NO CAMINHO DA GEOMETRIZAÇÃO DO ELETROMAGNETISMO

M. Novello

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ÍNDICE

Pág.

INTRODUÇÃO

Em sua monografia de 1924 sobre as variedades com conexão afim, E. CARTAN discute de modo geral a Teoria dos Espaços de Riemann Generalizados. Nesta teoria, introduz-se uma conexão não-métrica, isto é, não inteiramente redutível a um funcional da métrica.

Vários autores procuraram utilizar a teoria dos espaços de Cartan (assim chamados hoje, àquela generalização do espaço de Riemann) na interação gravitacional de partículas com spin, numa extensão da teoria de Einstein.

Recentemente, modelos cosmológicos associados à teoria de Einstein-Cartan, tem sido desenvolvidos com vistas a alterações das singularidades presentes nos modelos expansionistas do Universo.

Há no entanto uma outra linha de investigação associada aos espaços de Cartan, e que constitue herança direta das tentativas de unificação dos campos clássicos. Trataremos destas diferentes aplicações dos espaços de Cartan neste nosso curso(*).

(*) Na II Escola só será apresentada uma versão introdutória à Teoria Unificada do Eletromagnetismo e da Gravitação. Maiores detalhes aparecerão em breve em outra publicação.

1 - *DERIVAÇÃO COVARIANTE NO ESPAÇO AFIM*

Definimos a derivação covariante no espaço de Cartan pela relação

$$V^{\mu}{}_{\| \nu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\, V^{\alpha} \tag{1a}$$

Para o vetor covariante s_{μ}:

$$s_{\mu \| \nu} = \frac{\partial s_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu} s_{\varepsilon} \tag{1b}$$

A conexão $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ não é simétrica. Dessa forma ela pode ser escrita como a soma dos símbolos de Christoffel com um tensor. Pomos

$$\Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu} = \{ {}^{\varepsilon}_{\nu\mu} \} + K^{\varepsilon}{}_{\nu\mu}. \tag{2}$$

A conservação do comprimento ao longo de uma trajetória arbitrária fechada impõe que a derivação covariante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ se anula.

Temos então

$$g_{\mu\nu \| \lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\mu}\, g_{\varepsilon\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\nu}\, g_{\varepsilon\mu} = 0 \tag{3a}$$

Alternando os índices $(\mu\nu\lambda)$ temos:

$$g_{\nu\lambda \| \mu} = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\, g_{\varepsilon\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\lambda}\, g_{\varepsilon\nu} = 0 \tag{3b}$$

$$g_{\lambda\mu \| \nu} = \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\lambda}\, g_{\varepsilon\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}\, g_{\varepsilon\lambda} = 0 \tag{3c}$$

Somando essas equações temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - (\Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\lambda})\, g_{\varepsilon\nu} -$$

$$- (\Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\lambda})\, g_{\varepsilon\mu} + (\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu})\, g_{\varepsilon\lambda} = 0$$

Multiplicando por $1/2\ g^{\rho\mu}$ e lembrando que o símbolo de Christo_ ffel se escreve com

$$\{^{\rho}_{\nu\lambda}\} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\alpha} \left[\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right] \qquad (4)$$

temos

$$\{^{\rho}_{\nu\lambda}\} + \frac{1}{2}\, g^{\rho\mu} g_{\varepsilon\nu}\, (\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\mu}) - \frac{1}{2}\, (\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, g^{\rho\mu} g_{\varepsilon\lambda}\, (\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}) = 0$$

Definimos a torção $\tau^{\varepsilon}_{\mu\lambda}$ pela relação

$$\tau^{\varepsilon}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\, (\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\mu}) \qquad (5)$$

Daí escrevemos

$$\{^{\rho}_{\nu\lambda}\} + g^{\rho\mu} g_{\varepsilon\nu}\, \tau^{\varepsilon}_{\mu\lambda} + g^{\rho\mu} g_{\varepsilon\lambda} \tau^{\varepsilon}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, (\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda})$$

Mas

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\, (\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2}\, (\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}) = \frac{1}{2}\, (\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}) + \tau^{\rho}_{\lambda\nu}\,.$$

Substituindo na equação acima, temos

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} = \{^{\rho}_{\nu\lambda}\} + g^{\rho\mu} g_{\varepsilon\nu} \tau^{\varepsilon}_{\mu\lambda} + g^{\rho\mu} g_{\varepsilon\lambda} \tau^{\varepsilon}_{\mu\nu} + \tau^{\rho}_{\lambda\nu} \qquad (6)$$

Daí a contorção $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ definida em (2) se escreve:

$$K^{\rho}_{\lambda\nu} = g^{\rho\mu}g_{\varepsilon\nu}\tau^{\varepsilon}{}_{\mu\lambda} + g^{\rho\mu}g_{\varepsilon\lambda}\tau^{\varepsilon}{}_{\mu\nu} + \tau^{\rho}{}_{\lambda\nu} \qquad (7)$$

Note que embora a torção seja anti-simétrica, a contorção não tem simetria definida.

De modo geral a notação $V_{\mu\|\lambda}$ significa derivada covariante em relação à conexão afim e escrevemos $V_{\mu;\nu}$ quando a conexão se reduzir ao símbolo de Christoffel. Isto é, temos:

$$V^{\mu}{}_{\|\nu} = V^{\mu}{}_{;\nu} + K^{\mu}{}_{\nu\alpha}V^{\alpha} \quad .$$

2 - *DECOMPOSIÇÃO DA TORÇÃO e GEOMETRIA DE CARTAN RESTRITA*

A torção $\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ possue 24 graus de liberdade. É possível representá-la sob forma de um tensor $L^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ e dois vetores τ_{μ} e Σ_{μ}.

Escrevemos

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = L^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\delta^{\alpha}{}_{\mu}\tau_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\tau_{\mu}\right) - \frac{1}{3}\eta^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}\Sigma^{\lambda} \tag{8}$$

onde $L^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ não possue nem traço, nem pseudo-traço, isto é,

$$L^{\alpha}{}_{\alpha\nu} = 0$$

$$L^{\alpha}{}_{\alpha\overset{*}{\nu}} = 0$$

Contraindo (8) temos:

$$\tau^{\alpha}{}_{\alpha\nu} = \frac{1}{3}\left(4\tau_{\nu} - \tau_{\nu}\right) = \tau_{\nu} \tag{9}$$

Vemos então que τ_{ν} é o traço da torção.

Tomemos o dual de (8):

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\overset{*}{\nu}} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\,\tau^{\alpha}{}_{\rho\sigma}$$

Temos

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\overset{*}{\nu}} = L^{\alpha}{}_{\mu\overset{*}{\nu}} + \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\left(\delta^{\alpha}{}_{\rho}\tau_{\sigma} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\tau_{\rho}\right) - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\eta^{\alpha}{}_{\rho\sigma\lambda}\Sigma^{\lambda}$$

Tomando o traço:

$$\tau^{\alpha}{}_{\alpha\overset{*}{\nu}} = -\frac{1}{6}\eta_{\alpha\nu}{}^{\rho\sigma}\,\eta^{\alpha}{}_{\rho\sigma\lambda}\,\Sigma^{\lambda}$$

$$\tau^{\alpha}{}_{\alpha\overset{*}{\nu}} = +\Sigma_{\nu}\ . \tag{10}$$

Daí, identificamos Σ_ν como o pseudo-traço.

Chamaremos de Geometria de Cartan Restrita (GCR) àquela em que na torção somente o traço e o pseudo-traço sobrevivem, isto é, quando

$$L^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{11}$$

Assim, escrevemos

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\,(\delta^{\alpha}_{\mu}\tau_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\tau_{\mu}) - \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}\,\Sigma^{\lambda} \tag{12}$$

Neste caso, a contorção se reduz à expressão

$$\begin{aligned} 3K^{\rho}{}_{\lambda\nu} = {} & g^{\rho\mu}g_{\varepsilon\nu}\left[\delta^{\varepsilon}_{\mu}\tau_{\lambda} - \delta^{\varepsilon}_{\lambda}\tau_{\mu} - \eta^{\varepsilon}{}_{\mu\lambda\alpha}\,\Sigma^{\alpha}\right] + \\ & + g^{\rho\mu}g_{\varepsilon\lambda}\left[\delta^{\varepsilon}_{\mu}\tau_{\nu} - \delta^{\varepsilon}_{\nu}\tau_{\mu} - \eta^{\varepsilon}{}_{\mu\nu\alpha}\,\Sigma^{\alpha}\right] + \\ & + \delta^{\rho}_{\lambda}\tau_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\tau_{\lambda} - \eta^{\rho}{}_{\lambda\nu\alpha}\,\Sigma^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3K^{\rho}{}_{\lambda\nu} = {} & \delta^{\rho}_{\nu}\tau_{\lambda} - \tau^{\rho}g_{\lambda\nu} - \eta_{\nu}{}^{\rho}{}_{\lambda\alpha}\Sigma^{\alpha} + \\ & + \delta^{\rho}_{\lambda}\tau_{\nu} - g_{\lambda\nu}\tau^{\rho} - \eta_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\nu\alpha}\Sigma^{\alpha} + \delta^{\rho}{}_{\lambda}\tau_{\nu} - \\ & - \delta^{\rho}_{\nu}\tau_{\lambda} - \eta^{\rho}{}_{\lambda\nu\alpha}\,\Sigma^{\alpha} \end{aligned}$$

$$3K^{\rho}{}_{\lambda\nu} = -\,2\tau^{\rho}g_{\lambda\nu} + 2\delta^{\rho}_{\lambda}\tau_{\nu} - \eta^{\rho}{}_{\lambda\nu\alpha}\,\Sigma^{\alpha}$$

