GEOMETRIA DIFERENCIAL PRÉ-SIMPLÉTICA E O FORMALISMO DE DIRAC-BERGMANN PARA A MECÂNICA COM VÍNCULOS

Paulo R. Rodrigues

Departamento de Geometria
Universidade Federal Fluminense
Niterói - Rio de Janeiro

ÍNDICE

Pág.

1 - *INTRODUÇÃO*

A geometria simplética teve origem nos trabalhos de Lagrange (1788) e foi assentada nos estudos desenvolvidos por E. Cartan (1922). Vários autores contribuiram para a geometrização da Mecânica Analítica (Lichnerowicz, Klein, Reeb, Souriau, Gallissot, entre tantos outros). Neste sentido, quando estudamos a Mecânica Hamiltoneana, utilizando as técnicas do Cálculo Diferencial sobre as Variedades Diferenciáveis, obtemos uma formulação intrínseca (independente do sistema de coordenadas escolhido) do formalismo Hamiltoneano. A estrutura geométrica subjacente à Mecânica Hamiltoneana é dado pela existência de uma forma simplética canonicamente definida sobre o fibrado cotangente (que pode ser tomado como o espaço das fases) à uma variedade diferencial. Decorre daí que, se H é uma hamiltoneana definida sobre esta variedade, então, via a forma simplética, determina-se um campo de vetores, cujas integrais são, localmente, soluções das equações de Hamilton.

O assunto que abordaremos no presente texto diz respeito a uma formulação geométrica da teoria de Dirac-Bergmann para uma Mecânica com vínculos. Em termos geométricos isto significa que a forma simplética quando restrita à subvariedade na qual o movimento do sistema (no espaço das fases) está vinculado, perde uma das suas características, qual seja, abaixa o seu posto. Damos o nome de <u>pré-simplético</u> a esta situação.

O ponto de partida do formalismo Hamiltoneano diz respeito à definição dos momentuns generalizados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad , \qquad i = 1,\dots,n$$

onde L é a lagrangeana e os v's são as velocidades generalizadas. Se

$$W = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right)$$

é a hessiana de L, então os p's estarão definidos (todos) se o posto de W for n. Se for k < n, então a não maximalidade do posto determina que somente k-variáveis de velocidade podem ser expressas como funções dos q's, p's e as restantes (n-k) velocidades (Teorema das Funções Implícitas). Decorre daí que existem (n-k) relações independentes entre os p's e q's. Estas relações podem ser expressas na forma

$$f^A(q_i, p_i) = 0 \quad , \quad A = 1, 2, \ldots, n-k \quad .$$

Elas são chamadas de <u>vínculos primários</u> (primário porque as equações de movimento não foram usadas para obtê-las). O movimento do sistema considerado ficará então confinado à uma subvariedade N, cuja definição é precisamente dada pelas equações de vínculos acima. As funções f^A estão definidas em um aberto U do espaço ambiente e são tais que, quando restritas à interseção $U_1 = U \cap N$, são nulas. Pode ocorrer, no entanto, que outras funções g^B definam também N. Neste caso f^A e g^B serão iguais sobre uma parte de N. Na terminologia de Dirac, isto significa que f^A e g^B são <u>fracamente iguais</u>. Se, no entanto, f^A e g^B tiverem também o mesmo gradiente nesta parte de N, então diz-se que f^A e g^B são <u>fortemente iguais</u> (a necessidade de se impor esta condição sobre o gradiente ficará mais clara ao leitor logo a seguir).

As equações de Hamilton, em termos simpléticos, tem a forma

$$i(X)w = dH$$

onde H é a hamiltoneana, dH sua diferencial e $i(X)w$ o produto interior da forma simplética w pelo campo X (ver Apêndice). Este campo X é unicamente determinado. Se, no entanto, N é a subvariedade de vínculos, a restrição de w a N não é, em geral, simplética. Assim, a equação em X acima pode ou não ter solução e, se tiver, não será necessariamente única. Isto se deve precisamente ao fato de w não ter mais posto maximal (ver Apêndice).

