TEORIAS CLÁSSICAS DE GAUGE E GRAVITAÇÃO

Ruben Aldrovandi

Instituto de Física Teórica
São Paulo

ÍNDICE

I. *INTRODUÇÃO*

Os principais progressos na teoria das partículas elementares nos últimos anos estão centrados nas teorias de Gauge. Estas permitem, além de outras coisas, tratar com grande elegância e (provavelmente) correção às chamadas simetrias internas (invariância de carga, SU(3), etc). Além do mais, algumas delas são renormalizáveis e tudo indica que darão uma teoria unificada das interações fracas e eletromagnéticas(1). Existem ainda sugestões de que também as interações fortes terão algo a ver com teorias de Gauge(2). Enfim, estas teorias apontam para aquele velho objetivo, tão desejado e tão fugidio, que os físicos acabaram por esconder sob um manto de pudor: a teoria unificada.

Um aspecto das teorias de Gauge salta logo à vista, pelo menos no reino clássico: são as teorias essencialmente geométricas, ligadas embora a transformações em espaços internos. A teoria da gravitação tem sido deixada um tanto à parte nesses estudos, mas ela é exatamente um protótipo de geometrização de uma interação, e nisto está o cerne do relacionamento necessário entre gravitação e Gauge. A geometria do espaço-tempo é gravitacionalmente determinada; a geometria dos espaços internos é fixada pelas demais interações. Isso soa dogmático, mas esperamos que essas notas mostrem pelo menos um notável paralelismo entre os formalismos.

Em um certo sentido, as teorias de Gauge sugerem uma Relatividade Mais Geral: não só a Física deve ser fundamentalmente a mesma em referenciais arbitrários, no espaço-tempo, como também em referenciais arbitrários nos espaços internos (de spin isotópico, no espaço unitário, etc).

Não é de espantar essa tendência a geometrizar. Desde que se enfatize invariâncias, o programa de Erlangen praticamente a forçará. Esse programa foi desenvolvido com vigor e sucesso pelos matemáticos e produziu a moderna geometria diferencial. É notável que os físicos tenham, à sua maneira e na medida de suas necessidades, refeito uma boa parcela do mesmo caminho. É certo, porém, que andariam mais depressa se seguissem pela estrada menos tortuosa e melhor fundamentada que os matemáticos traçaram.

No capítulo II damos um sumário do formalismo das teorias de Gauge. No III alguns tópicos de geometria diferencial são apresentados em linguagem elementar. O IV é um escorço da teoria dos espaços fibrados, no fundamental repetindo o capítulo II. O V, tenta mostrar como a gravitação poderia se juntar às demais interações como uma teoria de Gauge.

Referências

1. S. Bernstein, Rev. Mod. Physics 46, 7(1974).
2. S. Weinberg, Rev. Mod. Physics 46, 255 (1974).

II. *TEORIAS CLÁSSICAS DE GAUGE: UM FORMULÁRIO COMENTADO*[1]

1. *Generalidades*

A ocasião não nos permitirá mais que uma revisão dos resultados e idéias essenciais. O caso mais simples é o de um méson carregado, representado em teoria de campos[2] por um escalar complexo $\phi(x)$ satisfazendo à equação de Klein-Gordon ($\hbar = c = 1$)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) \equiv (\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1}$$

Esta equação é a de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

que se obtêm da densidade lagrangeana

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^* \phi \quad . \tag{2}$$

Uma transformação que acarrete uma variação $\delta\phi$ no campo induzirá uma variação ∂L facilmente calculável. Se impuzermos a invariância de L ($\partial L = 0$), chegaremos a uma lei de conservação

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \, \delta\phi \right] = 0 \quad . \tag{3}$$

A expressão entre colchetes é assim uma corrente de divergência nula. A interação dessa equação em um grande volume espacial leva a

$$\int d^3x\ \partial^0 j_0 = \int d^3x\ \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad ,$$

e portanto a

$$\partial^0 \int d^3x\ j_0(x) = 0 \quad . \tag{4}$$

Isso resume o teorema de Noether. A invariância de L por diferentes transformações leva assim à conservação de diferentes grandezas físicas. Exemplos: a invariância por translações no espaço-tempo implica a conservação dos geradores do grupo dessas translações, que são as componentes do quadrivetor energia-momentum P^μ; as rotações espaciais levam à conservação das componentes do momento angular; a invariância por transformações de Lorentz impõem a conservação dos geradores $M^{\mu\nu}$ do grupo de Lorentz.

A teoria relativista dos campos supõe a invariância pelas transformações do grupo de Poincaré, que é gerado pelo conjunto dos P^μ e dos $M^{\mu\nu}$ e cuja álgebra é:

$$\left[P^\mu, P^\nu\right] = 0 \quad ; \tag{5}$$

$$\left[M^{\mu\nu}, P^\lambda\right] = -i(P^\mu\eta^{\nu\lambda} - P^\nu\eta^{\mu\lambda}) \quad ; \tag{6}$$

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\lambda}\right] = i(M^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} + M^{\nu\lambda}\eta^{\mu\rho} - M^{\nu\rho}\eta^{\mu\lambda} - M^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}) \quad . \tag{7}$$

Aqui, η é a métrica do espaço de Minkowski. O grupo de Poincaré possui dois invariantes de Casimir (operadores de segunda ordem que comutam com todos os geradores). Um deles é o quadrado da massa:

$$P_\mu P^\mu = m^2 \quad . \tag{8}$$

O outro está ligado ao spin: define-se o operador

$$W_\lambda = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} M^{\mu\nu} P^\rho \quad , \tag{9}$$

e o invariante é

$$W_\lambda W^\lambda = m^2\; S(S+1) \tag{10}$$

onde $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ é o spin. No caso do campo escalar ϕ , $S = 0$. Se adotarmos a realização

$$P_\mu = -i\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \tag{11}$$

a equação (8) é precisamente a equação (1) de Klein-Gordon.

2. *Campo Eletromagnético*

Este é o protótipo dos campos de Gauge. a lagrangeana (2) é invariante por uma transformação de fase no espaço dos campos ϕ:

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\,\phi \quad , \tag{12}$$

onde α é uma constante real. Essa transformação (chamada "de gauge de primeira espécie") leva à conservação da corrente

$$j_\mu = i\,\left[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)\right] \quad . \tag{13}$$

Seu significado pode ser melhor apreciado se tomarmos componentes reais para ϕ:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\phi+\phi^*);\text{e}\ \ \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\ i}\,(\phi-\phi^*) \quad .$$

A transformação (12) será então uma rotação no plano (ϕ_1,ϕ_2):

$$\left.\begin{aligned} \phi_1' &= \cos\alpha\ \phi_1 - \operatorname{sen}\alpha\ \phi_2 \\ \phi_2' &= \operatorname{sen}\alpha\ \phi_1 + \cos\alpha\ \phi_2 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

A invariância significa a insensibilidade da teoria ante tais rotações: pode-se escolher qualquer base no "espaço interno" (ϕ_1,ϕ_2), sem que se altere a equação fundamental (1).

O passo que levou às teorias de gauge[3,4] pode ser dado da maneira seguinte: suponhamos a fase α não mais constante, mas função do ponto no espaço-tempo. A equação (12) tornar-se-á

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi \quad . \qquad (15)$$

O último termo da lagrangeana (2) permanecerá invariante, mas o primeiro se altera para

$$\left[\partial_\mu - i(\partial_\mu\alpha)\right]\phi^*\left[\partial_\mu + i(\partial_\mu\alpha)\right]\phi \quad .$$

A presença do gradiente de $\alpha(x)$ destrói a invariância. Lembremos porém que um campo carregado sempre engendra um campo eletromagnético, cujo potencial A_μ é definido a menos de um gradiente. Se impuzermos que A_μ se transforme segundo

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\alpha \tag{16}$$

(transformação de gauge de segunda espécie), e se redefinirmos a derivada por

$$\partial_\mu\phi \to D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \quad , \tag{17}$$

a lagrangeana

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \tag{18}$$

será invariante por (15). O potencial eletromagnético aparece assim como um campo compensador, e a corrente conservada (agora interpretada como a corrente eletromagnética) passa a ser

$$j_\mu = \frac{\partial L}{\partial D^\mu\phi}\,\delta\phi = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \quad . \tag{19}$$

A grandeza conservada da eq. (4) será a carga elétrica: $j_0(x) = \rho(x)$

$$Q = \int d^3x\ \rho(x) = \text{constante} \quad . \tag{20}$$

A eq. (17) merece dois comentários:

i) D_μ pode ser encarada como uma derivação covariante; é imediato ver que

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu} \quad , \tag{21}$$

onde a intensidade do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ aparece sob as roupagens de uma curvatura;

ii) se usamos (11), veremos que (17) equivale a

$$P_\mu \to P_\mu + eA_\mu \quad , \tag{22}$$

que é a prescrição do acoplamento minimal, pela qual a interação eletromagnética é usualmente introduzida.