Daí

$$K^{\rho}{}_{\lambda\nu} = \frac{2}{3}\,(\delta^{\rho}_{\lambda}\tau_{\nu} - \tau^{\rho}g_{\lambda\nu}) - \frac{1}{3}\,\eta^{\rho}{}_{\lambda\nu\alpha}\,\Sigma^{\alpha} \tag{13}$$

E, contraíndo ρ com λ :

$$K^{\rho}{}_{\rho\nu} = 2\tau_{\nu}$$

Note ademais que vale a relação

$$K_{\rho\lambda\nu} + K_{\nu\lambda\rho} = 0 \qquad (14)$$

Esta relação garante que em um circuito fechado o comprimento de vetores não se altera. Isto é, tem-se

$$g_{\mu\nu\|\lambda} = 0$$

além de

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad .$$

3 - *TENSOR DE CURVATURA*

Vimos como no espaço de Cartan obtém-se a derivada covariante. Um exemplo do resultado dessa alteração vamos encontrar na expressão do rotacional de um escalar que aqui não é identicamente nulo.

Notando

$$\theta_{|\mu} = \frac{\partial\theta}{\partial x^{\mu}}$$

Escrevemos

$$\theta_{|\alpha\|\beta} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^{\lambda}}$$

$$\theta_{|\beta\|\alpha} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^{\lambda}}$$

Daí

$$\theta_{|\alpha\|\beta} - \theta_{|\beta\|\alpha} = (\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha})\,\frac{\partial\theta}{\partial x^{\lambda}}$$

ou seja,

$$\theta_{|\alpha\|\beta} - \theta_{|\beta\|\alpha} = 2\tau^{\lambda}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\theta}{\partial x^{\lambda}} \tag{15}$$

Vamos agora calcular o rotacional de um vetor.

Temos:

$$\Psi^{\alpha}{}_{\|\beta} = \Psi^{\alpha}{}_{|\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\sigma}\,\Psi^{\sigma}$$

$$\Psi^{\alpha}{}_{\|\beta\|\lambda} = (\Psi^{\alpha}{}_{\|\beta})_{|\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}\,\Psi^{\sigma}_{\|\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta}\,\Psi^{\alpha}{}_{\|\varepsilon} =$$

$$= (\Psi^{\alpha}_{|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\Psi^{\sigma})_{|\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} (\Psi^{\sigma}_{|\beta} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Psi^{\mu}) -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta} (\Psi^{\alpha}_{|\varepsilon} + \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\mu} \Psi^{\mu})$$

$$= \Psi^{\alpha}_{|\beta|\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma|\lambda}\Psi^{\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} \Psi^{\sigma}_{|\lambda} +$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}\Psi^{\sigma}_{|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Psi^{\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta}\Psi^{\alpha}_{|\varepsilon} -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\mu} \Psi^{\mu}$$

$$= \Psi^{\alpha}_{|\beta|\lambda} + (\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma|\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}) \Psi^{\sigma}$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\Psi^{\sigma}_{|\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}\Psi^{\sigma}_{|\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta}\Psi^{\alpha}_{|\varepsilon}$$

Analogamente,

$$\Psi^{\alpha}_{\|\lambda\|\beta} = \Psi^{\alpha}{}_{|\lambda|\beta} + (\Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}) \Psi^{\sigma}$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma}\Psi^{\sigma}_{|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\Psi^{\sigma}_{|\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\lambda}\Psi^{\alpha}_{|\varepsilon}$$

Subtraindo

$$\Psi^{\alpha}_{\|\beta\|\lambda} - \Psi^{\alpha}_{\|\lambda\|\beta} = (\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma|\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} -$$

$$- \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}) \Psi^{\sigma} - (\Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\lambda}) \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}\Psi^{\sigma} +$$

$$+ (\Gamma^{\varepsilon}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\beta}) \Psi^{\alpha}_{|\varepsilon}$$

Definimos a curvatura $R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}$ como sendo

$$R^{\alpha}{}_{\sigma\beta\lambda} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\sigma|\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \tag{16}$$

Daí, substituindo (16) em (15)

$$\psi^{\alpha}{}_{\|\beta\|\lambda} - \psi^{\alpha}{}_{\|\lambda\|\beta} = R^{\alpha}{}_{\sigma\beta\lambda}\psi^{\sigma} - 2\tau^{\varepsilon}_{\lambda\beta}\,(\psi^{\alpha}{}_{|\varepsilon} + \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}\psi^{\sigma})$$

$$\psi^{\alpha}{}_{\|\beta\|\lambda} - \psi^{\alpha}{}_{\|\lambda\|\beta} = R^{\alpha}{}_{\sigma\beta\lambda}\psi^{\sigma} - 2\tau^{\varepsilon}{}_{\lambda\beta}\psi^{\alpha}{}_{\|\varepsilon}$$

ou

$$\psi^{\alpha}{}_{\|\beta\|\lambda} - \psi^{\alpha}{}_{\|\lambda\|\beta} = R^{\alpha}{}_{\sigma\beta\lambda}\psi^{\sigma} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\beta\lambda}\psi^{\alpha}{}_{\|\varepsilon} \tag{17}$$

Vemos assim que o tensor de curvatura possue as simetrias

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = - R_{\nu\mu\rho\sigma} = - R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

Entretanto, a relação que no espaço de Riemann permite simetria nos conjuntos constituidos pelos dois primeiros índices em relação aos dois últimos, não vale no espaço de Cartan. Vamos calcular agora como devemos modificar aquela identidade.

4 - *IDENTIDADES DO TENSOR DE CURVATURA (GENERALIZAÇÃO DAS IDENTIDADES DE BIANCHI)*

Da relação (17) temos(*):

$$\Psi_{i\|j\|k} - \Psi_{i\|k\|j} = - R_{mijk}\ \Psi^{m} + 2\tau^{\ell}{}_{jk}\ \Psi_{i\|\ell}$$

$$\Psi_{j\|k\|i} - \Psi_{j\|i\|k} = - R_{mjki}\ \Psi^{m} + 2\tau^{\ell}{}_{ki}\ \Psi_{j\|\ell}$$

$$\Psi_{k\|i\|j} - \Psi_{k\|j\|i} = - R_{mkij}\ \Psi^{m} + 2\tau^{\ell}{}_{ij}\ \Psi_{k\|\ell}$$

Seja Ψ_i um gradiente

$$\Psi_i = \frac{\partial\Theta}{\partial x^i}$$

Temos, somando as três relações acima:

$$(\Theta_{|i|j} - \Gamma^{\ell}{}_{ji}\Theta_{|\ell})_{\|k} - (\Theta_{|i|k} - \Gamma^{\ell}_{ki}\ \Theta_{|\ell})_{\|j} +$$

$$+ (\Theta_{|j|k} - \Gamma^{\ell}{}_{kj}\Theta_{|\ell})_{\|i} - (\Theta_{|j|i} - \Gamma^{\ell}{}_{ij}\Theta_{|\ell})_{\|k} +$$

$$+ (\Theta_{|k|i} - \Gamma^{\ell}{}_{ik}\Theta_{|\ell})_{\|j} - (\Theta_{|k|j} - \Gamma^{\ell}{}_{jk}\Theta_{|\ell})_{\|i} =$$

$$= - (R^{m}{}_{ijk} + R^{m}{}_{jki} + R^{m}{}_{kij})\ \Theta_m + 2\tau^{\ell}{}_{jk}\ \Theta_{|i\|\ell} +$$

$$+ 2\tau^{\ell}{}_{ki}\ \Theta_{|j\|\ell} + 2\tau^{\ell}{}_{ij}\ \Psi_{k\|\ell}\ \Theta_{|k\|\ell}\ .$$

Isto é

$$\left[(\Gamma^{\ell}_{ij} - \Gamma^{\ell}_{ji})\Theta_{|\ell}\right]_{\|k} + \left[(\Gamma^{\ell}_{ki} - \Gamma^{\ell}_{ik})\Theta_{|\ell}\right]_{\|j} +$$

(*) Os índices gregos e latinos são usados neste capítulo indistintamente.

