INTRODUÇÃO À FORMULAÇÃO DE ALGUMAS TEORIAS DO CAMPO UNITÁRIO

Colber G. Oliveira

Departamento de Física - Universidade de Brasília

ÍNDICE

Introdução

Nessas notas analisamos algumas formulações unitárias dos campos de gravitação e de eletromagnetismo, seguindo a linha clássica adotada por Einstein e diversos outros físicos entre 1918 e 1960. Tratamos também de eventuais extensões que poderiam englobar o campo de Yang-Mills e que são contribuições recentes. São tratadas somente algumas teorias unitárias, que nos parecem serem mais relevantes e que são até a data presente assunto de pesquisas nessa área. Dessa forma, excluimos dessa nota as teorias pentadimensionais e hexadimensionais por acreditarmos que elas são um tratamento altamente abstrato e que não conduzem a resultados relevantes. O tratamento matemático associado a teorias unitárias em quatro dimensões é a geometria Não-Riemanniana em variedades dotadas de curvaturas de translação (torsão), curvaturas de rotação e curvaturas de homotetia. Tal geometria é bem mais complexa que a geometria de Riemann, de forma que para uma boa compreensão do assunto é necessário um estudo cuidadoso dessa formulação geométrica.

Uma confrontação mais direta dessas teorias clássicas com outros domínios da física, marcantemente com a física de partículas e campos, exigiria primeiramente que essas teorias fossem quantizáveis, o que não é considerado nessas notas. A não consideração de quantização dessas teorias prende-se ao fato que elas foram essencialmente construídas antes, ou durante, do aparecimento da teoria quântica, e em grande parte se guiaram na filosofia de Einstein que o Universo deveria globalmente seguir as leis clássicas da física. Por outro lado, recentemente tem havido grande interesse na unificação das forças elementa -

res na natureza, o que traz de novo em cena a importância de um relacionamento dessas propriedades com o campo de gravitação que na escala de interações é um acoplamento super-fraco.

Para se chegar a esse relacionamento seria necessário que se quantizasse a formulação unitária do campo gravitacional com o qual se deseje trabalhar. Recentemente tem havido discussões e referências a esse problema, o qual evidentemente é bastante complexo. Essas notas não se destinam a iniciantes em relatividade, para que elas sejam compreensíveis é necessário que se possua um conhecimento razoável da teoria da relatividade geral.

Colber G. Oliveira

Departamento de Física
Universidade de Brasília
Outubro de 1979.

1 - *CONCEITOS INICIAIS*

Seja um vetor A com comprimento $\ell^2 = g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$. Definimos a diferencial absoluta de suas componentes como $DA^{\mu} = dA^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma}dy^{\rho}$, ou seja:

$$DA^{\mu} = A^{\mu}{}_{;\alpha}\, dy^{\alpha}$$

similarmente,

$$DB_{\mu} = dB_{\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\, B_{\sigma}\, dy^{\rho}$$

$$Dg_{\mu\rho} = dg_{\mu\rho} - (\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}g_{\sigma\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda}g_{\mu\sigma})dy^{\lambda} \tag{C-1}$$

Suponha que o vetor A descreve por transporte paralelo um contorno fechado infinitesimal. Entre dois pontos muito próximos o comprimento desse vetor sofrerá a variação

$$2\ell d\ell = (dg_{\mu\nu})A^{\mu}A^{\nu} + g_{\mu\nu}dA^{\mu}{}_{\|}A^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\mu}dA^{\nu}{}_{\|}$$

$$= (dg_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\, dy^{\rho}g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}dy^{\rho}g_{\mu\lambda})A^{\mu}A^{\nu}$$

pois

$$dA^{\mu}{}_{\|} = -\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\, A^{\sigma}\, dy^{\rho}$$

Por (C-1) vem então que

$$2\ell d\ell = (Dg_{\mu\nu})\, A^{\mu}A^{\nu} \tag{C-2}$$

Teremos portanto:

1) Se a condição $Dg_{\mu\nu} = 0$ for válida, o comprimento de um vetor não variará quando ele é transportado paralelamente a si próprio. Torna-se então possível definir uma <u>unidade</u> <u>absoluta</u>

de comprimento válida em todos os pontos da variedade. O comprimento assim fixado independerá do caminho seguido entre um ponto e outro, infinitamente vizinho, por transporte paralelo.

2) Se $Dg_{\mu\nu} \neq 0$ já não existirá uma unidade absoluta de comprimento.

A variação do comprimento do vetor transportado paralelamente a si mesmo ao longo de um contorno fechado infinitamente pequeno é dada por

$$\oint d\ell = \frac{1}{\ell} \iint R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda}\, A_{\mu}\, A^{\nu}\, ds^{\rho\lambda} = - \frac{1}{\ell} \iint \Omega^{\sigma}{}_{\mu} A^{\mu} A_{\sigma} \qquad \text{(C-3)}$$

onde $ds^{\rho\lambda}$ é o elemento de área do paralelogramo de lados dy, δy: $ds^{\rho\lambda} = dy^{\rho}\delta y^{\lambda} - \delta y^{\rho} dy^{\lambda}$, e onde

$$\Omega^{\sigma}{}_{\mu} := - R^{\sigma}{}_{\mu\rho\lambda}\, ds^{\rho\lambda} \qquad \text{(C-4)}$$

Tal curvatura é dita ser de rotação (ao longo do contorno fechado).

2 - *CURVATURA DE HOMOTETIA*

Se a condição $D_\rho g_{\mu\nu} = 0$ não for verificada, a conexão não será mais idêntica em cada ponto aos símbolos de Christoffel. Vamos aqui calcular a expressão de uma conexão geral $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ proveniente de $dA^\mu{}_{\|}$, em função dos símbolos de Christoffel e das quantidades $K_{\mu\nu,\rho}$ dadas por

$$K_{\mu\nu,\rho} \equiv D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} \tag{C-5}$$

fazendo

$$\Gamma_{\mu\rho,\sigma} = g_{\sigma\nu}\Gamma^\nu_{\mu\rho}$$

vem

$$K_{\mu\nu,\rho} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho,\nu} - \Gamma_{\nu\rho,\mu} \tag{C-6}$$

permutando os índices (μ,ρ) e (ν,ρ) obteremos as relações:

$$K_{\rho\nu,\mu} = \partial_\mu g_{\rho\nu} - \Gamma_{\rho\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\mu,\rho} \tag{C-7}$$

$$K_{\mu\rho,\nu} = \partial_\nu g_{\mu\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\rho\nu,\mu} \tag{C-8}$$

Tomando (C-7)+(C-8)-(C-6) tem-se, observando-se que aqui $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ e consequentemente $K_{\mu\nu,\rho}$ de (C-5) é simétrico em (μ,ν),

$$K_{\rho\nu,\mu} + K_{\mu\rho,\nu} - K_{\mu\nu,\rho} = \partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu,\nu} -$$
$$- \Gamma_{\nu\mu,\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\rho\nu,\mu} + \Gamma_{\mu\rho,\nu} + \Gamma_{\nu\rho,\mu} \tag{C-9}$$

use que

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) = [\mu\nu,\rho] = [\nu\mu,\rho]$$

$$\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\right), \quad \Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\right)$$

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\nu}}$$

temos em (C-9)

$$2[\mu\nu,\rho] + 2\,\Gamma_{\underset{\vee}{\mu\rho},\nu} + 2\,\Gamma_{\underset{\vee}{\nu\rho},\mu} - 2\,\Gamma_{\underline{\nu\mu},\rho} = K_{\rho\nu,\mu} + K_{\mu\rho,\nu} - K_{\mu\nu,\rho}$$

daí vem por cálculos simples que

$$\Gamma_{\mu\nu,\rho} = [\mu\nu,\rho] + \Gamma_{\underset{\vee}{\mu\rho},\nu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\nu\rho},\mu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} - \frac{1}{2}\left(K_{\mu\rho,\nu} + K_{\nu\rho,\mu} - K_{\mu\nu,\rho}\right) \tag{C-10}$$

daí, erguendo o índice ρ:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} + g^{\rho\sigma}\left(\Gamma_{\underset{\vee}{\mu\sigma},\nu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma}\right) - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(K_{\mu\sigma,\nu} + K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\mu\nu,\sigma}\right) \tag{C-11}$$

Teremos:

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \left\{{\mu \atop \mu\nu}\right\} + g^{\mu\sigma}\left(\Gamma_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma}\right) - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(K_{\mu\sigma,\nu} + K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\mu\nu,\sigma}\right)$$

observe que

$$\begin{cases} \Gamma_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma} = \Gamma_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu} - \Gamma_{\underset{\vee}{\nu\mu},\sigma} = g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}} - g_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\mu}} \\ K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\mu\nu,\sigma} = K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\nu\mu,\sigma} \end{cases}$$

são ambos antissimétricos em (μ,σ) logo sua contração com $g^{\mu\sigma}$ se anula. Daí

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \{^{\mu}_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}K_{\mu\sigma,\nu} = \partial_{\nu} \log \sqrt{g} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}K_{\mu\sigma,\nu} \qquad \text{(C-12)}$$

O tensor $\Omega^{\sigma}{}_{\mu}$ está associado à curvatura total da variedade. Sua contração é

$$\Omega = \Omega^{\mu}{}_{\mu} = - R^{\mu}{}_{\mu\rho\lambda}\, ds^{\rho\lambda} \qquad \text{(C-13)}$$

Nessa expressão $R^{\mu}{}_{\sigma\rho\lambda}$ é o tensor de Riemann afim

$$R^{\sigma}{}_{\nu\rho\lambda} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\tau\lambda} - \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\tau\rho}$$

sua contração não faz, nesse caso, intervir diretamente a mé - trica, mas:

$$\delta^{\nu}{}_{\sigma}\, R^{\sigma}{}_{\nu\rho\lambda} = R^{\nu}{}_{\nu\rho\lambda}$$

Tem-se por cálculo simples:

$$R^{\mu}{}_{\mu\rho\lambda} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} \qquad \text{(C-14)}$$

Essa expressão se anula se $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ é a conexão métrica de Christoffel.

Seja

$$K_{\mu\nu\rho\lambda} = \partial_{\rho}K_{\mu\nu,\lambda} - \partial_{\lambda}K_{\mu\nu,\rho} + 2\Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}K_{\tau\nu,\rho} - 2\Gamma^{\tau}_{\mu\rho}K_{\tau\nu,\lambda} \qquad \text{(C-15)}$$

Prova-se então que

$$\Omega = - R^{\mu}{}_{\mu\rho\lambda}\, ds^{\rho\lambda} = - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}K_{\mu\nu\rho\lambda}ds^{\rho\lambda} \qquad \text{(C-16)}$$

Note que $K_{\mu\nu,\lambda} = K_{\nu\mu,\lambda}$ daí $K_{\mu\nu\rho\lambda}$ tem uma parte simétrica em (μ,ν) — os termos em (C-15) em ∂. Daí exista a contração indicada no último termo de (C-16).

....

<u>Demonstração de (C-16)</u>

De (C-5) vem:

$$g^{\mu\nu}K_{\mu\nu,\rho} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}g^{\mu\nu}g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}g^{\mu\nu}g_{\mu\sigma}$$

$$\therefore \quad g^{\mu\nu}K_{\mu\nu,\rho} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} - 2\Gamma^\sigma_{\sigma\rho}$$

logo,

$$\Gamma^\sigma_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}K_{\mu\nu,\rho}$$

daí

$$\partial_\lambda\Gamma^\sigma_{\sigma\rho} - \partial_\rho\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\,\partial_\lambda(g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\,\partial_\rho\,(g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

$$- \frac{1}{2}\,\partial_\lambda\,(g^{\mu\nu}K_{\mu\nu,\rho}) + \frac{1}{2}\,\partial_\rho\,(g^{\mu\nu}K_{\mu\nu,\lambda})$$

Para os dois primeiros termos teremos:

$$\partial_\lambda(g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}) - \partial_\rho(g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu}) = \partial_\lambda\, g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} + \cancel{g^{\mu\nu}\partial^2_{\rho\lambda}g_{\mu\nu}}$$

$$- \partial_\rho g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \cancel{g^{\mu\nu}\partial^2_{\rho\lambda}g_{\mu\nu}} = \partial_\lambda\, g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\rho g^{\mu\nu}\cdot\partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

essa diferença se anula, desde que

$$g^{\mu\nu}_{,\lambda} = -\, g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta,\lambda}$$

$$\therefore \quad g^{\mu\nu}_{,\lambda}\, g_{\mu\nu,\rho} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta,\lambda} g_{\mu\nu,\rho}$$

$$= g_{\alpha\beta,\lambda} g^{\alpha\beta}_{,\rho}$$

$$\therefore \quad g^{\mu\nu}_{,\lambda} g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\nu,\lambda} g^{\mu\nu}_{,\rho} = 0$$

Logo,

$$\partial_\lambda\, \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} = - \frac{1}{2}\, \partial_\lambda (g^{\mu\nu} K_{\mu\nu,\rho}) + \frac{1}{2}\, \partial_\rho (g^{\mu\nu} K_{\mu\nu,\lambda})$$

$$\therefore \quad \partial_\lambda \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\rho K_{\mu\nu,\lambda} - \partial_\lambda\, K_{\mu\nu,\rho}) -$$

$$- \frac{1}{2}\, \partial_\lambda\, g^{\mu\nu} K_{\mu\nu,\rho} + \frac{1}{2}\, \partial_\rho\, g^{\mu\nu} \cdot K_{\mu\nu,\lambda}$$

Novamente temos:

$$\partial_\lambda\, g^{\mu\nu} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\lambda\, g_{\alpha\beta}$$

(por (C-5) isso dará

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\, (\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} g_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\beta\lambda} g_{\alpha\sigma} + K_{\alpha\beta,\lambda})$$

dessa equação podemos escrever para a relação anterior:

$$\partial_\lambda \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} (\partial_\rho K_{\mu\nu,\lambda} - \partial_\lambda K_{\mu\nu,\rho}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \cdot (\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} g_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\beta\lambda} g_{\alpha\sigma} + K_{\alpha\beta,\lambda})\, K_{\mu\nu,\rho} -$$

$$- \frac{1}{2}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\, (\Gamma^\sigma_{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\beta\rho} g_{\alpha\sigma} + K_{\alpha\beta,\rho})\, K_{\mu\nu,\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_\rho K_{\mu\nu,\lambda} - \partial_\lambda K_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} K_{\mu\alpha,\rho} +$$

$$+ \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}K_{\beta\nu,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}K_{\mu\alpha,\lambda} - \Gamma^{\beta}_{\mu\rho}K_{\beta\nu,\lambda}) = R^{\mu}{}_{\mu\rho\lambda}$$

onde usamos (C-14) na última igualdade. Como (μ,ν) são índices de soma isso pode ser escrito como

$$= \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, (\partial_{\rho}K_{\mu\nu,\lambda} - \partial_{\lambda}K_{\mu\nu,\rho} + 2\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}K_{\mu\alpha,\rho} - 2\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}K_{\mu\alpha,\lambda})$$

pois a métrica é simétrica.

Daí,

$$R^{\mu}{}_{\mu\rho\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, K_{\mu\nu\rho\lambda}$$

Observar que na geometria de Riemann métrica $K_{\mu\nu,\rho} = 0$ em toda variedade, e então por (C-15)

$$K_{\mu\nu\rho\lambda} \rightarrow 0$$

em toda variedade, e portanto $R^{\mu}{}_{\mu\rho\lambda} \rightarrow 0$.

Portanto (C-16) está provada.

....

O invariante Ω de (C-16) é dito <u>curvatura de homotetia</u> da variedade (E. Cartan - Les espaces a connexion affine et la théorie de la Relativité Généralisée - Ann. Éc. Norm.sup., t.40, 1923), também denominada <u>curvatura segmentar</u>.

Se a curvatura total $\Omega^{\nu}{}_{\mu} \rightarrow 0$ então $\Omega \rightarrow 0$, a recíproca obviamente não se aplica: $\Omega = 0$ não implica em $\Omega^{\nu}{}_{\mu} = 0$. De fato, um espaço de Riemann é desse tipo ($\Omega = 0$).

3 - *INTRODUÇÃO À TEORIA DE WEYL*

Na teoria de Weyl o tensor $K_{\mu\nu,\rho}$ assume a forma

$$K_{\mu\nu,\rho} = - g_{\mu\nu}\, \phi_\rho \qquad \text{(W-1)}$$

A conexão $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ terá portanto o valor (por (C-11))

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{{}^{\rho}_{\mu\nu}\} + g^{\rho\sigma}\,(\Gamma_{\underset{\vee}{\mu\sigma},\nu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu} + \Gamma_{\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma}) + \frac{1}{2}\,(\delta^\rho_\mu \phi_\nu + \delta^\rho_\nu \phi_\mu - g_{\mu\nu}\phi^\rho) \qquad \text{(W-2)}$$

De (C-16) tem-se nesse caso

$$R^\mu{}_{\mu\rho\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} K_{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} \Big[\partial_\rho(g_{\mu\nu}\phi_\lambda) - \partial_\lambda(g_{\mu\nu}\phi_\rho) \, +$$

$$+ \, 2\Gamma^\tau_{\mu\lambda} g_{\tau\nu}\phi_\rho - 2\Gamma^\tau_{\mu\rho} g_{\tau\nu}\phi_\lambda\Big] = 2(\phi_{\lambda,\rho} - \phi_{\rho,\lambda}) \, +$$

$$+ \, \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\,(g_{\mu\nu,\rho}\phi_\lambda - g_{\mu\nu,\lambda}\phi_\rho + 2\Gamma^\tau_{\mu\lambda} g_{\tau\nu}\phi_\rho - 2\Gamma^\tau_{\mu\rho} g_{\tau\nu}\phi_\lambda) =$$

$$= 2(\phi_{\lambda,\rho} - \phi_{\rho,\lambda}) + \frac{1}{2}\Big[(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho} - 2\Gamma^\tau_{\mu\rho})\phi_\lambda - (g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda} - 2\Gamma^\mu_{\mu\lambda})\phi_\rho\Big]$$

por (C-12) e (W-1) o termo entre colchetes se anula e ficamos unicamente com

$$R^\mu{}_{\mu\rho\lambda} = 2\, \phi_{\lambda\rho} \qquad \text{(W-3)}$$

$$\phi_{\lambda\rho} = \phi_{\lambda,\rho} - \phi_{\rho,\lambda} \qquad \text{(W-4)}$$

Vemos portanto que a contração $R^\mu{}_{\mu\rho\lambda}$ gera unicamente fatores não-Riemannianos e tende a zero se $\phi_\rho \to 0$ em todo espaço.

Daí, a curvatura de homotetia é dada por

$$\Omega = - R^{\mu}_{\ \mu\rho\lambda} ds^{\rho\lambda} = - 2\phi_{\lambda\rho} ds^{\rho\lambda}$$

e é portanto determinada inteiramente pelo fator não-Riemanniano $\phi_{\lambda\rho}$.

Weyl supõe ainda que os coeficientes da conexão são simétricos (não existe torção):

$$\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\sigma}} = 0$$

O acréscimo $d\ell$ no comprimento ℓ do vetor A num deslocamento paralelo infinitesimal toma então a forma (por (C-2), (C-5) e (W-1))

$$d\ell = \frac{1}{2\ell} K_{\mu\nu,\rho} A^{\mu}A^{\nu} dy^{\rho} = - \frac{1}{2\ell} g_{\mu\nu}\phi_{\rho} A^{\mu}A^{\nu} dy^{\rho}$$

$$= - \frac{\ell}{2} \phi_{\rho} dy^{\rho}$$

ou,

$$d\ell^2 = - \ell^2 \phi_{\rho} dy^{\rho} \tag{W-5}$$

A expressão de $K_{\mu\nu\rho\lambda}$ é dada em função dos $K_{\mu\nu,\rho}$ por (C-15), usando (W-1) resulta que

$$K_{\underline{\mu\nu}\rho\lambda} = \frac{1}{2} (K_{\mu\nu\rho\lambda} + K_{\nu\mu\rho\lambda}) = - g_{\mu\nu}\phi_{\rho\lambda} \tag{W-6}$$

a variação $\oint d\ell$ ao longo de um contorno fechado infinitamente pequeno (C-3) tem a forma

$$2\ell\oint d\ell = \iint K_{\mu\nu\rho\lambda} A^{\mu}A^{\nu} ds^{\rho\lambda}$$

(usando que $2g_{\nu\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\rho\lambda}A^{\mu}A^{\nu}ds^{\rho\lambda} = K_{\mu\nu\rho\lambda}A^{\mu}A^{\nu}ds^{\rho\lambda}$)

Daí, usando (W-6)

$$2\ell\oint d\ell = -\iint g_{\mu\nu}\phi_{\rho\lambda}A^{\mu}A^{\nu}ds^{\rho\lambda} = +\frac{\ell^2}{2}\iint \Omega$$

ou,

$$\oint d\ell = \frac{\ell}{4}\iint \Omega \qquad \text{(W-7)}$$

O novo comprimento ℓ' obtido após o percurso fechado infinitesimal é dado por

$$\ell' = \ell + \oint d\ell$$

logo,

$$\ell'^2 = (\ell + \oint d\ell)^2 = \ell^2\left(1 + \frac{1}{\ell}\oint d\ell\right)^2$$

$$= \ell^2\left(1 + \frac{1}{4}\iint \Omega\right)^2$$

$$\simeq \ell^2\left(1 + \frac{1}{2}\iint \Omega\right)$$

$$\frac{\ell'^2}{\ell^2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\iint \Omega \quad , \quad \frac{\ell'}{\ell} \simeq 1 + \frac{1}{4}\iint \Omega$$

A variação $\oint d\ell$ se anularia se $\Omega \to 0$ ou seja se $\phi_{\lambda\rho} \to 0$, isto é, se $\phi_{\rho} \to \partial_{\rho}\Psi$ com Ψ um escalar qualquer. Se tal escolha for possível, a unidade de comprimento poderá ser deslocada ao longo de todos os pontos vizinhos ao ponto original sem variação. Note entretanto que apesar de nesse caso particular $\phi_{\lambda\rho} \to 0$ o espaço ainda não é de Riemann pois $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ de (W-2) não é idêntica ao símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \{^{\rho}_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2}\,(\delta^{\rho}_{\mu}\Psi_{,\nu} + \delta^{\rho}_{\nu}\Psi_{,\mu} - g_{\mu\nu}\Psi^{,\rho})$$

Um espaço de Riemann goza da propriedade que $\oint d\ell = 0$, pois para ele $\Omega = 0$.

....

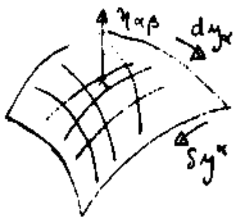
Como recordação, num espaço de Riemann a variação nas componentes de um vetor A por transporte paralelo ao longo de um contorno infinitesimal fechado é dada por

$$\oint \delta A_{\mu} = \frac{1}{2} \iint R^{\nu}{}_{\mu\rho\sigma}\, A_{\nu}\, \delta s^{\rho\sigma}$$

(Landau-Lifschitz - The Classical Theory of Fields, pag. 284) porém $\oint \delta(A_{\mu}B^{\mu})$, ou em particular $\oint \delta(A_{\mu}A^{\mu})$ se anulam, pois nesse espaço δ(escalar) = 0 (variação sob transporte paralelo).

....

A unidade de comprimento transportada paralelamente a si mesma ao longo de um contorno infinitesimal fechado sofre, em geral, modificação de comprimento e direção. Diz-se que o comprimento não é orientável nem transportável.



$$n_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\, dy^{[\rho}\delta x^{\sigma]}$$

$$ds^{\alpha\beta} = dy^{\alpha}\delta y^{\beta} - \delta y^{\alpha} dy^{\beta}$$

Em geral associa-se ao contorno fechado infinitesimal as quantidades

(i) Uma translação definida por

$$\Omega^{\mu} = - \Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\rho\sigma}} \, ds^{\rho\sigma} \qquad \text{(ver apêndice)}$$

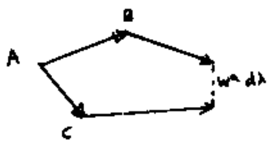
(ii) Uma rotação

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = - R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \, ds^{\rho\sigma}$$

(iii) Uma homotetia de razão $1 + \frac{1}{2}\,\Omega$ (ou seja $\frac{\ell'^2}{\ell^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \iint \Omega$):

$$\Omega = - R^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma} \, ds^{\rho\sigma}$$

O termo rotação provém de que está associado a $\delta_{\|} A^{\mu}$ porém $\delta_{\|} \ell^2 = 0$ se a curvatura é tipo Riemann (além disso a matriz $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ satisfaz $\Omega_{\mu\nu} = - \Omega_{\nu\mu}$ se a variedade é de Riemann). O termo homotetia refere-se a variações na unidade de comprimento. A translação está associada à existência de torção na variedade. Dela decorre que não é possível seguir-se um paralelogramo fechado infinitesimal em cada ponto do espaço:



$$\Omega^{\alpha} = \frac{1}{2} W^{\alpha} d\lambda = - \Gamma^{\mu}_{\boxed{\rho\sigma}} \, ds^{\rho\sigma}$$

Em cristalografia isso implica que a rede cristalina não é contínua, mas apresenta rachaduras na região onde existe torção. Os detalhes de obtenção desses resultados estão feitos no apêndice. Diversos resultados geométricos usados em teorias unitárias são também usados em cristalografia, como o aci ma, e por exemplo, a geometria com teleparalelismo (Weitzen - böck).