Assim, a imposição de invariância pela transformação (15) força o aparecimento da interação eletromagnética, com a correspondente alteração da lagrangeana e da equação de Klein-Gordon. À lagrangeana (18) deve-se ainda acrescentar a do próprio campo eletromagnético livre,

$$L_{e\cdot m} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad , \tag{23}$$

para se ter uma completa descrição do campo carregado em sua presença. Note-se que $F_{\mu\nu}$ é invariante pela transformação de gauge (16). De sua expressão (21), tira-se a identidade

$$\partial_{\boxed{\mu}} F_{\nu\lambda\rfloor} \equiv \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} \equiv 0 \quad , \tag{24}$$

que encerra duas das quatro equações de Maxwell. A analogia de F com uma curvatura faz com que esta expressão seja também chamada de identidade de Bianchi. As demais equações de Maxwell são obtidas como equações de Euler-Lagrange da lagrangeana total:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad , \tag{25}$$

esta sendo a corrente (19) engendrada pelo campo .

Resumindo: a exigência de invariância pela transforma ção de gauge local (15) impõe o aparecimento do campo eletromagnético, que altera a lagrangeana original de tal forma que a conservação da carga elétrica (20) seja respeitada. Para isso, ele mesmo se altera segundo (16), e obedece à equação (que vem de (21) e (25))

$$\Box A_\mu - \partial (\partial^\nu A_\nu) = j_\mu \quad . \tag{26}$$

Escolhe-se, em geral, uma família de gauges, impondo a condição de Lorentz

$$\partial^\nu A_\nu = 0 \quad . \tag{27}$$

Assim, na ausência de fontes ($j_\mu = 0$), o potencial satisfaz

$$\Box A_\mu = 0 \tag{28}$$

que é a equação de Klein-Gordon (1) para um campo vetorial de massa nula.

A equação (15) representa, para cada evento x, uma rotação análoga a (14) no espaço dos campos ϕ, espaço este que assume assim um caráter de espaço "interno", de alguma forma relacionado a uma característica fundamental da partícula descrita pelo campo $\phi(x)$: a sua carga elétrica. A liberdade de escolha de base dentro desse espaço se reflete na conservação dessa carga. Como as rotações no plano formam o grupo U(1), dizemos ser o eletromagnetismo uma teoria de gauge com esse grupo como "grupo de gauge".

Já dissemos que grandezas conservadas como momentum, energia e momento angular, estão ligadas à invariância por certas transformações no espaço-tempo. A carga elétrica, pelas considerações acima, aparece também relacionada à invariância por transformações, com a diferença que estas têm lugar em um espaço "interno". Uma pergunta aflora naturalmente: estará todo número quântico "interno" (número bariônico, números leptônicos, spin isotópico, estranheza, etc) ligado a transformações em algum espaço desse tipo ?

3. *Teoria de Yang-Mills*

Uma forte indicação a favor de uma resposta positiva à questão acima foi dada no trabalho pioneiro[3] de Yang e Mills, que é um modelo de gauge para o spin isotópico. Uma diferença essencial com relação ao visto anteriormente, vem do seguinte: o grupo U(1) tem um único gerador, enquanto as transformações no espaço do spin isotópico formam o grupo SU(2), isomorfo ao SO(3) das rotações no espaço e que tem três geradores não comutantes entre eles (grupo não-abeliano). Sua álgebra é a do momento angular. Podemos tomar geradores proporcionais às matrizes de Pauli,

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad ; \qquad (29)$$

satisfazendo

$$\left[J_i, J_j\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\,J_k \quad . \qquad (30)$$

Isto dá uma representação particular de SU(2), como dimensão dois. Presta-se ao caso do sistema neutron-próton, representado por um campo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad , \tag{31}$$

onde ψ_p e ψ_n são spinores de Dirac. A lagrangeana livre é agora

$$L = \overline{\Psi} \, (-i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\Psi \quad , \tag{32}$$

que leva às equações de Dirac. Se $\vec{\alpha}$ for um vetor no espaço do spin isotópico com componentes que não dependem do espaço-tempo, ela é invariante pela transformação (análoga a (12))

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}} \, \Psi \tag{33}$$

Essa invariância significa uma completa liberdade de escolha de bases no espaço dos campos (31). Fisicamente, diz serem indis - *tinguíveis prótons e neutrons e correspondem a uma transforma*ção de gauge de primeira espécie. A passagem à de segunda espécie se faz supondo $\vec{\alpha}$ não mais constante, mas função de ponto no espaço tempo. Assim,

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{J}} \, \Psi \tag{34}$$

Aqui, novamente, o termo em derivada na lagrangeana se altera. Procura-se um campo compensador B_μ: acha-se que agora ele será uma matriz 2 x 2,

$$B_\mu = i \; g \; b_\mu^j \; J_j \tag{35}$$

com g uma constante de acoplamento análoga a e. Ao invés de (17), aparece uma derivada covariante

$$D_\mu\Psi = \left[\begin{pmatrix}\partial_\mu & 0\\ 0 & \partial_\mu\end{pmatrix} - B_\mu\right]\Psi\ . \tag{36}$$

A transformação do novo potencial B_μ é, porém, mais complicada que a dada na eq. (18), devido a não comutatividade dos geradores:

$$B'_\mu = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}\, B_\mu e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}} + i(\partial_\mu\vec{\alpha})\cdot\vec{J}\quad . \tag{37}$$

O primeiro termo à direita é uma transformação usual de matriz. Se os J_ℓ comutassem, seria simplesmente B_μ. O segundo termo é um tanto anômalo, mas representa a transformação de gauge, como em (16). Uma olhada em (35) nos diz ser B_μ uma matriz da álgebra de SU(2). As suas componentes b^i_μ na base formada pelos J_j é que são mais comumente chamadas de potenciais de gauge. Note-se que poderíamos tomar espaços de spin isotópicos de dimensões maiores (o píon, por exemplo, exigiria dimensão 3), mas a álgebra terá sempre a dimensão do grupo, e esta fixará o número de potenciais. Em termos destes, (37) se escreve

$$b'^{\ell}_\mu = b^\ell_\mu + \varepsilon^{ij\ell}\,\alpha^i\, b^j_\mu - \frac{1}{g}\,\partial_\mu\alpha^\ell\quad . \tag{38}$$

Analogamente a (21), define-se uma intensidade de campo (um "tensor de curvatura"), tal que

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = -igF_{\mu\nu}\quad . \tag{39}$$

também uma matriz 2x2, com

$$F_{\mu\nu} \equiv f^{\ell}_{\mu\nu} J_{\ell} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu} - \left[B_{\mu}, B_{\nu}\right] \quad . \tag{40}$$

As componentes são dadas por:

$$f^{\ell}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} b^{\ell}_{\nu} - \partial_{\nu} b^{\ell}_{\mu} - g\varepsilon^{ij\ell}\, b^{i}_{\mu} b^{j}_{\nu} \quad . \tag{41}$$

Note-se que os $\varepsilon^{ij\ell}$ são as constantes de estrutura do grupo SU(2), conforme a eq. (30). Fossem eles nulos (caso abeliano) e teríamos praticamente três "interações eletromagnéticas".