$$+ \left[(\Gamma^{\ell}_{jk} - \Gamma^{\ell}_{kj})\theta_{|\ell}\right]_{\| i} = - R^{m}{}_{\{ijk\}}\,\theta_{|m} + 2\tau^{\ell}_{jk}\,\theta_{|i\|\ell} +$$

$$+ 2\tau^{\ell}_{ki}\,\theta_{|j\|\ell} + 2\tau^{\ell}{}_{ij}\,\theta_{|k\|\ell}$$

ou seja,

$$(\tau^{\ell}_{ij}\,\theta_{|\ell})_{\| k} + (\tau^{\ell}_{ki}\,\theta_{|\ell})_{\| j} + (\tau^{\ell}_{jk}\,\theta_{|\ell})_{\| i} =$$

$$= - \frac{1}{2} R^{m}{}_{\{ijk\}}\,\theta_{|m} + \tau^{\ell}_{jk}\,\theta_{|i\|\ell} + \tau^{\ell}_{ki}\,\theta_{|j\|\ell} + \tau^{\ell}_{ij}\theta_{|k\|\ell}$$

onde

$$R^{m}{}_{\{ijk\}} \equiv R^{m}{}_{ijk} + R^{m}{}_{jki} + R^{m}{}_{kij}$$

Desenvolvendo

$$(\tau^{\ell}{}_{ij\|k} + \tau^{\ell}{}_{ki\|j} + \tau^{\ell}{}_{jk\|i})\,\theta_{|\ell} +$$

$$+ \tau^{\ell}{}_{ij}\,(\theta_{|\ell\|k} - \theta_{|k\|\ell}) + \tau^{\ell}{}_{ki}\,(\theta_{|\ell\|j} - \theta_{|j\|\ell}) +$$

$$+ \tau^{\ell}{}_{jk}\,(\theta_{|\ell\|i} - \theta_{|i\|\ell}) = - \frac{1}{2} R^{m}{}_{\{ijk\}}\,\theta_{|m}$$

Usando a relação (15) que dá o rotacional de um escalar no espaço de Cartan, temos:

$$\frac{1}{2} R^{m}{}_{\{ijk\}}\,\theta_{|m} + \left[\tau^{m}{}_{ij\|k} + \tau^{m}{}_{ki\|j} + \tau^{m}{}_{jk\|i}\right]\theta_{|m} +$$

$$+ 2\left[\tau^{\ell}{}_{ij}\,\tau^{m}{}_{\ell k} + \tau^{\ell}{}_{ki}\,\tau^{m}{}_{\ell j} + \tau^{\ell}{}_{jk}\,\tau^{m}{}_{\ell i}\right]\theta_{|m} = 0$$

ou, finalmente,

$$R^{m}{}_{\{ijk\}} = -\ 2\tau^{m}{}_{\{ij\|k\}} + 4\tau^{\ell}{}_{\{ij}\ \tau^{m}_{k\}\ell} \qquad (18)$$

que é a identidade procurada.

Vamos agora obter a identidade de Bianchi generalizada para o espaço de Cartan.

Calculemos primeiramente a relação

$$\Psi_{\alpha\beta\|\mu\|\nu} - \Psi_{\alpha\beta\|\nu\|\mu}$$

Temos

$$\Psi_{\alpha\beta\|\mu\|\nu} = (\Psi_{\alpha\beta\|\mu})_{|\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\ \Psi_{\varepsilon\beta\|\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta}\ \Psi_{\alpha\varepsilon\|\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}\ \Psi_{\alpha\beta\|\varepsilon}$$

$$= \Psi_{\alpha\beta|\mu|\nu} - (\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha}\Psi_{\varepsilon\beta} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\beta}\Psi_{\alpha\varepsilon})_{|\nu}\ -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}(\Psi_{\varepsilon\beta|\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\varepsilon}\ \Psi_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\ \Psi_{\varepsilon\lambda})\ -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta}\ (\Psi_{\alpha\varepsilon|\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\Psi_{\lambda\varepsilon} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\varepsilon}\ \Psi_{\alpha\lambda}\ ) - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}\ (\Psi_{\alpha\beta\|\varepsilon})$$

$$\Psi_{\alpha\beta\|\mu\|\nu} = \Psi_{\alpha\beta|\mu|\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha|\nu}\ \Psi_{\varepsilon\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha}\ \Psi_{\varepsilon\beta|\nu}\ -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\beta|\nu}\Psi_{\alpha\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\beta}\Psi_{\alpha\varepsilon|\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\Psi_{\varepsilon\beta|\mu}\ +$$

$$+ \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\varepsilon}\ \Psi_{\lambda\beta} + \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\ \Psi_{\varepsilon\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta}\ \Psi_{\alpha\varepsilon|\mu}\ +$$

$$+ \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta}\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\ \Psi_{\lambda\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta}\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\varepsilon}\ \Psi_{q\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}\ \Psi_{\alpha\beta\|\varepsilon}$$

E também

$$\Psi_{\alpha\beta\|\nu\|\mu} = \Psi_{\alpha\beta|\nu\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha|\mu}\ \Psi_{\varepsilon\beta} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\ \Psi_{\varepsilon\beta|\mu}\ -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta|\mu} \Psi_{\alpha\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\beta} \Psi_{\alpha\varepsilon|\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha} \Psi_{\varepsilon\beta|\nu} +$$

$$+ \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\nu\varepsilon} \Psi_{\lambda\beta} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} \Psi_{\varepsilon\lambda} -$$

$$- \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\beta} \Psi_{\alpha\varepsilon|\nu} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\beta} \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} \Psi_{\lambda\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\beta} \Gamma^{\lambda}_{\nu\varepsilon} \Psi_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \Psi_{\alpha\beta\|\varepsilon}$$

Daí,

$$\Psi_{\alpha\beta\|\mu\|\nu} - \Psi_{\alpha\beta\|\nu\|\mu} = R_{\alpha\varepsilon\mu\nu} \Psi^{\varepsilon}{}_{\beta} + R_{\beta\varepsilon\mu\nu} \Psi_{\alpha}{}^{\varepsilon} +$$

$$+ (\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}) \Psi_{\alpha\beta\|\varepsilon}$$

$$\Psi_{\alpha\beta\|\mu\|\nu} - \Psi_{\alpha\beta\|\nu\|\mu} = R_{\alpha\varepsilon\mu\nu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\beta} + R_{\beta\varepsilon\mu\nu}\Psi_{\alpha}{}^{\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}_{\mu\nu}\Psi_{\alpha\beta\|\varepsilon} \qquad (19)$$

Vamos agora calcular a derivação da relação:

$$\Psi_{\alpha\|\mu\|\nu} - \Psi_{\alpha\|\nu\|\mu} = R_{\alpha\varepsilon\mu\nu}\Psi^{\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}_{\mu\nu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon}$$

Temos:

$$\Psi_{\alpha\|\mu\|\nu\|\lambda} - \Psi_{\alpha\|\nu\|\mu\|\lambda} = R_{\alpha\varepsilon\mu\nu\|\lambda}\Psi^{\varepsilon} + R_{\alpha\varepsilon\mu\nu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\lambda} +$$

$$+ 2\tau^{\varepsilon}_{\mu\nu\|\lambda} \Psi_{\alpha\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\mu\nu} \Psi_{\alpha\|\varepsilon\|\lambda}$$

alternando μ, ν e λ temos:

$$\Psi_{\alpha\|\nu\|\lambda\|\mu} - \Psi_{\alpha\|\lambda\|\nu\|\mu} = R_{\alpha\varepsilon\nu\lambda\|\mu} \Psi^{\varepsilon} + R_{\alpha\varepsilon\nu\lambda} \Psi^{\varepsilon}{}_{\|\mu} +$$

$$+ 2\tau^{\varepsilon}{}_{\nu\lambda\|\mu} \Psi_{\alpha\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\nu\lambda} \Psi_{\alpha\|\varepsilon\|\mu}$$

$$\Psi_{\alpha\|\lambda\|\mu\|\nu} - \Psi_{\alpha\|\mu\|\lambda\|\nu} = R_{\alpha\varepsilon\lambda\mu\|\nu}\Psi^{\varepsilon} + R_{\alpha\varepsilon\lambda\mu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\nu} +$$

$$+ 2\tau^{\varepsilon}{}_{\lambda\mu\|\nu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\lambda\mu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon\|\nu}$$

Somando essas três equações e levando em conta a relação

$$\Psi_{\alpha\|\mu\|\nu\|\lambda} - \Psi_{\alpha\|\mu\|\lambda\|\nu} = R_{\alpha\varepsilon\nu\lambda}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\mu} +$$

$$+ R_{\mu\varepsilon\nu\lambda}\Psi_{\alpha}{}^{\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}_{\nu\lambda}\Psi_{\alpha\|\mu\|\varepsilon}$$

temos:

$$R_{\alpha\varepsilon\nu\lambda}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\mu} + R_{\mu\varepsilon\nu\lambda}\Psi_{\alpha}{}^{\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\nu\lambda}\Psi_{\alpha\|\mu\|\varepsilon} +$$

$$+ R_{\alpha\varepsilon\lambda\mu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\nu} + R_{\nu\varepsilon\lambda\mu}\Psi_{\alpha}{}^{\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\lambda\mu}\Psi_{\alpha\|\nu\|\varepsilon} +$$

$$+ R_{\alpha\varepsilon\mu\nu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\lambda} + R_{\lambda\varepsilon\mu\nu}\Psi_{\alpha}{}^{\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\mu\nu}\Psi_{\alpha\|\lambda\|\varepsilon} =$$

$$= \left[R^{\alpha\varepsilon}{}_{\mu\nu\|\lambda} + R^{\alpha\varepsilon}{}_{\nu\lambda\|\mu} + R^{\alpha\varepsilon}{}_{\lambda\mu\|\nu}\right]\Psi_{\varepsilon} +$$

$$+ R_{\alpha\varepsilon\nu\lambda}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\mu} + R_{\alpha\varepsilon\mu\nu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\lambda} + R_{\alpha\varepsilon\lambda\mu}\Psi^{\varepsilon}{}_{\|\nu} +$$

$$+ 2\tau^{\varepsilon}{}_{\mu\nu\|\lambda}\Psi_{\alpha\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\mu\nu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon\|\lambda} +$$

$$+ 2\tau^{\varepsilon}{}_{\nu\lambda\|\mu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\nu\lambda}\Psi_{\alpha\|\varepsilon\|\mu} +$$

$$+ 2\tau^{\varepsilon}{}_{\lambda\mu\|\nu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon} + 2\tau^{\varepsilon}{}_{\lambda\mu}\Psi_{\alpha\|\varepsilon\|\nu}$$