Uma variedade dotada de conexão assimétrica geral é assim caracterizada por duas curvaturas $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ e Ω e pela torção Ω^{μ}. Daí seguem-se os resultados.

(a) Essa estrutura matemática é suficientemente complexa para permitir, no caso de variedades quadridimensionais, uma interpretação geométrica da gravitação e do eletromagnetismo.

(b) Ela é de fato tão geral que pode-se escolher uma geometria mais simples com essa finalidade. Evidentemente cada tipo de geometria "mais simples" refere-se sempre a um sub-espaço do espaço geral dotado de $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$, Ω, Ω^{μ}.

Existem assim diferentes opções:

(1) $\Omega^{\mu} = \Omega = 0$ — a variedade difere-se do espaço Euclideano pela presença da curvatura de rotação $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$. Essa é uma variedade de Riemanniana. Se sua dimensão for 4 daí só se extraem fenômenos gravitacionais (relatividade geral). Para se interpretar geometricamente os fenômenos eletromagnéticos é necessário aumentar o número de dimensões dessa variedade de Riemann (pelo menos 5 dimensões). São exemplos dessa escolha as teorias:

(1-1) Kaluza-Klein (5 dimensões): γ_{55} = cte.

(1-2) P. Jordan-G. Ludwig, E. Schmutzer (5 dimensões): γ_{55} sendo função arb. usa métodos projetivos.

(1-3) Y. Thirry - métrica com 15 variáveis independentes sem uso de métodos projetivos.

(1-4) Einstein-Mayer (5 dimensões) - 5ª dimensão é usada como um artifício matemático, não se usa coordenadas na variedade pentadimensional.

(1-5) Einstein-Bergmann-Bargmann - (5 dimensões) usa espaço pentadimensional como um espaço físico dotado de simetria cilíndrica ao longo da 5ª direção.

(1-6) J. Podolanski - (6 dimensões) baseada na teoria do elétron de Dirac.

(2) $\Omega^{\mu} = 0$ — a variedade não tem torção. Se a dimensão é 4 essa é uma geometria de Weyl, ou de Eddington. Se ela é de Weyl a conexão estará completamente determinada por:

- conhecimento do tensor métrico $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
- conhecimento do vetor ϕ_{μ} que determina a variação na unidade de comprimento de acordo com (W-5).

A estrutura da variedade é determinada por duas formas diferenciais

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu} \quad , \quad d\phi = \phi_{\mu} dy^{\mu}$$

Ambas são invariantes sob transformações de coordenadas. A equação que define a conexão na teoria de Weyl,

$$D_{\rho} g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu;\rho} = - g_{\mu\nu} \phi_{\rho} \qquad \text{(W-8)}$$

não fixa univocamente o par de 14 variáveis $(g_{\mu\nu}, \phi_{\rho})$ necessárias na determinação da conexão. De fato, qualquer outro par obtido do original pelas transformações

$$\begin{cases} g'_{\mu\nu} = \lambda\, g_{\mu\nu} \\ \phi'_{\rho} = \phi_{\rho} - \partial_{\rho} \log \Lambda \end{cases}$$

satisfará à equação (W-8).

Daí, segue que

$$\begin{cases} ds'^2 = \lambda\, ds^2 \\ d\phi' = d\phi - d \log \lambda \end{cases}$$

é a variação sob essa transformação de gauge.

(3) $\Omega = 0$, não existe curvatura de homotetia e a unidade de comprimento é bem determinada ao longo da variedade. Se a dimensão for 4 essa é a teoria unitária de Infeld que usa $g_{\mu\nu}$ e $\phi_{\mu\nu}$ como variáveis básicas (não usa potencias ϕ_{ρ}, consequentemente não usa a equação (W-8)).

(4) $\Omega^{\mu}{}_{\nu} = 0$ que implica que a contração $\Omega = \Omega^{\mu}{}_{\mu} = 0$,logo não existe curvatura de nenhuma espécie na teoria, só existe a torção Ω^{μ}. Uma variedade dessa natureza é dita variedade de Weitzenböck, nela se define paralelismo absoluto ou paralelismo à distância. Essa teoria foi usada em 1928 por Einstein em uma (aliás a 2a. de suas tentativas de construção de um modelo unitário para gravitação e eletromagnetismo). Recentemente ela foi novamente usada por K. Hayashi não no sentido de uma teoria unitária mas no sentido de ser uma 2a. maneira de se reproduzir os resultados da relatividade geral.

Todas essas teorias usam que a métrica é simétrica, a simetria ou antissimetria da conexão é independente da simetria existente na métrica pois a solução geral da equação

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0 \quad , \quad \text{com} \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

é da forma

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \{^{\rho}_{\mu\nu}\} + g^{\rho\sigma}\,(\Gamma_{\underset{\vee}{\mu\sigma},\nu}+\Gamma_{\underset{\vee}{\nu\sigma},\mu}+\Gamma_{\underset{\vee}{\mu\nu},\sigma}) \tag{W-9}$$

ver (C-11) lá fazendo $K_{\mu\nu,\sigma} = 0$). Logo, existe torção mesmo se $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Assim, se em geral considerarmos métricas assimétricas, existirá também uma torção. A classe de teorias com métricas assimétricas em dimensão 4 é outro exemplo de teoria unitária com Ω^{μ}, $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ e eventualmente dotada de curvatura de homotetia Ω . Ela é um exemplo de uma variedade básica muito geral. Tais teorias se dividem em duas categorias:

(i) métricas reais assimétricas

(ii) métricas complexas assimétricas (Hermitianas).

Ambas foram tratadas por Einstein e por Schrödinger (o último só considerou métricas reais).

Abaixo fazemos um resumo dessas discussões:

	Relat. Geral (Var.Riemann)	Teoria de Weyl, Eddington	Variedade de Weitzenbock 2a.t.u. Einstein	Teoria de Infeld
Curvatura de Rotação $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ $R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}$	não nula e idêntica ao tensor de Riemann-Christoffel	não nula	não nula	não nula
Curvatura de Homotetia $\Omega^{\mu}{}_{\mu}$ $R^{\mu}{}_{\mu\nu\sigma}$	nula devido à simetria do tensor de Riemann-Christoffel	não nula	nula	nula
Translação (Torsão) Ω^{μ} $\Gamma^{\rho}{}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$	nula devida à simetria dos símbolos de Christoffel	nula	não nula	não nula

4 - *TEORIA DE WEYL*

A teoria de Weyl, similarmente à relatividade geral, supõe que seja possível se definir em cada ponto do espaço um sistema de coordenadas geodésicas. Essa hipótese exige a existência de uma conexão afim simétrica, portanto a variedade não possue torção.

Essa teoria distingue-se da relatividade geral porque nela não se postula a existência de uma unidade de comprimento absoluta, com mesmo valor sobre todos os pontos da variedade. Isso implica que existe uma curvatura de homotetia nessa teoria, que a faz diferente de uma teoria sobre uma variedade Riemanniana.

As equações básicas dessa teoria são como vimos

$$d\ell^2 = - \ell^2 \phi_\rho \, dy^\rho \quad ,$$

$$K_{\mu\nu,\rho} = g_{\mu\nu;\rho} = - g_{\mu\nu}\phi_\rho \quad ,$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu \text{ , } d\phi = \phi_\rho \, dy^\rho$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{^{\rho}_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2} (\delta^\rho_\mu \phi_\nu + \delta^\rho_\nu \phi_\mu - g_{\mu\nu}\phi^\rho) = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

A expressão geral do tensor de curvatura

$$R^\rho{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}$$

será portanto (usando a expressão de $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$) escrito em termos do tensor de Riemann-Christoffel

$$G^\rho{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\sigma\{^{\rho}_{\mu\nu}\} - \partial_\nu\{^{\rho}_{\mu\sigma}\} + \{^{\lambda}_{\mu\nu}\}\{^{\rho}_{\lambda\sigma}\} - \{^{\lambda}_{\mu\sigma}\}\{^{\rho}_{\lambda\nu}\}$$

e dos ϕ_ρ e suas derivadas:

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} = G^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} + \frac{1}{2}\,\delta^{\rho}_{\mu}\phi_{\nu\sigma} + \delta^{\rho}{}_{[\nu}\,\nabla_{\sigma]}\phi_{\mu} + g_{\mu[\sigma}\,\nabla_{\nu]}\phi^{\rho} +$$

$$\frac{1}{2}\,g_{\mu[\nu}\,\phi_{\sigma]}\phi^{\rho} + \frac{1}{2}\,\delta^{\rho}{}_{[\nu}g_{\sigma]\mu}\phi_{\lambda}\phi^{\lambda} + \frac{1}{2}\,\delta^{\rho}{}_{[\sigma}\phi_{\nu]}\phi_{\mu} \qquad \text{(T-1)}$$

onde $\phi_{\lambda\rho} = \phi_{\lambda,\rho} - \phi_{\rho,\lambda}$ e ∇_{α} é a derivada covariante em relação aos símbolos de Christoffel. O tensor de Ricci assume a forma

$$R_{\mu\nu} := R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\phi_{\nu\mu} - \nabla_{\nu}\phi_{\mu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\phi^{\sigma}$$

$$- \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\phi_{\rho}\phi^{\rho} + \frac{1}{2}\,\phi_{\mu}\phi_{\nu}$$

onde usou-se que $\nabla_{\nu}\,g_{\mu\sigma} = 0$. Use que

$$\frac{1}{2}\,\phi_{\nu\mu} - \nabla_{\nu}\phi_{\mu} = \frac{1}{2}\,\phi_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\,(\nabla_{\nu}\phi_{\mu} + \nabla_{\mu}\phi_{\nu}) - \frac{1}{2}\,(\nabla_{\nu}\phi_{\mu} - \nabla_{\mu}\phi_{\nu}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\phi_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\,\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,(\nabla_{\nu}\phi_{\mu} + \nabla_{\mu}\phi_{\nu}) =$$

$$= \phi_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\,(\nabla_{\nu}\phi_{\mu} + \nabla_{\mu}\phi_{\nu})$$

pois

$$\phi_{\mu\nu} = -\,\partial_{\mu}\phi_{\nu} + \partial_{\nu}\phi_{\mu} = \nabla_{\nu}\phi_{\mu} - \nabla_{\mu}\phi_{\nu}$$

Logo,

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \phi_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\,(\nabla_{\nu}\phi_{\mu} + \nabla_{\mu}\phi_{\nu}) - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,\nabla_{\sigma}\phi^{\sigma} -$$

$$- \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\phi_{\rho}\phi^{\rho} + \frac{1}{2}\,\phi_{\mu}\phi_{\nu} \qquad \text{(T-2)}$$

....

Observar que para um tensor de curvatura geral $R^{\rho}{}_{\mu\nu\alpha}$ só se tem as propriedades de simetria:

$R^{\rho}{}_{\mu\nu\alpha} = - R^{\rho}{}_{\mu\alpha\nu}$, $R^{\rho}{}_{\mu\nu\alpha} + R^{\rho}{}_{\alpha\mu\nu} + R^{\rho}{}_{\nu\alpha\mu} = 0$, e a propriedade diferencial de Bianchi

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\alpha;\lambda} + R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu;\alpha} + R^{\rho}{}_{\mu\alpha\lambda;\nu} = 0$$

(na abstenção de torção)

As propriedades restantes só são válidas para o tensor de Riemann-Christoffel: $G_{\rho\mu\nu\alpha} := g_{\rho\lambda}G^{\lambda}{}_{\mu\nu\alpha}$

$$G_{\rho\mu\nu\alpha} = - G_{\mu\rho\nu\alpha}$$
$$G_{\rho\mu\nu\alpha} = G_{\nu\alpha\rho\mu}$$

Portanto, somente suas componentes de Ricci são simétricas:

$$G_{\mu\nu} := G^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} \text{ , } G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$$

De fato, vê-se diretamente de (T-2) que $R_{\mu\nu}$ tem uma parte simétrica e outra antissimétrica.

Uma outra maneira de ver que $R_{\mu\nu\rho\alpha} := g_{\mu\lambda}R^{\lambda}{}_{\nu\rho\alpha}$ não satisfaz à condição

$$R_{\mu\nu\rho\alpha} = - R_{\nu\mu\rho\alpha}$$

é calcular diretamente de (T-1) a expressão para $R_{\underline{\lambda\nu}\rho\sigma}$, acha-se:

$$R_{\lambda\nu\rho\sigma} + R_{\nu\lambda\rho\sigma} = g_{\lambda\nu}\phi_{\rho\sigma} \neq 0 \quad .$$

....

Usando-se as identidades escritas anteriormente, se obtêm as identidades contraídas de Bianchi da teoria:

$$(R_{\underline{\nu}}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}\,\delta^{\sigma}_{\nu}R)_{;\sigma} = \frac{1}{2}\,\phi^{\sigma}{}_{\nu;\sigma} \tag{T-3}$$

$$R_{\underline{\nu}}{}^{\sigma} = g^{\sigma\lambda}R_{\underline{\nu\lambda}}$$

5 - *PRINCÍPIO DA AÇÃO NA TEORIA DE WEYL*

As quantidades $g_{\mu\nu}, \phi_\mu$ determinam a estrutura da teoria como potenciais. Seja a integral de Ação

$$I = \int L \, d_4x \quad , \qquad L = L\,(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}, g_{\mu\nu,\alpha\beta}, \phi_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}) \quad .$$

Em geral se tem sob variações $\delta g_{\mu\nu}, \delta\phi_\mu$

$$\delta I = \int \frac{\partial(\delta L^\mu)}{\partial x^\mu} \, d_4x + \int (P^\mu \delta\phi_\mu + \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \, d_4x = \quad 0 \qquad (T\text{-}4)$$

$$\delta L^\mu = F^{\mu\nu} \delta\phi_\nu + J^{\mu\nu\rho} \delta g_{\nu\rho} \qquad (T\text{-}5)$$

para variações se anulando no contorno de integração o 1º fator não contribuirá.

(a) Transformações de gauge e as equações eletromagnéticas

Seja uma variação infinitesimal de gauge

$$\lambda = 1 + \varepsilon$$

Como foi visto, tem-se

$$\delta g_{\mu\nu} = \varepsilon g_{\mu\nu} \quad , \quad \delta\phi_\mu = - \frac{1}{1+\varepsilon} \, \varepsilon_{,\mu} \qquad (T\text{-}6)$$

consequentemente

$$\delta L^\mu = - F^{\mu\nu} \frac{1}{1+\varepsilon} \, \varepsilon_{,\nu} + \varepsilon J^{\mu\nu\rho} \, g_{\nu\rho}$$

vamos por $J^{\mu\nu\rho} g_{\nu\rho} = J^\mu$. Temos em (T-4) usando (T-6)

$$\int (P^\mu \delta\phi_\mu + \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) d_4x = - \int \frac{1}{1+\varepsilon} \, P^\mu \varepsilon_{,\mu} + \frac{1}{2} \int \varepsilon \, Q^\mu{}_\mu d_4x \quad =$$

$$= \int \partial_\mu \left(\frac{1}{1+\varepsilon} P^\mu\right)\varepsilon \, d_4x - \int \partial_\mu\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P_\mu\right) d_4x + \frac{1}{2}\int \varepsilon \, Q^\mu{}_\mu d_4x$$

desprezando-se termos em ε^2 obtêm-se:

$$\int (P^\mu \delta\phi_\mu + \frac{1}{2} Q^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) d_4x = - \int \partial_\mu(\varepsilon P^\mu) d_4x + \int P^\mu_{,\mu} \, \varepsilon \, d_4x$$

$$+ \frac{1}{2}\int \varepsilon \, Q^\mu{}_\mu d_4x$$

e(T-4) assume a forma

$$\int \partial_\mu(\delta L^\mu - \varepsilon P^\mu) \, d_4x + \int \varepsilon \, (P^\mu_{,\mu} + \frac{1}{2} Q^\mu{}_\mu) \, d_4x = 0$$

como o domínio de integração é arbitrário, obteremos a identidade

$$P^\mu_{,\mu} + \frac{1}{2} Q^\mu{}_\mu = 0$$

a lei de conservação (use (T-6))

$$\partial_\mu(\varepsilon J^\mu - \mathcal{F}^{\mu\nu}\varepsilon_{,\nu} - \varepsilon P^\mu) = 0$$

num ponto qualquer do espaço ε e suas derivadas são funções arbitrárias, podemos então igualar a zero os coeficientes de ε e de suas diversas derivadas. Daí teremos as três equações

$$\partial_\mu(\mathcal{J}^\mu - P^\mu) = 0 \qquad \text{(T-7)}$$

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\nu\mu} + P^\mu - \mathcal{J}^\mu = 0 \qquad \text{(T-8)}$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\mathcal{F}^{\nu\mu} \qquad \text{(T-9)}$$

Daí,

$$P^{\mu} = - \partial_{\nu}F^{\nu\mu} + J^{\mu}$$

$$P^{\mu}_{,\mu} = J^{\mu}_{,\mu}$$

As equações do campo ϕ_{μ} provêm de igualar a zero o fator P^{μ} em (T-4), portanto elas são equivalentes a colocar

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} = J^{\mu} \quad , \quad J^{\mu}_{,\mu} = 0 \qquad \text{(T-10)}$$

que têm a forma das equações de Maxwell se $J^{\mu} = \sqrt{-g}\, J^{\mu}$ e $F^{\nu\mu} = \sqrt{-g}\ f^{\nu\mu}$ sao respectivamente as densidades de corrente e de campo eletromagnético.

(b) <u>Transformações de coordenadas e equações da gravitação</u>

Seja a transformação infinitesimal de coordenadas

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \xi^{\rho}$$

logo,

$$\bar{\delta}\phi_{\mu} = \phi'_{\mu}(x) - \phi_{\mu}(x) = - \xi^{\lambda}_{,\mu}\phi_{\lambda} - \xi^{\lambda}\phi_{\mu,\lambda}$$

use a identidade

$$-\xi^{\lambda}{}_{,\mu}\phi_{\lambda} = - \partial_{\mu}\ (\xi^{\lambda}\phi_{\lambda}) + \xi^{\lambda}\phi_{\lambda,\mu}$$

portanto,

$$\bar{\delta}\phi_{\mu} = - \partial_{\mu}\ (\xi^{\lambda}\phi_{\lambda}) + \xi^{\lambda}\ (-\phi_{\mu,\lambda} + \phi_{\lambda,\mu})$$

$$= \xi^{\lambda}\phi_{\lambda\mu} - \partial_{\mu}\ (\xi^{\lambda}\phi_{\lambda}) \qquad \text{(T-11)}$$

para a métrica teremos

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} = - g_{\mu\rho}\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\nu} - g_{\rho\nu}\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\xi^\rho \qquad (T\text{-}12)$$

Se simultaneamente efetuarmos uma variação de gauge de comprimentos

$$\bar{\delta}\phi_\mu = \xi^\lambda\phi_{\lambda\mu} - \partial_\mu(\xi^\lambda\phi_\lambda) - \varepsilon_{,\mu}{}^{(*)} \qquad (T\text{-}13)$$

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} = - g_{\mu\rho}\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\nu} - g_{\rho\nu}\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\xi^\rho + \varepsilon\, g_{\mu\nu} \qquad (T\text{-}14)$$

Portanto, nesse caso

$$\ell'^2 = \lambda\ell^2 = (1+\varepsilon)\ell^2$$

ou,

$$d\ell^2 = \varepsilon\ell^2 = -\ell^2 d\phi = -\ell^2\phi_\mu dx^\mu = -\ell^2\phi_\mu\xi^\mu$$

onde usamos (W-5). Daí

$$\varepsilon = -\phi_\mu\,\xi^\mu$$

com esse valor de ε é simples mostrar que em (T-13) tem-se

$$\bar{\delta}\phi_\mu = \xi^\lambda\,\phi_{\lambda\mu} \qquad (T\text{-}15)$$

e para (T-14)

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} = - g_{\mu\rho}\xi^\rho_{,\nu} - g_{\rho\nu}\xi^\rho_{,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho - g_{\mu\nu}\phi_\rho\xi^\rho \qquad (T\text{-}16)$$

(*) Nesse caso, $\bar{\delta}g_{\mu\nu} = \bar{\delta}_{(1)}g_{\mu\nu} + \bar{\delta}_{(2)}g_{\mu\nu}$ onde $\bar{\delta}_{(1)}$ se refere à transformação de coordenadas e $\bar{\delta}_{(2)} \equiv \delta_{(2)}$ se refere à Gauge de comprimentos. Similarmente para $\bar{\delta}\phi_\mu = \bar{\delta}_{(1)}\phi_\mu + \bar{\delta}_{(2)}\phi_\mu$.

Para a integral de Ação temos

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\ L$$

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\ g^{\mu\nu}\ \bar{\delta}g_{\mu\nu}.\ L + \sqrt{-g}\ \bar{\delta}\ L$$

$$\bar{\delta}L = L'(x) - L(x)$$

como $L(x)$ é um escalar em relação a transformações de coordenadas: $L'(x') = L(x)$, vem

$$L'(x') = L'(x + \xi) \approx L'(x) + \xi^{\rho}L_{,\rho}(x)$$

logo,

$$\bar{\delta}L = L'(x) - L(x) = L'(x) - L'(x') = -\xi^{\rho}L_{,\rho}$$

O fator $\bar{\delta}g_{\mu\nu}$ em $\bar{\delta}\mathcal{L}$ não inclue gauge de comprimento. Então por (T-12)

$$g^{\mu\nu}\bar{\delta}g_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}g_{\mu\rho}\xi^{\rho}_{,\nu} - g^{\mu\nu}g_{\rho\nu}\xi^{\rho}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\xi^{\rho}g^{\mu\nu}$$

$$= -2\xi^{\nu}_{,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}\ g^{\mu\nu}\ \xi^{\rho}$$

portanto,

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}\ g^{\mu\nu}\bar{\delta}g_{\mu\nu} = -\ \sqrt{-g}\ (\xi^{\nu}_{,\nu} + \frac{1}{2}\ g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho}\xi^{\rho})$$

$$= -\ \partial_{\rho}\ (\sqrt{-g}\ \xi^{\rho})$$

consequentemente

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = -\ L\ \partial_{\rho}(\sqrt{-g}\ \xi^{\rho}) + \sqrt{-g}\ (-\xi^{\rho}L_{,\rho}) = -\partial_{\rho}(L\ \sqrt{-g}\ \xi^{\rho}) =$$

$$= - \partial_\rho (L\ \xi^\rho)$$

Essa variação refere-se unicamente ã transformação de coordenadas. A variação total na Ação pode provir de duas fontes: coordenadas e gauge, portanto a variação total será:

$$\delta I = \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta L^\mu - L\xi^\mu) d_4x + \int (P^\mu \bar{\delta}\phi_\mu + \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} \bar{\delta} g_{\mu\nu})\ d_4x = 0$$

vamos fazer

$$\delta L^\mu - L\xi^\mu = S^\mu$$

então substituindo os valores de $\bar{\delta}\phi_\mu$, $\bar{\delta}g_{\mu\nu}$ acha-se

$$\delta I = \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} (S^\mu - Q_\rho{}^\mu \xi^\rho) + \int \xi^\rho \Big[P^\mu \phi_{\mu\rho} + \partial_\mu Q_\rho{}^\mu -$$

$$- \frac{Q^{\mu\nu}}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\phi_\rho) \Big]\ d_4x = 0$$

como $\partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\phi_\rho = \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}$, vem que a solução do problema variacional é da forma

$$\partial_\mu Q_\rho{}^\mu + P^\mu \phi_{\mu\rho} - \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} (\Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) = 0 \qquad \text{(T-17)}$$

$$\partial_\mu (S^\mu - Q_\rho{}^\mu \xi^\rho) = 0 \qquad \text{(T-18)}$$

usando que Γ e Q são simétricos, teremos para (T-17)

$$\partial_\mu\ Q_\rho{}^\mu + P^\mu \phi_{\mu\rho} - \Gamma^\tau_{\rho\mu} Q_\sigma{}^\mu = 0 \qquad \text{(T-19)}$$

A quantidade S^μ é uma função linear de ξ^α e de suas derivadas. Portanto, podemos por

$$S^{\mu} = R_{\rho}{}^{\mu}\xi^{\rho} + R_{\rho}{}^{\mu\sigma}\partial_{\sigma}\xi^{\rho} + \frac{1}{2} R_{\rho}{}^{\mu\sigma\lambda}\xi^{\rho}{}_{,\sigma\lambda} \quad .$$

e por (T-18) segue-se que

$$\begin{aligned} &\partial_{\mu}(R_{\rho}{}^{\mu} - Q_{\rho}{}^{\mu}) = 0 \\ &R_{\rho}{}^{\mu} + \partial_{\lambda}R_{\rho}{}^{\lambda\mu} = Q_{\rho}{}^{\mu} \\ &R_{\rho}{}^{\mu\sigma} + R_{\rho}{}^{\sigma\mu} + \partial_{\tau} R_{\rho}{}^{\tau\mu\sigma} = 0 \\ &R_{\rho}{}^{\mu\sigma\lambda} + R_{\rho}{}^{\lambda\mu\sigma} + R_{\rho}{}^{\sigma\lambda\mu} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(T-20)}$$

Do que foi visto até aqui na seção 5, seguem-se os resultados:

(i) A densidade escalar $\mathcal{L}$ não foi explicitada, as equações de campo sendo dadas por $P^{\mu} = 0$, $Q^{\mu\nu} = 0$, e obtidas via princípio variacional para transformações de coordenadas e gauge que não se anulem no contorno.