Outra diferença com o eletromagnetismo: lá $F_{\mu\nu}$ era invariante. Agora, ela tem um comportamento "covariante":

$$F'_{\mu\nu} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}}\, F_{\mu\nu}\, e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{J}} \quad . \tag{42}$$

De (40), segue uma identidade que generaliza (24):

$$D_{[\lambda} F_{\mu\nu]} \equiv -F_{[\mu\nu} B_{\lambda]} \quad . \tag{43}$$

As equações que generalizam as de Maxwell (25) são

$$D^{\mu} F_{\mu\nu} = j_{\nu} \tag{43'}$$

e provêm da lagrangeana alterada, tendo a mais a contribuição livre

$$L_{YM} = -\frac{1}{4}\, f^{\ell}_{\mu\nu}\, f^{\mu\nu}_{\ell} \quad . \tag{44}$$

o sentido do índice abaixado $\underline{\ell}$ é o seguinte: toma-se uma métrica sobre o grupo, em geral a métrica de Killing-Cartan. No caso do SU(2),

$$g_{ij} = \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{j\ell k} = 2\delta_{ij} \quad . \tag{45}$$

4. *Teoria Geral*

Uma teoria de gauge para um grupo interno qualquer pode ser construída(5) segundo as linhas acima. É dado um grupo de simetria interna, pelo qual o campo representando uma partícula se transforme:

$$\psi \to \psi' = U(\alpha)\psi \quad , \tag{46}$$

com geradores J_α e parâmetros $\alpha_a(x)$.

$$U(\alpha) = e^{i\alpha_a(x)J_a} \quad , \tag{47}$$

$$\left[J_a, J_b\right] = C^d_{ab}\, J_d \quad . \tag{48}$$

Em geral, ψ é um vetor coluna e (46) é uma equação matricial . A imposição de invariância da lagrangeana impõe a existência de um potencial de Gauge, que é uma matriz

$$B_\mu = igb^a_\mu J_a \quad , \tag{49}$$

e que permite a introdução de uma derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - B_\mu \quad . \tag{50}$$

Ademais, B_μ se transforma segundo

$$B'_\mu = UB_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U)U^{-1} \quad , \tag{51}$$

e a não-comutatividade da derivação é medida por um "tensor de curvatura" dado por (40). Este tem, na álgebra, componentes

$$f^a_{\mu\nu} = \partial_\mu b^a_\nu - \partial_\nu b^a_\mu - g c^a_{bd} b^d_\mu b^d_\nu \tag{52}$$

e é covariante:

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1} \quad . \tag{53}$$

As eqs. (43) e (43') são as equações de Maxwell-Yang-Mills, e a lagrangeana livre do campo de gauge é

$$L = -\frac{1}{4} f^a_{\mu\nu} f^{\mu\nu}_a \ . \tag{54}$$

A métrica sobre o grupo é a de Killing-Cartan:

$$g_{ab} = C^e_{ad} C^d{}_{be} \tag{55}$$

e aqui, surge um problema: essa forma bilinear só é uma métrica (em particular, det $g \neq 0$) para grupos semi-simples, que não possuem subgrupos invariantes abelianos. Assim, essa métrica não existe para os grupos afins em geral, e em particular, para o grupo de Poincaré; as quatro translações geradas pelos P^μ formam um subgrupo abeliano (eq. (5)). Os grupos internos usuais são porém semi-simples (SU(2), SU(3), SU(4), SL(2,c)).

Há dois aspectos a salientar no que foi visto. Um deles é o caráter algo geométrico da teoria: aparecem derivadas covariantes, curvatura, etc. O outro é um tanto desagradável: o campo de gauge é introduzido impondo-se uma invariância sobre uma lagrangeana de um outro campo, que lhe serve de fonte, mas possuem uma lagrangeana livre, e equações nada triviais , mesmo na ausência de fontes. Não seria possível se construir a teoria livre sem recorrer a esse liga-desliga ?

A resposta é dada pelo formalismo dos feixes fibrados. Este dá à teoria um cunho totalmente geométrico, e permite a partir de considerações puramente geométricas, todo o formalismo acima, com exceção das únicas equações verdadeiramente dinâmicas, o segundo par (43') das equações de Maxwell. Estas requerem realmente a lagrangeana (54).

Talvez, caiba aqui um pequeno comentário sobre o problema da quantização. Falando grosseiramente, esta se faz, em geral, tomando-se a expansão de Fourier do campo, o que corresponde a tomar como base do espaço funcional o conjunto das soluções da equação livre. A seguir, quantiza-se os coeficientes da expansão. Note-se porém que, aqui as equações livres

$$D^{\mu}F_{\mu\nu} = 0 \tag{56}$$

levam a expressões não lineares, muito diferentes das do caso eletromagnético (28), por exemplo. As soluções não são, em geral, conhecidas nem se aplica o princípio da superposição. A quantização de tais teorias se faz à la Feynman, utilizando integrais funcionais[6]. Embora não se possa construir pacotes de onda da maneira usual, (56) possuem soluções "empacotadas" , do tipo "soliton".

Finalmente, as equações para o campo de gauge não têm um termo de massa. Ele representa assim, um méson vetorial de massa nula. Existem modelos mais elaborados, em que eles adquirem massa[7].

Com relação à pergunta do fim do §2, as teorias de gauge parecem responder afirmativamente para correntes ligadas a invariâncias pelo teorema de Noether. Existem porém casos de correntes conservadas identicamente e que levam a grandezas conservadas como em (3), sem relação com mudanças de base nos espaços internos ("grandezas topológicas").

Referências

1. Existem muitas exposições excelentes. Veja-se, por exemplo, C.G. Bollini, "Teoria General de Campos de Medida". II Simpósio Argentino de Física, de Partículas y Campos, Bariloche 1973.
2. Cf. qualquer texto de teoria de campos, por exemplo: N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields", Interscience 1959; a nossa notação é a de S. Gasiorowics, "Elementary Particle Physics",Wiley 1967.
3. C.N. Yang, R.I. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
4. O passo parece ter sido dado por H. Weyl em 1929. Uma bela discussão das idéias, assim como um resumo do desenvolvimento histórico, se encontra em C.N. Yang, "Magnetic Monopoles, Gauge Fields and Fiber Bundles", conferência feita no Simpósio em homenagem a Marshak, Stony Brook preprint ITP/SB 77-14.
5. R. Utyiama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
6. G. 't Hooft, M. Veltman, "Diagrammar", CERN 73-9.
7. Ver, por exemplo, J.J. Giambiagi, "Teoria Unificada de Interações Débiles y Electromagnéticas", mesmo simpósio da referência (1).

III. *GEOMETRIA DIFERENCIAL: TÓPICOS*

Não será naturalmente possível dar aqui mais que um esboço muito rudimentar[1,3]. Vamos apenas fazer desfilar algumas das idéias e certos resultados mais diretamente relacionados com o que nos interessa: mostrar serem as teorias de gauge tão geométricas quanto a teoria da gravitação (se não mais).

1. *Variedades Diferenciais*

São conjuntos de pontos com as seguintes propriedades fundamentais:

i) podem ser cobertos por uma família de conjuntos abertos (isto é, que contêm um entorno de cada um de seus pontos);

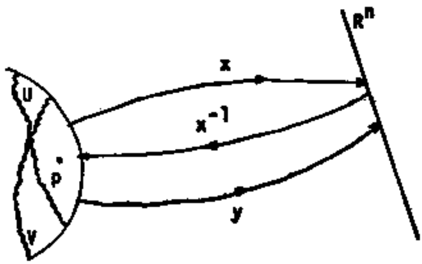
ii) são localmente euclideanos: dado um ponto p de uma variedade, existe em seu entorno U que é homeomorfo a um aberto de algum espaço euclideano R^n; um homeomorfismo x é uma aplicação contínua com inversa contínua, e o caráter euclideano significa que uma vizinhança de cada ponto pode ser aplicada continuamente em R^n; isso permitirá definir coordenadas na vizinhança: o par entorno mais homeomorfismo (U,x) é uma carta, ou sistema local de coordenadas (SLC). Em um tal sistema, o ponto p será dado por

$$x(p) \in R^n \quad , \quad x(p) = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad ;$$

n (suposta a mesma para todos os pontos da variedade) é a dimensão da variedade; podem existir muitas cartas para um mesmo ponto; dadas duas dessas, (U,x) e (V,y), com $p \in U \cap V$, a cada uma corresponderão coordenadas $x(p)$ e $y(p)$; a aplicação composta yox^{-1} leva R^n em R^n e pode ser escrita

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad ;$$

isto é uma <u>transformação de SLC</u>.



iii) possuem um <u>atlas</u> diferencial, isto é, um conjunto de cartas (U_i, x_i) cujas U_i cobrem todos os pontos e tais que, nas intersecções as transformações de SLC sejam diferenciáveis.