Mas

$$\Psi_{\alpha\|\epsilon\|\lambda} = \Psi_{\alpha\|\lambda\|\epsilon} + R_{\alpha\sigma\epsilon\lambda}\Psi^{\sigma} + 2\tau^{\sigma}_{\epsilon\lambda}\Psi_{\alpha\|\sigma}$$

Daí,

$$R^{\alpha\epsilon}{}_{\{\mu\nu\|\lambda\}}\Psi_{\epsilon} + \Psi_{\alpha\|\epsilon}\left[2\tau^{\epsilon}_{\{\mu\nu\|\lambda\}} + R^{\epsilon}_{\{\mu\nu\lambda\}}\right] -$$

$$- 2\tau^{\epsilon}{}_{\nu\lambda}\Psi_{\alpha\|\mu\|\epsilon} - 2\tau^{\epsilon}{}_{\lambda\mu}\Psi_{\alpha\|\nu\|\epsilon} - 2\tau^{\epsilon}{}_{\mu\nu}\Psi_{\alpha\|\lambda\|\epsilon} +$$

$$+ 2\tau^{\epsilon}{}_{\nu\lambda}\left[\Psi_{\alpha\|\mu\|\epsilon} + R_{\alpha\sigma\epsilon\mu}\Psi^{\sigma} + 2\tau^{\sigma}_{\epsilon\mu}\Psi_{\alpha\|\sigma}\right] +$$

$$+ 2\tau^{\epsilon}{}_{\mu\nu}\left[\Psi_{\alpha\|\lambda\|\epsilon} + R_{\alpha\sigma\epsilon\lambda}\Psi^{\sigma} + 2\tau^{\sigma}{}_{\epsilon\lambda}\Psi_{\alpha\|\sigma}\right] +$$

$$+ 2\tau^{\epsilon}{}_{\lambda\mu}\left[\Psi_{\alpha\|\nu\|\epsilon} + R_{\alpha\sigma\epsilon\nu}\Psi^{\sigma} + 2\tau^{\sigma}{}_{\epsilon\nu}\Psi_{\alpha\|\sigma}\right] = 0$$

ou

$$R^{\alpha\epsilon}{}_{\{\mu\nu\|\lambda\}}\Psi_{\epsilon} + 4\Psi_{\alpha\|\epsilon}\,\tau^{\sigma}_{\{\mu\nu}\,\tau^{\epsilon}_{\lambda\}\sigma} + 2\tau^{\epsilon}_{\{\nu\lambda}\,R_{\alpha\sigma\epsilon\mu\}}\Psi^{\sigma} +$$

$$+ 4\tau^{\epsilon}_{\{\nu\lambda}\,\tau^{\sigma}_{\epsilon\mu\}}\,\Psi_{\alpha\|\sigma}$$

Finalmente,

$$R^{\alpha\epsilon}{}_{\{\mu\nu\|\lambda\}} + 2R^{\alpha\epsilon}{}_{\sigma\{\mu}\,\tau^{\sigma}_{\nu\lambda\}} = 0 \tag{20}$$

que é a identidade de Bianchi generalizada, no espaço de Cartan.

Contraindo ϵ com ν temos

$$R^{\alpha\nu}{}_{\mu\nu\|\lambda} + R^{\alpha\nu}{}_{\nu\lambda\|\mu} + R^{\alpha\nu}{}_{\lambda\mu\|\nu} +$$

$$+ 2R^{\alpha\nu}{}_{\sigma\mu}\tau^{\sigma}{}_{\nu\lambda} + 2R^{\alpha\nu}{}_{\sigma\nu}\tau^{\sigma}{}_{\lambda\mu} + 2R^{\alpha\nu}{}_{\sigma\lambda}\tau^{\sigma}{}_{\mu\nu} = 0$$

isto é,

$$R^{\alpha}{}_{\mu\|\lambda} - R^{\alpha}{}_{\lambda\|\mu} + R^{\alpha\nu}{}_{\lambda\mu\|\nu} + 2R^{\alpha\nu}{}_{\sigma\mu}\tau^{\sigma}{}_{\nu\lambda} + 2R^{\alpha}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\lambda\mu} + 2R^{\alpha\nu}{}_{\sigma\lambda}\tau^{\sigma}{}_{\mu\nu} = 0$$

Contraindo uma vez mais (α com λ), temos:

$$R^{\alpha}{}_{\mu\|\alpha} - R_{|\mu} + R^{\alpha}{}_{\mu\|\alpha} + 2R^{\lambda}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\lambda\mu} + 2R^{\lambda\nu}{}_{\sigma\mu}\tau^{\sigma}{}_{\nu\lambda}$$
$$- 2R^{\lambda}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\mu\lambda} = 0$$

Daí

$$2R^{\alpha}{}_{\mu\|\alpha} - R_{|\mu} + 4R^{\lambda}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\lambda\mu} + 2R^{\lambda\nu}{}_{\sigma\mu}\tau^{\sigma}{}_{\nu\lambda} = 0$$

ou

$$(R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R\delta^{\alpha}_{\mu})_{\|\alpha} = - 2R^{\alpha}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\alpha\mu} - R^{\lambda\nu}{}_{\sigma\mu}\tau^{\sigma}{}_{\nu\lambda} \qquad (21)$$

que é a nova relação de divergência do tensor contraído de Ricci no espaço de Cartan.

5 - *IDENTIDADES DE BIANCHI GENERALIZADA EM ESPAÇO DE CARTAN RESTRITO*

Calculemos a relação (21) no espaço restrito de Cartan. Temos, de (12)

$$\tau^{\sigma}_{\alpha\mu} = \frac{1}{3}\,(\delta^{\sigma}_{\alpha}\,\tau_{\mu} - \delta^{\sigma}_{\mu}\,\tau_{\alpha}) - \frac{1}{3}\,\eta^{\sigma}{}_{\alpha\mu\lambda}\Sigma^{\lambda}$$

Daí

$$R^{\alpha}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\alpha\mu} = \frac{1}{3}\left[R\tau_{\mu} - R^{\alpha}{}_{\mu}\tau_{\alpha}\right] + \frac{1}{3}\,\eta_{\alpha\sigma\mu\lambda}R^{\alpha\sigma}\Sigma^{\lambda}$$

$$R^{\alpha}{}_{\sigma}\tau^{\sigma}{}_{\alpha\mu} = -\frac{1}{3}\,(R^{\alpha}{}_{\mu} - R\delta^{\alpha}_{\mu})\,\tau_{\alpha} + \frac{2}{3}\,R_{\mu\lambda}^{*}\Sigma^{\lambda}$$

Daí temos finalmente, na GCR a relação

$$(R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\,R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{\|\alpha} = \frac{2}{3}\,(R^{\alpha}{}_{\mu} - R\delta^{\alpha}{}_{\mu})\,\tau_{\alpha} + \frac{4}{3}\,R_{\lambda\mu}^{*}\Sigma^{\lambda} \tag{22}$$

Podemos transformar a derivada em derivação riemanniana, se notamos que a relação para um tensor arbitrário $\Theta^{\alpha}{}_{\mu}$:

$$\Theta^{\alpha}{}_{\mu\|\alpha} = \Theta^{\alpha}{}_{\mu;\alpha} + K^{\alpha}_{\alpha\varepsilon}\,\Theta^{\varepsilon}{}_{\mu} - K^{\sigma}{}_{\alpha\mu}\,\Theta^{\alpha}{}_{\sigma}$$

onde $K^{\alpha}{}_{\sigma\varepsilon}$ é a contorção e usando a equação (13) tem-se

$$\Theta^{\alpha}{}_{\mu\|\alpha} = \Theta^{\alpha}{}_{\mu;\alpha} + 2\tau_{\alpha}\Theta^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{2}{3}\,\Theta^{\alpha}{}_{\alpha}\tau_{\mu} + \frac{2}{3}\,\Theta_{\mu\alpha}\tau^{\alpha} + \frac{1}{3}\,\Theta_{\alpha\sigma}\eta^{\alpha\sigma\lambda\mu}\,\Sigma_{\lambda}$$

No caso particular em que $\Theta^{\alpha}{}_{\mu}$ é o tensor de Ricci - -Cartan $\Theta^{\alpha}{}_{\mu} = R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\,R\delta^{\alpha}{}_{\mu}$:

$$(R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\,R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{\|\alpha} = (R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\,R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{;\alpha} + 2\tau_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\mu} - R\tau_{\mu} + \frac{2}{3}\,R\tau_{\mu} +$$

$$+ \frac{2}{3} R_{\mu\alpha}\tau^{\alpha} - \frac{1}{3} R\tau_{\mu} + \frac{1}{3} R_{\alpha\sigma}\, \eta^{\alpha\sigma\lambda\mu}\, \Sigma_{\lambda}$$

ou seja,

$$(R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{\|\alpha} = (R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{;\alpha} + 2\tau_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\mu} +$$

$$+ \frac{2}{3} R_{\mu\alpha}\tau^{\alpha} - \frac{2}{3} R\tau_{\mu} + \frac{2}{3} R_{\alpha\mu}^{*}\, \Sigma^{\alpha} \qquad (23)$$