Nosso objetivo será, pois, o de entender geometricamente, o que significa "equações consistentes" no caso pré-simplético. As idéias a serem expostas a seguir serão feitas para a situação que consideramos mais simples. Assim, por exemplo, o espaço das fases será tomado como sendo o espaço euclideano 2n-dimensional R^{2n} dos números reais, e não o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável qualquer. Utilizando um resultado devido a Darboux, tomaremos como forma simplética a 2-forma $dp \wedge dq$, onde $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $q = (q_1, \ldots, q_n)$ são coordenadas locais no R^{2n}. Faremos isto por uma questão puramente psicológica. Ao leitor sugerimos consultar o artigo de Gotay, Nester e Hinds ([GNH]), de onde nós baseamos o presente trabalho, para uma abordagem mais ampla e detalhada.

2 - *MECÂNICA SIMPLÉTICA E AS EQUAÇÕES DE HAMILTON*

Nós iremos passar em revista, a fim de fixar as idéias, a formulação geométrica do formalismo hamiltoneano. Consideremos o espaço euclideano R^{2n} e representemos por $(q,p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ um sistema de coordenadas local neste espaço. Pode-se mostrar que (R^{2n},w) é uma variedade simplética, onde

$$w = dq \wedge dp = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \qquad (1)$$

Seja $H: R^{2n} \to R$ uma função diferenciável de classe C^∞, que chamaremos de hamiltoneana. Sua diferencial, dH, é uma forma linear sobre R^{2n}. Consideremos (ver Apêndice) a seguinte igualdade:

$$i(X)w = dH \qquad (2)$$

X na expressão acima é um campo de vetores no R^{2n}. Como w é uma forma simplética ela induz um isomorfismo $\underline{b}$ entre o espaço vetorial dos campos de vetores do R^{2n} e o das formas lineares sobre este mesmo espaço (veja Apêndice A.5). Tal isomorfismo é dado pela correspondência $\underline{b}$: $X \to i(X)w$. Assim, considerando-se a forma linear dH, existe um único campo X tal que

$$\underline{b}(X) = dH = i(X)w$$

e reciprocamente. O campo X é dito campo hamiltoneano e é representado por grad H.

Mostremos agora que as curvas integrais de X (ver de finição no Apêndice) são soluções das equações de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial p}{\partial t} = -\dot{p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial t} = \dot{q}$$

Seja h uma curva integral de X, isto é,

$$X\left[h(t)\right] = \dot{h}(t) \quad . \tag{3}$$

Então, no sistema de coordenadas (q,p), tem-se

$$X\left[q(t),p(t)\right] = \left\{\dot{q}(t),\dot{p}(t)\right\} \tag{4}$$

Ponhamos

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial q} + X_2 \frac{\partial}{\partial p} \quad .$$

De (2) obtém-se (ver também o Apêndice),

$$X_1\, dp - X_2\, dq = \frac{\partial H}{\partial q}\, dq + \frac{\partial H}{\partial p}\, dp \quad ,$$

logo,

$$X_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad X_2 = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

e, por (3)

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad -\dot{p}(t) = \frac{\partial H}{\partial q}$$

Pode-se mostrar que, reciprocamente, toda solução das equações de Hamilton é, localmente, uma curva integral do campo X tal que $i(X)w = dH$, (cf. [G]).

Outro fato importante advindo da estrutura simplética diz respeito aos parênteses de Poisson. Se f,g são duas funções diferenciáveis, então

$$\{f,g\} = w(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g) \tag{5}$$

é a definição dos parênteses. Em um sistema de coordenadas (q,p) pode-se mostrar que

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

que é a expressão clássica conhecida.

3 - *MECÂNICA PRÉ-SIMPLÉTICA*

O caso pré-simplético (também chamado degenerado) aparece quando existir uma subvariedade (superfície euclideana abstrata) N do espaço R^{2n}, de dimensão k, no qual a forma simplética w não tem posto maximal nos seus pontos. A subvariedade N é caracterizada da seguinte maneira: para todo ponto $p \in N$ existe uma vizinhança U de p em R^{2n} e 2n-k funções diferenciáveis $f^A: U \to R$, A = 1, ..., 2n-k, tais que a interseção $U_1 = U \cap N$ é definida pelas equações