(ii) A lei de conservação de energia-momentum e momentum angular provêm das duas primeiras equações (T-20), lá fazendo $Q_{\rho}{}^{\mu} = 0$ e são, portanto, leis fracas de conservação associadas à invariância da Ação sob transformações de coordenadas. A lei de conservação de cargas e correntes provêm de (T-7) fazendo-se lá $P^{\mu} = 0$ (lei fraca de conservação) e está associada à propriedade de invariância da Ação sob transformações de gauge. De fato, de (T-4) segue-se diretamente que se $P^{\mu} = 0$, $Q^{\mu\nu} = 0$ para variações $\delta\phi_{\mu}$, $\delta g_{\mu\nu}$ arbitrárias dentro da região de integração, então

$$\delta I = \int \frac{\partial(\delta\mathcal{L}^{\mu})}{\partial x^{\mu}} \; d_4x$$

e $\delta I = 0$, implica nas equações (T-10) sob variações de gauge e nas (T-20) sob variações de mapeamentos.

Tem-se assim resultados semelhantes aos obtidos em teorias convencionais de campo.

6 - *ESCOLHA DA FUNÇÃO DE AÇÃO*

Dada a função de Ação, as equações do campo unificado provêm de variações que se anulem no contorno e por (T-4) teremos agora unicamente

$$\delta I = \int (P^{\mu}\delta\phi_{\mu} + \frac{1}{2} Q^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})\, d_4x \qquad \text{(T-21)}$$

$\delta I = 0$ implica que essas equações serão

$$P^{\mu} = 0 \qquad , \qquad Q^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(T-22)}$$

Para se determinar uma função de Ação deve-se procurar exprimí-la em termos de grandezas que sejam ou <u>invariantes</u> ou <u>tensores</u> em relação a transformações de coordenadas e que sejam <u>gauge-invariantes</u> em relação a transformações de gauge. Tais grandezas serão ditas serem "<u>in-invariantes</u>" ou então "<u>in-tensores</u>" e serão indicadas por um asterisco.

A afinidade $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ é gauge-invariante porém obviamente não é um tensor. De fato, tem-se:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \{^{\rho}_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2}(\delta^{\rho}_{\mu}\phi_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu}\phi_{\mu} - g_{\mu\nu}\phi^{\rho}) = \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu}$$

sob $g'_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, $\phi'_{\mu} = \phi_{\mu} - \partial_{\mu} \log \lambda$. Segue-se portanto que o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel associado a $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ será um in-tensor. Esse tensor é exatamente o objeto que tínhamos antes chamado de $R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}$ (ver (T-1)). Usaremos a partir daqui a notação

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} = {}^{*}G^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} \quad , \quad \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = {}^{*}\{^{\rho}_{\mu\nu}\}$$

suas contrações também são invariantes (in-invariantes) desde que para formá-las basta contrair com o tensor de Kronecker.

$$R_{\mu\nu} := R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = {}^{*}G^{\rho}{}_{\mu\nu\rho} = {}^{*}G_{\mu\nu}$$

a curvatura escalar entretanto não é um in-invariante, pois na contração usa-se $g_{\mu\nu}$. Apesar disso, por extensão, continuamos a usar o asterisco

$$R = g^{\mu\nu} \cdot {}^{*}G_{\mu\nu} = {}^{*}G$$

$${}^{*}G' = \frac{1}{\lambda}\, {}^{*}G \quad , \quad \text{pois} \quad g'^{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda}\, g^{\mu\nu}$$

como $\sqrt{-g'} = \lambda^2 \sqrt{-g}$, segue-se que as quantidades

$$({}^{*}G)^2 \sqrt{-g} \quad , \quad {}^{*}G_{\mu\nu}\, {}^{*}G^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad , \quad \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad ,$$

$${}^{*}G^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}\, {}^{*}G_{\rho}{}^{\mu\nu\sigma} \sqrt{-g}$$

são in-invariantes.

Weyl escolheu a densidade de Lagrangeana como

$$\mathcal{L} = ({}^{*}G^2 - \alpha\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}) \sqrt{-g} \qquad \text{(T-23)}$$

Notar que a ordem diferencial da equação de Euler-Lagrange não seria 2 se os invariantes restantes fossem usados.

As equações provenientes de variações que se anulam nos limites de integração serão as equações da teoria. Elas têm a forma

$$- S^{\mu\nu} + 8\beta\tau^{\mu\nu} + \frac{3}{2}\,(\phi^{\mu}\phi^{\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\phi_{\rho}\phi^{\rho}) = 0 \qquad \text{(T-24)}$$

$$- 3\phi^{\mu} - 4\beta J^{\mu} = 0 \qquad \text{(T-25)}$$

onde:

$$S^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,(G - 2\lambda)$$

$$4\tau^{\mu\nu} = - \phi^{\mu\rho}\phi^{\nu}{}_{\rho} + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma}\phi^{\rho\sigma}$$

J^{μ} é o coeficiente de $\delta \int \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d_4x$ em relação a $\delta\phi_{\mu}$:

$$\delta \int \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d_4x = 2 \int \left[4\tau^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu} - 2J^{\mu}\sqrt{-g}\,\delta\phi_{\mu}\right] d_4x$$

e onde foi fixada uma gauge por ${}^{*}G = 4\lambda$, e $\beta = \frac{\alpha}{8\lambda}$.

O tensor $\tau^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein-Maxwell de traço nulo satisfazendo $\tau^{\mu\nu} = \tau^{\nu\mu}$, pois sua determinação segue-se de variar $\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ em relação a $g_{\mu\nu}$. O tensor

$$G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}G$$

corresponde ao tensor de Einstein da relatividade geral. Daí (T-24) seria uma equação tipo Einstein com "fontes"

$$\chi T^{\mu\nu} = 8\beta\tau^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\lambda + \frac{3}{2}\,(\phi^{\mu}\phi^{\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\phi_{\rho}\phi^{\rho})$$

ou seja:

$$G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}G = \chi T^{\mu\nu}$$

daí

$$T = \mu c^2 = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \frac{8\beta\tau}{\chi} - \frac{4\lambda}{\chi} + \frac{3}{2\chi}\,(\phi_{\rho}\phi^{\rho} - 2\phi_{\rho}\phi^{\rho})$$

$$= \frac{8\beta\tau}{\chi} - \frac{4\lambda}{\chi} - \frac{3}{2\chi}\,\phi_{\rho}\phi^{\rho}$$

Por (T-25)

$$\phi_\rho \phi^\rho = \left(\frac{4\beta}{3}\right)^2 J_\rho J^\rho$$

segue-se, portanto, que na teoria de Weyl a matéria não pode existir sem cargas ou correntes.

7 - *GENERALIZAÇÕES DA TEORIA DE WEYL*

Duas generalizações dessa teoria foram propostas. A primeira por Eddington e a segunda por Einstein em 1923. Eddington generalizou a condição

$$K_{\mu\nu,\rho} = D_\rho \, g_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} \, \phi_\rho$$

colocando em lugar de $-g_{\mu\nu}\phi_\rho$ um tensor abitrário $K_{\mu\nu,\rho}$ simétrico no 1º par de índices, numa variedade sem torção. Daí, a solução geral para a conexão segue-se de (C-11)

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{^{\ \rho}_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2} \, g^{\rho\sigma}(K_{\mu\nu,\sigma} - K_{\mu\sigma,\nu} - K_{\nu\sigma,\mu})$$

$$:= \{^{\ \rho}_{\mu\nu}\} + u^\rho_{\mu\nu}$$

e introduz ϕ_ρ na contração $\Gamma^\rho_{\mu\rho}$, ou seja, define-se

$$u^\rho_{\mu\nu} = - 2\phi_\mu$$

Essas condições, no caso particular de $K_{\mu\nu,\rho} = -g_{\mu\nu}\phi_\rho$ degeneram nas fórmulas de Weyl. A curvatura $R^\rho{}_{\mu\nu\sigma}$ calculada com os $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ tem a expressão

$$R^\rho{}_{\mu\nu\sigma} = G^\rho{}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_\sigma u^\rho{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \, u^\rho_{\mu\sigma} + u^\lambda_{\mu\nu} u^\rho_{\lambda\sigma} - u^\lambda_{\mu\sigma} u^\rho_{\lambda\nu}$$

onde $G^\rho_{\mu\nu\sigma}$ é o tensor de Riemann-Christoffel e ∇_μ é a derivada covariante para a afinidade $\{^{\ \rho}_{\mu\nu}\}$. Daí,

$$R_{\mu\nu} := R^\rho{}_{\mu\nu\rho} = G_{\mu\nu} + \nabla_\rho \, u^\rho_{\mu\nu} + 2\nabla_\nu \phi_\mu - 2u^\lambda_{\mu\nu}\phi_\lambda - u^\lambda_{\mu\sigma} u^\sigma_{\lambda\nu}$$

use que

$$2\nabla_\nu\phi_\mu = (\nabla_\nu\phi_\mu + \nabla_\mu\phi_\nu) + (\nabla_\nu\phi_\mu - \nabla_\mu\phi_\nu)$$

$$= (\nabla_\nu\phi_\mu + \nabla_\mu\phi_\nu) + (\partial_\nu\phi_\mu - \partial_\mu\phi_\nu)$$

$$= (\nabla_\nu\phi_\mu + \nabla_\mu\phi_\nu) + \phi_{\mu\nu}.$$

Logo,

$$R_{\mu\nu} = R_{\underline{\mu\nu}} + \phi_{\mu\nu}$$

com

$$R_{\underline{\mu\nu}} = G_{\mu\nu} + \nabla_\nu\phi_\mu + \nabla_\mu\phi_\nu + \nabla_\rho u^\rho_{\mu\nu} - 2u^\lambda_{\mu\nu}\phi_\lambda - u^\lambda_{\mu\sigma}u^\sigma_{\lambda\nu}$$

Para o escalar de curvatura temos:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\underline{\mu\nu}} = G + 2\nabla_\rho\phi^\rho + 2\nabla_\rho\eta^\rho - 4\eta^\lambda\phi_\lambda - g^{\mu\nu}u^\lambda_{\mu\sigma}u^\sigma_{\lambda\nu}$$

onde se colocou

$$g^{\mu\nu}\, u^\rho_{\mu\nu} = 2\eta^\rho$$

Eddington usa a mesma função de ação que Weyl. Nessa formulação a conexão $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, e consequentemente a curvatura $R^\rho{}_{\mu\nu\sigma}$, não ficam univocamente determinadas.

Por exemplo, as funções η^ρ não são dadas em termos dos ϕ_ρ. Segue-se, portanto, que essa extensão da teoria de Weyl não é bem determinada.

A 2ª possibilidade é conhecida como a <u>teoria puramente afim de Einstein</u>. Nessa teoria $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, $g_{\mu\nu}$, ϕ_μ são em princípio variáveis independentes. Não existe torção, e em geral se deve ter como extensão da relatividade geral que

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} + u^\rho_{\mu\nu} \quad , \quad u^\rho_{\mu\nu} = u^\rho_{\nu\mu} \tag{E-1}$$

Einstein supõe que a densidade da Lagrangeana é uma função in-invariante dos $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ e suas derivadas primeiras por intermédio do tensor de Ricci da conexão Γ

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \qquad \text{(E-2)}$$

sob variações em $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ se terá

$$\delta I = \int \left[\frac{\partial L}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}\,\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\sigma}}\,\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\sigma}\right] d_4x$$

e as variações se anulam no contorno de integração

$$\delta I = \int G^{\mu\nu}_{\rho}\,\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\,d_4x = 0$$

$$G^{\mu\nu}_{\rho} = \frac{\partial L}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}} - \partial_{\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\sigma}}\right) \qquad \text{(E-3)}$$

Temos

$$\frac{\partial L}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial R_{\alpha\beta}}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}} = R^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\partial L}{\partial R_{\alpha\beta}}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\sigma}} = R^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\alpha}}$$

Daí, tem-se para (E-3)

$$G^{\mu\nu}_{\rho} = R^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}} - \partial_{\sigma}\left[R^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\alpha}}\right]$$

as derivadas de $R_{\alpha\beta}$ com respeito a Γ e à $\partial\Gamma$ são calculadas, usando-se (E-2), e obtém-se

$$-G_{\rho}^{\mu\nu} = \partial_{\rho}R^{\mu\nu} - \delta_{\rho}^{\nu}\partial_{\sigma}R^{\mu\sigma} - R^{\mu\nu}\,\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha} - \delta_{\rho}^{\nu}R^{\lambda\tau}\Gamma_{\lambda\tau}^{\mu} +$$

$$+ R^{\mu\tau}\Gamma_{\rho\tau}^{\nu} + R^{\tau\nu}\Gamma_{\tau\rho}^{\mu} = R^{\mu\nu}_{;\rho} - \delta_{\rho}^{\nu}\,R^{\nu\sigma}{}_{;\sigma}$$

onde se tem, usando que Γ é simétrico nos índices covariantes,

$$R^{\mu\nu}{}_{;\rho} = \partial_{\rho}\,R^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}R^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu}R^{\mu\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}R^{\mu\nu}$$

note que $R^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial de peso (+1) devido à sua definição.

Como $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ segue-se que as equações de Euler (E-3) são da forma $G_{\rho}^{\underline{\mu\nu}} = 0$. Portanto

$$(R^{\mu\nu} + R^{\nu\mu})_{;\rho} - \delta_{\rho}^{\nu}\,R^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - \delta_{\rho}^{\mu}\,R^{\nu\sigma}{}_{;\sigma} = 0 \qquad \text{(E-4)}$$

Decompondo $R^{\mu\nu}$ em parte simétrica e parte antissimétrica

$$R^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}$$

e colocando .

$$J^{\mu} = F^{\mu\rho}{}_{;\rho} = F^{\mu\rho}{}_{,\rho}$$

($F^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial de 2ª ordem antissimétrica de peso +1).

Se tem por contração dos índices (ν,ρ) em (E-4)

$$(R^{\mu\rho} + R^{\rho\mu})_{;\rho} - 4\,R^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - R^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} = 0$$

$$R^{\rho\mu}{}_{;\rho} - 4\,R^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0$$

ou seja

$$-G_{\rho}^{\mu\nu} = \partial_{\rho}R^{\mu\nu} - \delta_{\rho}^{\nu}\partial_{\sigma}R^{\mu\sigma} - R^{\mu\nu}\,\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha} - \delta_{\rho}^{\nu}R^{\lambda\tau}\Gamma_{\lambda\tau}^{\mu} +$$

$$+ R^{\mu\tau}\Gamma_{\rho\tau}^{\nu} + R^{\tau\nu}\Gamma_{\tau\rho}^{\mu} = R^{\mu\nu}_{\ ;\rho} - \delta_{\rho}^{\nu}\,R^{\nu\sigma}_{\ ;\sigma}$$

onde se tem, usando que Γ é simétrico nos índices covariantes,

$$R^{\mu\nu}_{\ ;\rho} = \partial_{\rho}\,R^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}R^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu}R^{\,\mu\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}R^{\mu\nu}$$

note que $R^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial de peso (+1) devido à sua definição.

Como $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ segue-se que as equações de Euler (E-3) são da forma $G_{\rho}^{\underline{\mu\nu}} = 0$. Portanto

$$(R^{\mu\nu} + R^{\nu\mu})_{;\rho} - \delta_{\rho}^{\nu}\,R^{\mu\sigma}_{\ ;\sigma} - \delta_{\rho}^{\mu}\,R^{\nu\sigma}_{\ ;\sigma} = 0 \tag{E-4}$$

Decompondo $R^{\mu\nu}$ em parte simétrica e parte antissimétrica

$$R^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}$$

e colocando

$$J^{\mu} = F^{\mu\rho}_{\ ;\rho} = F^{\mu\rho}_{\ ,\rho}$$

($F^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial de 2ª ordem antissimétrica de peso +1).

Se tem por contração dos índices (ν,ρ) em (E-4)

$$(R^{\mu\rho} + R^{\rho\mu})_{;\rho} - 4\,R^{\mu\sigma}_{\ ;\sigma} - R^{\mu\sigma}_{\ ;\sigma} = 0$$

$$R^{\rho\mu}_{\ ;\rho} - 4\,R^{\mu\rho}_{\ ;\rho} = 0$$

ou seja

$$G^{\rho\mu}_{;\rho} - J^{\mu} - 4\, G^{\mu\rho}_{;\rho} - 4J^{\mu} = 0$$

dando

$$G^{\rho\mu}_{;\rho} = -\frac{5}{3}\ J^{\mu} \tag{E-5}$$

Substituindo em (E-4) a decomposição de R em G e F e usando (E-5) se obtêm diretamente

$$G^{\mu\nu}_{;\rho} = -\frac{1}{3}\,(\delta^{\nu}_{\rho}J^{\mu} + \delta^{\mu}_{\rho}J^{\nu}) \tag{E-6}$$

Essa é a forma a que se reduziu a equação de Euler para as $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$. Ela pode ser resolvida para a afinidade total que intervêm na derivada covariante do lado esquerdo de (E-6). Para isso recor de que

$$R^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}} \quad , \quad G^{\mu\nu} = R^{\underline{\mu\nu}}$$

daí deve-se ter que $G^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}$ e se põe $J^{\mu} = \sqrt{-g}j^{\mu}$. Tem-se assim para (E-6)

$$\partial_{\rho}g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\partial_{\rho}\log\sqrt{-g} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}g^{\sigma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} =$$

$$= -\frac{1}{3}\,(\delta^{\mu}_{\rho}j^{\nu} + \delta^{\nu}_{\rho}j^{\mu}) \tag{E-7}$$

contraindo com $g_{\mu\nu}$ se obtêm

$$\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} = \partial_{\rho}\log\sqrt{-g} + \frac{1}{3}\,j_{\rho} \tag{E-8}$$

Substituindo (E-8) em (E-7) e multiplicando paralela mente (E-7) por $g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}$ e usando que $dg_{\sigma\lambda} = -g_{\sigma\nu}g_{\mu\lambda}dg^{\mu\nu}$, vem:

$$\partial_{\rho}g_{\mu\nu} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}g_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}g_{\mu\tau} = \frac{1}{3}\,(g_{\mu\rho}j_{\nu} + g_{\rho\nu}j_{\mu} - g_{\mu\nu}j_{\rho}) \tag{E-9}$$

trocando $\rho \leftrightarrow \mu$ e $\rho \leftrightarrow \nu$ se tem as equações

$$\partial_\mu g_{\rho\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\mu} g_{\rho\tau} = \frac{1}{3} (g_{\mu\rho} j_\nu + g_{\mu\nu} j_\rho - g_{\rho\nu} j_\mu) \qquad \text{(E-10)}$$

$$\partial_\nu g_{\mu\rho} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} g_{\tau\rho} - \Gamma^\tau_{\nu\rho} g_{\mu\tau} = \frac{1}{3} (g_{\mu\nu} j_\rho + g_{\mu\nu} j_\mu - g_{\mu\rho} j_\nu) \qquad \text{(E-11)}$$

Formando a combinação (E-10)+(E-11)-(E-9) se obtém

$$\Gamma_{\mu\nu,\rho} = \boxed{\mu\nu,\rho} + \frac{1}{6} (g_{\mu\rho} j_\nu + g_{\nu\rho} j_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} j_\rho$$

dando

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{^{\ \rho}_{\mu\nu}\} + \frac{1}{6} (\delta^\rho_\mu j_\nu + \delta^\rho_\nu j_\mu - 3 g_{\mu\nu} j^\rho) \qquad \text{(E-12)}$$

Esse é um típico resultado de uma teoria unitária, qual seja : a corrente associada ao campo ϕ_μ através da definição $\sqrt{-g}\, j^\mu = F^{\mu\rho}_{\ \ ,\rho}$ é parte integrante da geometria através da afinidade total dada por (E-12).

De (E-12) vem

$$u^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{6} (\delta^\rho_\mu j_\nu + \delta^\rho_\nu j_\mu - 3 g_{\mu\nu} j^\rho)$$

Usando a definição de Eddington, $u^\rho_{\mu\rho} = -2\phi_\mu$ se tem

$$\phi_\mu = - \frac{1}{6} \ j_\mu$$

Levando isso de volta em (E-12) re-obtemos $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ de Weyl.

As expressões gerais da curvatura calculadas antes são válidas aqui e se tem

$$R_{\underline{\mu\nu}} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho j^\rho - \frac{1}{6} j^\mu j^\nu$$

$$\phi_{\mu\nu} = \frac{1}{6} (\partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu)$$

Em lugar da função de Ação de Weyl também é possível, como sugerido por Eddington, usar-se a densidade escalar

$$L = \sqrt{-\det R_{\mu\nu}}$$

seja $R = \det R_{\mu\nu}$, então

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}} = \frac{-\text{menor } R_{\mu\nu}}{2\sqrt{-R}} \text{ , } \det \mathcal{R}^{\mu\nu} = \frac{R}{16}$$

donde

$$\frac{1}{4} \quad L = \sqrt{-\det \mathcal{R}^{\mu\nu}} = \sqrt{-\det(\mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{F}^{\mu\nu})}$$

Como se conclue, as possíveis extensões da teoria de Weyl não apresentam resultados essencialmente novos aos já determinados por Weyl. Aparentemente, para uma teoria a 4 dimensões envolvendo gravitação e eletromagnetismo numa geometria não-Riemanniana sem torção, a construção feita por Weyl é suficiente. Entretanto ela possue certos defeitos:

(1) Suas equações de campo são muito complexas

(2) A gauge eletromagnética afeta os comprimentos por meio de um fator conforme ($\ell'^2 = \lambda\ell^2$), o que aparentemente é um resultado não-físico. Como $\lambda = \lambda(x)$ segue-se que a observação do comprimento de um vetor num dado ponto irá depender de sua trajetória no passado (valores de $\lambda(\vec{x},x^0)$ para $x^0 < x^0_{Obs.}$). Isso não aparenta ser viável.

(3) Sendo ela uma teoria conforme com curvatura, somente os cones de luz são inafetados pelo fator conforme, e portanto, processos de medidas físicas devem ser feitos utilizando unicamente raios luminosos. Existem entretanto processos físicos envol

vendo trajetórias temporais, como por exemplo a propagação de um sinal segundo a dinâmica de Hamilton. Tais processos envolveriam métricas gauge-variantes ($g'_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$) o que não é um resultado adequado.

- Referências sobre a teoria de Weyl

1 - A.S. Eddington - The Mathematical theory of relativity.

2 - A.S. Eddington - A generalization of Weyl's theory of the electromagnetic and gravitational fields (Proc. Roy.Soc. 99, 104 (1921).

3 - A. Einstein - Berl. Sitz. 3276 (1923).

A. Einstein - Akad. Wiss. Phys. Math. 414 (1925).

4 - H. Weyl - Sitz. Preuss. Ak. Wiss. 485 (1918).
H. Weyl - Ann. Phys. 59, 101 (1919).
65, 541 (1921)
H. Weyl - Phys. Z., 21, 669 (1920).
Phys. Z., 22, 473 (1921)
Naturwiss., 12, 561 (1924).
Proc. Nat. Ac. Sc. (U.S.A.), 15, 323 (1929).
Phys. Rev., 77, 699 (1950).

- Referências recentes tratando sobre a teoria de Weyl:

1 - M. Omote - Let. N. Cim., 2, 58 (1971).
Phys. Rev. D 11, 2746 (1975).

2 - P. Dirac - Proc. Roy. Soc. A333, 403 (1973).

3 - P. Freund - Ann. Phys. 84, 440 (1974).

4 - A.Bregman - Prog. Th. Phys., 49, 667 (1973).
M. Kasuya - N. Cim. 28B, 127 (1975).

5 - C.G. Oliveira, E.Schnirman - An.Inst.H. Poincaré,XVIII,nº4, 379 (1973).

6 - K.Hayashi, M.Kasuya,T. Shwiafuji-Prog.Th.Phys.,57,431(1977).

8 - *TEORIA DE EINSTEIN COM PARALELISMO ABSOLUTO*

A segunda Teoria Unitária de Einstein proposta em 1928 com a finalidade de geometrizar a gravitação e o eletro - magnetismo, se caracteriza pelas condições $\Omega^{\mu}{}_{\mu} = 0$, $\Omega = 0$. A variedade só se distingue de um espaço euclideana pela presença de uma torção Ω^{μ}. Existe assim paralelismo a distância sobre a variedade. Em princípio, uma das propriedades dessa teoria seria substituir a descrição dos efeitos gravitacionais da linguagem da curvatura para a linguagem da torsão. Como característica básica dessa reformulação já não existiria um princípio de correspondência com a relatividade geral. Tal característica é comum a quase todas as teorias unitárias propostas nas décadas de 20 e 30, que tentavam formular geometricamente os dois campos de forças de longo alcance conhecidos, tal formulação seria uma nova teoria, não necessariamente representando uma extensão da relatividade geral. Essa última passaria então a ser uma teoria transitória, porém não definitiva. A própria teoria de Weyl é desse tipo, pois se em algumas de suas equações se pode formalmente fazer $\phi_{\mu} \to 0$ e assim re-obter a geometria de Riemann (como por exemplo em $D_{\rho}g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\phi_{\rho}$), em outras equações isso já não é possível, como por exemplo no princípio variacional onde a densidade Lagrangeana é da forma $^{*}G^{2}\sqrt{-g}$ na parte gravitacional, completamente diferente da relatividade geral. Além disso, a condição de gauge $^{*}G=4\lambda$ não possue correspondência com resultados de relatividade geral. Portanto, o par $(g_{\mu\nu},\phi_{\mu})$ forma, em verdade, um ente primário, que não deve ser separado.