Um bom exemplo de variedade diferencial de dimensão 2 é a esfera S^2, conjunto dos pontos de R^3 satisfazendo $x^2+y^2+z^2$ = constante. Os SLC mais utilizados no caso são projeções estereográficas sobre o plano, que deixam sempre pelo menos um ponto de fora: S^2 não pode ser inteiramente descrita por uma única carta. As superfícies bem comportadas em R^3 são, em geral, variedades: um elipsóide, um ramo de hiperbolóide, um toro, etc. As variedades mais simples são porém os próprios R^n, ou seus primos pseudoeuclideanos, como o espaço de Minkowski. Estas têm uma propriedade que as trivialisa: podem ser cobertas por uma única carta (SLC cartesianos).

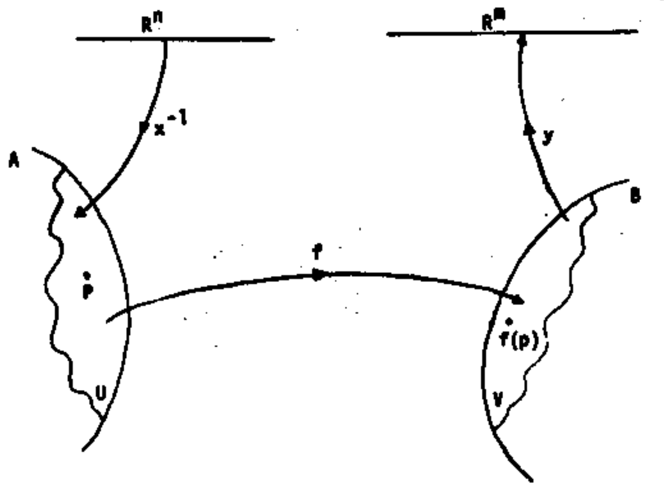
Exemplos menos triviais são os <u>grupos de Lie</u>: estes são variedades sobre as quais está definida ademais uma estrutura de grupo(2), sujeita a algumas condições suplementares de analiticidade.

Enfim, variedades são generalizações dos espaços euclideanos, que apenas localmente, preservem as suas propriedades. Em última instância, tudo o que se define sobre uma variedade E é reconduzido a definições em espaços euclideanos. Por exemplo, pode-se definir uma função $f: E \to R$; f será diferenciável em um aberto $U \subset E$ se em toda a carta (U,x) a função $fox^{-1}: R^n \to R$ for diferenciável. O conjunto das funções diferenciáveis reais (ou complexas) sobre uma variedade E forma um espaço vetorial, que designaremos por R(E) (respectivamente, C(E)).

Pode-se também definir <u>funções entre duas variedades</u> quaisquer A e B: $f: A \to B$ é diferenciável em um ponto $p \in A$ se, dadas duas cartas (U,x) em A e (V,y) em B, com $p \in U$ e $f(p) \in V$, a aplicação

$$yofox^{-1} : R^n \to R^m$$

for diferenciável.



Um exemplo é cada função coordenada:

$$x^i : A \to R \quad .$$

Outro seria uma curva sobre uma variedade E, que é definida como qualquer função diferenciável de um aberto em R com valores em E, por exemplo:

$$a : (-1, +1) \to E \quad .$$

Um ponto da curva terá coordenadas $a^i(t)$, onde o parâmetro $t \in (-1,+1)$. Imtuitivamente, um vetor tangente à curva nesse ponto será também tangente à variedade, e terá componentes $\frac{da^i}{dt}$. Em geometria diferencial, porém, vetores são definidos como derivadas direcionais e, no caso considerado, seria

$$v = \frac{da^i}{dt} \frac{\partial}{\partial a^i}$$

São, na verdade, operadores lineares sobre os espaços R(E) ou C(E) definidos acima. A definição formal é a mais econômica: um vetor X_p, tangente à variedade E em um seu ponto p, é um operador linear sobre R(E) ou C(E), satisfazendo à regra de Leibniz:

$$X_p(fg) = fX_p(g) + gX_p(f) \quad ,$$

para quaisquer $f,g \in R(E)$ ou C(E).

Cada vetor é tangente à uma família de curvas por p (e tangentes entre si em p). O conjunto dos vetores em p forma um espaço vetorial $T_p(E)$, o espaço tangente a E em p. Se dimE=n, esse espaço é isomorfo a R^n. Dada uma carta (U,x), em que $p \in U$ tenha coordenadas (x^i), as derivadas $\partial/\partial x^i$ são vetores e o seu conjunto fornece uma base para $T_p(E)$. Nessa base,

$$X_p = X_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad . \tag{1}$$

As funções lineares $\omega_p : T_p(E) \to R$ formam também um espaço vetorial $T_p^*(E)$, o dual de $T_p(E)$. Os vetores (1) são também chamados <u>contravariantes</u> e os do espaço dual, <u>covetores</u> ou <u>vetores covariantes</u>.

Da teoria das equações diferenciais lineares, sabe-se que o espaço dual a vetores do tipo (1) é formado pelas formas diferenciais do tipo

$$\omega_p = \omega_{p^i} \, dx^i \quad . \tag{2}$$

As diferenciais dx^i formam uma base para o espaço $T_p(E)$, que por isso é também chamado "espaço das formas". Ele contém as diferenciais das funções $f \in R(E)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i \quad . \tag{3}$$

Tomando-se produtos tensoriais de $T_p(E)$ e $T_p^*(E)$, pode-se obter espaços tensoriais de ordem qualquer.

2. *Campos de Vetores e Covetores*

Se agora fizermos o ponto p variar sobre a variedade E, a eq. (1) nos dará um <u>campo vetorial</u> sobre E:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \tag{4}$$

e (2) nos dará um campo covetorial sobre E:

$$\omega = \omega_i dx^i \tag{5}$$

As componentes X^i e ω_i são agora funções das coordenadas de p. Note-se que agora x(f) é também uma função:

$$X:R(E) \to R(E)$$

Podemos portanto aplicar sobre ela um outro campo Y. Mas

$$YXf = Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f + Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad ,$$

e, devido ao último termo, YX não é um campo. É fácil ver, porém, que o comutador

$$\left[X,Y\right] = \left[X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right]\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{6}$$

é um campo. A operação de comutação define sobre o espaço dos campos uma estrutura de álgebra linear. Além do mais, valem:

$$\left[X,X\right] = 0 \tag{7}$$

$$\left[\left[X,Y\right],Z\right] + \left[\left[Z,X\right],Y\right] + \left[\left[Y,Z\right],X\right] = 0 \tag{8}$$

(identidade de Jacobi). Uma álgebra com tais propriedades é uma álgebra de Lie.

Uma definição mais formal, que se demonstra ser completamente equivalente a esta, é a seguinte: tomemos a união

$$T(E) = \bigcup_{p \in E} T_p(E) \quad ; \tag{9}$$

um campo vetorial X é uma aplicação

$$X:E \to T(E) \quad ,$$

tal que $X(p) = X_p(E)$ e, para qualquer $f \in R(E)$, $(Xf)(p)=X_p(f)$.

Um parêntese: a união (9) é também uma variedade; é na verdade o que se chama o <u>feixe fibrado tangente</u> da varieda - de; o espaço $T_p(E)$, para cada $P \in E$, é uma <u>fibra</u> desse fibrado. Note-se serem as fibras todas isomorfas a R^n e, portanto, entre si. Essa definição, introduzindo o campo como uma aplicação da variedade E (em linguagem geométrica chamada a <u>base</u>) no fibrado T(E) de tal forma que a cada ponto p de E corresponda um ele - mento (o vetor X_p) da fibra sobre p, é a típica definição de uma <u>secção</u> sobre o fibrado.

De maneira análoga, pode-se introduzir o <u>feixe fibra- do cotangente</u>,

$$T^*(E) = \bigcup_{p \in E} T_p(E)$$

e um <u>campo covetorial</u>, ou <u>1-forma</u>, como uma aplicação

$$\omega:E \to T^*(E)$$

tal que

$$\omega(p) = \omega_p \in T_p^*(E) \quad ,$$

para todo o $p \in E$.
Isso equivale à definição (5). As bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, $\{dx^i\}$ de T(E) e $T^*(E)$ são ditas <u>naturais</u>, por estarem ligadas a um sistema lo- cal de coordenadas. Note-se que dx^i deve aqui ser considerada como uma aplicação linear sobre T(E), $dx^i:T(E) \to R(E)$. Elas são

duais entre si, quer dizer:

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j \quad . \tag{10}$$

É evidente que se pode tomar outras bases.