$$f^1 = 0, \; \ldots, \; f^{2n-k} = 0 \quad .$$

Coloquemos d = 2n-k. Então d é dito <u>codimensão</u> de N, (se d=1 , N é chamado de hipersuperfície; se d = 2n, então N ã um conjunto de pontos; se d = 0, então N é um aberto do R^{2n}). Representemos por $\overline{w}$ a restrição de w a N. Em geral $(N,\overline{w})$ não é uma variedade simplética, pois o posto de $\overline{w}$ não é forçosamente maximal em todo ponto de N. Isto significa que existe um subconjunto C de N constituído dos pontos onde $\overline{w}$ não é maximal. É este exatamente o obstáculo para que $(N,\overline{w})$ herite a estrutura simplética do R^{2n}. Seja $p \in N$ e suponha que o posto de $\overline{w}$ em p seja s. Coloquemos c = k-s, chamado <u>co-posto</u> de $\overline{w}$ em p. A menos que o co-posto c seja o mesmo em todo ponto de N, teremos necessariamente outros subconjuntos onde o co-posto é diferente. Por um argumento de continuidade, pode-se mostrar que em pontos suficientemente próximos de p, o co-posto aumenta.

Resumindo, em N obtemos subconjuntos C_c definidos por

$$C_c = \{p \in N;\ \text{o co-posto de } \overline{w} \text{ em } p \text{ é } c\} \quad .$$

Pode-se mostrar que os C_c são subvariedades de N cuja codimensão é $\frac{c}{2}$ (c-1), (Cf. [P]).

No que se segue não iremos considerar a situação em que N é "partido" por tais subvariedades. A situação em que o co-posto aumenta é mais complexa e, para obtermos resultados interessantes, necessitaríamos de hipóteses suplementares. Um estudo nesse sentido (utilizando técnicas de topologia diferencial) foi recentemente realizado (Cf. [P]) utilizando a Teoria das Catástrofes de R. Thom. Nos contentaremos aqui com a situação em que o co-posto de $\overline{w}$ é c em todos os pontos de N (isto é $N = C_c$).

Passemos agora à descrição da Mecânica com vínculos do ponto de vista geométrico. Seja $(N,\overline{w})$ conforme a descrição logo acima. Nesta situação as equações de Hamilton podem ou não possuir soluções. A existência de possíveis soluções dependerá do fato de dH estar ou não na imagem da aplicação linear b definida anteriormente. Não sendo $\overline{w}$ simplética, b não é mais um isomorfismo; não é sobrejetora. Como vimos anteriormente, a subvariante N é localmente determinada por uma família $f^1,\ldots, f^c$, (c = 2n-k) de funções. Estas funções são precisamente aquelas que não permitem definir todos os p's como funções independentes dos v's. Chamaremos, portanto, N de variedade dos vínculos primários. Nosso problema agora se coloca na seguinte forma: dado uma hamiltoneana $H: R^{2n} \to R$, como determinar geometricamente o "local" onde a equação $i(X)w = dH$ possui uma solução X quando restrita a N, de maneira que as curvas integrais de X estejam inteiramente contidas em N ?

DEFINIÇÃO: Seja N uma subvariedade do espaço simplético (R^{2n},w). Diz-se que N é uma variedade de <u>vínculos</u> <u>regularmente</u> <u>consistentes</u> se para toda forma linear sobre R^{2n}, a equação

$$i(X)w = \alpha \qquad (*)$$

quando restrita a N admitir uma solução X tangente a N.

A condição de X ser tangente a N é importante. Sendo X um campo de vetores do R^{2n}, ele não associa necessariamente cada ponto $p \in N$ a um elemento do respectivo espaço tangente T_pN. Quando isto ocorrer então o <u>movimento</u> <u>do</u> <u>sistema</u> <u>mecânico</u> considerado está totalmente vinculado a N, caso contrário o sistema se desenvolve para fora do domínio N.