Devido ao paralelismo distante existente sobre a variedade, é natural que se use vierbeins como entidades geo - métricas básicas. Vamos indicá-los por $h^{\mu}_{(\alpha)}$

$$g_{\mu\nu} = h^{(\alpha)}_{\mu} \; h_{\nu(\alpha)}$$

Como não existe curvatura segue-se que as condições

$$h^{\mu}_{(\alpha);\nu} = \partial_{\nu} h^{\mu}_{(\alpha)} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} h^{\lambda}_{(\alpha)} = 0 \qquad \text{(R-1)}$$

são válidas sobre toda a variedade (a curvatura associada à conexão Γ se anula). De (R-1) também se tira que a afinidade vale

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = h^{\mu}_{(\alpha)} \; \partial_{\nu} \; h^{(\alpha)}_{\lambda} = - \; h_{(\alpha)\lambda} \partial_{\nu} h^{\mu(\alpha)} \qquad \text{(R-2)}$$

Tem-se como em relatividade geral

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0 \qquad \text{(R-3)}$$

entretanto essa analogia é meramente formal pois $g_{\mu\nu}$ é aqui definido em função de $h^{\mu}_{(\alpha)}$ que satisfaz (R-1), o que não acontece em relatividade geral. Chamamos a atenção para o fato que a solução geral de (R-3) é da forma (W-9) escrita antes, portanto se $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}(\Gamma) = 0$ isso não implica que o tensor de Riemann-Christoffel $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}(\{{}^{\lambda}_{\nu\tau}\})$ seja nulo. Logo, existe nessa variedade os símbolos $\{{}^{\lambda}_{\nu\tau}\}$ obtidos de $g_{\mu\nu}$ (só que eles são escritos em função das vierbeins pois $g_{\mu\nu}$ é dado diretamente em termos dessas quantidades).

A derivada covariante completa $h^{\mu}_{(\alpha)|\nu} = h^{\mu}_{(\alpha);\nu} - \Delta^{(\lambda)}{}_{\nu\,(\alpha)} \, h^{\mu}{}_{(\lambda)}$ se anula devido a (R-3). Daí, segue-se que (use (R-1))

$$\Delta^{(\lambda)}_{\nu\,(\alpha)} = h^{\mu}_{(\alpha);\nu} h^{(\lambda)}_{\mu} = 0$$

portanto, a afinidade interna se anula sobre toda a variedade, o que implica que o espaço interno dessa teoria é globalmente flat (tal como ocorre em relatividade restrita). Numa variedade dotada de curvatura e torção tem-se:

$$[D_\rho, D_\sigma] A^{\nu\cdots}_{\mu\cdots} = -R^{\nu}{}_{\mu\rho\sigma}(\Gamma) A^{\tau\cdots}_{\mu\cdots} + \ldots R^{\tau}{}_{\mu\rho\sigma}(\Gamma) A^{\nu\cdots}_{\tau\cdots} \ldots +$$

$$+ 2\Gamma^{\tau}_{\underset{\vee}{\rho\sigma}} D_\tau A^{\nu\cdots}_{\mu\cdots} \qquad \text{(R-4)}$$

Na presente situação ela assume a forma(*)

$$D_\rho \to ;\rho$$

$$A^{\nu\cdots}_{\mu\cdots;\rho;\sigma} - A^{\nu\cdots}_{\mu\cdots;\sigma;\rho} = -2\Gamma^{\tau}_{\underset{\vee}{\rho\sigma}} A^{\nu\cdots}_{\mu\cdots;\tau} \qquad \text{(R-5)}$$

8.1 - *O Tensor de Torção*

A presença de uma torção Ω^μ distingue o espaço de uma variedade euclideana(**). Para definir essa geometria se dispõe de 16 componentes da vierbein $h^{(\alpha)}_{\mu}$ (as quais definem univocamente os $g_{\mu\nu}$). Entre as 24 componentes da torção $\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ irá existir um certo número de identidades.

A forma assumida pela identidade de Bianchi num espaço com curvatura e torção é

(*) ;ρ é a derivada covariante em relação à afinidade dada por (R-2). Observe que ela, em princípio, possue uma parte simétrica e outra antissimétrica.

(**) Pois $\{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$ e $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ ($\{^{\cdot}_{\cdot\,\cdot}\}$) são aqui meras quantidades formais que não são interpretadas como conexão e curvatura.

$$D_\rho R^\tau{}_{\mu\sigma\nu} + D_\nu R^\tau{}_{\mu\rho\sigma} + D_\sigma R^\tau{}_{\mu\nu\rho} - 2R^\tau{}_{\mu\lambda\rho}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} -$$

$$- 2R^\tau{}_{\mu\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\rho\sigma}} - 2R^\tau{}_{\mu\lambda\sigma}\Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \equiv 0$$

portanto,se $R^\tau{}_{\mu\sigma\nu} \to 0$ sobre todo espaço,ela ficará identicamente satisfeita. Tem-se também a identidade

$$R^\tau{}_{\nu\rho\sigma} + R^\tau{}_{\sigma\nu\rho} + R^\tau{}_{\rho\sigma\nu} + 2(D_\sigma\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\rho\nu}} + D_\nu\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\sigma\rho}} + D_\rho\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\nu\sigma}})$$

$$- 4\Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\rho\nu}}\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\lambda\sigma}} - 4\Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\sigma\rho}}\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} - 4\Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\nu\sigma}}\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\lambda\rho}} \equiv 0$$

que no caso $R^\tau{}_{\nu\rho\sigma} \to 0$ assume a expressão: $D_\rho \to {;\rho}$

$$\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\rho\nu};\sigma} + \Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\sigma\rho};\nu} + \Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\nu\sigma};\rho} + 2(\Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\nu\rho}}\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\lambda\sigma}} + \Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\rho\sigma}}\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} + \Gamma^\lambda_{\underset{\vee}{\sigma\nu}}\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}) \equiv 0 \quad \text{(R-6)}$$

Observar que tanto em (R-6) como na fórmula geral tem sentido tomar derivada covariante de $\Gamma^\tau_{\underset{\vee}{\rho\nu}}$ pois este é um tensor. Como em particular aqui se tem

$$\Gamma^\mu_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} = h^\mu{}_{(\alpha)}\, \partial_{[\nu}\, h^{(\alpha)}_{\lambda]}$$

vemos que isso é verdade nesse caso pois $\partial_{[\nu}\, h^{(\alpha)}_{\lambda]}$ é um tensor de 2ª ordem:

$$h'^{(\alpha)}_\lambda = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\, h^{(\alpha)}_\beta$$

$$\frac{\partial h'^{(\alpha)}_\lambda}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\, h^{(\alpha)}_{\beta,\rho} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\lambda \partial x'^\nu}\, h^{(\alpha)}_\beta$$

$$\partial'_\nu\, h^{(\alpha)}_\lambda - \partial'_\lambda h^{(\alpha)}_\nu = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\,(h^{(\alpha)}_{\beta,\rho} - h^{(\alpha)}_{\rho,\beta})$$

A definição genérica da operação $;\rho$ é:

$$T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots;\rho} := \partial_\rho T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} T^{\alpha\cdots}_{\nu\cdots} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} T^{\mu\cdots}_{\alpha\cdots} \tag{R-7}$$

daí

$$\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma;\rho} = \partial_\rho \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu\lambda} \tag{R-8}$$

Pode-se contrair diretamente dentro do sinal de derivada covariante desde que por (R-7)

$$\delta^{\alpha}_{\beta;\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho}\delta^{\lambda}{}_{\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\rho}\delta^{\alpha}_{\lambda} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} = 0$$

Daí, temos por contração em (R-8) nos índices (τ,σ):

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma;\rho} = \partial_\rho \Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \tag{R-9}$$

denote: $\Gamma_\nu = \Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}$, portanto se tem

$$\Gamma_{\nu;\rho} = \partial_\rho \Gamma_\nu - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma_\lambda \tag{R-10}$$

o 2º e o 4º termos da equação (R-9) se cancelam). Assim vê-se por (R-10) que Γ_ν é um vetor, fato aliás consistente com sua definição. Vamos contrair (τ,σ) em (R-6)

$$\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu;\sigma} + \Gamma_{\nu;\rho} - \Gamma_{\rho;\nu} + 2(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma_\lambda + \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}) \equiv 0 \tag{R-11}$$

De (R-10)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu;\rho} - \Gamma_{\rho;\nu} &= \partial_\rho\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\rho - (\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu})\Gamma_\lambda \\ &= \partial_\rho\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\rho - 2\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma_\lambda\end{aligned}$$

Logo, temos em (R-11)

$$\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\rho\nu};\sigma} + \partial_{\rho}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho} + 2(\Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}}\Gamma_{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\rho\sigma}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\sigma\nu}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\lambda\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}}\Gamma_{\lambda}) \equiv 0$$

Dentro do parêntesis o 1º e o 4º termos e o 2º e o 3º termos se cancelam, resultando em

$$\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\rho\nu};\sigma} \equiv -(\partial_{\rho}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho}) \qquad \text{(R-12)}$$

Seja o tensor

$$\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} := \Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}$$

onde $g^{\mu\tau}$ é escrito diretamente como função das vierbeins. Daí por (R-5)

$$\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}{}_{;\mu;\nu} - \Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}{}_{;\nu;\mu} = -2\Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}{}_{;\lambda}$$

contraindo (ρ,ν) e (σ,μ), o que é feito diretamente como foi provado antes, se obtém:

$$\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}{}_{;\sigma;\rho} - \Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}{}_{;\rho;\sigma} + 2\Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\sigma\rho}}\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\tau\sigma}}{}_{;\lambda} = 0 \qquad \text{(R-13)}$$

Seja

$$\frac{1}{2}\,G^{\mu\sigma} := \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\nu} + 2\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \qquad \text{(R-14)}$$

então

$$G^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} = 2\Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\nu;\sigma} + 4\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho};\sigma} + 4\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \qquad \text{(R-15)}$$

De (R-12) é natural colocar-se

$$\frac{1}{2}\,F_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu};\sigma} \qquad \text{(R-16)}$$

daí

$$\frac{1}{2}\, F^{\mu\nu} = g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu};\sigma} = \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\sigma}$$

portanto

$$F^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} = 2\Gamma^{\lambda,\underset{\vee}{\mu\sigma}}{}_{;\lambda;\sigma} \qquad \text{(R-17)}$$

De (R-15) e (R-17) vem

$$G^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - F^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} = 2\Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\nu;\sigma} + 4\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho};\sigma} + 4\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} - 2\Gamma^{\lambda,\underset{\vee}{\mu\sigma}}{}_{;\lambda;\sigma}$$

daí, comparando diretamente essa equação com (R-13) vem

$$G^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - F^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - 2\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}} F_{\nu\rho} = 0 \qquad \text{(R-18)}$$

....

<u>Em resumo</u>: Viu-se que por decorrência das identidades diferenciais de Bianchi se tem

$$\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\rho\nu};\sigma} \equiv -(\partial_\rho \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\rho) \quad , \quad \Gamma_\nu = \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\nu\alpha}}$$

definindo então

$$\frac{1}{2}\, F_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu};\sigma} \longrightarrow \frac{1}{2}\, F^{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\sigma}$$

$$\frac{1}{2}\, G^{\mu\sigma} = \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\nu} + 2\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$$

se prova que

$$G^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - F^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - 2\Gamma^{\rho\cdot\underset{\vee}{\mu\nu}}F_{\nu\rho} = 0$$

8.2 - *As Equações do Campo Unitário*

As variáveis da teoria são as vierbeins $h^{\mu}_{(\alpha)}$, em número de 16. Existe a afinidade $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ dada por (R-2) diretamente em termos das vierbeins. Sua parte preponderante é a torção $\Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\nu\alpha}}$ pois somente esta quantidade distingue a geometria de ser uma geometria tipo Minkowskii ($R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}(\Gamma) = 0$). Inclusive, tem-se por (W-9) que se $\Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\nu\alpha}} \to 0$ então $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} \to \{{}^{\mu}_{\nu\alpha}\}$ e se teria agora que o tensor de Riemann-Christoffel vai ser nulo em todo espaço

Podemos então dizer que

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = \Gamma^{\mu}_{\underline{\lambda\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} \tag{R-19}$$

e que o espaço só se distingue de um U_4 pela presença da torção(*). Assim não se pode fazer $\Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}} = 0$, e portanto, equações do campo unitário terão que ser diferenciais de $\Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}}$ igualados a zero. Por outro lado, se tomarmos condições em derivadas primeiras da torção elas irão ser condições em derivadas segundas das vierbeins por (R-2). Daí, é natural usar-se tais tipos de condições para possíveis equações de campo. As quantidades $G^{\mu\nu}$ (com 16 componentes) e $F^{\mu\nu}$ (com 6 componentes) são dadas por derivadas primeiras da torção.

(*) Assim (R-19) pode ser imaginada como uma perturbação na estrutura flat de U_4 se em expressões quadráticas em $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$ desprezarmos $\Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\lambda\nu}}\,\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\rho\sigma}}$ etc.

Considera-se então como possíveis equações do campo (elas são postuladas sem apelo a um princípio variacional)

$$G^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(R-20)}$$

$$F^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(R-21)}$$

Observe que $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, que é uma típica equação tipo Maxwell irá aqui ser dada por equações diferenciais de 3ª ordem nas vierbeins. Elas são 22 equações nas 16 componentes $h^{\mu}{}_{(\alpha)}$. Em virtude da identidade (R-12) se tem como solução de (R-21)

$$\Gamma_{\mu} = \partial_{\mu} \log \Psi \qquad \text{(R-22)}$$

Ψ sendo um campo escalar arbitrário

Note que

$$F^{\mu\nu} = \Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\rho} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\alpha\beta};\rho}$$

logo, se $F_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu};\rho} = 0$ então $F^{\mu\nu} = 0$, porém se $F^{\mu\nu} = 0$ isso não implica necessariamente que $F_{\mu\nu} = 0$, mas é compatível com esse resultado

Pode-se assim substituir o sistema (R-20), (R-21) pelo sistema

$$G^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \Gamma_{\mu} = \partial_{\mu} \log \Psi$$

que contém 20 equações. Elas se aplicam para determinar 17 quantidades: $h^{\mu}{}_{(\alpha)}$ e Ψ.

8.3 - *Aproximação de Campo Fraco nas Equações do Campo Unitário*

Vamos considerar a aproximação

$$h^{\mu}_{(\alpha)} = \delta^{\mu}_{\alpha} + r^{\mu}_{\alpha}$$

com r um infinitésimo de 1ª ordem. Os grupos de simetria da teoria são em geral:

(i) transformações arbitrárias de coordenadas

(ii) transformações globais de Lorentz

As transformações (i) são trazidas pelo fato que o espaço possue uma conexão, ou seja sob transporte paralelo de vetores existe uma variação δA^{μ}. As (ii) seguem da propriedade que a afinidade interna se anula em todos os pontos do espaço. Na aproximação linear as transformações tipo (i) degeneram nas (ii) (a menos de gauges) de forma que nada distinguirá os dois tipos anteriores de índices nessa aproximação.

De (R-2) vem nessa aproximação

$$\Gamma_{\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \delta^{\mu}_{\alpha}\, \partial_{\mu} r^{\alpha}_{\lambda}$$

Γ_{λ} torna-se um vetor de Lorentz. A equação $\Gamma_{\mu} = \partial_{\mu} \log \Psi$ assume a forma

$$\partial_{\mu} r^{\mu}_{\lambda} = \partial_{\lambda} \log \Psi \qquad \text{(R-23)}$$

Tem-se nessa aproximação

$$\Gamma^{\rho,\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\alpha}\Gamma^{\rho}_{\lambda\alpha} = \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\alpha}\, \frac{1}{2}\, (\partial_{\alpha} r^{\rho}{}_{\lambda} - \partial_{\lambda} r^{\rho}{}_{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2}\, (\partial_{\alpha} r^{\rho\mu} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} r^{\rho\nu})$$

daí, $\Gamma^{\rho,\underset{\vee}{\mu\nu}}\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$ é de 2ª ordem nos $\underline{r}$ e é desprezado. De (R-9)

$$\Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\nu} = \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha,\underset{\vee}{\mu\nu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\alpha\nu}} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\alpha}}$$

$$\simeq \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = \frac{1}{2}\left(\Box\, r^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\lambda}\frac{\partial^2 r^{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}\right) .$$

Logo, por (R-14) e (R-20) vem

$$\frac{1}{2}\, G^{\mu\sigma} \simeq \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{;\nu} \simeq \Gamma^{\sigma,\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0 ,$$

ou,

$$G^{\mu\sigma} = \Box\, r^{\sigma\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu} r^{\sigma\nu} = 0 \qquad \text{(R-31)}$$

As equações nessa aproximação são portanto (R-30) e (R-31). Na presente aproximação os grupos de simetria são as transformações de Lorentz e transformações de gauge sobre as vierbeins. Para essas transformações se tem:

$$r'^{\mu\nu}(x) = r^{\mu\nu}(x) + \xi^{\mu}_{,\alpha} r^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}_{,\beta} r^{\mu\beta} - \xi^{\alpha} r^{\mu\nu}_{,\alpha}$$

Portanto,

$$r'^{\mu\nu}_{,\nu}(x) = r^{\mu\nu}_{,\nu}(x) + \xi^{\mu}_{,\alpha} r^{\alpha\nu}_{,\nu} + \xi^{\mu}_{,\alpha\nu} r^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}_{,\beta} r^{\mu\beta}_{,\nu} +$$

$$+ \xi^{\nu}_{,\beta\nu} r^{\mu\beta} - \xi^{\alpha} r^{\mu\nu}_{,\alpha\nu} - \xi^{\alpha}_{,\nu}\, r^{\mu\nu}_{,\alpha}$$

Impondo a condição de gauge

$$r^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \qquad \text{(R-32)}$$

que implica em $r^{\underline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0$, $r^{\underset{\vee}{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0$, vem que as funções de gauge $\varepsilon^{\mu}(x)$ são condicionadas pelas relações

$$\xi^{\mu}{}_{,\alpha\nu}\, r^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta} r^{\mu\beta}{}_{,\nu} + \xi^{\nu}{}_{,\beta\nu} r^{\mu\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\nu} r^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = 0$$

trivialmente satisfeita em 1ª ordem. Espera-se que as componentes $r^{\underline{\mu\nu}}$ descrevam gravitação nessa aproximação:

$$r^{\underline{\mu\nu}} = \eta^{\nu\alpha} r^{\mu}{}_{\alpha}, \quad \text{simetrizado em } (\mu,\nu) \quad ,$$

portanto devem representar um campo de spin 2, ou seja, com 5 componentes independentes. Daí, torna-se necessário impor mais uma condição de gauge sobre $r^{\underline{\mu\nu}}$ além de (R-32) que são 4 condições. Como se faz usualmente em teorias de campos, vamos impor a condição

$$r = \eta_{\mu\nu} \; r^{\underline{\mu\nu}} = 0 \tag{R-33}$$

Das condições (R-32), (R-33) vem por (R-30),

$$\underset{\vee}{\partial_{\mu} r^{\mu}{}_{\lambda}} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} r^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_{\lambda} r^{\mu}{}_{\mu}\right) = \partial_{\lambda} \log \Psi = 0$$

que implica em $\log \Psi$ = constante, e portanto Ψ passa a ser uma constante nessa aproximação. Resta unicamente a equação (R-31), que pela condição (R-32) assume a forma

$$\Box\, r^{\sigma\mu} = 0$$

ou seja,

$$\Box\, r^{\underline{\sigma\mu}} = 0 \quad , \quad \Box\, r^{\underset{\vee}{\sigma\mu}} = 0 \tag{R-34}$$

As equações de campo serão portanto do tipo de equações de onda suplementadas pelas condições

$$r^{\underline{\sigma\mu}}{}_{,\sigma} = 0 \quad , \quad r = 0 \quad , \quad r^{\underset{\vee}{\sigma\mu}}{}_{,\sigma} = 0 \qquad \text{(R-35)}$$

Daí, segue-se que as equações em $r^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$ têm a forma de equações de Maxwell no vazio para a intensidade do campo eletromagnético. As equações em $r^{\underline{\alpha\beta}}$ têm a forma de equações de gravitação no vazio, para o campo de radiação. Nessa aproximação os campos estão desacoplados pois interações são fatores de 2ª ordem ($T_{\mu\nu}$ de Maxwell será quadrático nas $r^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$). Na teoria exata os campos gravitacionais e eletromagnéticos são dados pelas mesmas equações $G^{\mu\nu} = 0$ e $\Gamma_\mu - \partial_\mu \log \Psi = 0$ e não poderão ser separados como foi aqui por imposição de condições de gauge.

Entretanto, existem algumas dificuldades com a teoria exata e também com sua aproximação linear. Essa última descreve campos de radiação no vazio, porém descreve esses campos como se fossem livres, o que é inconsistente, pois em particular a radiação eletromagnética se acopla, em geral, com a radiação gravitacional através do tensor de Maxwell. Na teoria exata não se conhece em geral soluções exatas das equações de campo, o que torna difícil verificar as propriedades físicas da teoria. Pode-se em princípio, postular equações de movimento de partículas o campo por meio de equações do tipo

$$u^\alpha u^\mu{}_{;\alpha} = 0$$

ou seja,

$$u^\alpha u^\mu{}_{,\alpha} + u^\alpha u^\lambda\, \Gamma^\mu_{\underline{\lambda\alpha}} = 0$$

com $\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}$ dado por (R-26). Entretanto essas equações descreveriam o movimento de forma análoga tanto na teoria exata, quanto a teoria linearizada, desde que se conheça o valor de $\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}$,ou seja, se conhecermos o valor dos vierbeins $r^{(\lambda)}_{\alpha}$. Assim, já não existiria o resultado da teoria da relatividade geral onde as equações do movimento na teoria exata decorrem das equações de campo. Esse fato está relacionado à dificuldade de se isolar um termo com estrutura de $T_{\mu\nu}$ nas equações de campo (R-23). Outro detalhe negativo é que a torção intervém nas equações de campo mas não comparece nas equações de movimento de partículas no campo.

Em 1929, Levi-Civita mostrou que se pode obter os mesmos resultados da teoria unitária de Einstein trabalhando-se numa variedade de Riemann, o que mostra que em princípio a linguagem da curvatura ou a linguagem da torção separadamente podem descrever os mesmos resultados.

- Referências

A. Einstein - Berl. Ber. 217 e 224 (1928).

A. Einstein, W. Mayer - Berl. Ber. 110 (1930).

A. Einstein, W. Mayer - Sitz. Akad. Berl. 257 (1931).

T. Levi-Civita - Sitz. Akad. Wiss., Berlin 137 (1929)

T. Levi-Civita - A simplified presentation of Einstein's unified field equations, Blackie and Son, London, 1929.

R. Zaycoff - Z. Physik, 67, 135 (1931).
65 428 (1931).

- Referências recentes de assuntos relacionados à formulação unitária de Einstein com paralelismo global

K. Hayashi - Phys. Lett. 69B, nº 4, 441 (1977).

S. Miyamoto, T. Nakano - Prog. Th. Phys., 45, 295 (1971).

C. Pellegrini, J. Plebanski - Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 2, no. 4 (1962).

9 - *CONCEITOS SOBRE A TEORIA ASSIMÉTRICA DE EINSTEIN - SCHRÖDINGER*

Em relatividade geral e em geral nas teorias unitárias determinamos a expressão da conexão em função do tensor fundamental simétrico $g_{\mu\nu}$ pelas condições

$$D_\alpha g_{\mu\nu} = K_{\mu\nu,\alpha}$$

onde $K_{\mu\nu,\alpha}$ é fixado a priori. Assim, em relatividade geral $K_{\mu\nu,\alpha} = 0$, e com a restrição que a conexão seja simétrica, se obtém $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\{{\lambda \atop \mu\nu}\}$. Na teoria de Weyl, onde se introduz um campo de gauge ϕ_α acoplado à métrica $g_{\mu\nu}$ se tem

$$K_{\mu\nu,\alpha} = \phi_\alpha \, g_{\mu\nu}$$

e se obtém uma conexão semi-métrica do tipo visto antes.

Para completar a estrutura da teoria, necessitamos de equações de campo nos $g_{\mu\nu}$ que sejam diferenciais de 2ª ordem, e para tanto impomos condições sobre a curvatura $R_{\mu\nu}$, ou sobre o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, da forma

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad G_{\mu\nu} = 0$$

que são válidas na região exterior à matéria ponderável.

A definição do tensor de momentum-energia da matéria ponderável é fenomenologica, e se distingue portanto da definição da sua ação, ou seja, do campo $g_{\mu\nu}$ que é essencialmente geométrica. A introdução desse tensor no lado direito das equações de campo conduz ao sistema de equações válidas no ante -

Essa estrutura matemática, em geral, provêm de um princípio variacional que descreve as equações de campo e sua interação mínima com a matéria através do tensor $T_{\mu\nu}$, ou seja: postula-se uma densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_M$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a densidade Lagrangeana do campo gravitacional $\mathcal{L}_0 = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$) e $\mathcal{L}_M$ a densidade Lagrangeana da matéria ponderável ou da energia que gera o campo. As equações de campo são então obtidas como

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

onde $\delta\mathcal{L}_0/\delta g_{\mu\nu} = G^{\mu\nu}$, $\delta\mathcal{L}_M/\delta g_{\mu\nu} = \kappa\ T^{\mu\nu}$.