3. *Bases*

Dada uma variedade de dimensão n, um conjunto qualquer de n campos vetoriais X_i linearmente independentes pode ser utilizado como base para o espaço dos campos. Um campo vetorial independe dos sistemas locais de coordenadas. Tomemos dois de tais sistemas, $\{x^i\}$ e $\{x^{i'}\}$. Nas bases naturais para tais SLC, um campo X se escreverá

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \ .$$

A ação de X sobre a função x^j leva a

$$X^j = X^{i'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \quad , \tag{11}$$

expressão mostrando como se transformam as componentes de X por uma mudança de SLC.

Uma base para a qual exista um SLC em cada aberto do qual ela seja a base natural é chamada uma <u>base holônoma</u>, ou <u>base coordenada</u>. A condição específica para isso é que, dados dois elementos X_i e X_j quaisquer da base, valha $(X_iX_j-X_jX_i)(f) \doteq 0$, $\forall$ f $\in$ R(A). Isso ocorre, é claro, para $X_i = \partial/\partial x^i$, mas é importante saber que essa propriedade é antes uma exceção que uma regra. Bases, em geral, não a possuem, e são chamadas <u>bases anolônomas</u>, ou bases <u>não-coordenadas</u>

Um exemplo elementar é o das coordenadas esféricas ordinárias para o R^3, (r,θ,ϕ). A base holônoma correspondente seria $(\partial_r,\partial_\theta,\partial_\phi)$. Já notamos que no R^3 um vetor corresponde à derivada direcional; no entanto, a base acima não é a forma usual do gradiente em coordenadas esféricas. A velocidade, por exemplo, se escreveria

$$V = V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + V^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad .$$

com as componentes

$$V^r = \frac{dr}{dt} \quad ; \quad V^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad ; \quad V^\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad .$$

Usualmente, porém, as componentes usadas são outras,

$$V^r = \frac{dr}{dt} \quad ; \quad V^\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad V^\phi = r \operatorname{sen}\theta \frac{d\phi}{dt} \quad ;$$

estas correspondem a uma base não holônoma, formada pelos vetores

$$X_r = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad X_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad ; \quad X_\phi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad .$$

Esses vetores, evidentemente, não comutam.

Já foi visto ser o comutador de dois campos também um campo. Pode-se expandir o comutador de dois elementos de uma base não-holônoma nessa mesma base,

$$\left[X_i, X_j\right] = C^k_{ij} X_k \quad , \tag{12}$$

onde os C^k_{ij} são chamados os <u>coeficientes de estrutura da álgebra</u> dos campos. Na base esférica para R^3 com as coordenadas usuais, os coeficientes não nulos são

$$C^{\theta}_{r\theta} = C^{\phi}_{r\phi} = -\frac{1}{r} \quad ; \quad C^{\phi}_{\theta\phi} = -\frac{1}{r\ tg\theta}$$

e suas permutações nos índices inferiores (os coeficientes são claramente anti-simétricos nos mesmos). Note-se: os coeficientes não são constantes necessariamente e, vale repetir, dependem da base e do sistema de coordenadas.

A eq. (11) se refere a mudanças entre bases coordenadas. Os elementos de uma base qualquer, $\{X_i\}$, terão cada um uma expansão na base natural:

$$X_i = X^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad . \tag{13}$$

Em geral, os espaços tangentes sendo R^n's, uma base canônica $V_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $V_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots V_n = (0,0,\ldots,1)$ sempre existe, a partir da qual as demais podem ser obtidas como nessa equação o foram, a partir da natural. O ponto importante é que uma base $\{X_i\}$ é plenamente caracterizada pela matriz (X^j_i) das componentes de seus elementos numa fundamental. Essa matriz n x n pertence ao espaço vetorial das matrizes nxn, que possui uma estrutura de grupo (é o chamado GL(n,R)). O conjunto de todas as bases varre esse espaço, é isomorfo ao grupo. Uma mudança de bases naturais (que envolve necessariamente uma mudança de coordenadas) causará uma alteração das componentes X^j_i segundo

$$X^{k'}_i = X^j_i \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \quad .$$

De uma maneira mais geral, uma mudança de base (sem envolver necessariamente mudança de coordenadas) será dada por

$$X_i^{k'} = X_i^j A_j^{k'} \ , \tag{14}$$

em que matrizes A pertencem a GL(n,R). A utilização frequente de bases naturais (que facilitam os cálculos) é a responsável por grande parte da confusão usualmente feita entre mudanças de base e transformações de coordenadas, duas coisas totalmente distintas.

No espaço das formas, as bases naturais se relacionam conforme

$$dx^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dx^j} dx^j \quad .$$

Os elementos de uma outra base, $\{\alpha^i\}$, serão $\alpha^i = \alpha_j^i \, dx^j$. Uma mudança de bases naturais induzirá em suas componentes

$$\alpha_{j'}^i = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \alpha_k^i \quad .$$

De uma maneira geral,

$$\alpha_{j'}^i = A_{j'}^k \alpha_k^i \quad . \tag{15}$$

4. *Métrica*

Pode-se, tomando produtos tensoriais dos espaços de campos de vetores e covetores, construir espaços de tensores de ordens quaisquer. Designa-se por $T_s^r(E)$ o fibrado tensorial contravariante de ordem r e covariante de ordem s.

No espaço das formas diferenciais, a base dual a uma base $\{X_i\}$ de $T(A)$ será formada pelos ω^j tais que

$$\omega^j(X_i) \equiv \langle\omega^j, X_i\rangle = \delta^j_i \quad , \tag{16}$$

$$\therefore \omega = \langle\omega, X_j\rangle\, \omega^j \quad .$$

Dados $Y = Y^i X_i$ e $z = z_j \omega^j$, então

$$\langle z, Y\rangle = Z_i Y^i \quad . \tag{17}$$

Note-se que $\omega \in T^0_1(A)$, ou seja, ω é um vetor covariante. Formas bilineares $\in T^0_2(A)$ e aplicam $T(A) \otimes T(A)$ em $R(A)$. Lembremos que o produto tensorial de duas formas lineares ω e z é dado por

$$(\omega \otimes z)(X,Y) = \omega(X)\cdot z(Y)$$

Dada uma base $\{\omega^i\}$ de $T^0_1(A)$, os produtos $\omega^i \otimes \omega^j$ formam uma base para $T^0_2(A)$ na qual uma forma bilinear g qualquer se escreverá

$$g = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$$

ou, na base natural,

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Um exemplo importantíssimo de forma bilinear é uma <u>métrica</u>, que se denota por $g(X,Y)$, ou $X.Y$, ou $\langle X,Y\rangle$ e que deve ser:

i) bilinear:

$X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;

$(X+Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$;

ii) simétrica:

$X \cdot Y = Y \cdot X$;

iii) não singular: se $X \cdot Y = 0$ para todo o Y, então $X = 0$:

Na base acima,

$$g(X_i, X_j) \equiv X_i \cdot X_j = g_{kn}\, \omega^k(X_i)\, \omega^n(X_j) \quad ,$$

donde se segue que

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) = X_i \cdot X_j \quad . \tag{18}$$

Como $g_{ij} = g_{ji}$ e, em geral, se escreve $\omega^i\omega^j$ para a parte simé - trica

$$\omega^{(i} \otimes \omega^{j)} = \frac{1}{2} (\omega^i \otimes \omega^j + \omega^j \otimes \omega^i) \quad ,$$

então

$$g = g_{ij}\, \omega^i\omega^j = g(X_i, X_j)\, \omega^i\omega^j \quad , \tag{19}$$

ou, na base natural,

$$g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad . \tag{20}$$

Uma métrica estabelece uma relação entre vetores e co vetores: Y é a <u>imagem contravariante</u> de z se, para todo o X,

$$g(X,Y) = z(X) \quad .$$

Se nas bases duais $\{X_i\}$ e $\{\omega^j\}$, $Y = Y^i X_i$ e $z = z_j \omega^j$, então $g_{ij} Y^i = z_i$. Nesse caso, se escreve usualmente $Z_i = Y_i$. A presença de uma métrica faz com que as componentes de um vetor possam ser identificadas com formas, e componentes de formas possam ser identificadas com vetores. Se a aplicação $Y \to Z$ for sobrejetora, a métrica é dita <u>não-degenerada</u>.