No entanto, a condição de tangência, genericamente, não ocorre. Somos obrigados a "restringir" nossa subvariedade. O processo geométrico de determinação da subvariedade de vínculos regularmente consistente é o seguinte: Se a forma linear α é tal que $\alpha(p) \in \underline{b}(TN)$ para todo $p \in N$ e o campo X é tangente a N, então o problema está resolvido. Se não, consideramos a subvariedade N_1 de N definida por

$$N_1 = \{p \in N \ ; \ \alpha(p) \in \underline{b}(TN)\} \ .$$

Se a solução X for tangente a N_1, o problema está resolvido, caso contrário, consideramos a subvariedade N_2 definida por

$$N_2 = \{p \in N_1 \ ; \ \alpha(p) \in \underline{b}(TN_1)\} \ .$$

e assim sucessivamente. Obtemos então uma sucessão de subvarie dades N_3, N_4, ..., N_s, ... tais que

$$N_s = \{p \in N_{s-1} \quad , \quad \alpha(p) \in \underline{b}(TN_{s-1})\} \quad .$$

O processo acima nos leva às quatro possibilidades seguintes:

Caso 1: Existe um inteiro K tal que N_K é vazio;

Caso 2: Existe um inteiro K tal que N_K não é vazio mas a dim $N_K = 0$;

Caso 3: Existe um inteiro K tal que $N_K = N_{K+1}$ com dim $N_K \neq 0$;

Caso 4: O processo não é finito.

O primeiro caso significa que as equações de Hamilton jamais possuem solução. O segundo caso significa que a variedade de vínculos é constituída de pontos e a única solução possível é a trivial, ou seja, $X = 0$ (não há portanto dinâmica). A terceira possibilidade é aquela que diz respeito à existência de uma variedade de vínculos regularmente consistentes e maximal (se V é outra regularmente consistente então $V \subset N_K$).

A situação descrita no caso 4 corresponde aos sistemas com um número infinito de graus de liberdade. Nesta situação, podemos considerar N_∞ como sendo a interseção de todas as subvariedades N_s e podemos então recair em um dos três casos anteriores.

Este processo nos permite, ainda, determinar 4 tipos de vínculos:

(a) Os vínculos primários: são aqueles que definem a subvariedade na qual a forma simplética se degenera (f^A; A = 1 , ..., 2n-k);

(b) Os <u>vínculos</u> <u>secundários</u>: são aqueles que possibilitam determinar as soluções das equações de Hamilton (ou seja, dH está na imagem de <u>b</u>);

(c) Os <u>vínculos</u> <u>terciários</u>: são de dois tipos. Os chamados de 1ª <u>classe</u> dizem respeito à condição de tangência da solução X à uma subvariedade de vínculos. Isto significa que dentre os vínculos primários e secundários, deve-se extrair uma sub-família de funções g_B que sejam preservadas pela dinâmica, ou seja, eles devem ser constantes ao longo das trajetórias (curvas integrais) do campo X. Geometricamente, isto significa que $X(g_B)$ (ver Apêndice) restrito à subvariedade de vínculos deve ser nulo. De fato, isto acontece se e somente se $X\left[g_B(h(t))\right] = 0$ para toda curva integral h(t) de X. Mas isto é equivalente à condição $\frac{d}{dt}\left[g_B(h(t))\right] = 0$ (ver Apêndice), ou seja, $g_B(h(t))$ é constante.

Os vínculos que não são de 1ª classe são ditos de 2ª <u>classe</u>.

4 - *A RELAÇÃO COM O FORMALISMO DE DIRAC-BERGMANN*

Passemos agora à comparação da interpretação geomé - trica acima descrita com a teoria dos vínculos proposta por Dirac-Bergmann.

Seja $L : R^{2n} \to R$ uma lagrangeana. O ponto de partida do formalismo é a hipótese de que a transformação de Legendre é degenerada. Isto significa que a hessiana $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right)$ não é inversível. A transformação de Legendre não é, pois, sobrejetora (existem coordenadas p's que não podem ser definidas independentemente das coordenadas v's). Se representarmos por N a imagem do espaço de configuração (no caso presente tomado como R^{2n}) pela transformação de Legendre, então N é uma subvariedade de dimensão, digamos, k, à qual o sistema está vinculado. Os vínculos primários são dados por uma família de funções f^A que definem N localmente. Se representarmos por H_1 a hamiltoneana obtida a partir da transformação de Legendre para a parte em que for possível definir os p's (isto é, N) e se representarmos por $\overline{H}_1$ qualquer extensão de H_1 ao aberto U que caracteriza N localmente, temos que a hamiltoneana sobre $U_1 = U \cap N$ tem a forma