Essas considerações são válidas em relatividade geral. Considerações similares em teorias unitárias foram vistas antes, como por exemplo o princípio variacional de Einstein para a teoria de Weyl. Princípio variacional similar pode ser estendido em geral, para uma teoria unitária qualquer sob a forma

$$\delta \int \mathcal{L}\ d_4x = \theta$$

que por escolha adequada de $\mathcal{L}$ conduza às equações de campo da teoria na forma de Palatini:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad , \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}} = 0$$

Tais equações serão sempre do tipo "exterior", já que aqui não se introduz um $T_{\mu\nu}$ fenomenológico. A intenção básica dessas teorias é essencialmente reduzir todos os fatores que intervêm à geometria: assim agrupados conjuntamente estarão os efeitos gravitacionais, eletromagneticos e materiais todos dentro de um único campo generalizado. Uma teoria dessa natureza diz-se ser unitária, e já tratamos de alguns exemplos antes. Cumpre ressaltar que nem toda teoria unitária necessariamente segue-se de um princípio variacional, porém as mais bem formuladas, ou mais consistentes, possuem um princípio variacional.

Em 1945, Einstein propos sua última tentativa de uma teoria unitária, na qual trabalhou extensivamente até 1955, e que também foi desenvolvida e substanciada matematicamente por Schrödinger. Os princípios básicos dessa teoria são:

(i) Supõe-se que a conexão $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ e o tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ são assimétricos.

(ii) Trata-se de determinar as relações que ligam $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ ao tensor fundamental $g_{\mu\nu}$.

(iii) Trata-se de determinar as equações que ligam a curvatura e torção ao tensor fundamental $g_{\mu\nu}$, como parte das equações do campo unitário.

Para isso supõe-se existir um princípio variacional de Palatini que generalize o princípio correspondente da relatividade geral. Nesse ponto existe uma grande arbitrariedade na escolha da densidade Lagrangeana. Ela deve ser dependente de elementos associados à curvatura e à torção, porém pode-se definir diversos elementos desse tipo:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}$$

$$P_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\rho\mu\nu}$$
$$\Gamma_{\rho} = \Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}$$

e teremos diversas densidades escalares viáveis:

$$L_1 = D^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad , \quad D^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \quad , \quad g = \det\ g_{\mu\nu}$$
$$L_2 = D^{\mu\nu}\, P_{\mu\nu}$$
$$L_3 = D^{\mu\nu}\, \Gamma_{\mu}\, \Gamma_{\nu}$$

Einstein baseou sua teoria na densidade L_1 a qual é a mais simples generalização da L da relatividade geral e que conduz à equações, em princípio, coerentes. De fato, L_2 só faz intervir a parte antissimétrica da densidade $D^{\mu\nu}$ e L_3 não contêm a curvatura e portanto isoladamente não são quantidades básicas.

9.1 - *Alguns Resultados Matemáticos Associados à Teoria De Einstein*

Se a conexão afim não é simétrica, teremos dois tipos de variações num deslocamento paralelo, que serão denotados por:

$$\delta \overset{\mu}{A^{+}} = - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} A^{\sigma} dx^{\rho}$$
$$\delta \overset{\mu}{A^{-}} = - \Gamma^{\mu}_{\rho} A^{\sigma} dx$$

e, portanto, teremos dois tipos de derivadas covariantes

$$A^{\underset{+}{\mu}}{}_{;\rho} = \partial_{\rho} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\, A^{\sigma}$$
$$A^{\underset{-}{\mu}}{}_{;\rho} = \partial_{\rho} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\, A^{\sigma}$$

$$A_{\underset{+}{\mu};\rho} = \partial_\mu A_\mu - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} A_\sigma$$

$$A_{\underset{-}{\mu};\rho} = \partial_\mu A_\mu - \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} A_\sigma$$

Tem-se: $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\underline{\nu\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$, e com a torção define-se o quadrivetor:

$$\Gamma_\rho = \Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\rho\sigma}}$$

Usaremos a teoria de Einstein sob a forma complexa, onde o tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ e a conexão $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ são matrizes Hermitianas nos índices covariantes:

$$g^{*}_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \ , \quad \overset{*}{\Gamma}{}^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$$

Essa escolha não tem diferença marcante no processo matemático de obtenção das equações de campo, que seguem igualmente, mesmo que esses tensores sejam reais, porém a escolha de quantidades complexas permite a obtenção direta da teoria em termos de vierbeins, o que não é possível de forma fechada se os tensores fossem reais. Segue-se que

$$g_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}} + i\omega_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$$

ou seja: $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = i\omega_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ com resultado análogo para $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$.

9.2 - *Equações de Campo da Teoria*

Vamos usar L_1 como a densidade escalar básica do princípio variacional. Trataremos os $D^{\mu\nu}$ e a afinidade como 16+64 funções independentes de campo (princípio variacional de Palatini).

Iremos usar a afinidade segundo a definição sugerida por Schrödinger: em vez de $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ usamos uma outra afinidade $W^{\rho}_{\mu\nu}$, dotada de vetor de torção $W_{\mu} = W^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\rho}}$ e com ela determinamos $R_{\mu\nu}(W)$. Então se tem

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(W) \tag{S-1}$$

a ligação entre W e Γ sendo dada por

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = W^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\delta^{\rho}_{\mu}\,W_{\nu} \tag{S-2}$$

tal que $\Gamma_{\mu} = \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0$. As equações de Euler-Lagrange do princípio variacional de Palatini assumem a forma

$$\begin{cases} \overset{\mu\nu}{\mathcal{D}^{+-}}{}_{|\rho} = -\frac{2}{3}\,\delta^{\nu}_{\rho}\,\mathcal{D}^{\mu\sigma}W_{\sigma} + \mathcal{D}^{\mu\nu}W_{\rho} & \text{(S-3)} \\[2ex] \partial_{\rho}\mathcal{D}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0 & \text{(S-4)} \\[2ex] R_{\mu\nu}(W) = 0 & \text{(S-5)} \end{cases}$$

onde indicamos por $|$ a derivação covariante em relação à afinidade W. Os detalhes de obtenção dessas equações pelo princípio variacional serão vistos detalhadamente na Seção 10, que se segue. Escrevendo-se as equações em termos da conexão Γ se tem:

$$\begin{cases} \overset{\mu\nu}{\mathcal{D}^{+-}}{}_{;\rho} = 0 & \text{(S-6)} \\ \partial_{\rho}\mathcal{D}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0 & \text{(S-7)} \\ R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = 0 & \text{(S-8)} \\ R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) = \frac{2}{3}\,(W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu}) & \text{(S-9)} \end{cases}$$

onde ; indica derivação covariante em relação à afinidade Γ. Fundamentalmente (S-7) estaria de certa forma relacionada à equação de Maxwell em presença de gravitação, enquanto que (S-9) seria a parte restante dessas equações que definiriam a intensidade de campo em termos dos potenciais eletromagnéticos, esses últimos relacionados ao vetor W_μ da torção. As (S-8) seriam as equações que substituiram as equações de Einstein da gravitação. Finalmente (S-6) aqui exprime o fato que nessa teoria a conexão $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ não é dada a priori como sendo $\{^{\rho}_{\mu\nu}\}$ tal como em relatividade geral (espaço de Riemann), mas é também um elemento dinâmico da teoria e que, portanto, é solução de uma das equações de campo. De qualquer forma (S-6) é a equação que generaliza a condição de Riemann $D^{\mu\nu}{}_{;\rho} = 0$ com $D^{\mu\nu} = D^{\nu\mu}$. Tal generalização implica que $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \{^{\rho}_{\mu\nu}\}$ + termos adicionais tensoriais, tais termos extras são elementos dinâmicos na teoria e envolvem a torção, ou seja, o eletromagnetismo. Do ponto de vista prático, esse sistema de equações é evidentemente muito mais complicado do que o sistema correspondente em relatividade geral (sistema de Einstein-Maxwell).

9.3 - *As Identidades de Bianchi Contraídas Generalizadas*

Numa variedade de Riemann um tensor $S_\mu{}^\rho$ função de $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas de 1ª e 2ª ordem e que satisfaz às condições

$$\nabla_\rho \, S_\mu{}^\rho \equiv 0$$

é necessariamente da forma

$$S_{\mu}{}^{\rho} = R_{\mu}{}^{\rho} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu}^{\rho}\,(R - 2\lambda)$$

onde $R_{\mu\rho}$ é o tensor contraído de Riemann-Christoffel. Para $\lambda \to 0$, S é o tensor de Einstein.

Tais identidades existem também na teoria unitária de Einstein, sua obtenção sendo a seguinte: considere as identidades de Bianchi numa variedade dotada de conexão assimétrica

$$R^{\tau}{}_{\nu\sigma\mu|\rho} + R^{\tau}{}_{\nu\mu\rho|\sigma} - R^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma|\mu} + 2W^{\alpha}_{\sigma\rho}\,R^{\tau}{}_{\nu\alpha\mu} +$$

$$+ 2W^{\alpha}_{\rho\mu}\,R^{\tau}{}_{\nu\alpha\sigma} + 2W^{\alpha}_{\mu\sigma}\,R^{\tau}{}_{\nu\alpha\rho} \equiv 0$$ (todas as derivadas covariantes são do tipo +)

derivadas covariantes se referem à conexão W e a curvatura se refere à essa conexão. Contraindo (τ,μ) se tem:

$$(g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma})_{|\rho} - (\rho^{\nu\sigma}R_{\nu\rho})_{|\sigma} - (g^{\nu\sigma}R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho})_{|\mu} + 2R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma}g^{\nu\sigma}\,W^{\alpha}_{\rho\mu} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,g^{\nu\sigma}\,(R_{\nu\sigma}W_{\rho} - R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho}W_{\mu}) \equiv 0 \qquad \text{(S-10)}$$

A equação tensorial correspondente à equação em densidade (S-6) é $g^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} = 0$. Dessa equação se tem

$$\partial_{\rho}g^{\mu\nu} = -\,(\Gamma^{\mu}_{\tau\rho}g^{\tau\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\tau}g^{\mu\tau}) \qquad \text{(S-11)}$$

Schrödinger e Bose obtiveram independentemente as condições de integrabilidade das equações (S-11) como(*):

(*) E. Schrödinger - The final affine law III - Proc. Ir. Ac. Sci. 52A, 1 (1948). S. Bose - C.R. Ac. Sci. 236, 1333 (1953).

$$R^{\mu}{}_{\lambda\sigma\rho}(\Gamma)g^{\lambda\nu} + \tilde{R}^{\nu}{}_{\lambda\sigma\rho}(\Gamma)g^{\mu\lambda} \equiv 0 \qquad (S\text{-}12)$$

onde $\tilde{R}^{\nu}{}_{\lambda\sigma\rho}(\Gamma)$ é o tensor de curvatura para a conexão $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$, ou seja simbolicamente: $\tilde{R}^{\nu}{}_{\lambda\sigma\rho}(\Gamma) = R^{\nu}{}_{\lambda\sigma\rho}(\Gamma^{T})$.

Contraindo (ν,σ) em (S-12) vem

$$g^{\lambda\nu}R^{\mu}{}_{\lambda\nu\rho}(\Gamma) \equiv g^{\mu\lambda}R_{\rho\lambda}(\Gamma)$$

escrevendo essa identidade em relação à conexão W de (S-2) tem-se

$$g^{\lambda\nu}R^{\mu}{}_{\lambda\nu\rho}(W) \equiv g^{\mu\lambda}R_{\rho\lambda}(W) \qquad (S\text{-}13)$$

Recordando que as derivadas em (S-10) são do tipo +, e usando (S-13) teremos para (S-10)

$$\partial_{\mu}(\mathcal{D}^{\mu\nu}R_{\rho\nu}(W)+\mathcal{D}^{\nu\mu}R_{\nu\rho}(W)) - \mathcal{D}^{\mu\nu}\partial_{\rho}R_{\mu\nu}(W) \equiv 0 \qquad (S\text{-}14)$$

fazendo

$$H_{\rho}{}^{\mu} = \frac{1}{2}\,(g^{\underset{+-}{\mu\nu}}\, R_{\underset{--}{\rho\nu}}(W) + g^{\underset{+-}{\nu\mu}}R_{\underset{++}{\nu\rho}}(W)) - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\rho}\; g^{\underset{+-}{\lambda\tau}}R_{\underset{+-}{\lambda\tau}}(W) \qquad (S\text{-}15)$$

(S-14) assume a forma, na conexão W

$$H_{\rho}{}^{\mu}{}_{|\mu} \equiv 0 \qquad (S\text{-}16)$$

obviamente essa identidade também pode ser escrita usando-se a conexão Γ, e o resultado é:

$$K_{\rho}{}^{\mu}{}_{;\mu} \equiv 0 \qquad (S\text{-}17)$$

$$K_\rho{}^\mu = \frac{1}{2}\,(g^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}\; R_{\underset{-}{\rho}\underset{-}{\nu}}(\Gamma) + g^{\underset{+}{\nu}\underset{-}{\mu}}\; R_{\underset{+}{\nu}\underset{+}{\rho}}(\Gamma)) - \frac{1}{2}\,\delta^\mu_\rho\, g^{\underset{+}{\lambda}\underset{-}{\tau}}\; R_{\underset{+}{\lambda}\underset{-}{\tau}}(\Gamma)$$

Vê-se, portanto que $H_\rho{}^\mu(W)$ ou $K_\rho{}^\mu(\Gamma)$ são os tensores correspondentes ao tensor de Einstein $G_\rho{}^\mu(\{\,\dot{}\,\})$ da relatividade geral, as identidades contraídas de Bianchi generalizadas sendo (S-16) ou equivalentemente (S-17). O método seguido aqui é devido a S. Mavridès(*). Tal como se faz em espaços de Riemann, é possível re-obter-se as identidades de Bianchi pela invariância da Ação sob transformações arbitrárias de coordenadas, isso foi feito por A.Lichnerowicz(**).

9.4 - *Discussões Sobre as Equações de Campo e Resultados da Teoria*

As equações de campo (S-6) podem, eventualmente, ser agregadas de um fator cosmológico:

$$D^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} = 0 \qquad \text{(S-18)}$$

$$\partial_\rho D^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0 \qquad \text{(S-19)}$$

$$R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = \lambda\, \gamma_{\mu\nu} \qquad \text{(S-20)}$$

$$R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) = \lambda\phi_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) \qquad \text{(S-21)}$$

com $\gamma_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}}$, $\phi_{\mu\nu} = g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$. O fator cosmológico proviria de se fazer $L_1 \to L_1 + \lambda\,\sqrt{-g}$. Essas equações se referem a uma conexão Γ com vetor de torção nulo. Fazendo

(*) S. Mavridès - C.R. Ac. Sc. 244, 2482 (1957).

(**) A. Lichnerowicz - Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnétisme - Masson-Paris, 254-288 (1955).

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \{{}^{\rho}_{\mu\nu}\} + u^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \{{}^{\rho}_{\mu\nu}\} + \theta^{\rho}_{\mu\nu} \qquad (S\text{-}22)$$

com $\{{}^{\rho}_{\mu\nu}\}$ indicando os símbolos de Christoffel para os $\gamma_{\mu\nu}$. Obtém-se então equações para $R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma)$ e $R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma)$, ou sejam as (S-20), (S-21) em termos dessa conexão (S-22)'. Não reproduziremos os detalhes que são longos (ver Tonnelat - les théories unitaires de l'electromagnetisme et de la gravitation, pagina 319).

Vamos a seguir discutir a gênese de formação de um tensor de momentum-energia nessa teoria. Tal definição é evidentemente de interesse físico e ao mesmo tempo forneceria uma comparação com a relatividade geral. Temos:

(i) A teoria rigorosamente só possue uma "região exterior" desde que suas equações são puramente geométricas.

(ii) Qualquer que seja a estrutura do tensor $T_{\mu\nu}$ de momentum-energia ele deve ser extraído do 1º membro de (S-20), ou seja, o tensor $R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma)$. Porém tal processo vai depender basicamente da forma da afinidade Γ.

(iii) A forma de Γ depende basicamente da métrica, ou seja de como definimos $\Gamma = \Gamma(g)$ tal que (S-18) seja satisfeita.

(iiii) Como deve ser a escolha da métrica ? Ela é $g_{\underline{\mu\nu}}$ ou $g_{\mu\nu}$? Escolher a métrica como $g_{\underline{\mu\nu}}$ não é matematicamente rigoroso na teoria exata (embora o seja numa linearização da teoria) pois destroi a simetria da teoria. Entretanto, caso não se possa fazer nada melhor tomaríamos métrica = $g_{\underline{\mu\nu}}$. Assim temos duas possibilidades:

(a) métrica = $g_{\underline{\mu\nu}}$
(b) métrica = $g_{\mu\nu}$.

(iiiii) Vamos discutir o caso (a) anterior. Se $g_{\underline{\mu\nu}}$ é a métrica, existe $\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\}$ construído com $g_{\underline{\mu\nu}}$ e formamos então o tensor de Riemann-Christoffel $G^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma}$ e temos sua contração $G_{\underline{\nu\sigma}}$. Daí, podemos sempre tomar para $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ uma expressão da forma (S-22), substituir essa expressão em $R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma)$ e obter

$$\begin{cases} R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = E_{\underline{\mu\nu}} + T_{\underline{\mu\nu}} \\ \\ E_{\underline{\mu\nu}} = G_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\, g_{\underline{\mu\nu}}\, G \end{cases}$$

ou então,

$$R_{\underline{\mu\nu}} = G_{\underline{\mu\nu}} + \tau_{\underline{\mu\nu}}$$

Entretanto, sabemos por argumentos físicos que a métrica deve depender do tensor de Maxwell $\underset{M}{T}{}^{\mu\nu}$ e do tensor material $\rho_{\mu\nu}$, o qual por sua vez, depende do campo eletromagnético. Assim, teríamos a cadeia

$$T_{\mu\nu} \leftarrow \text{métrica} \leftarrow \begin{cases}\text{tensor de Maxwell} \\ \text{tensor material}\end{cases} \leftarrow \text{campo eletromagnético.}$$

Numa teoria onde todas essas quantidades estão intimamente relacionadas tal como a presente, tal cadeia não possue evidentemente um significado bem determinado, basta notar que na teoria exata campo eletromagnético e gravitacional devem ser a "métrica", só que nesse caso já quebramos essa simetria tomando a escolha (a) anterior.

Um raciocínio simples mostra também que o caso (b) anterior, ainda é mais difícil de ser realizado pois quebraria a ordem a cadeia acima.

Se por acaso, num dado caso específico, a cadeia acima fizer sentido, deveríamos no final re-obter que $T_{\mu\nu} = \underset{M}{T}{}^{\mu\nu} +$

$+ \rho_{\mu\nu}$, ou seja, a cadeia se fecha:

$$\begin{tikzcd} T_{\mu\nu} \arrow[rr, bend left] & \text{métrica} \arrow[l] \arrow[rr, Rightarrow, bend right] & \left\{\begin{matrix} T^{\mu\nu}_{M} \\ \rho_{\mu\nu}\end{matrix}\right. \arrow[l] & F_{\mu\nu} \arrow[l] & j_{\mu} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

A dupla seta simplesmente descreve o acoplamento gravitação x x eletromagnetismo característico da teoria de Einstein-Maxwell, o qual não influe na discussão anterior, já que ele é presente em qualquer teoria self acoplada.

Na teoria de Einstein-Maxwell (relatividade geral) não existe o último fator à esquerda nessa sequência, já que $T_{\mu\nu}$ nesse caso é dado fenomenologicamente.

Concluimos então que:

(1) Na teoria exata é muito difícil interpretar-se essa sequência consistentemente, pois ela quebra as simetrias da teoria.

(2) Em casos particulares, onde existam vetores de Killing que permitam obter-se parte da métrica por argumentos cinemáticos, pode ser possível, em princípio, que a sequência anterior tenha sentido. A parte não determinada da métrica pode ser tal que colocando-a nas equações de campo se obtenha a sequência anterior de modo consistente. Nesse caso, praticamente a métrica está determinada pelas simetrias $\Longrightarrow$ $T_{\mu\nu}$ está determinado pelas simetrias e é igual ao tensor canônico que gera um tal campo métrico. Como exemplo teríamos o campo generalizado de Schwarzschild nessa teoria, e soluções das equações de campo nesse caso são conhecidas, se bem que apresentem problemas relacionados ao movimento de partículas testes carregadas.

(iiiiii) Outra possibilidade seria linearizar as equações de campo e estudar sua estrutura. Entretanto, existe ainda uma possibilidade mais geral: não se introduz nenhuma hipótese em $\gamma_{\mu\nu}$ e supõe-se que $|\phi_{\mu\nu}| << 1$ assim como suas derivadas. Faz-se então a expansão em potências de um parâmetro infinitamente pequeno ε:

$$\phi_{\mu\nu} = \varepsilon \underset{1}{\phi}_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \underset{2}{\phi}_{\mu\nu} + \ldots$$

Nessa aproximação $\gamma_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}}$ é a métrica. Após cálculos longos se obtêm em 1ª ordem as equações: de (S-7) vem

$$\partial_\rho(\sqrt{-\gamma}\ \phi^{\underline{\mu\rho}}) = \nabla_\rho \phi^{\underline{\mu\rho}} = 0 \quad (\text{ou } \nabla_\rho \phi_{\mu\rho} = 0) \qquad \text{(S-23)}$$

de (S-9) vem

$$\Box\, \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla^\rho \phi_{\mu\nu\rho} = \frac{2}{3}(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) \qquad \text{(S-24)}$$

onde índices sublinhados são aqueles erguidos com a métrica $\gamma^{\mu\nu}$:

$$\phi^{\underline{\mu\rho}} = \gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\rho\nu}\phi_{\alpha\nu}$$

Em (S-24) usou-se a notação

$$\phi_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu\phi_{\nu\rho} + \partial_\rho\phi_{\mu\nu} + \partial_\nu\phi_{\rho\mu}$$

$$= \nabla_\mu\phi_{\nu\rho} + \nabla_\rho\phi_{\mu\nu} + \nabla_\nu\phi_{\rho\mu}$$

∇_α sendo a derivada covariante Riemanniana em relação a conexão $\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\}$ construída com a métrica $\gamma_{\mu\nu}$. De (S-8) vem

$$R_{\mu\nu} - \nabla^{\rho}(\phi_{\mu\lambda}\nabla^{\lambda}\phi_{\nu\rho} + \phi_{\nu\lambda}\nabla^{\lambda}\phi_{\mu\rho}) + \frac{1}{2}\nabla^{\rho}(\phi_{\mu\lambda}\phi_{\nu\rho}{}^{\lambda} + \phi_{\nu\lambda}\phi_{\mu\rho}{}^{\lambda})$$
$$- \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\log g - (\nabla_{\sigma}\phi_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\phi_{\mu\rho\sigma})(\nabla^{\rho}\phi^{\sigma}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\phi^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\rho}) = 0 \qquad \text{(S-25)}$$

As equações (S-23) e (S-24) se referem ao campo eletromagnético e (S-25) ao campo gravitacional.

Escrevendo

$$\partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu} = -\frac{3}{4}XF_{\mu\nu}$$

obteremos de (S-24)

$$\Box\,\phi_{\mu\nu} = -XF_{\mu\nu} - G^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu}\,\phi_{\tau\sigma} \qquad \text{(S-26)}$$

onde $G^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu}$ é o tensor de Riemann-Christoffel e $\Box = \nabla^{\rho}\nabla_{\rho}$. Da expressão de $\phi_{\mu\nu\rho}$ vem

$$\nabla^{\rho}\phi_{\mu\nu\rho} = \Box\,\phi_{\mu\nu} - G^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\,\phi_{\rho\sigma}$$

usando-se (S-26) obtemos

$$\nabla^{\rho}\phi_{\mu\nu\rho} = -XF_{\mu\nu} - 2G^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\,\phi_{\rho\sigma} \qquad \text{(S-27)}$$

A teoria é complicada nessa aproximação pois temos dois tensores antissimétricos $F_{\mu\nu}$ e $\phi_{\mu\nu}$ ligados por (S-27), o que é demasiado para descrever eletromagnetismo. Para a equação (S-25) que descreve a gravitação, temos após algumas transformações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R = X\,(\tau_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + X_{\mu\nu} + Y_{\mu\nu})$$

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\chi}(\phi_{\mu\tau}F_{\nu}{}^{\tau} + \phi_{\nu\tau}F_{\mu}{}^{\tau}) + \frac{1}{4\chi}\gamma_{\mu\nu}\phi_{\lambda\tau}F^{\lambda\tau}$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi}(\phi_{\tau\mu\rho}\phi^{\tau}{}_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{6}\gamma_{\mu\nu}\phi^{\rho\sigma\lambda}\phi_{\rho\sigma\lambda})$$

$$X_{\mu\nu} = \frac{1}{\chi}\Big[(\nabla^{\rho}\phi_{\nu\lambda})(\nabla^{\lambda}\phi_{\mu\rho}) + \frac{1}{4}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\phi_{\rho\sigma}\phi^{\underline{\rho\sigma}}) -$$

$$- \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(\nabla_{\lambda}\phi_{\rho\sigma})(\nabla^{\lambda}\phi^{\underline{\rho\sigma}}) + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})\Big]$$

$$Y_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\chi}\Big[G^{\rho\sigma}{}_{\nu\tau}\phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu}{}^{\tau} + G^{\rho\sigma}{}_{\mu\tau}\phi_{\rho\sigma}\phi_{\nu}{}^{\tau} - \frac{3}{2}\gamma_{\mu\nu}G^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau}\phi_{\rho\sigma}\phi^{\underline{\lambda\sigma}}\Big]$$

Vemos assim que a teoria é muito complicada e envolve no lado direito das equações da gravitação vários tensores fontes, dos quais somente $\tau_{\mu\nu}$ possue interpretação clássica como sendo o tensor de Maxwell se $\phi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$.