Usando a relação (22) encontramos:

$$(R^{\alpha}{}_{.\mu} - \frac{1}{2} R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{;\alpha} = \frac{2}{3} R^{\alpha}{}_{\mu}\tau_{\alpha} - \frac{2}{3} R\tau_{\mu} + \frac{4}{3} R_{\alpha\mu}^{*}\Sigma^{\alpha} -$$

$$- 2\tau_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{2}{3} R_{\mu\alpha}\tau^{\alpha} + \frac{2}{3} R\tau_{\mu} - \frac{2}{3} R_{\alpha\mu}^{*}\, \Sigma^{\alpha}$$

ou, finalmente,

$$(R^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R\delta^{\alpha}{}_{\mu})_{;\alpha} = - \frac{4}{3} R_{\alpha\mu}\tau^{\alpha} - \frac{2}{3} R_{\mu\alpha}\tau^{\alpha} + \frac{2}{3} R_{\alpha\mu}^{*}\, \Sigma^{\alpha} \qquad (24)$$

que nos dá a divergência riemanniana do tensor de Ricci-Cartan na geometria de Cartan restrita.

6 - *O TENSOR DE RIEMANN CONTRAIDO NA GEOMETRIA DE CARTAN RESTRITA*

Da definição (16), podemos escrever

$$R_{\sigma\lambda} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma|\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma|\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \tag{25}$$

Usando a expressão da conexão de Cartan restrita temos

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} = \{^{\alpha}_{\lambda\sigma}\} + \frac{2}{3}\left(\delta^{\alpha}{}_{\lambda}\tau_{\sigma} - \tau^{\alpha}g_{\lambda\sigma}\right) - \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha}{}_{\lambda\sigma\rho}\,\Sigma^{\rho} \tag{26}$$

Daí

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} = \{^{\alpha}_{\alpha\sigma}\} + 2\tau_{\sigma} \tag{27}$$

Substituindo em (25), por partes temos:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma|\lambda} = \{^{\alpha}_{\alpha\sigma}\}_{|\sigma} + 2\tau_{\sigma|\lambda}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma|\alpha} = \{^{\alpha}_{\lambda\sigma}\}_{|\alpha} + \frac{2}{3}\,\tau_{\sigma|\lambda} - \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}{}_{|\alpha}\,g_{\lambda\sigma} -$$

$$- \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}\,g_{\lambda\sigma|\alpha} - \frac{1}{3}\left(\eta^{\alpha}{}_{\lambda\sigma\rho}\,\Sigma^{\rho}\right)_{|\alpha}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} = \left\{\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\} + \frac{2}{3}\left(\delta^{\alpha}_{\lambda}\tau_{\rho} - \tau^{\alpha}g_{\lambda\rho}\right) - \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha}{}_{\lambda\rho\varepsilon}\Sigma^{\varepsilon}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} + \frac{2}{3}\left(\delta^{\rho}_{\alpha}\tau_{\sigma} - \tau^{\rho}g_{\alpha\sigma}\right) - \frac{1}{3}\,\eta^{\rho}{}_{\alpha\sigma\tau}\,\Sigma^{\tau}\right] =$$

$$= \{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}\{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} + \frac{2}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}\,\tau_{\sigma} - \frac{2}{3}\,\tau^{\rho}\,\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}\,g_{\alpha\sigma} -$$

$$- \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\alpha\sigma\tau}\,\Sigma^{\tau} \quad +$$

$$+ \frac{2}{3} \{^{\rho}_{\lambda\sigma}\} \tau_\rho + \frac{4}{9} \tau_\lambda \tau_\sigma - \frac{4}{9} \tau^2 g_{\lambda\sigma} -$$

$$- \frac{2}{9} \eta_{\rho\lambda\sigma\tau} \tau^\rho \Sigma^\tau - \frac{2}{3} \{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} \tau^\alpha g_{\lambda\rho} +$$

$$+ \frac{2}{9} \eta_{\lambda\alpha\sigma\tau} \tau^\alpha \Sigma^\tau - \frac{1}{3} \{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} \eta^{\alpha}{}_{\lambda\rho\varepsilon} \Sigma^\varepsilon +$$

$$+ \frac{2}{9} \eta_{\sigma\lambda\rho\varepsilon} \tau^\rho \Sigma^\varepsilon + \frac{1}{9} \eta_{\alpha\lambda\rho\varepsilon} \eta^{\rho\alpha}{}_{\sigma}{}^{\tau} \Sigma^\varepsilon \Sigma_\tau =$$

$$= \{^{\alpha}_{\lambda\sigma}\}\{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} + \frac{2}{3} \{^{\alpha}_{\lambda\alpha}\} \tau_\sigma - \frac{2}{3} \{^{\alpha}_{\lambda\rho}\} g_{\alpha\sigma} \tau^\rho -$$

$$- \frac{1}{3} \{^{\alpha}_{\lambda\rho}\} \eta^{\rho}{}_{\alpha\sigma\varepsilon} \Sigma^\varepsilon - \frac{1}{3} \{^{\alpha}_{\sigma\rho}\} \eta^{\rho}{}_{\lambda\alpha\varepsilon} \Sigma^\varepsilon +$$

$$+ \frac{2}{3} \{^{\alpha}_{\lambda\sigma}\} \tau_\alpha + \frac{4}{9} \tau_\lambda \tau_\sigma - \frac{4}{9} \tau^2 g_{\lambda\sigma} -$$

$$- \frac{2}{3} \eta_{\lambda\sigma\alpha\tau} \tau^\alpha \Sigma^\tau - \frac{2}{3} \{^{\rho}_{\alpha\sigma}\} \tau^\alpha g_{\lambda\rho} -$$

$$- \frac{2}{9} \Sigma^2 g_{\sigma\lambda} + \frac{2}{9} \Sigma_\sigma \Sigma_\lambda$$

E para o quarto termo:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} = \left[\{^{\alpha}_{\alpha\rho}\} + 2\tau_\rho \right] \left[\{^{\rho}_{\lambda\sigma}\} + \frac{2}{3} (\delta^{\rho}_{\lambda} \tau_\sigma - \tau^\rho g_{\lambda\sigma}) - \frac{1}{3} \eta^{\rho}{}_{\lambda\sigma\varepsilon} \Sigma^\varepsilon \right] =$$

$$= \{^{\alpha}_{\alpha\rho}\}\{^{\rho}_{\lambda\sigma}\} + \frac{2}{3} \{^{\alpha}_{\alpha\lambda}\} \tau_\sigma - \frac{2}{3} \{^{\alpha}_{\alpha\rho}\} \tau^\rho g_{\lambda\sigma} -$$

$$- \frac{1}{3} \{^{\alpha}_{\alpha\rho}\} \eta^{\rho}{}_{\lambda\sigma\varepsilon} \Sigma^\varepsilon + 2 \{^{\rho}_{\lambda\sigma}\} \tau_\rho + \frac{4}{3} \tau_\lambda \tau_\sigma - \frac{4}{3} \tau^2 g_{\lambda\sigma} -$$

$$- \frac{2}{3} \eta^{\rho}{}_{\lambda\sigma\varepsilon} \tau_\rho \Sigma^\varepsilon \quad .$$

Colectando os termos, teremos:

$$R_{\sigma\lambda} = \overset{o}{R}_{\sigma\lambda} + 2\,\tau_{\sigma|\lambda} - \frac{2}{3}\,\tau_{\sigma|\lambda} + \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}_{\ |\alpha}\,g_{\lambda\sigma} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha} g_{\lambda\sigma|\alpha} + \frac{2}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}\,\tau_{\sigma} - \frac{2}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}\,g_{\alpha\sigma}\tau^{\rho} -$$

$$- \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\alpha\sigma\varepsilon}\Sigma^{\varepsilon} - \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\sigma\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\lambda\alpha\varepsilon}\,\Sigma^{\varepsilon} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\sigma}\}\,\tau_{\alpha} + \frac{4}{9}\,\tau_{\sigma}\tau_{\lambda} - \frac{4}{9}\,\tau^{2}\,g_{\lambda\sigma} +$$

$$- \frac{2}{3}\,\eta_{\lambda\sigma\alpha\tau}\tau^{\alpha}\Sigma^{\tau} - \frac{2}{3}\,\{^{\rho}_{\alpha\sigma}\}\,\tau^{\alpha}\,g_{\lambda\rho} - \frac{2}{9}\,\Sigma^{2}\,g_{\sigma\lambda} +$$

$$+ \frac{2}{9}\,\Sigma_{\lambda}\Sigma_{\sigma} - \frac{2}{3}\,\{^{\alpha}_{\alpha\lambda}\}\,\tau_{\sigma} + \frac{2}{3}\,\{^{\alpha}_{\alpha\rho}\}\,\tau^{\rho}\,g_{\lambda\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\alpha\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\lambda\sigma\varepsilon}\Sigma^{\varepsilon} - 2\,\{^{\rho}_{\lambda\sigma}\}\,\tau_{\rho} - \frac{4}{3}\,\tau_{\lambda}\tau_{\sigma} +$$

$$+ \frac{4}{3}\,\tau^{2}\,g_{\lambda\sigma} + \frac{2}{3}\,\eta^{\rho}{}_{\lambda\sigma\varepsilon}\tau_{\rho}\Sigma^{\varepsilon} + \frac{1}{3}\,(\eta^{\alpha}{}_{\lambda\sigma\rho}\Sigma^{\rho})_{|\alpha}$$

onde $\overset{o}{R}_{\sigma\lambda}$ é o tensor de curvatura calculado com $\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}$.