$$h = \overline{H}_1 + f^A u_A$$

onde os u_A são os multiplicadores de Lagrange a serem determinados (são funções constantes). Queremos, portanto, estudar a equação

$$i(X)w = dh \quad \text{restrita a } U_1 \quad .$$

Como vimos, a fim de que U_1 seja regularmente consistente ne -

cessitamos da condição de tangência. Isto pode ser feito numa forma equivalente, qual seja, a dos parênteses de Poisson. Da hamiltoneana h acima tem-se

$$dh = d\bar{H}_1 + df^B u_B \qquad (**)$$

Consideremos o campo $\mathrm{grad} f^A$. Então

$$dh(\mathrm{grad} f^A) = i(X)w(\mathrm{grad} f^A) = w(X, \mathrm{grad} f^A) = X(f^A) \quad . \qquad (***)$$

(Para uma demonstração destas igualdades consulte o livro de Godbillon ([G]).

O lado esquerdo da expressão acima fica

$$\begin{aligned} dh(\mathrm{grad} f^A) &= d\bar{H}_1(\mathrm{grad} f^A) + df^B(\mathrm{grad} f^A)u_B \\ &= i(\mathrm{grad} f^A)w(\mathrm{grad}\bar{H}_1) + i(\mathrm{grad} f^A)w(\mathrm{grad} f^B)u_B \\ &= w(\mathrm{grad} f^A \ , \ \mathrm{grad}\bar{H}_1) + w(\mathrm{grad} f^A \ , \ \mathrm{grad} f^B)u_B \\ &= \{f^A, \bar{H}_1\} + \{f^A, f^B\}\ u_B \quad . \end{aligned}$$

Representaremos o termo à direita na expressão acima por $\bar{f}^A$. Então, de (***) tem-se que:

$X(f^A)$ restrito a $U_1 = 0$ se e somente se $\bar{f}^A$ restrito a $U_1 = 0$.

Traduzindo nesta forma a condição de tangência, podemos obter informações com respeito aos coeficientes u_B. Do fato de $\bar{f}^A$ ser nulo sobre U_1, tem-se

$$\{\bar{H}_1, f^A\} = u_B\{f^A, f^B\} \quad .$$

As equações acima podem ser colocadas em forma matricial. O sistema terá solução se a matriz $(\{f^A,f^B\})$ for inversível sobre os pontos de U_1. No entanto, genericamente, isto não ocorre. Somos obrigados a considerar uma subvariedade local U_2 de U_1, onde parte dos u_B serão determinados. O fato da matriz $(\{f^A,f^B\})$ ser singular nos permite obter uma família de funções (autovalores) $f_A^\alpha \neq 0$ tais que $f_A^\alpha\{f^A,f^B\} = 0$. Isto nos dá então a igualdade

$$f_A^\alpha\{\bar{H}_1,f^A\} = 0$$

que passa a ser então uma nova condição, dita de <u>vínculos secundários</u>. Coloquemos

$$g^\alpha = f_A^\alpha\{\bar{H}_1,f^A\} \quad .$$

Pondo

$$\bar{g}^\alpha = \{g^\alpha,\bar{H}_1\} + u_B\{g^\alpha,f^B\}$$

temos que, como anteriormente, a preservação destes vínculos secundários g^α nos leva à condição de que $\bar{g}^\alpha$ restrito a U_2 deva ser nula. Isto vai originar novas condições de vínculos, ditos <u>terciários</u>, dado por algo do tipo $h_\alpha^\beta\{\bar{H}_1,g^\alpha\}$ restrito a U_3 ser nulo. Repetindo o processo quantas vezes for necessário, obtemos, caso o problema seja solúvel, uma subvariedade final U_K, onde determinamos a solução.

Como vemos, o algorítmo de Dirac-Bergmann é o mesmo que o algorítmo geométrico proposto. A diferença é que o segundo é colocado em termos nas subvariedades N_s, enquanto que o primeiro tem caráter meramente local; a construção é feita a partir das funções f^A que definem localmente a subvariedade. O algorítmo geométrico é, portanto, uma formulação intrínseca, independente do sistema de coordenadas utilizado. Outros resultados podem ser obtidos para uma situação mais complexa, como por exemplo, para variedades de dimensão infinita (que podem ser aplicados à Mecânica Quântica).