Pode-se, sucessivamente, fazer aproximação de perturbações nas componentes simétricas $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \underset{1}{\gamma}_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \underset{2}{\gamma}_{\mu\nu} + \dots$$

as equações de campo em 1ª ordem são (eletromagnéticas)

$$\eta^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\underset{1}{\phi}_{\mu\sigma} = 0$$

$$\overset{o}{\Box}\underset{1}{\phi}_{\mu\nu} = -\chi\underset{1}{F}_{\mu\nu} \quad , \quad \Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$$

com as condições

$$\eta^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\underset{1}{\phi}_{\mu\nu\rho} = -\chi\underset{1}{F}_{\mu\nu}$$

$$\eta^{\rho\sigma}\,\partial_\rho \underset{1}{F}_{\mu\sigma} = 0$$

$$\overset{o}{\Box}\,\underset{1}{\phi}_{\mu\nu\rho} = 0$$

para a gravitação tem-se

$$\underset{1}{R}_{\mu\nu} = 0$$

Verificamos assim que a aproximação puramente linear (1ª ordem) descreve gravitação desacoplada do eletromagnetismo, o que não é coerente pois sabe-se experimentalmente que o desvio de raios luminosos em presença de massas gravitantes pode ser explicado por teorias de gravitação em relatividade restrita, ou mais simplesmente ainda, por modelos newtonianos se supuzermos que fótons têm massa $h\nu/c^2$. O acoplamento gravitação x eletromagnetismo acontecer na aproximação de 2ª ordem, onde as equações da gravitação são

$$\underset{2}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,\underset{2}{R} - \frac{1}{2}\,\gamma_{\mu\nu}\,\underset{1}{R} = \chi\,(\underset{2}{\tau}_{\mu\nu} + \underset{2}{M}_{\mu\nu} + \underset{2}{X}_{\mu\nu})$$

entretanto, isso não soluciona o fato que em 1ª ordem os campos estejam desacoplados. Além disso os termos fontes são novamente muito complicados e não regeneram a teoria de Einstein-Maxwell.

Devido à limitação de tempo disponível nesse curso não continuaremos a discussão dos problemas relacionados com a teoria assimétrica de Einstein. O leitor interessado poderá encontrar discussões dessa natureza nas referências sobre esse assunto.

- <u>Referências sobre a teoria assimétrica de Einstein</u>

Existe na literatura uma extensa lista de trabalhos sobre a teoria de Einstein-Schrödinger. Presentemente citaremos somente uma lista parcial desses trabalhos.

A. Einstein - A generalization of the relativistic theory of gravitation - Ann. Math., Princeton, <u>46</u> , 578 (1945); <u>47</u>, 146, 731 (1945).

- The meaning of relativity - App. II - 2ª Ed.
- App. II - 5ª Ed.

A. Einstein, B. Kaufman - Ann. Math. U.S.A., <u>59</u>, 230 (1954).

A. Einstein, E. Strauss - J. Math., <u>47</u>, 731 (1946.

E. Schrödinger - Proc. Roy. Ir.Acad., <u>49A</u>, 43, 135 (1943).
- Proc. Roy. Ir.Acad., <u>49A</u>, 225,237,275 (1944).
- Proc. Roy. Ir.Acad., <u>51A</u>, 147 (1947).
- Proc. Roy. Ir.Acad., <u>51A</u>, 163 (1947)
- Proc. Roy. Ir.Acad., <u>52A</u>, 1 (1948).
- Proc. Roy. Ir.Acad., <u>54A</u>, 79 (1951).

G. Stephenson, C.W. Kilmister - Nuovo Cim. <u>11</u>, 91,118 (1954).

E. Strauss - Rev. Mod. Phys. <u>21</u>, 414 (1949).

M.A. Tonnelat - C.R.Ac. Sci., 230, 182 (1950).
" " , 231, 470 (1950).
" " 232, 2407 (1951).

B. Kursunoglu - Phys. Rev. <u>88</u>, 1369 (1952).

10 - *GENERALIZAÇÃO DA TEORIA ASSIMÉTRICA - PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA COM A FORMULAÇÃO DE EINSTEIN-MAXWELL DA RELATIVIDADE GERAL*

10.1 - *As Equações de Campo*

Em relação a um campo assimétrico $g_{\mu\nu}$ define-se como uma possível forma de variação das componentes de um vetor A^{μ} sob transporte paralelo:

$$\delta A^{\mu} = - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta} \tag{G-1}$$

impondo que o "comprimento" do vetor A^{μ} é invariante sob transporte paralelo: (tal "comprimento" é um complexo)

$$\delta(A_{\mu}A^{\mu}) = \delta A_{\mu} A^{\mu} + A_{\mu} \delta A^{\mu} = 0 \tag{G-2}$$

segue-se de (G-1) que

$$\delta A_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A_{\alpha} dx^{\beta} \tag{G-3}$$

a ordem de posicionamento dos índices covariantes da afinidade é importante tanto em (G-1) quanto em (G-3). A afinidade se decompõe em duas parcelas

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\underline{\mu\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\beta}}$$

tal que sob transformações de coordenadas se tem:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial^{2} x^{\delta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

Em decorrência disso segue diretamente que a torção $\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\beta}}$ é um tensor de 3ª ordem. Vamos considerar que tanto a parte antissimétrica de $g_{\mu\nu}$ quanto de $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ sejam quantidades imaginárias

$$g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = i \; f_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \quad , \quad \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = i \; \Omega^{\alpha}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \tag{G-4}$$

Daí, vem que $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ são Hermitianos:

$$\overset{*}{g}_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad , \quad \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{G-5}$$

O vetor A^{μ} usado inicialmente pode ser em geral complexo. Se tal ocorrer, o escalar $\overset{*}{A}_{\nu}A^{\nu}$ é também invariante sob a operação δ. De fato, de (G-3) vem:

$$\delta\overset{*}{A}_{\mu} = + \; \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \; \overset{*}{A}_{\alpha} \; dx^{\beta} \tag{G-6}$$

que é diferente de $(\delta A_{\mu})^{*}$ a qual vale

$$(\delta A_{\mu})^{*} = + \; \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\beta}\overset{*}{A}_{\alpha}dx^{\beta} = \; \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} \; \overset{*}{A}_{\alpha}dx^{\beta}$$

Então:

$$\begin{aligned}\delta(\overset{*}{A}_{\nu}A^{\nu}) &= \delta\overset{*}{A}_{\nu}A^{\nu} + \overset{*}{A}_{\nu} \; \delta A^{\nu} \\ &= (-\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \; + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}) \; A^{\nu}\overset{*}{A}_{\alpha}dx^{\beta} = 0\end{aligned}$$

Definindo:

$$A^{\mu} = A_{\nu} \; g^{\mu\nu} \tag{G-7}$$

vem

$$A_{\mu} = A^{\nu}g_{\nu\mu} \quad , \quad g^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = \delta^{\nu}{}_{\rho} \tag{G-8}$$

Como $g_{\mu\nu}$ é Hermitiano segue-se que

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = g^{\nu\mu}g_{\rho\mu} = \delta^{\nu}{}_{\rho} \qquad \text{(G-9)}$$

portanto, os escalares complexos $A_\nu A^\nu$ e $A^*_\nu A^\nu$ são do tipo $A_\nu A^\nu = g_{\lambda\nu}A^\nu A^\lambda$; $A^*_\nu A^\nu = g_{\nu\mu}A^\nu A^{*\mu}$ onde de (G-5) e (G-8)

$$A^*_\mu = A^{*\nu}\; g_{\mu\nu}$$

também se tem $A^{*\mu} = A^*_\nu\, g^{\nu\mu}$. Vê-se que $A_\nu A^\nu$ é complexo mesmo se os A forem reais pois a métrica é complexa. Entretanto, a quantidade $A^*_\nu A^\nu$ é real, desde que a métrica é Hermitiana.

Se considerarmos que a afinidade é assimétrica segue que existem duas maneiras de se definir a operação de transporte paralelo, vamos assim indicar (G-1) e (G-3) por $\delta A^{\overset{\mu}{+}}$ e $\delta A_{\underset{+}{\mu}}$. Assim pode-se também ter

$$\delta A^{\overset{\mu}{-}} = -\,\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}A^{\alpha}\, dx^{\beta}$$

$$\delta A_{\underset{-}{\mu}} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\, A_{\alpha}\, dx^{\beta}$$

Consequentemente existem duas formas de se definir derivadas covariantes:

$$dx^{\nu}\, A^{\overset{\mu}{+}}_{;\nu} = dA^{\mu} - \delta A^{\overset{\mu}{+}} \quad ; \quad A^{\overset{\mu}{+}}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\, A^{\alpha}$$

$$dx^{\nu}\, A^{\overset{\mu}{-}}_{;\nu} = dA^{\mu} - \delta A^{\overset{\mu}{-}} \quad ; \quad A^{\overset{\mu}{-}}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\, A^{\alpha}$$

similarmente ao que acontece na teoria de Einstein do campo unitário assimétrico(*). Para um tensor de 2ª ordem se tem

---

(*) Obviamente se tem $A^{\overset{\mu}{-}}_{;\nu} - A^{\overset{\mu}{+}}_{;\nu} = -\,2\Gamma^{\mu}_{\underline{[\alpha\nu]}}A^{\alpha} \neq 0$.

$$\omega^{\overset{\mu\nu}{+-}}_{;\alpha} = \omega^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}\,\omega^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\,\omega^{\mu\lambda}$$

$$\omega^{\overset{\mu\nu}{++}}_{;\alpha} = \omega^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}\omega^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}\,\omega^{\mu\lambda}$$

$$\omega^{\overset{\mu\nu}{--}}_{;\alpha} = \omega^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\,\omega^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\,\omega^{\mu\lambda}$$

Assim, em particular para a densidade tensorial fundamental $D^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}$ se terá várias escolhas de derivação covariante em particular uma delas é

$$D^{\overset{\mu\nu}{++}}_{;\alpha} = D^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}D^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}D^{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha}D^{\mu\nu}$$

Será de interesse usar-se a definição de Schrödinger da afinidade pela mesma razão que na teoria assimétrica de Einstein - -Schrödinger. Assim, usaremos em vez da afinidade $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ uma outra afinidade $W^{\lambda}_{\mu\nu}$ tal que

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = W^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,W_{\nu} \qquad \text{(G-10)}$$

$$W_{\nu} = W^{\sigma}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}\,(W^{\sigma}_{\nu\sigma} - W^{\sigma}_{\sigma\nu}) \qquad \text{(G- 1)}$$

Segue-se dessas relações que

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} = 0$$

ou seja, a afinidade $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ passa a ser desprovida de vetor de torção. Derivadas covariantes em relação a afinidade $W^{\lambda}_{\mu\nu}$ serão indicadas por uma barra, como exemplo

$$D^{\overset{\mu\nu}{++}}_{|\alpha} = D^{\mu\nu}_{,\alpha} + W^{\mu}_{\lambda\alpha}D^{\lambda\nu} + W^{\nu}_{\lambda\alpha}D^{\mu\lambda} - W^{\sigma}_{\sigma\alpha}D^{\mu\nu}$$

Uma curvatura de rotação é introduzida na variedade de acordo com a fórmula anterior: (similarmente ao espaço de Riemann)

$$\oint_{c} \underset{+}{\delta} A_{\mu} = \frac{1}{2} \iint R^{\nu}{}_{\mu\rho\sigma} A_{\nu} \, ds^{\rho\sigma}$$

$$R^{\nu}{}_{\mu\rho\sigma} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} = R^{\nu}{}_{\mu\rho\sigma}(\Gamma)$$

Essa variedade será desprovida de curvatura de homotetia da mesma maneira que na teoria de Einstein-Schrödinger, pois iremos ver que $g_{\mu\nu}$ será covariantemente constante numa certa escolha de derivação. A 1ª contração da curvatura é

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma}(\Gamma) = (\partial_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}) - (\partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})$$

que não é mais simétrico tal como era num espaço de Riemann.

O próximo estágio será a introdução de uma estrutura de campo por meio de um princípio variacional, similarmente ao que é feito na teoria de Einstein do campo assimétrico.

Escrevendo o princípio de Ação na forma

$$\delta \int \mathcal{L} \, d^4x = 0 \qquad \text{(G-12)}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(W) + \frac{4\pi G}{k^2 c^4} \mathcal{D}^{\mu\nu}_{\vee} \, g^{\nu\mu}_{\vee} \qquad \text{(G-13)}$$

onde $R_{\mu\nu}(W)$ é a 1ª contração da curvatura para a afinidade $W^{\alpha}_{\mu\nu}$, e $\underline{k}$ é uma constante imaginária a ser especificada mais tarde, pode-se obter as equações do campo por variações em $\mathcal{D}^{\mu\nu}$ e $W^{\lambda}_{\mu\nu}$ (Palatini).

Obtêm-se

$$\delta \int d_4x \left[D^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}(W) + {}^*R_{\mu\nu}(W)\delta D^{\mu\nu} \right] = 0 \qquad (G\text{-}14)$$

com

$$ {}^*R_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(W) + \frac{4\pi G}{k^2c^4} \; I_{\mu\nu} \qquad (G\text{-}15)$$

$$I_{\mu\nu} = -(g_{\mu\nu} + g^{\lambda\beta}g_{\beta\nu}g_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} g^{\beta\lambda}g_{\beta\lambda}g_{\mu\nu}) \qquad (G\text{-}16)$$

....

Os cálculos que conduzem a (G-14) são:

$$\delta \int L\, d^4x = \int \left[D^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta D^{\mu\nu} + \alpha\delta D^{\mu\nu}\, g_{\nu\mu} + \alpha D^{\mu\nu}\delta g_{\nu\mu} \right]$$

com $\alpha = 4\pi G/k^2c^4$, e usando que $D^{\mu\nu}g_{\nu\mu} = D^{\mu\nu}g_{\nu\mu}$. Tem-se então que exprimir $\delta g_{\nu\mu}$ em função de $\delta D^{\mu\nu}$. Para isso use que

$$g_{\mu\lambda}g^{\nu\lambda} = \delta^\nu_\mu \longrightarrow g_{\mu\lambda}D^{\nu\lambda} = \sqrt{-g}\; \delta^\nu_\mu \; .$$

logo,

$$\delta g_{\mu\lambda}D^{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}\delta D^{\nu\lambda} = \delta^\nu_\mu \, \frac{1}{2} \sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\, \delta g_{\alpha\beta} \; .$$

multiplique por $g_{\nu\beta}$, e use $D^{\nu\lambda}\, g_{\nu\beta} = \sqrt{-g}\, \delta^\lambda_\beta$

$$\sqrt{-g}\; \delta^\lambda_\beta \;\; \delta g_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\beta}\; \delta D^{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\; \delta^\nu_\mu \; g^{\alpha\beta}g_{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

$$\sqrt{-g}\; \delta g_{\mu\beta} = - g_{\mu\lambda}g_{\nu\beta}\delta D^{\nu\lambda} + g_{\mu\beta}\, \delta\sqrt{-g} \quad ,$$

como,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \; \sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, D^{\alpha\beta}\; \delta g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\, \delta(D^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\; \delta D^{\alpha\beta}$$

mas

$$D^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\alpha}\sqrt{-g} = 4\sqrt{-g} \quad ,$$

assim,

$$\delta\sqrt{-g} = 2\,\delta\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,\delta D^{\alpha\beta}$$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,\delta\,D^{\alpha\beta}$$

Substituindo na expressão anterior dando $\sqrt{-g}\ \delta g_{\mu\beta}$, teremos:

$$\sqrt{-g}\ \delta g_{\mu\beta} = -\,g_{\mu\lambda}g_{\nu\beta}\delta D^{\nu\lambda} + \frac{1}{2}\,g_{\mu\beta}g_{\alpha\rho}\,\delta D^{\alpha\rho}$$

no último termo na variação da Ação use que $D^{\mu\nu}\delta g_{\underset{\vee}{\nu\mu}} = -D^{\mu\nu}\delta g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = -D^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Daí, usando a expressão anterior que dá $\delta g_{\mu\beta}$ em função de $\delta D^{\mu\nu}$ vem, para o último fator na variação da Ação:

$$-\alpha D^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\alpha D^{\mu\nu}\ \ (-D_{\mu\lambda}g_{\beta\nu}\delta D^{\beta\lambda} + \frac{1}{2}\,D_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta D^{\alpha\beta}\ ) =$$

$$= -(-\alpha D^{\beta\lambda}D_{\beta\nu}g_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}\,\alpha D^{\beta\lambda}D_{\beta\lambda}g_{\mu\nu})\delta D^{\mu\nu}$$

onde usou-se que $D_{\mu\nu} = \frac{.1}{\sqrt{-g}}\ g_{\mu\nu}$ é a inversa de D contravari - ante. Daí,

$$\delta\int L\ d_4x = \int\Big[D^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}(W) + (R_{\mu\nu}(W) + \alpha g_{\underset{\vee}{\nu\mu}} +$$

$$+\ \alpha D^{\beta\lambda}D_{\beta\nu}g_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\,\alpha D^{\beta\lambda}D_{\beta\lambda}g_{\mu\nu})\delta D^{\mu\nu}\Big]d_4x$$

$$= \int d_4x\Big[D^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}(W) + (R_{\mu\nu}(W) - \alpha(g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + g^{\lambda\beta}_{\ \vee}g_{\beta\nu}g_{\mu\lambda} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\,g^{\beta\lambda}_{\ \vee}g_{\beta\lambda}g_{\mu\nu}))\ \ \delta D^{\mu\nu}\Big] =$$

$$= \int d_4x \left[\mathcal{D}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}(W) + (R_{\mu\nu}(W) + \alpha I_{\mu\nu})\ \delta\mathcal{D}^{\mu\nu}\right]$$

....

De (G-14) segue-se que as equações de campo para $\mathcal{D}^{\mu\nu}$ serão

$$\overset{*}{R}_{\mu\nu}(W) = 0 \qquad \text{(G-17)}$$

onde $\overset{*}{R}_{\mu\nu}(W)$ é dado por (G-15) e (G-16). Vamos agora determi - nar as equações de campo para $W^{\alpha}_{\mu\nu}$. Temos, para a expressão da 1ª contração da curvatura para a afinidade $W^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu}(W) = (\partial_\beta W^{\beta}_{\mu\nu} - W^{\beta}_{\lambda\nu}W^{\lambda}_{\mu\beta}) - (\partial_\nu W^{\beta}_{\mu\beta} - W^{\beta}_{\alpha\beta}W^{\alpha}_{\mu\nu})$$

Necessita-se determinar $\delta R_{\mu\nu}(W)$ em termos de $\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}$. Recordamos que $\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}$ é um tensor, pois representa a diferença entre duas afinidades: $W^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $W^{\alpha}_{\mu\nu}+\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}$ num sistema fixo de coordenadas. Consequentemente o termo inhomogêneo na lei de transformação para $\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}$ se anula. Tem-se

$$\delta R_{\mu\nu}(W) = (\partial_\beta \delta W^{\beta}_{\mu\nu} - W^{\beta}_{\lambda\nu}\delta W^{\lambda}_{\mu\beta} - \delta W^{\beta}_{\lambda\nu}\ W^{\lambda}_{\mu\beta}) -$$

$$- (\partial_\nu \delta W^{\beta}_{\mu\beta} - W^{\beta}_{\alpha\beta}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu} - \delta W^{\beta}_{\alpha\beta}\ W^{\alpha}_{\mu\nu})$$

Como,

$$\delta W^{\overset{\alpha}{+}}_{\underset{++}{\mu\nu}|\rho} = \partial_\rho\ \delta W^{\alpha}_{\mu\nu} - W^{\beta}_{\mu\rho}\ \delta W^{\alpha}_{\beta\nu} - W^{\beta}_{\nu\rho}\ \delta W^{\alpha}_{\mu\beta} + W^{\alpha}_{\beta\rho}\ \delta W^{\beta}_{\mu\nu}$$

vem, por cálculo direto que

$$\delta W^{\overset{\alpha}{+}}_{\underset{++}{\mu\nu}|\alpha} - \delta W^{\overset{\alpha}{+}}_{\underset{++}{\mu\alpha}|\nu} + 2W^{\alpha}_{\underset{\vee}{\nu\beta}}\ \delta W^{\beta}_{\mu\alpha} = \delta R_{\mu\nu}(W)$$

daí, vê-se que $\delta R_{\mu\nu}(W)$ é um tensor de 2ª ordem e, portanto $D^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}(W)$ é uma densidade escalar de peso (+1). Temos:

$$D^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}(W) = D^{\mu\nu}\delta W^{\overset{+}{\alpha}}_{\underset{++}{\mu\nu}|\alpha} - D^{\mu\nu}\delta W^{\overset{+}{\alpha}}_{\underset{++}{\mu\alpha}|\nu} + 2D^{\mu\nu}W^{\alpha}_{\nu\beta}\delta W^{\beta}_{\mu\alpha}$$

$$= (D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu})_{|\alpha} - \overset{++}{D}{}^{\mu\nu}{}_{|\alpha}\,\delta W^{\alpha}_{\mu\nu} - (D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\alpha})_{|\nu} +$$

$$+ \overset{++}{D}{}^{\mu\nu}{}_{|\nu}\,\delta W^{\alpha}_{\mu\alpha} + 2D^{\mu\nu}W^{\alpha}_{\nu\beta}\delta W^{\beta}_{\mu\alpha} \qquad \text{(G-18)}$$

como $D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}$ é uma densidade vetorial de peso (+1) vem:

$$(D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu})_{|\alpha} = \partial_{\alpha}(D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}) + W^{\alpha}_{\sigma\alpha}D^{\mu\nu}\delta W^{\sigma}_{\mu\nu} - D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu}W^{\sigma}_{\sigma\alpha}$$

....

Recorde-se que $\mathbf{A}^{\lambda}$ é uma densidade vetorial de peso (+1)

$$\overset{+}{\mathbf{A}}{}^{\lambda}{}_{|\alpha} = \partial_{\alpha}\mathbf{A}^{\lambda} + W^{\lambda}_{\sigma\alpha}\mathbf{A}^{\sigma} - \mathbf{A}^{\lambda}W^{\sigma}_{\sigma\alpha}$$

....

