \propto N^{6/5}$.

A correspondência mencionada se cumpre em muitos casos com suficiente aproximação para aglomerados globulares de estrelas e de galáxias.

BIBLIOGRAFIA

As referências fundamentais para a parte introdutó - ria são:

R.W. Michie - 1964 - Ann. Rev. Astron. and Astrophys. Vol. 2 , pag 49/72.

N.A. Bahcall - 1977 - Ann. Rev. Astron. and Astrophys. Vol.15, pag 505/540.

A para as partes 1/7 são:

S. Chandrasekhar - 1942 - "Principles of Stellar Dynamics" , Chap. 2 e 5, Un. Chicago Press.

K.F. Ogorodnikov - 1965 - "Dynamics of Stellar Systems", Pergamon Press.

F. Zwicky - 1957 - "Morphological Astronomy", Springer-Verlag.