Para terminar, observemos que a hamiltoneana a ser considerada, no espaço R^{2n} é da forma:

$$h_T = \bar{H}_1 + u_a h^a + u_b t^b + \lambda_c s^c \quad ,$$

chamada por Dirac de <u>hamiltoneana</u> <u>total</u> ou <u>estendida</u>. Nesta expressão, u_a são arbitrários, enquanto u_b são fixos. As funções h^a e t^b são vínculos primários de 1ª e 2ª classes com multiplicadores arbitrários λ^c. A equação que admite solução, quando restrita a U_K, é então da forma:

$$i(X)w = dh_T \quad .$$

APÊNDICE A

A.1 - *Forma Bilinear e seu Posto*

Seja E um espaço vetorial (real) de dimensão finita. Uma forma bilinear sobre E é uma função $w: E \times E \to R$ que associa a cada par ordenado de vetores (a,b) em E×E um número real w(a,b) e que satisfaz

$$w(ta_1 + a_2, b) = t\, w(a_1,b) + w(a_2,b)$$

$$w(a,\ tb_1 + b_2) = t\, w(a,b_1) + w(a,b_2)$$

Portanto, uma forma bilinear é uma função que é linear em cada um dos seus argumentos quando o outro é fixado.

Seja $\{a_1, \ldots, a_n\} = A$ uma base de E e w uma forma bilinear sobre E. A matriz de w em relação à base A é a matriz B de ordem n×n cujos elementos B_{ij} são definidos por

$$B_{ij} = w(a_i, a_j) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

O posto de w é por definição o posto da matriz B (esta definição decorre do fato de que podemos provar que o posto de w é o mesmo, qualquer que seja a base escolhida no espaço E). Recordemos ainda que o posto de uma matriz C é r se C possui uma submatriz quadrada menor de ordem r×r cujo determinante é não nulo e toda outra menor quadrada de ordem r+1×r+1 tem necessariamente determinante nulo.

Uma forma bilinear $w: E \times E \to R$, onde dim E = n é não-degenerada ou maximal se o seu posto for n.

A.2 - *Forma Bilinear Anti-Simétrica - Espaço Vetorial Simplético*

Uma forma bilinear w sobre E é dita anti-simétrica se $w(a,b) = -w(b,a)$, para todo $a,b \in E$. Uma forma bilinear anti-simétrica maximal sobre um espaço vetorial E de dimensão finita é chamada de simplética. Neste caso o par (E,w) é dito espaço vetorial simplético. Seja E^* o espaço dual ao espaço E, isto é,

$$E^* = \{f:E \to R \ ; \ f \text{ é linear}\} \ .$$

Pode-se mostrar que E^* é um espaço vetorial de mesma dimensão que E. Se (E,w) é um espaço simplético então w induz uma aplicação linear $\underline{b}:E \to E^*$ da seguinte maneira:

$$\underline{b}(a_1)(a_2) = w(a_1,a_2) \quad (*)$$

Mostra-se que $\underline{b}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Observe que $\underline{b}$ associa um vetor a_1 à uma forma linear $\underline{b}(a_1)$, tal que $\underline{b}(a_1)$ em a_2 dá (*).

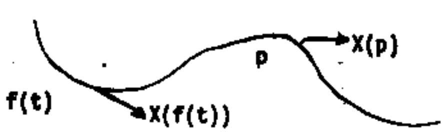
A.3 - *Variedade Diferenciável*

Uma variedade é um conjunto M munido de um número finito ou enumerável de "sistemas de coordenadas" ou "cartas" com a propriedade de que todo elemento de M pertence ao menos a um desses sistemas. Um sistema de coordenadas em torno de um ponto $p \in M$ é um par (U,f) constituído de um subconjunto U de M contendo p e uma aplicação diferenciável $f:U \to R^n$ de U sobre um conjunto aberto do R^n, com a propriedade de que f possui uma inversa diferenciável e que em todo ponto de U seu jacobiano é não nulo (como tomamos o contra domínio de f sendo R^n, diz-se que a variedade é de dimensão n). O ponto p é, portanto, caracterizado por uma n-upla de números reais $(x_1,\ldots,x_n) \in R^n$. Se p pertencer a outro sistema de coordenadas (V,g) então impomos a condição de que a <u>mudança de coordenadas</u> $g\circ f^{-1} : f(U) \to g(V)$, que permite fazer a passagem de $(x_1,\ldots,x_n)$ para $(y_1, \ldots, y_n) = g(p)$, seja diferenciável, com inversa também diferenciável e com jacobiano não nulo em todos os pontos de f(U). Se for possível "cobrir" M, isto é, M = reunião dos subconjuntos U, onde U's são cartas, diz-se que M é uma <u>variedade diferenciável de dimensão n</u>. (Para uma definição mais precisa, consultar ([G]), por exemplo).