$$R_{\sigma\lambda} = \overset{o}{R}_{\sigma\lambda} + \frac{4}{3}\left[\tau_{\sigma|\lambda} - \{^{\alpha}_{\lambda\sigma}\}\,\tau_{\alpha}\right] + \frac{2}{3}\left[\tau^{\alpha}_{\ |\alpha} + \{^{\alpha}_{\alpha\rho}\}\,\tau^{\rho}\right]\,g_{\lambda\sigma} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}\left[g_{\lambda\sigma|\alpha} - \{^{\varepsilon}_{\lambda\alpha}\}\,g_{\varepsilon\sigma} - \{^{\varepsilon}_{\sigma\alpha}\}\,g_{\lambda\varepsilon}\right] -$$

$$- \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\lambda\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\alpha\sigma\varepsilon}\Sigma^{\varepsilon} - \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\sigma\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\alpha\lambda\varepsilon}\Sigma^{\varepsilon} -$$

$$- \frac{8}{9}\,\tau_{\sigma}\tau_{\lambda} + \frac{8}{9}\,\tau^{2}\,g_{\lambda\sigma} - \frac{2}{9}\,\Sigma^{2}\,g_{\lambda\sigma} +$$

$$+ \frac{2}{9}\,\Sigma_{\lambda}\Sigma_{\sigma} + \frac{1}{3}\,\{^{\alpha}_{\alpha\rho}\}\,\eta^{\rho}{}_{\lambda\sigma\varepsilon}\Sigma^{\varepsilon} + \frac{1}{3}\,(\eta^{\alpha}{}_{\lambda\sigma\rho}\Sigma^{\rho})_{|\alpha}$$

ou

$$R_{\sigma\lambda} = \overset{0}{R}_{\sigma\lambda} + \frac{4}{3}\,\tau_{\sigma;\lambda} + \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}{}_{;\alpha}\,g_{\lambda\sigma} - \frac{8}{9}\,\tau_\sigma\tau_\lambda\;+$$

$$+ \frac{8}{9}\,\tau^2\,g_{\sigma\lambda} - \frac{2}{9}\,\Sigma^2\,g_{\sigma\lambda} + \frac{2}{9}\,\Sigma_\lambda\Sigma_\sigma\;+$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\eta^{\alpha}{}_{\lambda\sigma\rho|\alpha} + \left\{{\alpha \atop \alpha\varepsilon}\right\}\eta^{\varepsilon}{}_{\lambda\sigma\rho} - \left\{{\varepsilon \atop \lambda\alpha}\right\}\eta^{\alpha}{}_{\varepsilon\sigma\rho}\;-\right.$$

$$\left. - \left\{{\varepsilon \atop \sigma\alpha}\right\}\eta^{\alpha}{}_{\varepsilon\lambda\rho}\right]\Sigma^{\rho} + \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha}{}_{\lambda\sigma\rho}\,\Sigma^{\rho}{}_{|\alpha}$$

Finalmente,

$$R_{\sigma\lambda} = \overset{0}{R}_{\sigma\lambda} + \frac{4}{3}\,\tau_{\sigma;\lambda} + \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}{}_{;\alpha}\,g_{\lambda\sigma} - \frac{8}{9}\,\tau_\sigma\tau_\lambda\;+$$

$$+ \frac{8}{9}\,\tau^2\,g_{\sigma\lambda} - \frac{2}{9}\,\Sigma^2\,g_{\sigma\lambda} + \frac{2}{9}\,\Sigma_\lambda\Sigma_\sigma\;+$$

$$+ \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha\rho}{}_{\sigma\lambda}\,\Sigma_{\alpha|\rho} \tag{28}$$

Escrevendo

$$R_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}\,(R_{\sigma\lambda} + R_{\lambda\sigma}) + \frac{1}{2}\,(R_{\sigma\lambda} - R_{\lambda\sigma})$$

tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(R_{\sigma\lambda} + R_{\lambda\sigma}) = \overset{0}{R}_{\sigma\lambda} + \frac{2}{3}\,(\tau_{\sigma;\lambda} + \tau_{\lambda;\sigma} + \tau^{\alpha}{}_{;\alpha}\,g_{\lambda\sigma})\;-$$

$$- \frac{8}{9}\,(\tau_\sigma\tau_\lambda - \tau^2 g_{\sigma\lambda}) + \frac{2}{9}\,(\Sigma_\lambda\Sigma_\sigma - \Sigma^2 g_{\sigma\lambda}) \tag{29}$$

e

$$\frac{1}{2}\,(R_{\sigma\lambda} - R_{\lambda\sigma}) = \frac{2}{3}\,(\tau_{\sigma;\lambda} - \tau_{\lambda;\sigma} + \frac{1}{2}\,\eta_{\sigma\lambda}{}^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha|\beta}) \tag{30}$$

ou, lembrando que

$$\tau_{\sigma;\lambda} = \tau_{\sigma|\lambda} - \{{}^{\varepsilon}_{\sigma\lambda}\}\ \tau_{\varepsilon}$$

escrevemos

$$\frac{1}{2}\,(R_{\sigma\lambda}-R_{\lambda\sigma}) = \frac{2}{3}\,(\tau_{\sigma|\lambda} - \tau_{\lambda|\sigma} + \frac{1}{2}\,\eta_{\sigma\lambda}{}^{\alpha\beta}\,\Sigma_{\alpha|\beta}) \qquad (30)'$$

Queremos chamar a atenção do leitor para o seguinte fato: embora o tensor de Riemann seja construido com quadrados das conexões, o resultado final para o tensor de Riemann contraido não apresenta produtos da torção τ_α com a pseudo-torção Σ_α. Isso é uma particularidade importante da geometria restrita de Cartan, e permite intrepretar τ_α e Σ_α como potenciais eletromagnéticos independentes sem auto-interação, como veremos adiante.

7 - *SIMETRIA DUAL DO ELETROMAGNETISMO*

Há cerca de quarenta anos, Dirac observou que as equações de Maxwell do vazio possuiam uma simetria dual, que não se mantinha quando cargas elétricas estavam presentes. Ele então postulou uma alteração das equações de Maxwell, criando uma nova partícula a que chamou de monopolo magnético.

As equações de Dirac para o eletromagnetismo se escrevem

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = e\ V^{\mu} \tag{31a}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = f\ S^{\mu} \tag{31b}$$

onde V^{μ} é o vetor velocidade do monopolo elétrico (carga e) e S^{μ} é o vetor velocidade de monopolo magnético (carga f).

Entretanto, como alguns autores notaram, a generalização das equações de Maxwell permitem uma outra interpretação. Esta, consiste em aceitar que cada partícula possue em si ambas as cargas elétrica e magnética. Tal hipótese torna desnecessária a idéia de monopolos magnéticos isolados.

Resta saber se esta hipótese é compatível com nossas observações. Veremos a seguir que, com efeito, ela o é.

Na nova interpretação as equações do eletromagnetismo assumem a forma:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = e\ V^{\mu} \tag{32a}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = f\ V^{\mu} \tag{32b}$$

isto é, $S^{\mu} \equiv V^{\mu}$.

É fácil mostrar que uma tal interpretação é compatí -

vel com a observação. Com efeito, definamos o novo campo

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = e\, F_{\mu\nu} + f\, F_{\overset{*}{\mu\nu}}$$

cujas equações, a partir de (32), são dadas por

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (e^2 + f^2) V^{\mu} \tag{33a}$$

$$\mathcal{F}^{\overset{*}{\mu\nu}}{}_{;\nu} = 0 \tag{33b}$$

A força de Lorentz para o sistema (32) é dada por

$$F^{\alpha} = e\, E^{\alpha} + f\, H^{\alpha} = (e\, F^{\alpha\beta} + f\, F^{\overset{*}{\alpha\beta}}) V_{\beta} \tag{34}$$

e para a variável $\mathcal{F}_{\mu\nu}$:

$$f_{\alpha} = (e^2 + f^2)\, \mathcal{F}_{\alpha\beta}\, V^{\beta} \equiv q^2\, \varepsilon_{\alpha} \tag{35}$$

Chamando $q^2 \equiv e^2 + f^2$ de carga efetiva, vemos que a teoria de Maxwell usual corresponde à escolha das variáveis $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e equações (33) — (35).

Entretanto, os observáveis da teoria independem dessa escolha especial de variáveis. Em verdade, a expressão acima, que define $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, é um caso especial de uma rotação dual.