Termos em derivadas parciais se anulam no contorno do ∞ pois são divergências no princípio variacional, daí vamos desprezá-los. Temos então para (G-18)

$$D^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}(W) = -\overset{++}{D}{}^{\mu\nu}{}_{|\alpha}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu} + \overset{++}{D}{}^{\mu\nu}{}_{|\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\alpha} + W^{\alpha}_{\sigma\alpha}D^{\mu\nu}\delta W^{\sigma}_{\mu\nu}$$

$$-D^{\mu\nu}W^{\sigma}_{\sigma\alpha}\delta W^{\alpha}_{\mu\nu} - W^{\nu}_{\sigma\nu}D^{\mu\sigma}\delta W^{\alpha}_{\mu\alpha} + D^{\mu\nu}\delta W^{\alpha}_{\mu\alpha}\,W^{\sigma}_{\sigma\nu} + 2D^{\mu\nu}W^{\alpha}_{\nu\beta}\delta W^{\beta}_{\mu\alpha} =$$

$$= (-\overset{++}{D}{}^{\mu\nu}{}_{|\alpha} + \overset{++}{D}{}^{\mu\rho}{}_{|\rho}\,\delta^{\nu}_{\alpha} + D^{\mu\nu}W^{\rho}_{\alpha\rho} - D^{\mu\nu}W^{\sigma}_{\sigma\alpha} - W^{\rho}_{\sigma\rho}\,D^{\mu\sigma}\,\delta^{\nu}_{\alpha} +$$

$$+ W^{\rho}_{\rho\lambda}D^{\mu\lambda}\delta^{\nu}_{\alpha} + 2D^{\mu\rho}W^{\nu}_{\rho\alpha})\,\delta W^{\alpha}_{\mu\nu} =$$

$$= (-D^{\overset{\mu\nu}{++}}{}_{|\alpha} + D^{\overset{\mu\rho}{++}}{}_{|\rho}\delta^{\nu}_{\alpha} + 2D^{\mu\nu}W_{\alpha} - 2D^{\mu\lambda}W_{\lambda}\delta^{\nu}_{\alpha} + 2D^{\mu\rho}W^{\nu}_{\underset{\vee}{\rho\alpha}})\ \delta W^{\alpha}_{\mu\nu} \qquad \text{(G-19)}$$

Chamando:

$$B^{\mu\nu}_{\alpha} = -D^{\overset{\mu\nu}{++}}{}_{|\alpha} + 2D^{\mu\nu}W_{\alpha} - \frac{2}{3}\,D^{\mu\lambda}W_{\lambda}\delta^{\nu}_{\alpha} + 2D^{\mu\rho}W^{\nu}_{\underset{\vee}{\rho\alpha}} \qquad \text{(G-20)}$$

portanto,

$$B^{\mu\alpha}_{\alpha} = -\,D^{\overset{\mu\alpha}{++}}{}_{|\alpha} + \frac{4}{3}\,D^{\mu\alpha}W_{\alpha}$$

De (G-19) e (G-20) vem

$$D^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}(W) = (B^{\mu\nu}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,B^{\mu\beta}_{\beta})\ \delta W^{\alpha}_{\mu\nu}$$

consequentemente, segue-se que as equações de campo em $W^{\alpha}_{\mu\nu}$ serão

$$B^{\mu\nu}_{\alpha} = 0 \qquad \text{(G-21)}$$

De (G-10) vem

$$D^{\overset{\mu\nu}{++}}{}_{|\alpha} = D^{\mu\nu}_{,\alpha} + W^{\mu}_{\lambda\alpha}D^{\lambda\nu} + W^{\nu}_{\lambda\alpha}D^{\mu\lambda} - W^{\sigma}_{\sigma\alpha}D^{\mu\nu} =$$

$$= D^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}D^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}D^{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha}D^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\,\delta^{\mu}_{\lambda}W_{\alpha}D^{\lambda\nu} -$$

$$- \frac{2}{3}\,\delta^{\nu}_{\lambda}W_{\alpha}D^{\mu\lambda} + \frac{2}{3}\,\delta^{\sigma}_{\sigma}W_{\alpha}D^{\mu\nu} =$$

$$= D^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}D^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}D^{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\underline{\sigma\alpha}}\,D^{\mu\nu} + \frac{4}{3}\,W_{\alpha}D^{\mu\nu}$$

onde usamos que $\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} = 0$. O lado esquerdo da equação (G-21) toma então a forma:

$$B^{\mu\nu}_{\alpha} = - D^{\mu\nu}_{,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}D^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}D^{\mu\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\underline{\sigma\alpha}}\, D^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\, W_{\alpha}D^{\mu\nu} + 2D^{\mu\nu}W_{\alpha}$$

$$- \frac{2}{3}\, D^{\mu\lambda}W_{\lambda}\delta^{\nu}_{\alpha} + 2D^{\mu\rho}\, (\Gamma^{\nu}_{\underset{\vee}{\rho\alpha}} - \frac{1}{3}\, (\delta^{\nu}_{\rho}W_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}W_{\rho})) =$$

$$= - D^{\mu\nu}_{,\alpha} - D^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - D^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho} + D^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\underline{\sigma\alpha}}$$

Portanto, as equações (G-21) assumem a forma (notar que $\Gamma^{\sigma}_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}}=0$)

$$B^{\mu\nu}_{\alpha} \equiv -D^{\overset{\nu\nu}{+-}}_{;\alpha} = \theta \quad ; \quad D^{\overset{\mu\nu}{+-}}_{;\alpha} = \partial_{\alpha}D^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}D^{\sigma\nu}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma}D^{\mu\sigma}-D^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\underline{\sigma\alpha}}$$

(G-22)

Vamos exprimir ${}^{*}R_{\mu\nu}(W)$ em função da afinidade Γ .Tem-se por (G-10)

$$R_{\mu\nu}(W) = (\partial_{\beta}W^{\beta}_{\mu\nu} - W^{\beta}_{\lambda\nu}W^{\lambda}_{\mu\beta}) - (\partial_{\nu}W^{\beta}_{\mu\beta} - W^{\beta}_{\alpha\beta}W^{\alpha}_{\mu\nu})$$

$$= R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{2}{3}\, \delta^{\beta}_{\mu}W_{\nu,\beta} + \frac{2}{3}\, \delta^{\beta}_{\mu}W_{\beta,\nu} -$$

$$+ \frac{2}{3}\, \Gamma^{\beta}_{\lambda\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}W_{\beta} + \frac{2}{3}\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\delta^{\beta}_{\lambda}W_{\nu} - \frac{4}{9}\, \delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\lambda}_{\mu}W_{\beta}W_{\nu}$$

$$- \frac{2}{3}\, \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{\mu}W_{\nu} - \frac{2}{3}\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta^{\beta}_{\alpha}W_{\beta} + \frac{4}{9}\, \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\mu}W_{\beta}W_{\nu} =$$

$$= R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\, (W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu})$$

donde, por (G-15)

$${}^{*}R_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\, (W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}) + \frac{4\pi G}{k^{2}c^{4}}\, I_{\mu\nu}$$

$$= {}^{*}R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{2}{3}\, (W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}) \qquad \text{(G-23)}$$

onde, similarmente ã definição (G-15)

$$^{*}R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(\Gamma) + \frac{4\pi G}{k^2 c^4}\, I_{\mu\nu} \tag{G-24}$$

De (G-23) segue-se diretamente que: (use também a equação (G-17))

$$^{*}R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = 0 \tag{G-25}$$

$$^{*}R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) = \frac{2}{3}\,(W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu}) \tag{G-26}$$

Recordamos que equações semelhantes são obtidas na teoria de Einstein-Schrödinger, porém sem o * pois nessa teoria não existe o fator $I_{\mu\nu}$.

De (G-22) vem, por contração em (ν,α)

$$\partial_\alpha D^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} D^{\sigma\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} D^{\mu\sigma} - D^{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\underline{\sigma\alpha}} = 0$$

ou,

$$\partial_\alpha D^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} D^{\sigma\alpha} = 0 \tag{G-27}$$

desde que $\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} = 0$. Contraindo (μ,α) por sua vez em (G-22) tira-se:

$$\partial_\alpha D^{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha} D^{\sigma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma} D^{\alpha\sigma} - D^{\alpha\nu}\Gamma^{\sigma}_{\underline{\sigma\alpha}} = 0$$

que dá

$$\partial_\alpha D^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma} D^{\alpha\sigma} = 0 \tag{G-28}$$

fazendo $\nu \rightarrow \mu$ nessa equação e subtraindo-a de (G-27) vem:

$$\partial_\alpha D^{\underset{\vee}{\mu\alpha}} = 0 \tag{G-29}$$

Essa equação é covariante pois $\mathcal{D}^{\mu\alpha}$ é uma densidade tensorial antissimétrica com peso (+1).

Pode-se interpretar a equação (G-10) como sendo uma transformação que leva a afinidade W na afinidade $\Gamma = W'$:

$$W^{\lambda}_{\mu\nu} \to W^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\delta^{\lambda}_{\mu}W_{\nu} = W'^{\lambda}_{\mu\nu}$$

Então

$$R_{\mu\nu}(W) \to R_{\mu\nu}(W') \equiv R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(W) + \frac{2}{3}\,(W_{\nu,\mu}-W_{\mu,\nu})$$

$$\mathcal{D}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(W) \to \mathcal{D}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(W') = \mathcal{D}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(W) + \frac{2}{3}\,\mathcal{D}^{\mu\nu}_{\vee}\,(W_{\nu,\mu}-W_{\mu,\nu})$$

daí teríamos a transformação na densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}' \to \mathcal{L} + \frac{2}{3}\,\mathcal{D}^{\mu\nu}(W_{\nu,\mu}-W_{\mu,\nu}) = \mathcal{L} - \frac{4}{3}\,(\partial_{\nu}\mathcal{D}^{\mu\nu}_{\vee})\,W_{\mu}$$

a menos de um termo de superfície desprezível.

Portanto, ao longo da trajetória do sistema no espaço de configurações vem por (G-29) que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

Por outro lado, podemos também considerar a transformação tipo gauge Abeliana

$$W^{\lambda}_{\mu\nu} \to W^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\Lambda_{,\nu}$$

que implica

$$W_{\nu} \to W_{\nu} + \Lambda_{,\nu}$$

(ver (G-11)). Daí tem-se por (G-10)

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \to \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

Como

$$R_{\mu\nu}(W) = (\partial_\beta W^\beta_{\mu\nu} - W^\beta_{\lambda\nu} W^\lambda_{\mu\beta}) - (\partial_\nu W^\beta_{\mu\beta} - W^\beta_{\alpha\beta} W^\alpha_{\mu\nu})$$

segue-se que sob essa transformação de gauge

$$R_{\mu\nu}(W) \rightarrow R_{\mu\nu}(W)$$

Portanto a densidade Lagrangeana ((G-13)) é invariante sob essas transformações, assim como as equações de campo (G-26) que são as únicas dependentes do vetor W_ν. Consequentemente o vetor W_ν fica indeterminado no problema variacional, pois tanto W_ν quanto $W_\nu + \Lambda_{,\nu}$ para $\Lambda(x)$ arbitrária dão mesmo valor para $\mathcal{L}$. Disso fica claro que o vetor de torção W_ν desempenha o papel do potencial eletromagnético na teoria unitária. Isso será discutido mais tarde.

Juntando todos os resultados achados, podemos grupar as equações do campo unitário como:

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\underset{+-}{\mu\nu}}_{;\alpha} = 0 \\ \partial_\alpha \mathcal{D}^{\underset{\vee}{\mu\alpha}} = 0 \\ {}^*R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = 0 \\ {}^*R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) = \frac{2}{3}(W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu}) \end{cases}$$

As duas primeiras provenientes de variações em $W^\lambda_{\mu\nu}$ e as duas últimas de variações em $\mathcal{D}^{\mu\nu}$. A 1ª dessas equações pode equivalentemente ser expressa em termos de $g_{\mu\nu}$. De forma que podemos grupá-las na forma alternativa.

$$\begin{cases} g_{\underset{+-}{\mu\nu};\alpha} = 0 & \text{(G-30)} \\ \partial_\alpha D^{\underset{\vee}{\mu\alpha}} = 0 & \text{(G-31)} \\ {}^*R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = 0 & \text{(G-32)} \\ \partial_\sigma \; {}^*R_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \partial_\nu \; {}^*R_{\underset{\vee}{\sigma\mu}} + \partial_\mu \; {}^*R_{\underset{\vee}{\nu\sigma}} = 0 & \text{(G-33)} \end{cases}$$

Esse é o conjunto de equações de campo da teoria generalizada. A equação (G-33) também pode ser escrita como

$$\partial_\nu \; {}^*R^{\underset{\vee}{\mu\nu}} = 0 \tag{G-34}$$

$${}^*R^{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \; {}^*R_{\underset{\vee}{\rho\sigma}} \tag{G-35}$$

Entre as 8 equações (G-31) e (G-34) temos duas identidades

$$\partial_\mu(\partial_\nu D^{\underset{\vee}{\mu\nu}}) \equiv 0 \tag{G-36}$$

$$\partial_\mu(\partial_\nu \; {}^*R^{\underset{\vee}{\mu\nu}}) \equiv 0 \tag{G-37}$$

10.2 - *O Princípio de Correspondência - Teoria de Einstein-Maxwell*

A questão inicial aqui é saber como a teoria de Einstein da gravitação e a teoria de Maxwell do eletromagnetismo , aparecem na presente formulação. A Lagrangeana (G-13) difere-se da Lagrangeana da teoria de Einstein-Schrödinger pela presença do fator contendo $D^{\underset{\vee}{\mu\nu}} g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$. Iremos ver a seguir que a presença desse termo adicional permitirá a existência de um princípio de correspondência entre a presente teoria e as equações de Einstein-Maxwell da relatividade geral. A constante universal $\underline{k}$ presente em (G-13) terá dimensões determinadas pelas considerações:

(a) dimensão do termo $\mathcal{D}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ em (G-13): é a dimensão de $R_{\mu\nu}$ pois $g^{\mu\nu}$ é adimensional, como: (usaremos unidades c.g.s.)

$$\text{dim. } R_{\mu\nu} \sim \frac{1}{L^2}$$

(b) segue-se que o segundo termo em (G-13) tem que ter dimensão L^{-2}. Daí, de (G-13) vem

$$\text{dim. } \frac{G}{k^2 c^4} = L^{-2}$$

mas, dim $G = L^3 M^{-1} T^{-2}$ (constante gravitacional) ,

portanto:

$$\text{dim. } k^2 = L M^{-1} T^2$$

$$\text{dim. } k = L^{1/2} M^{-1/2} T$$

(c) toda a Ação deveria ter dimensão de Energia x tempo, porém isso é sempre possível de ser obtido multiplicando-se toda a Ação (G-13) pela constante $\alpha = c^3/8 G$ tal como se faz em relatividade geral. Acontece que aqui por não existir acoplamento mínimo ($g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$), tal operação à nada conduz desde que $\underline{\alpha}$ desaparece quando igualamos a zero a variação da Ação.

(d) A dimensão da intensidade $F_{\mu\nu}$ do campo eletromagnético é :

$$\text{dim. } F_{\mu\nu} = \frac{\text{força}}{\text{carga}}$$

Mas:

$$\text{dim. carga elétrica} = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$$

Daí,

$$\text{dim. } F_{\mu\nu} = M^{1/2}\ L^{-1/2}\ T^{-1}$$

Logo se obtém o resultado:

$$\text{dim. } k = \frac{1}{\text{dim.}F_{\mu\nu}}$$

mais ainda que:

$$\text{dim. } k = \frac{L^2}{\text{dim.e}} \quad , \quad e = \text{carga elétrica.}$$

Da primeira dessas relações podemos escrever: ($g_{\mu\nu}$ é sem dimensão)

$$g_{\mu\nu} = k\ F_{\mu\nu} \equiv i\ K\ F_{\mu\nu} \qquad \text{(G-30)}$$

a relação $k = iK$ aparece aqui porque $g_{\mu\nu}$ é Hermitiano. Portanto, dessa análise dimensional segue-se a equação (G-30) onde $k = iK$ é a mesma constante presenta na densidade Lagrangeana (G-13).

Vamos em seguida fazer alguns comentários da motivação da introdução do fator adicional na Lagrangeana ((G-13)):

(i) a presente teoria é uma extensão da teoria de Einstein - -Schrödinger, a razão de sua introdução liga-se ao fato de que a teoria de Einstein assimétrica apresenta certas dificuldades:

(1-i) - As equações da teoria de Einstein (que são essencialmente as (G-30) a (G-33) sem *) não conduzem a soluções coerentes para a simetria esférica e campo estático:

A. Papapetrou - Proc. Irish. Ac. A51, 163 (1947)

M. Wyman - Can. J. Phys. Math. 2, 427 (1950)

W. Bonnor - Proc. Roy. Soc. A209, 353 (1951)
A210, 427 (1952)

Uma revisão dessas propriedades é feita em:

B. Kursunoğlu - Phys. Rev. D9, 2723 (1974).

(2-i) - Infeld e Callaway mostraram que as equações de campo de Einstein não conduzem a equações corretas de movimento de cargas elétricas no campo.

L. Infeld - Acta Phys. Pol. 10, 284 (1950)

J. Callaway - Phys. Rev. 92, 1567 (1953).

(3-i) - Devido à complexidade da teoria usa-se muito sua aproximação linear, a qual usualmente não é coerente (ver comentários anteriores sobre isso).

G.W. Gaffney - Phys. Rev. D10, 374 (1974)

C. Johnson - Phys. Rev. D8, 1645 (1973).

O próprio Einstein usou essa aproximação e mostrou que $g_{\underline{\mu\nu}}$ descreve gravitação e que $g_{\check{\mu\nu}}$ entretanto não descreve eletromagnetismo de forma coerente (as equações diferenciais para $g_{\check{\mu\nu}}$ são mais fracas que as equações de Maxwell). Existe ainda a dificuldade (2-i) acima, nessa aproximação.

Aparentemente o que falta na teoria de Einstein-Schrödinger é uma correspondência com a teoria de Einstein—Maxwell da relatividade geral, a qual descreve gravitação e eletromagnetismo sob forma coerente. Tal defeito é característico de todas as teorias unitárias das décadas de 1920, 1930, as quais seriam novas teorias, não uma extensão da relatividade geral. Essa última passaria assim a ser uma teoria provisória, caso uma das teorias unitárias viesse a ser correta e consistente.

O comprimento característico que pode ser formado com $\hbar = 1.05 \times 10^{-4}$ g.cm.^{2}seg^{-1}, $G = 6.67 \times 10^{-8}$ g^{-1}.cm^{3}.seg^{-2} e $c = 3 \times 10^{10}$ cm seg^{-1} é o comprimento de Planck

$$L = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-23} \text{ cm}$$

(M. Planck-Sitz, K. Preuss, Akad. Wiss. 440 (1899)).

Em termos de $\hbar$, G, c e da carga do elétron $e = 4.80 \times 10^{-10}$g$^{1/2}$. cm$^{3/2}$ seg^{-1}, podemos obter a constante $K = L^2/e$ como

$$K = \frac{L^2}{e} = \frac{\hbar G}{c^3 e} = 5.44 \times 10^{-57} g^{-1/2} cm^{1/2} seg$$

Um comprimento também pode ser definido em termos unicamente de constantes da física clássica: e, G, c por

$$L' = \frac{e\, G^{1/2}}{c^2} = 1.38 \times 10^{-34} \text{ cm}$$

que daria

$$K' = \frac{L'^2}{e} = \frac{eG}{c^4} = 3.95 \times 10^{-59} g^{-1/2} cm^{1/2} seg$$

sua relação com o comprimento de Planck é:

$$\frac{K'}{K} = \frac{L'^2}{L^2} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

de forma que a diferença entre K' e K é muito pequena.

Vamos usar a identificação:

$$A_\mu = \frac{kc^4}{12\pi G} W_\mu \tag{G-31}$$

onde W_μ é o vetor da torção dado por (G-11). Decompondo $I_{\mu\nu}$ de (G-16) em parte simétrica e parte antissimétrica:

$$I_{\underline{\mu\nu}} = -\left(\frac{1}{2}\, g^{\underset{\vee}{\beta\lambda}} g_{\underset{\vee}{\beta\lambda}} g_{\underline{\mu\nu}} + g_{\underline{\mu\lambda}} g^{\underset{\vee}{\lambda\beta}} g_{\underset{\vee}{\beta\nu}} + g_{\underline{\nu\lambda}} g^{\underset{\vee}{\lambda\beta}} g_{\underset{\vee}{\beta\mu}}\right) \qquad \text{(G-32)}$$

$$I_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = -\left(g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\, g^{\underset{\vee}{\beta\lambda}} g_{\underset{\vee}{\beta\lambda}} g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + g_{\underline{\mu\lambda}}\, g^{\underset{\vee}{\lambda\beta}} g_{\underline{\beta\nu}} + g_{\underset{\vee}{\mu\beta}} g^{\underset{\vee}{\beta\lambda}} g_{\underset{\vee}{\lambda\nu}}\right) \qquad \text{(G-33)}$$

No limite $k \to 0$ teremos $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \to 0 \longrightarrow g_{\mu\nu} \to g_{\underline{\mu\nu}}$. Então:

$$\frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underline{\mu\nu}} \to -\frac{4\pi G}{k^2c^4}\left(\frac{1}{2}\, k^2\, F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda}g_{\mu\nu} + k^2 g_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta}F_{\beta\nu} + \right.$$

$$\left. + k^2 g_{\nu\lambda}F^{\lambda\beta}F_{\beta\mu}\right) =$$

$$= -\frac{4\pi G}{c^4}\left(\frac{1}{2}\, F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda}g_{\mu\nu} - F^{\beta}{}_{\mu}F_{\beta\nu} - F^{\beta}{}_{\nu}F_{\beta\mu}\right) =$$

$$= \frac{8\pi G}{c^4}\left(F^{\beta}{}_{\mu}F_{\beta\nu} - \frac{1}{4}\, F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda}g_{\mu\nu}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}\; T^{\text{Maxwell}}_{\underline{\mu\nu}}$$

note que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ pois nesse limite $g_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}}$. O 1º fator na equação acima está simetrizado em (μ,ν). Logo: fazendo

$$g_{\underset{\vee}{\beta\lambda}} \to kF_{\beta\lambda} \;,\quad g^{\beta\lambda} \to kF^{\beta\lambda} \;,\quad g_{\mu\nu} \to g_{\underline{\mu\nu}}$$

temos:

$$\frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underline{\mu\nu}} \to -\frac{8\pi G}{c^4}\; T^{\text{Maxw.}}_{\underline{\mu\nu}}$$

Ainda,

$$\frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \to -\frac{4\pi G}{k^2c^4}\left(kF_{\mu\nu} + \frac{k^3}{2}\, F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda}F_{\mu\nu} + kg_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta}g_{\beta\nu} + \right.$$

$$\left. + k^3F_{\mu\beta}F^{\beta\lambda}F_{\lambda\nu}\right) = -\frac{4\pi G}{c^4}\left(\frac{1}{k}\, F_{\mu\nu} + \frac{k}{2}\, F^{\beta\lambda}F_{\beta\lambda}F_{\mu\nu} + \frac{1}{k}\, F_{\mu\nu} + \right.$$

$$+ k\, F_{\mu\beta}F^{\beta\lambda}F_{\lambda\nu})$$

no limite $k \to 0$ o fator $\frac{1}{k} \gg$ fator em k, o que dá

$$\frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \simeq -\frac{4\pi G}{kc^4}\,.\, 2F_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{kc^4}\, F_{\mu\nu}$$

logo, nesse limite

$$\frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \to -\frac{8\pi G}{kc^4}\, F_{\mu\nu}$$

Teremos nas equações de campo (G-25), (G-26)

$$^{*}R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) := R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) + \frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underline{\mu\nu}} = 0 \qquad \text{(G-27)}$$

$$^{*}R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) := R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) + \frac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \frac{2}{3}\,(W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu}) \qquad \text{(G-28)}$$

No limite onde $g_{\mu\nu} \to g_{\underline{\mu\nu}}$ reobtemos a geometria de Riemann onde

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) \to \mathcal{R}_{\mu\nu}(\{\,^{\cdot}_{\cdot\,\cdot}\})$$

com $\mathcal{R}_{\mu\nu}(\{\,^{\cdot}_{\cdot\,\cdot}\})$ o tensor de Ricci da afinidade de Christoffel. Então:

$$\begin{cases} R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) \to \mathcal{R}_{\mu\nu} \\ R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) \to 0 \end{cases}$$

o que dará em (G-27), (G-28):

$$\begin{cases} ^{*}R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = 0 \to \mathcal{R}_{\mu\nu} - \dfrac{8\pi G}{c^4}\, T^{\text{Maxw.}}_{\mu\nu} = 0 \\ ^{*}R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) \to \dfrac{4\pi G}{k^2c^4}\, I_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \dfrac{2}{3}\,(W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu}) \end{cases} \qquad \text{(G-29)}$$

A primeira equação é a equação de Einstein em presença de campo eletromagnético, pois nesse caso $R = 0$ (traço do tensor de Maxwell se anula) e portanto $R_{\mu\nu}$ é idêntico ao tensor de Einstein. a segunda equação ficará, usando-se a definição (G-31) e a condição $\frac{4\pi G}{k^2c^4} I_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{kc^4} F_{\mu\nu}$

$$- \frac{8\pi G}{kc^4} F_{\mu\nu} = \frac{2}{3} \frac{12\pi G}{kc^4} (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})$$

ou:

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \tag{G-30}$$

equivalentemente temos

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0 \tag{G-31}$$

As equações de campo restantes são:

$$D^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\alpha} = 0 \longleftrightarrow g_{\underset{+-}{\mu\nu};\alpha} = 0 \tag{G-32}$$

$$\partial_\alpha D^{\mu\alpha} = 0 \tag{G-33}$$

nesse limite elas darão diretamente:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0 \quad \text{com} \quad \Gamma = \{ {}^{\cdot}_{\cdot\cdot} \} \tag{G-34}$$

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}\ F^{\mu\alpha}) = 0 \quad , \quad g = \det g_{\underline{\mu\nu}} \equiv \det g_{\mu\nu} \tag{G-35}$$

Assim, podemos fazer as analogias:

TEORIA GERAL	TEORIA DE EINSTEIN-MAXWELL
$L = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{4\pi G}{k^2c^4}\, g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} g_{\underset{\vee}{\nu\mu}}\right)$	$L = \sqrt{-g}\left(g^{\underline{\mu\nu}}\mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{4\pi G}{c^4}\, F^{\mu\nu}F_{\nu\mu}\right)$
$g_{\underset{+-}{\mu\nu;\alpha}} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} - g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} = 0$	$g_{\underline{\mu\nu};\alpha} = \partial_\alpha g_{\underline{\mu\nu}} - g_{\underline{\sigma\nu}}\left\{{\sigma \atop \mu\alpha}\right\} - g_{\underline{\mu\sigma}}\left\{{\sigma \atop \nu\alpha}\right\} = 0$
$\partial_\nu(\sqrt{-g}\, g^{\underset{\vee}{\mu\nu}}) = 0$	$\partial_\nu(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}) = 0$
${}^*R_{\underline{\mu\nu}}(\Gamma) = 0$	$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\text{Maxw.}}_{\mu\nu}$ ($\mathcal{R}_{\mu\nu}$ = tensor de Ricci da conexão de Christoffel)
${}^*R_{\underset{\vee}{\mu\nu}}(\Gamma) = \frac{2}{3}\,(W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu})$ W_μ = Vetor da Torção = $\frac{12\pi G}{kc^4}A_\mu$ ou equivalentemente: $\partial_\sigma {}^*R_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \partial_\nu {}^*R_{\underset{\vee}{\sigma\mu}} + \partial_\mu {}^*R_{\underset{\vee}{\nu\sigma}} = 0$	$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ ou equivalentemente $\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0$

10.3 - *Conclusões Finais sobre a Teoria Assimétrica Generalizada*

A teoria considerada na seção 10 foi desenvolvida por J. Moffat a partir de sugestões anteriores de Bonnor e Kursunoglu em 1952 e 1957. Introduzindo-se um comprimento fundamental na teoria de Einstein-Schrödinger, Moffat mostrou que se obtêm um limite adequado à teoria de Einstein-Maxwell da relatividade geral.