A.4 - *Campo de Vetores*

Um <u>campo de vetores</u> no R^n é uma aplicação $X:R^n \to R^n$. O campo é dito <u>diferenciável</u> se X o for. Uma <u>curva integral</u> de X passando por $p \in R^n$ é uma aplicação diferenciável regular (derivada não nula em todos os pontos) $f:(-\varepsilon,\varepsilon) \to R^n$ definida em um intervalo aberto $(-\varepsilon,\varepsilon)$ da reta, tal que $f(0) = p$ e para todo t deste intervalo tem-se

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\right] = X\left[f(t)\right] .$$



A.5 - *Subvariedade do R^n*

O espaço euclideano R^n é uma variedade diferenciável de dimensão n. Um subconjunto N de R^n é chamado de <u>subvariedade</u> do R^n de dimensão $k \leq n$ (ou ainda uma superfície euclideana k-dimensional) se para todo $p \in N$ existir uma vizinhança aberta U de p no R^n, tal que, pondo $U_1 = U \cap N$, existir uma aplicação diferenciável $f:U_1 \to R^k$ satisfazendo à propriedade de carta na definição de variedade.

A.6 - *Vetor Tangente à Uma Subvariedade*

Um <u>vetor tangente</u> à uma subvariedade N do R^n de dimensão k no ponto $p \in N$ é a classe de equivalência determinada pela seguinte relação entre as curvas em N que passam por p: duas vurvas c_1 e c_2 em N são equivalentes se elas passam por p e se possuem mesma velocidade em p. O conjunto de todos os vetores tangentes a N em p é representado por T_pN. Pode-se mostrar que T_pN admite uma estrutura de espaço vetorial de dimensão k. A reunião $\bigcup_{p \in N} T_pN$ é representada por TM.

A.7 - *Fibrado Vetorial Tangente*

Damos o nome de <u>fibrado vetorial tangente</u> ao conjunto TN (que tem estrutura de espaço vetorial 2k-dimensional).Um elemento de TN é caracterizado por um par: o ponto de N e um elemento do respectivo espaço tangente T_pN. O termo fibrado vem do fato de que podemos considerar uma projeção π: TN $\to$ N que ao par (p,v_p) associa o ponto $p \in N$. A imagem inversa $\pi^{-1}(p)$ é o espaço tangente T_pN (fibra). Um <u>campo de vetores em uma subvariedade</u> N é uma aplicação $X:N \to TN$ que a todo ponto $p \in N$ associa um vetor tangente v_p de T_pN. Tem-se, portanto, que $(X(p)) = p$.

A.8 - *Fibrado Vetorial Cotangente*

Sendo T_pN um espaço vetorial, podemos considerar o seu espaço dual: o espaço das formas lineares (ou 1-forma) sobre T_pN. Este espaço, representado por T_p^*N tem também dimensão k. A reunião $\bigcup_{p\in N} T_p^*N = T^*N$ é chamada de <u>fibrado vetorial cotangente</u> e tem dimensão 2k. Um elemento de T^*N é pois caracterizado por um par: o ponto de N e uma forma linear (covetor) $w_p \in T_p^*N$. Da mesma maneira, podemos considerar a projeção $\pi^*:T^*N \to N$ dada por $\pi^*(p,w_p) = p$. Uma 1-forma sobre N é uma aplicação $w:N \to T^*N$ tal que $w(p) = (p,w_p)$, ou seja, é uma aplicação que associa o ponto p de N o par (p,w_p). Se w for diferenciável, diz-se que w é uma 1-<u>forma diferencial</u>.