Consideremos o sistema de equações

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = e\, V^{\mu} \tag{36a}$$

$$F^{\overset{*}{\mu\nu}}{}_{;\nu} = f\, V^{\mu} \tag{36b}$$

Consideremos a transformação dual

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \cos\theta\, F_{\mu\nu} + \operatorname{sen}\theta\, F_{\overset{*}{\mu\nu}} \tag{37}$$

Se a esta transformação acoplarmos uma outra sobre as cargas , a saber

$$\begin{aligned} e \to e' &= \cos\theta\ e + \operatorname{sen}\theta\ f \\ f \to f' &= -\operatorname{sen}\theta\ e + \cos\theta\ f \end{aligned} \tag{38}$$

então as equações (36) não se modificam. Se não existe monopolo magnético, podemos escolher a gauge dual tal que

$$f' = 0 \tag{39}$$

isto é,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f}{e} \tag{40}$$

como fizemos anteriormente.

Note que a força de Lorentz é invariante dual:

$$F_\alpha = e'\ E'_\alpha + f'\ H'_\alpha = (e \cos\theta + f \operatorname{sen}\theta)(E \cos\theta + H \operatorname{sen}\theta) +$$

$$+ (-e \operatorname{sen}\theta + f \cos\theta)(-E \operatorname{sen}\theta + H \cos\theta) = e\ E_\alpha + f\ H_\alpha .$$

Dessa forma, dizer que uma partícula tem carga magnética nula, equivale à escolha (arbitrária) do ângulo dual θ dada por (40).

8 - *DESCRIÇÃO DO ELETROMAGNETISMO FAZENDO APELO A DOIS POTENCIAIS*

As equações de Maxwell para o tensor $F_{\mu\nu}$ permitem definir um potencial vetor W_μ através da relação

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu|\nu} - W_{\nu|\mu} = W_{\mu;\nu} - W_{\nu;\mu}$$

Tal definição garante que a equação (31b) na ausência de carga é identicamente satisfeita. Entretanto, vários autores (Cabbibo, Ferrari, Strazhev, e outros) consideraram a possibilidade de descrição do campo $F_{\mu\nu}$ em termos de dois potenciais W_μ e Z_μ através da relação

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu|\nu} - W_{\nu|\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\, Z_{\rho|\sigma} \tag{41}$$

A introdução do novo potencial Z_μ aumenta aparentemente o grãu de liberdade de $F_{\mu\nu}$. Para eliminar esse fato, impomos a condição de gauge, transformando W_μ, Z_μ pela relação

$$\begin{aligned} W_\mu &\rightarrow W'_\mu = W_\mu + A_\mu \\ Z_\mu &\rightarrow Z'_\mu = Z_\mu + B_\mu \end{aligned} \tag{42}$$

onde A_μ e B_μ devem satisfazer ã condição de campo nulo

$$A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\, B_{\rho|\sigma} = 0 \tag{43}$$

A condição (43) garante que a passagem a dois potenciais não aumenta o número de grãus de liberdade do sistema.

Note que a gauge usual

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = W_\mu + \Lambda_{|\mu}$$
$$Z_\mu \rightarrow Z'_\mu = Z_\mu + \Psi_{|\mu} \tag{44}$$

é um caso particular da gauge (42).

A rotação dual (37) gera a rotação nos potenciais W_μ, Z_μ da forma

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = \cos\theta\ W_\mu + \mathrm{sen}\theta\ Z_\mu$$
$$Z_\mu \rightarrow Z'_\mu = -\mathrm{sen}\theta\ W_\mu + \cos\theta\ Z_\mu \tag{45}$$

A fixação do ângulo dual na teoria de Maxwell convencional dada pela equação (40), isto é

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{f}{e} \tag{40}$$

A compatibilidade da existência de dupla carga (e,f) com a experiência requer que o ângulo θ , assim fixado, o seja para todas as partículas. Isto é, a razão f/e deve ser uma constante universal, válida para todas as partículas carregadas.

Vamos fixar esse valor (arbitrariamente, aqui) como sendo igual a 1. Veremos que esse valor está relacionado à escolha usual das equações de Maxwell. Pomos assim,

$$\frac{f}{e} = 1 \ . \tag{46}$$

Daí o ângulo dual θ é fixado em $\pi/4$. Usando esse resultado em (45) temos:

$$Z'_\mu = \mathrm{sen}\theta\ (-\ W_\mu + Z_\mu)$$
$$W'_\mu = \mathrm{sen}\theta\ (\ \ W_\mu + Z_\mu) \quad . \tag{47}$$

e também segue que a carga magnética é nula:

$$e' = \mathrm{sen}\theta\ (e+f) = 2\ \mathrm{sen}\theta\ e \quad ; \quad f' = 0 \tag{48}$$

9 - *DINÂMICA NO ESPAÇO DE CARTAN RESTRITO*

Comparando a relação (30)' que nos dá a parte anti-simétrica do tensor de Riemann contraído em termos do traço e do pseudo-traço da torção, com a equação (41), que define o tensor de Maxwell, é razoável procurar identificar τ_α e Σ_α com W_α e Z_α .

Além dessa relação, puramente formal, há uma argumentação de caráter físico e que apresentaremos a seguir.

Identificando $F_{\mu\nu}$ com $(R_{\mu\nu}-R_{\nu\mu})$, vemos que o tensor de Maxwell não fixa univocamente a geometria do espaço de Cartan. Com efeito, a existência da gauge dual dá uma liberdade aos vetores traço e pseudo-traço τ_α e Σ_α. Assim, ao campo de Maxwell deveríamos associar não uma geometria mas uma classe de equivalência $\mathcal{N}$ de exemplos do espaço de Cartan restrito. Os elementos de $\mathcal{N}$ estão relacionados entre si por rotação dual. Escrevemos

$$\mathcal{N} = \{\tau^{\mu(1)}_{\alpha\nu} \ , \ \tau^{\mu(2)}_{\alpha\nu} \ , \ \tau^{\mu(3)}_{\alpha\nu} \ , \ \ldots\}$$

Se fixarmos um elemento de $\mathcal{N}$, digamos $\tau^\mu_{\alpha\nu}$, isso equivale a fixar o ângulo dual. Por exemplo, pondo como na teoria convencional $Z_\alpha = 0$, equivale a fixar uma relação entre o traço e o pseudo-traço.

Entretanto, uma tal geometrização do campo de Maxwell só teria significado real se apoiada por uma lei de universalidade que garantisse ser a geometria do espaço igualmente percebida por todas as partículas carregadas.

Com efeito, uma tal situação existe e vamos encontrá-la na universalidade da relação e/f para todas as partículas.

Recentemente, Strazher mostrou quanticamente, um resultado que vários autôres, entre eles Schwinger, haviam demonstrado classicamente.

É observacionalmente irrelevante admitir que uma dada partícula, digamos o elétron, tem carga elétrica q e carga magnética nula, ou ter ambas as cargas: e (elétrica) e f (magnética), com $q^2 = e^2+f^2$.

A condição de compatibilidade da hipótese da dupla carga reside no fato de que a relação e/f deve ser uma constante universal, válida para todas as partículas.

Dessa forma, vemos que a idéia de associar a estrutura do espaço (no esquema da Geometria de Cartan Restrita) ao campo de Maxwell possue uma base ou uma relação universal. Uma base análoga, sustentada na relação universal ligando a massa inercial à massa gravitacional foi desenvolvida com sucesso por Einstein para a gravitação e constitui a verdadeira origem da inspiração desse meu trabalho.

Resta agora a questão: qual a dinâmica que deveríamos impor à estrutura do espaço ?

A Lagrangeana deverá conter termos não lineares na curvatura. Isso é uma consequência da anti-simetria do tensor de Maxwell.

Consideremos a Lagrangeana de Einstein acrescida de um termo quadrático

$$\mathcal{L}_{(EM)} = \frac{\sqrt{-g}}{k} \left[R + \gamma^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] \tag{49}$$

onde dim γ = L ≡ comprimento, e k é a constante de Einstein .

Usando o resultado (28) para $R_{\mu\nu}$, temos

$$R_{\mu\nu} = \overset{0}{R}_{\mu\nu} + \frac{4}{3}\,\tau_{\mu;\nu} + \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}{}_{;\alpha}\, g_{\mu\nu} - \frac{8}{9}\,\tau_{\mu}\tau_{\nu}$$

$$+ \frac{8}{9}\,\tau^2 g_{\mu\nu} - \frac{2}{9}\,\Sigma^2 g_{\mu\nu} + \frac{2}{9}\,\Sigma_{\mu}\Sigma_{\nu} + \frac{1}{3}\,\eta^{\alpha\rho}{}_{\mu\nu}\,\Sigma_{\alpha|\rho} \qquad (28)$$

Ao invés de substituir (28) diretamente na expressão (49) da Lagrangeana, vamos primeiramente fixar uma escolha de gauge bem como fixar o ângulo dual. Mostraremos assim, que as equações de movimento obtidas a partir da expressão (49) coincidem com a teoria usual do eletromagnetismo, mostrando dessa forma como se torna natural e simples introduzir dinâmica para o campo eletromagnético no nosso esquema geométrico.