Define-se também uma métrica contravariante $\hat{g}$, cujas componentes $\hat{g}_{ij}$ são os elementos respectivos da matriz inversa à matriz g. Se ω e Z são as imagens (definidas de modo inverso ao dado acima) de X e Y, então

$$\hat{g}(\omega,Z) = g(X,Y) \ .$$

Tudo isso define sobre $T_p(A)$ ou $T_p^*(A)$ um <u>produto interno</u>

$$g(X,Y) = \hat{g}(\omega,Z) = (X,Y) = (\omega,Z) \ . \tag{21}$$

Uma propriedade importante de espaços V dotados de produto interno é a seguinte: dada qualquer função linear $f \in R(V)$, existe um único elemento $v \in V$, tal que, para todo $u \in V$, $f(u) = (u,v)$. Assim, as formas incluem todas as funções reais lineares sobre $T_p(A)$ e os vetores, todas as sobre $T_p^*(A)$.

Um teorema devido a Whitney assegura que toda a variedade diferencial admite uma métrica Riemanniana (!).

5. *Cálculo Exterior*[3,4]

Temos falado muito de objetos diferenciáveis: funções, atlas, etc. Trataremos neste parágrafo, de objetos que possam aparecer sob um sinal de integral, isto é, de formas diferenciáveis. Andamos, nos parágrafos anteriores, confundindo formas e tensores covariantes; embora tencionemos manter a confusão dos nomes, somente um tipo de tensores covariantes aparece sob o sinal de integral. Estamos habituados a escrever, no espaço euclideano a 3 dimensões, expressões como

$$\int A\,dx + B\,dy + C\,dz \text{ (integral de linha)} \quad ,$$

$$\int P\,dxdy + Q\,dydz + R\,dzdx \text{ (de superfície)} \quad ,$$

ou

$$\int T\,dxydz \quad \text{(de volume)} \ .$$

As formas diferenciáveis acima têm uma característica notável: os termos de integração redundante, do tipo dxdx, estão conspicuamente ausentes. Embora intuitivamente a simples redundância os elimine, há uma razão mais profunda para isso: os jacobianos fazem parte da medida de integração, e são anti-simétricos. Desde que se pense em integração, somente as formas(tensores covariantes) anti-simétricas têm sentido.

P cálculo exterior estuda exatamente os tensores covariantes anti-simétricos de ordens S quaisquer, chamados mais comumente <u>formas exteriores de graus S</u>, ou <u>S-formas</u>. Já vimos exemplos de grau 1, em que evidentemente a anti-simetria nada significa. As bases $\{\omega^i\}$ de grau 1 são, no entanto, fundamentais por fornecerem, por um processo de composição a enti-simetrização, bases para espaços do grau superior.

Esse processo é dado por uma operação, o <u>produto exterior</u>, que leva formas dadas a formas de grau mais elevado.Por exemplo, uma base para as 2-formas é dada pelo produto

$$\Lambda : T^0_1(E) \otimes T^0_1(E) \to T^0_2(E) \quad \text{anti-simétrico} \ ,$$

$$\omega^{ij} := \omega^i \wedge \omega^j := \omega^i \otimes \omega^j - \omega^j \otimes \omega^i \quad .$$

Lembremos que o produto tensorial de duas 1-formas ω e σ é uma forma bilinear sobre $T^1_0 \otimes T^1_0$, que atua sobre dois campos X e Y segundo $\omega \otimes \sigma(X,Y) = \omega(X)\cdot\sigma(Y)$. O produto exterior de duas 1-formas quaisquer ω e σ é

$$\omega \wedge \sigma = \omega \otimes \sigma - \sigma \otimes \omega \ .$$

Esta forma bilinear tem algo de uma métrica anti-simétrica. Na base acima, uma 2-forma F se escreverá

$$F = \frac{1}{2} f_{ij} \ \omega^i \otimes \omega^j \quad . \tag{22}$$

Espaços de grau superior são obtidos definindo-se, em geral, o produto exterior de 2 formas α e β de graus p e q como uma (p+q)-forma que é o seu produto tensorial completamente anti-simetrizado. Suas componentes serão fixadas por

$$(\alpha\wedge\beta)_{i_1 i_2 \ldots i_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \ \varepsilon^{k_1 \ldots k_p j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{p+q}} \ \alpha_{k_1 \ldots k_p} \beta_{j_1 \ldots j_q} , \tag{23}$$

onde os ε's são componentes do tensor de Kronecker (ou símbolos de Levi-Civita): =+1 se os índices superiores forem uma permuta ção par dos inferiores, =-1 se ímpar, =0 em qualquer outro caso. Uma base para o espaço das q-formas, indicado por $\tilde{T}^*_q(E)$, será

$$\omega^{i_1\ldots i_q} = \varepsilon^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_q}\, \omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} \otimes \ldots \omega^{j_q} =$$

$$= \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q} \quad . \qquad (24)$$

Nela, uma q-forma α será

$$\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_q}\, \omega^{i_1\ldots i_q} \quad . \qquad (25)$$

Cabe aqui um comentário prático: uma base é dada pelo produto (24) com os i_k em ordem fixada (crescente, por exemplo). Como $\omega^1 \wedge \omega^2 = -\omega^2 \wedge \omega^1$, estes não são independentes. Assim, as componentes em (25) deveriam ser escritas $\alpha_{i_1<i_2\ldots<i_q}$. Porém, é em geral interessante somar sobre todos os valores dos índi - ces (o que não está subentendido na eq. (25), em que a ordem é mantida e a soma é feita sobre as $\binom{n}{q}$ permutações ordenadas) . Nesse caso,

$$\alpha = \frac{1}{q!}\, \alpha_{i_1\ldots i_q}\, \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q} \quad . \qquad (26)$$

O fatorial q! dispõe das permutações equivalentes,como fizemos ao escrever a eq. (22).

Uma função f é identificada a uma 0-forma. Vê-se que

$$(f\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (f\beta) = f(\alpha\wedge\beta) \quad .$$

Outras propriedades importantes do produto exterior são:

i) a distributividade com relação à adição:

$$(\alpha+\beta) \wedge \gamma = \alpha\wedge\gamma + \beta\wedge\gamma \quad ; \qquad \alpha \wedge (\beta+\gamma) = \alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\gamma \quad ;$$

ii) a associatividade:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad ;$$

iii) se α é uma p-forma e β uma q-forma,

$$\alpha \wedge \beta = (-)^{pq} \, \beta \wedge \alpha \quad ;$$

se p e q forem ímpares, $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ e $\alpha \wedge \alpha = 0$, em particular, para os elementos de base $\{\omega^i\}$ acima,

$$\omega^i \wedge \omega^j = -\omega^j \wedge \omega^i \quad ; \quad \omega^1 \wedge \omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^2 = \ldots = 0 \quad ;$$

na base natural,

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad ; \quad dx \wedge dx = 0 \quad ; \quad dy \wedge dy = 0 \text{ , etc.}$$

Se dim E = n, também dim $T_p(E)$ = dim $T_p^*(E) = n$, $\forall p \in E$. Uma base para $\tilde{T}_n^*(E)$ é uma única forma $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n$. Trata-se de um espaço unidimensional. O produto exterior de (n+1)-formas é sempre nulo; isto segue de um teorema pelo qual o anulamento do produto exterior de r 1-formas é condição necessária e suficiente para que elas sejam linearmente dependentes. Assim, o grau máximo de uma forma exterior sobre E é (dim E).

Um campo de q-formas sobre E é também chamado de uma q-forma diferencial sobre E.