A.9 - *Produto Exterior*

Sejam v,w duas 1-forma sobre N. Então o <u>produto exterior</u> $v \wedge w$ de v por w em $p \in N$, calculado no par de vetores tangentes $X,Y \in T_pN$ é definido por

$$(v \wedge w)_p = \det \begin{pmatrix} v(X) & v(Y) \\ \\ w(X) & w(Y) \end{pmatrix} = v(X)w(Y) - v(Y)w(X)$$

O produto exterior, como é fácil se verificar, é uma forma bilinear anti-simétrica sobre T_pN, dita <u>2-forma</u>. Se v e w são 1--formas diferenciais, então $v \wedge w$ é dita <u>2-forma</u> <u>diferencial</u>.

A.10 - *Campo de Vetores como Derivação*

O conceito de campo de vetores pode ser dado da seguinte forma: Seja $X:R^n \to R^n$ um campo de vetores, e $p = (p_1, \ldots, p_n)$ um elemento do R^n. Então X é a aplicação que associa p à uma n-upla de valores reais $(X_1(p),\ldots,X_n(p))$. Seja $f:R^n \to R^n$ uma função diferenciável e defina-se

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \left[X(p)\right] .$$

Então X(f) é a derivada direcional de f na direção de X no ponto p. Verifica-se que $X(f+g) = X(f) + X(g)$, $X(a.f) = aX(f)$, para todo real a, $X(f.g) = X(f)g + fX(g)$. Estas propriedades caracterizam X como uma derivação no espaço das funções diferenciáveis do R^n, e convenciona-se por

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Seja $g:R^n \to R^m$ uma aplicação diferenciável. Então a diferencial de g em q é uma aplicação linear $dg(q):R^n \to R^m$ tal que

$$dg(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(q)dx_i(q)$$

Suponha que $q = X(p)$, então:

$$dg\left[X(p)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\left[X(p)\right]dx_i\left[X(p)\right] \quad .$$

mas

$$X(p) = \sum_j X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}p$$

e, como dx_i é uma 1-forma dual da base $(\partial/\partial x_i)$, tem-se

$$dg\left[X(p)\right] = X(g)(p)$$

A.11 - *2-Forma Diferencial*

Vimos acima a definição de produto exterior de duas 1-forma. Este produto nos dá uma forma bilinear anti-simétrica. Mais geralmente, se N é uma subvariedade do R^n e T_p^*N, o respectivo espaço cotangente, podemos considerar a reunião

$$\bigcup_{p\varepsilon N} \Lambda^2(T_p^*N) = \Lambda^2 N$$

onde $\Lambda^2(T_p^*N)$ denota o espaço das formas bilineares anti-simétricas sobre T_pN. Uma 2-forma diferencial em N é uma aplicação $w:N \to \Lambda^2(N)$ tal,que para todo $p \varepsilon N$ existe uma vizinhança U de p tal que para todo $q \varepsilon U$ tem-se

$$w(q) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} a_{i_1 i_2}(q)(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2})q$$

onde $a_{i_1 i_2}:U \to R$ é uma função diferenciável e $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2})$ é a base de $\Lambda^2(N)$ dada por um sistema de coordenadas (x_i), $i = 1,\ldots,n$ em torno de p (isto é, $x_i:U \to R$ é uma função diferenciável tal que $x_i(q) = x_i$).

Se $w(q)$ for de posto maximal sobre T_pN, então w é dita <u>simplética</u>.

A.12 - *Produto Interior*

Seja v uma 1-forma diferencial e X um campo de vetores. O <u>produto interior</u> de v por X, $i(X)v$ é definido por $i(X)v = v(X)$. Em particular, se $v = dg$, então $i(X)v = dg(X) = X(g)$. Se v é uma 2-forma diferencial, então o produto interior de X por v é a 1-forma diferencial $i(X)v$, tal que

$$X)v(Y) = v(X,Y) \quad ,$$

para todo campo Y.

REFERÊNCIAS

[A] Arnold V., Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique, Ed. MIR - 1976.

[G,N,H] M. Gotay, J. Nester & G. Hinds, J. Math. Phys. 19(11), 1978, 2388-2399.

[G] Godbillon C., Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique, Hermann (Paris) 1969.

[P] Pnevmatikos S., Singularités en Géométrie Symplectique, Thèse (Dijon) 1979.