Na teoria usual só um potencial vetor existe. Isto significa girar o ângulo Θ de tal modo a termos, por exemplo,

$$Z'_{\alpha} = 0 \quad . \qquad (50)$$

A rotação dual nos dá

$$W'_{\alpha} = \cos\Theta\, W_{\alpha} + \operatorname{sen}\Theta\, Z_{\alpha}$$

$$Z'_{\alpha} = -\operatorname{sen}\Theta\, W_{\alpha} + \cos\Theta\, Z_{\alpha} = 0$$

Daí,

$$Z_{\alpha} = \operatorname{tg}\Theta\, W_{\alpha} \qquad (51)$$

A arbitrariedade no valor da constante universal $\frac{\text{carga elétrica}}{\text{carga magnética}} = \frac{e}{f}$ permite escolher unidades básicas e,f e impor

$$\frac{e}{f} = 1 \qquad (52)$$

Na rotação dual, temos

$$\begin{aligned} e' &= e\cos\Theta + f\operatorname{sen}\Theta = e\,(\cos\Theta + \operatorname{sen}\Theta) \\ f' &= -e\operatorname{sen}\Theta + f\cos\Theta = e\,(-\operatorname{sen}\Theta + \cos\Theta) \end{aligned} \qquad (53)$$

Na eletrodinâmica usual $f' = 0$, o que dará

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \tag{54}$$

isto é, o ângulo dual vale 45^{o}.

Substituindo este valor na equação (51) encontramos

$$Z_{\alpha} = W_{\alpha} \quad , \tag{51'}$$

o que dará para o tensor $F_{\mu\nu}$ de Maxwell a expressão

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu|\nu} - W_{\nu|\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}\, W_{\rho|\sigma} \tag{55}$$

Comparando (30)' com a expressão de $F_{\mu\nu}$ vemos que o traço τ_{α} e o pseudo-traço Σ_{α} estão relacionados a W_{α}, Z_{α} pela expressão

$$W_{\sigma} = \frac{4}{3}\,\tau_{\sigma} \tag{56a}$$

$$Z_{\sigma} = \frac{2}{3}\,\Sigma_{\sigma} \tag{56b}$$

Ademais, como $W_{\sigma} = Z_{\sigma}$, temos que $2\tau_{\sigma} = \Sigma_{\sigma}$.

Usando esses resultados na expressão de $R_{\mu\nu}$, obtemos

$$R_{\mu\nu} = \overset{o}{R}_{\mu\nu} + \frac{4}{3}\,\tau_{\mu;\nu} + \frac{2}{3}\,\tau^{\alpha}{}_{;\alpha}\, g_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\;\eta^{\alpha\rho}{}_{\mu\nu}\,\tau_{\alpha|\rho} \tag{57}$$

Usando a liberdade de gauge que decorre da equação (44) pode - mos impor

$$\tau^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \tag{58}$$

Segue de (57), por contração, que temos,

$$R = \overset{o}{R} \tag{59}$$

Daí, podemos escrever a Lagrangeana (49):

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{k}\left[R + \gamma^{2}\, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right].$$

Consideremos o termo quadrático. Desenvolvendo-o temos:

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \overset{o}{R}_{\mu\nu}\overset{o}{R}^{\mu\nu} + \frac{16}{9}\,\tau_{\mu;\nu}\tau^{\mu;\nu} + \frac{8}{3}\,\overset{o}{R}^{\mu\nu}\tau_{\mu;\nu} +$$

$$+ \frac{4}{9}\,\eta^{\alpha\rho}{}_{\sigma\lambda}\eta^{\sigma\lambda\epsilon\tau}\,\tau_{\alpha|\rho}\tau_{\epsilon|\tau} + \frac{16}{9}\,\eta^{\alpha\rho\sigma\lambda}\,\tau_{\sigma;\lambda}\tau_{\alpha;\rho}$$

Daí,

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \overset{o}{R}^{\mu\nu}\overset{o}{R}_{\mu\nu} + \frac{16}{9}\,\tau_{\mu;\nu}\tau^{\mu;\nu} + \frac{8}{3}\,\overset{o}{R}^{\mu\nu}\tau_{\mu;\nu} -$$

$$- \frac{8}{9}\,\tau_{\sigma|\lambda}\,(\tau^{\sigma|\lambda} - \tau^{\lambda|\sigma}) + \frac{16}{9}\,\eta^{\alpha\rho\sigma\lambda}\,\tau_{\sigma|\lambda}\tau_{\alpha|\rho}$$

Vamos examinar o comportamento destes termos separadamente:

O termo $\eta^{\alpha\rho\sigma\lambda}\tau_{\sigma|\lambda}\tau_{\alpha|\rho}$ pode ser transformado numa divergência total e assim não contribui para a equação de movimento.

Consideremos o termo $\overset{o}{R}^{\mu\nu}\tau_{\mu;\nu}$. Temos,

$$\delta\int\sqrt{-g}\,\overset{o}{R}^{\mu\nu}\tau_{\mu;\nu}\,d^4x = \delta\int\sqrt{-g}\,(\overset{o}{R}^{\mu\nu}\tau_{\mu})_{;\nu}\,d^4x - \int\sqrt{-g}\,\overset{o}{R}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\tau_{\mu}d^4x$$

$$= \delta\int(\sqrt{-g}\,\overset{o}{R}^{\mu\nu}\tau_{\mu})_{|\nu}\,d^4x - \frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,\overset{o}{R}_{|\mu}\tau^{\mu}\,d^4x$$

O primeiro termo é uma divergência total. Sobra então somente o segundo termo que se transforma em

$$\delta\int\sqrt{-g}\,\overset{o}{R}_{|\mu}\tau^{\mu}\,d^4x = \delta\int(\sqrt{-g}\,\overset{o}{R}\tau^{\mu})_{|\mu}\,d^4x -$$

$$- \delta\int(\sqrt{-g}\,\tau^{\mu})_{|\mu}\,\overset{o}{R}\,d^4x \doteq - \delta\int\sqrt{-g}\,\tau^{\mu}{}_{;\mu}\overset{o}{R}\,d^4x$$

onde o símbolo $\doteq$ significa igual a menos de uma divergência total.

Daí, temos

$$\delta \int \sqrt{-g}\, \overset{o}{R}^{\mu\nu}\, \tau_{\mu;\nu}\, d^4x = 0$$

Finalmente, podemos escrever que

$$\delta \int \sqrt{-g}\, L\, d^4x = 0$$

implica

$$\frac{1}{k}\, \delta \int \sqrt{-g} \left[\overset{o}{R} + \gamma^2\, \overset{o}{R}{}^{\mu\nu} \overset{o}{R}_{\mu\nu} - \frac{\gamma^2}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \gamma^2 W_{\mu;\nu}\, W^{\mu;\nu} \right] d^4x = 0$$

onde

$$f_{\mu\nu} \equiv W_{\mu|\nu} - W_{\nu|\mu}$$

isto é,

$$\frac{1}{k}\, \delta \int \sqrt{-g}\, (\overset{o}{R} + \gamma^2 \overset{o}{R}{}^{\mu\nu} \overset{o}{R}_{\mu\nu} - \frac{\gamma^2}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \gamma^2\, W_{\mu;\nu} W^{\mu;\nu})\, d^4x = 0 \tag{60}$$

Variando em relação a W_μ obtemos a equação

$$f^{\mu\nu}{}_{;\nu} - 2 \Box W^\mu = 0 \tag{61}$$

onde $\Box W^\mu \equiv W^\mu{}_{;\alpha;\beta}\, g^{\alpha\beta}$.

Desenvolvendo $f^{\mu\nu}$ temos:

$$\Box W^\mu - W^{\nu;\mu}{}_{;\nu} - 2 \Box W^\mu = 0$$

Mas,

$$W^{\nu}{}_{;\mu;\nu} = W^{\nu}{}_{;\nu;\mu} + \overset{o}{R}{}^{\nu}{}_{\varepsilon\mu\nu}W^{\varepsilon} = - \overset{o}{R}_{\varepsilon\mu}W^{\varepsilon}$$

Então, finalmente

$$\Box W^{\alpha} - \overset{o}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}W^{\beta} = 0 \qquad (62)$$

Substituindo esse resultado em (61) obtemos

$$f^{\mu\nu}{}_{;\nu} - 2\,\overset{o}{R}{}^{\mu}{}_{\nu}W^{\nu} = 0 \qquad (63)$$

A equação (63) pode ser obtida da Lagrangeana equivalente

$$L_M = - \frac{1}{4} f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \overset{o}{R}_{\mu\nu}W^{\mu}W^{\nu} \qquad (64)$$

com um acoplamento não mínimo do campo W^{μ} com a gravitação. No limite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ (Minkowskii) a equação (63) coincide com a de Maxwell.

Dessa forma, a teoria do eletromagnetismo passa a constituir parte da estrutura geométrica do espaço-tempo.

BIBLIOGRAFIA

1 - M. Novello - The Unification of Electrodynamic and Gravity (CBPF/1975).
2 - V.I. Strazhev - Theor.Mat. Fiz. 13, 200 (1972).
3 - Yu.V. Kresin, V.I. Strazhev -Theor.Mat.Fiz. 36,426(1978).
4 - N. Cabibbo,E.Ferrari - Nuovo Cim. 23, 1147 (1962).
5 - P.A.M. Dirac - Proc.Roy.Soc. (London) A133,60 (1931); Phys. Rev. 74, 817 (1948).
6 - E. Cartan - Ann. Ec. Norm. (3) XLII, 325 (1924).