As equações da teoria de Moffat foram resolvidas no caso de simetria esférica e campos assimétricos estáticos e puntiformes (solução exata tipo Schwarzschild generalizada). Essas soluções tendem à solução do sistema Einstein-Maxwell no limite de $K \to 0$, em particular, nesse limite se re-obtêm o campo elétrico de uma carga em repouso na origem. As equações de campo também implicam nas equações corretas de movimento de partículas testes carregadas na ordem mais baixa de aproximação do método I-E-H. A solução de simetria esférica tem as seguintes características:

(1) Possue uma singularidade do sistema de coordenadas esféricas em $r = m + (m^2 + q^2/2)^{1/2}$ similar à apresentada na solução de Reissner-Nordström, singularidade esta removível por uma transformação de Kruskal.

(2) A geometria dessa solução exata possue uma esfera de raio $r_s = \sqrt{Ke} = L$ $(K = L^2/e)$ que age como uma superfície de barreira da singularidade $r = 0$. Essa superfície é não-singular e analítica para a solução $g_{\mu\nu}$ das equações do campo. O tensor de curvatura $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma}$ e $R_{\mu\nu}$ são regulares em $r_s \sim L$. Entretanto se tem

$$(-\sigma)^{1/2} = \left[-\det g_{(\mu\nu)}\right]^{1/2} = r^2 \sin\theta \left(1 - \frac{K^2e^2}{r^4}\right)^{1/2}$$

de forma que $\sigma \to 0$ em $r = r_s$, portanto $S^{\mu\nu}$ = inverso de $g_{(\mu\nu)}$ é singular em $r = r_s$. Daí segue-se o resultado importante que o sub-espaço Riemanniano da teoria é singular sobre a superfície dessa esfera. A componente g_{00} da solução exata é da forma

$$g_{00} = (1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{4\ Ge^2}{c^4 r^2})(1 - \frac{K^2 e^2}{r^4})$$

Tomando $K = L^2/|e| > 0$, vem:

(a) se $r > \sqrt{Ke} = L$, então $K^2e^2/r^4 < 1$, logo g_{00} segue o sinal usual da teoria de Reissner-Nordström e nessa região se $r \to \infty$, $g_{00} \to 1$, logo a assinatura para a região $r > r_s$ é (---+).

(b) se $r < \sqrt{Ke} = L$ então $K^2e^2/r^4 > 1$ e g_{00} troca de sinal dentro da esfera, e a assinatura passa a ser "elīti - ca" da forma (----). Dentro da esfera o espaço é um E_4 para ds^2 negativo-definido. Essa região não contém cones nulos, portanto raios luminosos não podem penetrá-la.

(c) Segue-se então que trajetórias físicas (time-like ou nulas) tendem a ser defletidas para fora dessa esfera e não podem penetrá-la (trajetórias time-likes pressupõem métricas indefinidas, o que não existe se $r < r_s$). Dessa forma a singularidade $r = 0$ não é atingida por partículas físicas, o que afasta a possibilidade do colapso nessa teoria.

Outra aplicação da teoria é no problema do desvio de um raio luminoso perto de um objeto massivo carregado (fonte do campo). Acha-se: a constante universal K aparece como um termo corretivo ao campo de Reissner-Nordström na aproximação $O(\frac{1}{r^2})$ nesse problema. É de se esperar então que na situação onde se considera distâncias r do centro tais que e/r seja grande, tal efeito seja apreciável pois K comparece sempre na combinação

$K(e/r)^2$, por outro lado se $e/r >> 1$ então r é pequeno pois $|e|$ é finito, *e estaremos perto de* $r = r_s$ para poder detectar essa correção, o que já torna difícil de ser realizado.

Outra característica da teoria de Moffat é a abstenção de soluções descrevendo monopolos magnéticos. Do ponto de vista teórico, o problema de Cauchy para essa teoria foi tratado recentemente com sucesso.

Em trabalhos recentes (1979) têm sido considerado os seguintes problemas:

(1) *Inclusão* de termos fenomenológicos como fontes e obtenção das equações de movimento na teoria assimétrica pelo princípio variacional. A fonte do campo $g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ é uma corrente $\sqrt{-g}\ S^{\mu}$ que é *proporcional ao número* de nucleons no corpo (estrela)

$$D^{\mu\nu}_{\vee\ ,\mu} = 4\pi S^{\mu}\ \sqrt{-g} \longrightarrow (S^{\mu}\ \sqrt{-g})_{,\mu} = 0$$

$$S^{\mu} = i\ \frac{a^2}{c}\ n\ u^{\mu} \quad , \quad u^{\mu} = \frac{dx}{cd\tau}$$

a = comprimento fundamental associado a cada nucleon na estrela

= densidade de nucleons no corpo.

Existem nesse caso as quantidades $c^2\rho = T_{00}$ da matéria, a corrente j^{μ} cuja densidade é *conservada e descreve* conservação das cargas e a corrente de número de nucleons que também é *conservada*, esta é *escolhida para fonte na* equação acima. Mostra-se que é possível introduzir-se *um comprimento* ℓ associado à solução com simetria esférica e que é função da densidade n

$$\ell = \ell(n)$$

Discute-se as propriedades gerais da solução interior para a estrela e a formação de superfícies nulas no colapso desses corpos. Resultados gerais são:

(1-a) Quando a estrela entra em colapso a geometria se torna fortemente não-Riemanniena devido ao efeito aditivo da densidade de nucleons que torna S^{μ} grande.

(2-a) O comprimento total ℓ para a estrela produz uma superfície de mascaramento que exclue a singularidade $r = 0$ (para colapso através de configurações de simetria esférica) do espaço-tempo físico (superfície de barreira vista antes).

(2) Estudo da radiação gravitacional de Síncroton (Gravitational Synchroton Radiation) num background geométrico da teoria assimétrica — considera-se o problema de radiação na geometria $g_{\mu\nu}$ assimétrica com simetria esférica. É fato conhecido que a GSR existe como consequência da relatividade geral: toma-se a solução de Schwarzschild para definir o "background space" e considera-se a equação, por exemplo, a equação de ondas escalar nessa geometria. Obtém-se um "efeito de feixe" de radiação assim como um "plano de emissão" que entretanto estão associados a órbitas do campo escalar perto de $r \sim 3M$ que são instáveis e muito próximas ao black hole.

Considera-se esse problema na teoria assimétrica e mostra-se que GSR também decorre dessa teoria. Ela resulta de partículas em <u>órbitas estáveis</u> em torno de um objeto esfericamente simétrico (ainda para ondas escalares) dito "defletor". Esse objeto é obtido por: A solução da equação de ondas escalares é da forma

$$\Psi = (1 - \frac{\ell^4}{r^4})^{-1/2}\ \Psi_{G.R.}$$

ℓ = parâmetro de acoplamento gravitacional introduzido na teoria assimétrica.

A superfície $r = \ell$ é uma superfície nula e define o objeto astrofísico chamado "defletor". Se $\ell > 2M$ o defletor esconde o evento-horizonte do black-hole de Schwarzschild em $r = 2M$. Para $r \to \ell$ a radiação gravitacional de sincroton aumenta ao ∞. A potência de radiação gravitacional para órbitas estáveis e permissíveis $(r > \ell)$ próximas de $r = \ell$ é estimada e mostra que um "defletor" é uma forte fonte potencial de radiação gravitacional. Qualquer objeto astronômico deve ter $r > \ell$ necessariamente, e qualquer partícula teste que se aproximar do "defletor" é desviada de volta e não atingirá nunca o evento-horizonte $r = 2M$ (supondo sempre $\ell > 2M$) e a singularidade essencial $r = 0$, as quais estão assim desconectadas do espaço-tempo físico.

Finalmente é interessante observar que a teoria assimétrica de Moffat pode ser generalizada para incluir simetrias internas do tipo SU(n). Em particular se n=2 obtém-se a inclusão do campo de Yang-Mills no esquema unitário. Dessa forma todos os campos de gauge associados a interações de longo alcance estão contidos num mesmo esquema unitário. Essa generalização também possue um princípio de correspondência com a relatividade geral, dado pelo limite $K \to 0$, obtém-se então as equações de Einstein-Maxwell-Yang-Mills tal como em relatividade geral.

Matematicamente, a transição da teoria de Moffat para essa nova teoria (Borchsenius) é obtida fazendo-se

$g_{\mu\nu}(x)$(16 funções complexas) $\rightarrow$ 16 matrizes complexas (2 x 2),

de forma que a teoria de Borchsenius é equivalente a uma teoria local de quaternions. A estrutura de vierbeins dessa extensão pode ser determinada, os vierbeins sendo matrizes complexas (2 x 2)(*).

- Referências sobre a teoria assimétrica de Moffat e trabalhos e ela relacionados

1 - B. Kursunoglu - Phys. Rev., 88, 1369 (1952).

2 - W.B. Bonnor - Proc. Roy. Soc., A226, 366 (1954).
Ann.Inst. H. Poincaré, 15, 133 (1957).

3 - J.W. Moffat, D.H. Boal - Phys. Rev., 11, no. 6,1375(1975).

4 - D.H. Boal, J.W. Moffat - Phys. Rev. 11, no. 8,2026(1975).

5 - J.W. Moffat - Phys. Rev., D15, no.12, 3520 (1977).

6 - J.W. Moffat - Physical interpretation of the sources in a new theory of gravitation (preprint)
- Dept. of Physics, University of Toronto, Ontário - Canadá (1979 - August).

7 - J.W. Moffat - A solution of the Cauchy problem in the non-symmetric theory of gravitation (preprint) - Dept.of Physics, U. of Toronto, Ontário - Canada (May 1979).

8 - J. W. Moffat- R.B. Mann Gravitational Synchroton radiation in the metric of a new theory of gravitation (preprint) - Dept. of Physics - U.of Toronto - Ontario - Canada (May 1979).

(*) C.G. Oliveira - apresentado no 2º Congresso M. Grossmann - ICTP - Trieste - Itália (Julho 79).

9 - K. Borchsenius - Phys. Rev. D13, 2707 (1976).
Gen. Rel. Gravit. - 7, 527 (1976)
7, 709 (1976).

APÊNDICE — SISTEMAS NÃO HOLÔNOMOS E A TORÇÃO

1 - *Sistemas Não Holônomos*

Em cada ponto de uma variedade a n dimensões existem n vetores linearmente independentes, portanto pode-se definir:

$$h^a_\mu(x) \qquad a = 1\ldots n,\ \mu = 1\ldots n \tag{1}$$

tal que a matriz $|h^a_\mu(x)|$ é de ordem n, supomos que as funções h^a_μ são regulares e de classe C^2.

Os vetores (1) podem ser, mas não são, necessariamente vetores de base de um sistema de coordenadas. As condições necessárias e suficientes para que os vetores (1) sejam vetores de base de um sistema de coordenadas são:

$$\partial_{[\lambda}\, h^a_{\mu]} = 0 \quad \text{ou} \quad h^a_\mu = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^\mu} \tag{2}$$

a matriz $|h^a_\mu(x)|$ é não-singular e portanto existe a inversa $|h^\mu_a(x)|$ tal que $h^\mu_a h^a_\nu = \delta^\mu_\nu$, $h^\mu_a h^b_\mu = \delta^b_a$.

Um sistema de vetores (1) não satisfazendo (2) é dito ser um sistema não-holônomo. Um tensor $T^\alpha_{\cdot\beta\gamma}$ num sistema não-holônomo (K) possue as componentes

$$T^a_{\cdot \ell m} = h^a_\alpha h^\beta_\ell h^\gamma_m T^\alpha_{\cdot\beta\gamma} \tag{3}$$

Num mesmo ponto x podem existir mais de uma base não-holônoma, assim se tivermos duas bases (K) e (K') nesse ponto, poderemos ter o objeto misto

$$T^a_{\cdot sn} = h^a_\alpha b^\beta_s b^\gamma_n T^\alpha_{\cdot\beta\gamma}$$

as duas bases sendo indicadas por h e b. Ao se utilizar sistemas não-holônomos é de interesse usar-se a derivada Pfaffiana

$$\partial_a = h_a^\mu \, \partial_\mu \tag{4}$$

a qual é não-comutativa: $\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a \neq 0$. Se tivermos em duas bases não-holônomas h e b então sempre se tem

$$h_\mu^a = \alpha^a{}_b b^b_\mu \quad , \; h_a^\mu = \gamma_a{}^b b_b{}^\mu , \; \gamma_a{}^b \alpha^c{}_b = \delta_a^c$$

de modo que em x existem as derivadas

$$\partial_a = h_a^\mu \partial_\mu \quad , \quad \Delta_a = b_a{}^\mu \partial_\mu$$

com

$$\partial_a = \gamma_a{}^b \Delta_b \quad , \quad \Delta_a = \alpha^b{}_a \partial_b$$

O operador $\partial_a(\Delta_a)$ verifica a lei de Leibniz

$$\partial_a \, (AB) = A\partial_a B + B\partial_a A$$

2 - *Objeto de Não-Holonômia*

O objeto de não-holonômia é definido por

$$\Omega_{ab}{}^c = h_a^\lambda h_b^\mu \partial_{[\lambda} \, h^c{}_{\mu]}$$

Esse objeto é invariante sob transformações de coordenadas e sob transformações entre sistemas não-holônomos do tipo visto antes:

$$h'^a_\mu = L^a{}_b h^b_\mu$$

ele se transforma como

$$\Omega'_{ab}{}^{c} = L^{c}_{.r}\, L^{-1}{}_{a.}{}^{m} L^{-1}{}_{b.}{}^{n}\, \Omega_{mn}{}^{r} - L^{-1}{}_{[a.}{}^{n} \partial'_{b]} L^{c}{}_{.n}$$

Tem-se obviamente que $\Omega_{ab}{}^{c} = -\Omega_{ba}{}^{c}$. Em sistemas holonômicos (sistemas de coordenadas) $\Omega_{ab}{}^{c} = 0$, esta sendo a razão do termo objeto de não-holonomia.

3 - *Deslocamento Paralelo - Conexão*

Uma conexão em V_n é definida como um agregado de funções $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ que se transforma num mapeamento $(x) \to (x')$ como

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = A^{\lambda'}_{\alpha}\, A^{\beta}_{\mu'}\, A^{\rho}_{\nu'}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} - A^{\alpha}_{\mu'}\, A^{\beta}_{\nu'} \partial_{\alpha} A^{\lambda'}_{\beta} \tag{5}$$

ou equivalentemente

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = A^{\lambda'}_{\alpha}\, A^{\beta}_{\mu'} A^{\rho}_{\nu'}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} + A^{\lambda'}_{\alpha} \partial_{\mu'} A^{\alpha}_{\nu'} \tag{6}$$

onde

$$A^{\lambda'}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \quad , \quad A^{\lambda}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}$$

Em relatividade se tem $n = 4$ e as bases holônomas em V_4 são as $A^{\lambda'}_{\alpha}$ $(A^{\lambda}_{\alpha'})$, em particular as vierbeins do espaço flat M_4 são também bases holônomas. Bases não holônomas nesse caso (relatividade) serão os vierbeins do espaço de Riemann ou do espaço Não-Riemanniano mais geral.

Dados pontos vizinhos P e P_1 na variedade que define um vetor dx^{μ} se tem para componentes de um vetor em P e P_1 respectivamente:

$$\bar{v}^{\lambda} = v^{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\, v^{\nu}\, dx^{\mu} \tag{7}$$

deve-se observar a ordem de posicionamento dos índices (μ,ν) na conexão já que ela em geral é assimétrica. A derivada covariante é definida por

$$\nabla_\mu v^\lambda = \partial_\mu v^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, v^\nu$$

e satisfaz à lei de Leibniz. Similarmente podemos obter todos esses resultados em bases não-holônomas. Em lugar de (5) e (6) se define conexão nessas bases como o agregado de funções $\Gamma^a_{bc}(x)$ dada por:

$$\Gamma^a_{mn}(x) = h^a_\lambda(x) h^\mu_m(x) h^\nu_n(x)\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) - h^\mu_m(x) h^\nu_n(x)\partial_\mu h^a_\nu(x) \tag{8}$$

ou equivalentemente

$$\Gamma^a_{mn} = h^a_\lambda h^\mu_m h^\nu_n \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + h^a_\nu \partial_m h^\nu_n \tag{9}$$

ou seja, a transição de $(x) \to (K)$ é obtida fazendo a transição $A^{\lambda'}_\alpha \to h^a_\lambda$. O significado de (8) ou (9) em relatividade será discutido no final desse apêndice.

Numa transformação $(K) \to (K')$ entre sistemas não-holônomos se tem de (4)

$$\Gamma'^a_{bc} = L^a{}_{.k} L^{-1}{}_{b.}{}^n L^{-1}{}_{c.}{}^m \Gamma^k_{mn} + L^a{}_{.k} L^{-1}{}^k_{c,m}$$

onde $L^{-1}{}_{,m} = \partial_m L^{-1}$. Para sistemas não-holônomos também se define transporte paralelo entre dois pontos $\pi(x^a)$, $\pi_1(x^a + dx^a)$ com $x^a = h^a_\mu x^\mu$:

$$\bar{v}^a = v^a - \Gamma^a_{bc}\, v^c dx^b \quad ; \quad \delta v^a = \bar{v}^a - v^a \quad ,$$

e se tem então:

$$dx^a \nabla_a v^b = dx^a \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac}\, v^c\, dx^a \equiv dv^b - \delta v^b,$$

ou seja,

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac}\, v^c \tag{10}$$

Nesse caso, o aparecimento do 2º fator no lado direito está associado a que as transformações (K) → (K') têm caráter local.

O significado de equações do tipo (8) em relatividade (quer seja um espaço de Riemann ou um espaço Não-Riemanniano) é obtido usando o espaço interno onde se tem(*)

$$v^a{}_{|\nu} = \partial_\nu v^a + \omega_\nu{}^a{}_b v^b \tag{11}$$

$$\omega_\nu = (\omega_\nu{}^a{}_b) = \text{afinidade interna}$$

logo, definindo

$$h^\nu_b\; v^a{}_{|\nu} = \nabla_b\; v^a$$

se tem

$$\nabla_b v^a = \partial_b v^a + \omega^a_{bc}\; v^c \quad , \quad \omega^a_{bc} = h^\nu\; \omega^a_{\nu c}$$

por outro lado, em relatividade se tem a condição

$$h^a_{\mu|\nu} = 0$$

destas equações se obtêm que (estamos num espaço de Riemann)

(*) pois é no espaço interno que existem transformações do tipo (K) → (K') locais.

$$\omega_{\alpha}{}^{a}{}_{b} = h^{a}_{\mu}\, h^{\mu}_{b;\alpha} \quad , \quad h^{\mu}_{b;\alpha} = \partial_{\alpha} h^{\mu}_{b} + \{{}^{\mu}_{\alpha\lambda}\}\, h^{\lambda}_{b}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \omega^{a}_{cb} &= h^{\alpha}_{c} h^{a}_{\mu} h^{\mu}_{b;\alpha} \\ &= h^{\alpha}_{c} h^{a}_{\mu}\, (\partial_{\alpha} h^{\mu}_{b} + \{{}^{\mu}_{\alpha\lambda}\}\, h^{\lambda}_{b}) \\ &= h^{a}_{\mu}\, \partial_{c}\, h^{\mu}{}_{b} + h^{\alpha}_{c} h^{\lambda}_{b} h^{a}_{\mu}\, \{{}^{\mu}_{\alpha\lambda}\} \end{aligned}$$

que nada mais é que a equação (9) para $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$.

Também se obtém a equação (10) nesse caso multiplicando (11) por h^{ν}_{b}.

4 - *Decomposição da Conexão em Parte Simétrica e Antissimétrica*

Se sabe que em sistemas holônomos $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} + \Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}$ e que $\Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}$ é um tensor. Em sistemas não-holônomos temos de (8)

$$h^{a}_{\lambda} h^{\mu}_{m} h^{\nu}_{n}\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{a}_{mn} + h^{\mu}_{m} h^{\nu}_{n} \partial_{\mu} h^{a}_{\nu}$$

Tomando componentes antissimétricas e pondo

$$S^{a}_{mn} = h^{a}_{\lambda} h^{\mu}_{m} h^{\nu}_{n}\, \Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} \equiv h^{a}_{\lambda} h^{\mu}_{[m}\, h^{\nu}_{n]}\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{12}$$

vem:

$$S^{a}_{mn} = \Gamma^{a}{}_{[mn]} + \Omega_{mn}{}^{a} \tag{13}$$

Dessa relação temos dois resultados importantes:

(1) Num espaço de Riemann referido a sistemas não-holônomos se terá $\Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} = 0$, e portanto existirá ainda um objeto interno de conexão (na base não-holônoma) antissimétrico: o objeto de não-holonomia Ω, o qual de fato se transforma como uma conexão interna (ver seção (2)): $\Gamma^{a}_{[mn]} = - \Omega_{[mn]}{}^{a}$.

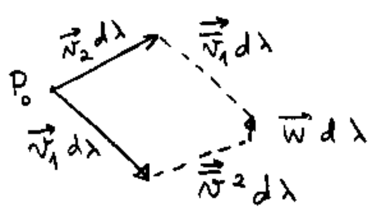
(2) Em geral, na base não-holônoma (K), a parte antissimétrica da conexão: $\Gamma^{a}_{[mn]}$ é a soma de dois termos: $\Gamma = S-\Omega$, sendo a estrutura desses dois termos

(a) S é gerado por $\Gamma^{\mu}_{[\nu\sigma]}$, ou seja pelo fato que existe uma torção no espaço-tempo

(b) Ω é gerado unicamente pelo uso de sistemas de referência não-holônomos. Sintetizando esses resultados, podemos enunciar o resultado (Cartan): A parte antissimétrica da conexão só é igual à torção num sistema de referência holônomo.

5 - *Interpretação Geométrica de* $\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\nu]}$

Para se obter uma discussão geral vamos nos referir a sistemas não-holônomos. Seja um ponto P_0 no qual existem dois vetores infinitesimais linearmente independentes: $v_1{}^{k}d\lambda$ e $v_2^{k}d\lambda$



Transportamos paralelamente o vetor $\vec{v}_1 d\lambda$ ao longo do vetor

$v_2 d\lambda$ até o ponto P_2:

$$\bar{v}_1{}^k d\lambda = v_1{}^k d\lambda - \Gamma^k_{\ell m}\, v_1{}^m\, v_2{}^\ell\, (d\lambda)^2 \qquad (14)$$

Transportamos paralelamente o vetor $\vec{v}_2 d\lambda$ ao longo de $\vec{v}_1 d\lambda$ até P_1:

$$\bar{v}_2^k\, d\lambda = v_2{}^k d\lambda - \Gamma^k_{\ell m}\, v_2{}^m\, v_1{}^\ell\, (d\lambda)^2 \qquad (15)$$

A diferença entre esses vetores define o vetor $W^k d\lambda$ que fecha o retângulo ($\vec{v}_2$, $\bar{\vec{v}}_1$, $\vec{v}_1$, $\bar{\vec{v}}_2$):

$$W^k d\lambda = v_2{}^k d\lambda + \bar{v}_1{}^k d\lambda - v_1{}^k d\lambda - \bar{v}_2{}^k d\lambda$$

Substituindo-se $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ pelos valores dados por (14) e (15) vem

$$W^k = (\Gamma^k_{\ell m} - \Gamma^k{}_{m\ell})\ \ v_2{}^m\, v_1{}^\ell\, d\lambda$$

$$= 2\, \Gamma^k{}_{[\ell m]}\, v_2{}^m\, v_1{}^\ell\, d\lambda$$

porém, isso também pode ser escrito na forma

$$W^k = 2\Gamma^k{}_{[\ell m]}\, v_2{}^{[m}\, v_1{}^{\ell]}\, d\lambda$$

definindo a quantidade Ω^k (não confundir com o objeto de não-holonomia que possue 3 índices) por

$$\Omega^k = \frac{1}{2}\, W^k d\lambda = \Gamma^k{}_{[\ell m]}\, v_2{}^{[m}\, v_1{}^{\ell]} (d\lambda)^2$$

e notando que o termo quadrático em v's é a área do retângulo infinitesimal, se tem:

$$\Omega^{k} = \Gamma^{k}{}_{[\ell m]}\, ds^{m\ell} \tag{16}$$

essa equação em sistemas holônomos é exatamente a definição anterior do vetor de translação associado à torção:

$$\Omega^{\mu} = - \Gamma^{\mu}{}_{[\rho\sigma]} ds^{\rho\sigma}$$

Temos, portanto, que em variedades com torção não podemos construir paralelogramos infinitesimais fechados. Esse resultado em cristalografia diz que nesse caso a torção é um fator de quebra local na rede cristalina.

Uma extensão desse tratamento a curvaturas permitirá definir-se a curvatura no sistema não-holônomo pela expressão

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]}\, v^{k} = \frac{1}{2} R^{k}{}_{mab}\, v^{m} - S^{m}{}_{ab}\, \nabla_{m} v^{k}$$

$$R^{k}{}_{mab} = 2\, \partial_{[a} \Gamma_{b]}{}^{k}{}_{m} + 2\Gamma^{k}{}_{[a|\ell|b]m}\Gamma^{\ell} + 2\Gamma^{k}_{\ell m}\, \Omega_{ab}{}^{\ell}$$

Notar que nessa base a curvatura tem um fator extra proporcional ao objeto de não-holonomia, similarmente à propriedade que nessa base a parte antissimétrica da conexão também tem um termo extra proporcional ao objeto de não-holonomia:

$$\Gamma^{a}{}_{[mn]} = S^{a}{}_{mn} - \Omega_{mn}{}^{a}$$

$S^{a}{}_{mn}$ dado por (12). O objeto $S^{a}{}_{mn}$ é a projeção da torção $\Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}$ sobre a base não-holônoma e se anula se o espaço for Riemanniano.