Uma função f é uma 0-forma e sua diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i$$

é uma 1-forma. A generalização da diferencial para formas de grau qualquer é a <u>diferencial exterior</u>, uma operação <u>d</u> com as seguintes propriedades:

1) d de uma q-forma = (q+1)-forma;

2) $d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta$;

3) $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-)^p \alpha\wedge d\beta$,

onde p é o grau de α;

4) finalmente,

$$d^2\alpha = d(d\alpha) \equiv 0, \forall \alpha \quad . \tag{27}$$

Essas propriedades definem uma e só uma operação. A diferencial da 2-forma (22) é a 3-forma

$$dF = \frac{1}{2}\left[(df_{ij})\wedge\omega^i\wedge\omega^j + f_{ij}d\omega^i\wedge\omega^j + f_{ij}\omega^i\wedge d\omega^j\right]$$

Vê-se aqui a grande vantagem prática da base natural; nesta, como $d^2x^i = d(dx^i) = 0$,

$$dF = \frac{1}{2}\, df_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j \quad .$$

Uma q-forma

$$\alpha = \frac{1}{q!}\, \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_q}$$

terá a diferencial

$$d\alpha = \frac{1}{q!}\, (d\alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}) \wedge dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_q} \quad .$$

A componente $\alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ sendo uma função,

$$d\alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} = \frac{\partial\alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}}{\partial x^{\lambda_0}}\, dx^{\lambda_0} \ ,$$

e então,

$$d\alpha = \frac{1}{q!} \frac{\partial \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}}{\partial x^{\lambda_0}} dx^{\lambda_0} \wedge dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_q} \quad . \qquad (28)$$

Esta expressão pode ser colocada na forma canônica (26):

$$d\alpha = \frac{1}{(q+1)!} \left[\frac{1}{q!} \varepsilon^{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_q}_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_q} \frac{\partial \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}}{\partial x^{\lambda_0}}\right] dx^{\mu_0} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_q} \quad . \qquad (29)$$

É conveniente se definir a <u>derivada exterior</u> em relação à coordenada local x^{λ_0} por

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^{\lambda_0}} = \frac{1}{q!} \frac{\partial \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}}{\partial x^{\lambda_0}} dx^{\lambda_1} \wedge dx^{\lambda_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_q} \quad , \qquad (30)$$

de modo que,

$$d\alpha = dx^{\lambda_0} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x^{\lambda_0}} \quad . \qquad (31)$$

Examinaremos o caso simplíssimo

$$\alpha = \alpha_i \, dx^i$$

$$d\alpha = d\alpha_i \wedge dx^i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \quad .$$

Agora,

$$d^2\alpha = \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^j \partial x^k} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^i =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^k \partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^i = 0 \quad .$$

Assim, a condição $d^2\alpha = 0$ corresponde à igualdade das derivadas segundas mistas, relacionada a condições de integrabilidade. É frequentemente chamada de "lema de Poincaré". Lembremos que uma q-forma α tal que $d\alpha = 0$ é dita "fechada". Se α for fechada num entorno U, existe em Um uma (q-1)-forma β ,tal que $d\beta = \alpha$, ou seja, α é localmente exata. Mas atenção: seja γ uma (q-1)-forma fechada em $U: d\gamma = 0$. Então, $\beta+\gamma$ também será tal que $d(\beta+\gamma) = \alpha$. Existe uma infinidade de tais formas β.

Um exemplo famoso: veremos logo abaixo que o "tensor eletromagnético" é uma 2-forma, dada portanto por (22):

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = F_{\alpha<\beta}\, dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \quad , \tag{32}$$

o $F_{\mu\nu}$ usual já sendo anti-simétrico, $F_{\mu\nu} = F_{\mu<\nu}$.

As equações de Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$ e $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, podem ser escritas

$$\partial_{\alpha}F_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma}F_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}F_{\gamma\alpha} = 0 \quad . \tag{33}$$

Logo,

$$dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} F_{\alpha\beta}\right) dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{3!} (0)\, dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = 0$$

Assim, F é fechada e existe localmente uma 1-forma $A = A_{\alpha}dx^{\alpha}$ tal que

$$F = dA = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\, dx^{\beta} \wedge dx^{\alpha} \tag{34}$$

Logo,

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha} \quad . \tag{35}$$

No entanto, A não é a única 1-forma tal que F = dA. Dada qualquer 1-forma fechada $B = d\phi$ (ϕ uma função ou 0-forma qualquer), também $F = d(A+B)$. Assim, se F é fechada, existe localmente uma 1-forma A' tal que $F = dA'$, com

$$A' = A + d\phi$$

ou, em componentes

$$A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \phi \quad .$$

Reconhece-se nesta expressão a de uma transformação de gauge. A invariância de F por tais transformações aparece, aqui, como uma arbitrariedade na passagem local da forma fechada F à forma exata $F = dA'$. Na eletrodinâmica sem fontes, a variedade M de Minkowski pode ser recoberta por um único entorno, e o resultado local se "globaliza".

Já vimos que se f for uma função diferenciável, $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ é uma 1-forma. No espaço E^3, suas componentes são as do gradiente. Por outro lado, dada uma 1-forma A, sua diferencial será 2-forma de componentes como na eq. (35); em E^3, são as componentes do rotacional. Se A já fosse uma diferencial de uma função (um gradiente), o lema de Poincaré implica que $dA = 0$(rot grad=0). Dada uma 2-forma como em (34) uma diferencial será uma 3-forma,

$$dF = \frac{1}{2} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \quad .$$

Em E^3, as componentes F_{ij} podem ser sempre rearranjadas para formar um vetor $\tilde{F}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} F_{ij}$, de que as componentes de dF serão o divergente. Se F já fosse uma dA como em (35), $dF=0$ (Em E^3, div rot = 0).

Assim, a única equação $d^2 = 0$ resume vários resultados do cálculo vetorial, sendo além do mais, válida em um espaço de dimensão qualquer. Há porém um problema: o divergente é o diferencial de uma 2-forma e o gradiente é uma 1-forma; não se pode obter o Laplaciano = div grad ! Acontece que o nosso simples Laplaciano envolve em verdade muito mais estrutura do que usualmente se pensa. Para se compreender isso, é mister se introduzir uma nova operação, que fará do gradiente uma 2-forma ao qual o divergente poderá se aplicar. Essa operação é dada pelo operador* de Hodge.

Já vimos que as n-formas $\in \tilde{T}^*_n(E)$, com n=dim E, formam um espaço unidimensional; seja σ uma base desse espaço. Fixemos ademais, uma $\lambda \in \tilde{T}^*_p(E)$, e consideremos, para um qualquer $\mu \in \tilde{T}^*_{n-p}(E)$, a aplicação

$$"\lambda" : \tilde{T}^*_{n-p} \to \tilde{T}^*_n$$

dada por

$$\mu \to \lambda\Lambda\mu = f_\lambda(\mu)\sigma \quad , \quad f_\lambda(\mu)\epsilon R \quad , \quad f_\lambda \in R(T^*_{n-p}) \quad .$$

Suponhamos que sobre a variedade esteja definida uma métrica e, portanto, um produto interno. Ora, como já vimos , existe em $\tilde{T}^*_{n-p}(E)$ uma única forma que pelo produto interno reproduz exatamente a função linear f_λ. Denotá-la-emos por $*\lambda$:

$$f_\lambda(\mu) = (*\lambda,\mu) \ , \ \lambda\Lambda\mu = (*\lambda,\mu)\sigma \quad .$$

Isso fixa a aplicação linear $\lambda \to *\lambda$,

$$* : \tilde{T}^*_p \to \tilde{T}^*_{n-p} \quad .$$

Tomemos as bases $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \omega^p$ para $\tilde{T}^*_p$; $\omega^{p+1} \wedge \dots$ $\dots \wedge \omega^n$ para $\tilde{T}^*_{n-p}$; então,

$$*(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p) = (\omega^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega^n \, , \, \omega^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega^n)\omega^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega^n \quad .$$

Se S é a signatura do produto interno, mostra-se que

$$**\lambda = (-)^{p(n-p)+(n-S)/2} \, \lambda \; .$$

<u>Exemplo 1</u>) Seja M, com base $\{dx^\mu\}$; a métrica de Lorentz dará

$$(dx^i, dx^j) = \delta^{ij} \qquad \text{se} \quad i,j = 1,2,3 \; ;$$

$$(dx^0, dx^i) = 0 \quad ; \quad (dx^0, dx^0) = -1; \quad S=2 \; ; \; n=4 \; ;$$

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= (dx^3 \wedge dx^0, dx^3 \wedge dx^0) dx^3 \wedge dx^0 = \\ &= (dx^3, dx^3)(dx^0, dx^0) dx^3 \wedge dx^0 = \\ &= -dx^3 \wedge dx^0 \end{aligned}$$

Em geral

$$*(dx^i \wedge dx^j) = dx^0 \wedge dx^k \quad , \quad \text{e ciclicamente} \; ;$$

$$*(dx^i \wedge dx^0) = dx^j \wedge dx^k \quad , \quad \text{e ciclicamente} \; ;$$

$$*(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = -dx^0 \quad , \qquad \text{ciclicamente};$$

$$*(dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j) = dx^k \quad , \quad \text{idem.}$$

<u>Exemplo 2)</u> em E^3, tomemos uma função $f \in R(E^3)$;

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad ;$$

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy \quad ;$$

$d^*df = \Delta f\, dx\wedge dy\wedge dz$, assim, $d*d$ é o laplaciano sobre funções.

Mostra-se que

$$\alpha\wedge(*\beta) = \beta\wedge(*\alpha) \quad ;$$

se α e β são p-formas,

$$\alpha\wedge*\beta = (\alpha,\beta)\sigma \ .$$

Além disso, $*f$ = n-forma, e portanto $d*f = 0$. Pode-se definir um operador inverso,

$$*^{-1} = (-)^{p(n-p)+(n-s)/2} * \quad . \qquad (36)$$

O operador

$$\delta := (-)^{p} *^{-1} d* \qquad (37)$$

<u>é o codiferencial exterior</u>. Leva uma forma de grau p em uma de grau (p-1). Vê-se que

$$\delta\delta = (-)^{p-1} (-)^{p} * d **^{-1} d* = -*^{-1} dd* = 0 \quad . \qquad (38)$$

Uma forma ω tal que $\delta\omega = 0$ é <u>cofechada</u>.

Vamos ilustrar os pontos principais do que foi dito acima pelo nosso habitual exemplo eletromagnético no vácuo. Lembremos ser o tensor do campo eletromagnético anti-simétrico de grau 2. Vamos dispor suas componentes ($c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$) na matriz

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quer dizer, explicitamente, a eq. (32) se escreve

$$F = H_1\ dx^2 \wedge dx^3 + H_2\ dx^3 \wedge dx^1 + H_3\ dx^1 \wedge dx^2 +$$
$$+ E_1\ dx^1 \wedge dx^0 + E_2\ dx^2 \wedge dx^0 + E_3\ dx^3 \wedge dx^0 \quad , \qquad (39)$$

em que na matriz as quartas linha e coluna têm índice 0. Em notação mais compacta,

$$F = \frac{1}{2}\ \varepsilon_{ijk}\ H_i\ dx^j \wedge dx^k + E_i\ dx^i \wedge dx^0 \quad .$$

Diferenciando exteriormente,

$$dF = (\vec{\nabla}\cdot\vec{H})\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\ \varepsilon_{ijk}\ (\partial_0 H_i)\ dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k +$$
$$+ (\partial_i E_j - \partial_j E_i)\ dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j \quad . \qquad (40)$$

Usando $*dx^1 \wedge dx^2 = -dx^3 \wedge dx^0$, $*dx^1 \wedge dx^0 = dx^2 \wedge dx^3$ e suas permutações cíclicas, podemos obter

$$*F = -H_1\ dx^1 \wedge dx^0 - H_2\ dx^2 \wedge dx^0 - H_3\ dx^3 \wedge dx^0 +$$
$$+E_1\ dx^2 \wedge dx^3 + E_2\ dx^3 \wedge dx^1 + E_3\ dx^1 \wedge dx^2 \quad , \qquad (41)$$

ou

$$*F = -H_i\ dx^i \wedge dx^0 + \frac{1}{2}\ \varepsilon_{ijk}\ E_i\ dx^j \wedge dx^k \quad .$$

Comparando (39) e (41), vê-se que a transposição de Hodge $*:\vec{H} \to +\vec{E}$; $*:\vec{E} \to -\vec{H}$. Essa operação leva $(F_{\mu\nu})$ em sua dual

$$(\tilde{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix}$$

A derivação de (41) dá

$$d{*}F = (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\, \varepsilon_{ijk}\, (\partial_0 E_i)\, dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k +$$

$$- (\partial_i H_j - \partial_j H_i)\, dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j \quad . \tag{42}$$

Examinando (41) e (42), vê-se que existe a seguinte correspondência com as equações de Maxwell livres:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \partial_0\vec{E} = \text{rot}\ \vec{H} \end{array}\right\} d{*}F = 0 \tag{43}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0 \\ \partial_0\vec{H} = -\text{rot}\ \vec{E} \end{array}\right\} dF = 0 \tag{44}$$

Podemos ser mais formais: usando ${*}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^0$; ${*}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = dx^3$ e seus etcéteras cíclicos, chegamos a

$$\delta F = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dx^0 + (\partial_0\vec{E} - \text{rot}\ \vec{H})\cdot d\vec{x} \quad .$$

Tem-se também a correspondência

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \partial_0\vec{E} = \text{rot}\ \vec{H} \end{array}\right\} \delta F = 0 \tag{45}$$

Se definirmos a 1-forma

$$j = 4\pi \left[\rho\, dx^0 - \vec{J}\cdot d\vec{x} \right] , \tag{46}$$

as equações habituais de Maxwell serão

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \delta F = j \end{cases} \tag{47}$$

Da última equação, $\delta j = \delta^2 F = 0$, o que em componentes se escreve

$$\partial_0 \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad , \tag{48}$$

a equação de conservação da corrente.

Referências

1. Dos muitos textos sobre o assunto, podemos citar: Elon Lages Lima, "Variedades Diferenciais", IMPA, 1973, uma introdução detalhada; S. Kobayashi, K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry", Interscience 1963; volume I. Cap.I.

2. Existem bibliotecas sobre grupos de Lie; citemos apenas K. Nomizu, "Lie Groups and Differential Geometry", Math. Soc. Japan, 1956; M.P. do Carmo, "Notas de um Curso de Grupos de Lie", IMPA, 1974.

3. A. Lichnerowics, "Theorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie", Edizioni Cremonese, Roma, 1962.

4. H. Flanders, "Differential Forms", Academic Press, 1963.

IV. *A LINGUAGEM DOS FIBRADOS*

Intuitivamente, um feixe fibrado é uma variedade a cada ponto da qual se "cola" um exemplar de uma outra variedade. Por exemplo: a esfera S^2 com todos os planos ($\approx R^2$) tangentes a seus pontos; ou a mesma esfera com todas as retas ($\approx R_+$) normais a ela. Um exemplo físico comum é o espaço de fase total de uma partícula: a cada ponto de seu espaço de configuração se "cola" o espaço dos momentos,ou vice-versa. Este exemplo é altamente trivial por se tratar de um simples produto cartesiano dos dois espaços. Um feixe fibrado é exatamente a generalização do produto cartesiano, do qual apenas localmente preserva as propriedades.

Vamos aqui, apenas discorrer qualitativamente, sobre eles, enfatizando os casos dos dois protótipos de fibrados: o fibrado tangente e o das bases vetoriais, que existem em qualquer variedade.

1. *Noções Gerais*

Já nos referimos, no § III.2, ao fibrado tangente: é a união dos espaços tangentes. O ponto fundamental é que essa reunião é ela mesma uma variedade(1). O fibrado, seria <u>trivial</u> se fosse globalmente um produto direto da <u>base</u> (por exemplo: S^2) pela <u>fibra</u> (o plano R^2). O fibrado tangente de S^2 não pode ser reduzido a tal simplicidade(1). No entanto, todo fibrado é <u>localmente trivial</u>: em algum entorno de cada ponto da base, ele é um produto direto do entorno pela fibra.

Um ponto do fibrado tangente (isto é, um campo) será completamente especificado, em um SLC da variedade-base E, por um 2n-upla: se $p \in E$ tiver coordenadas (x^i) e o campo X tiver componentes (X^i) na base natural, $X = (x^1, x^2, \ldots, x^n; X^1, X^2, \ldots, X^n)$. No caso do fibrado normal de S^2 a que nos referimos acima, cada ponto pode ser especificado pelas duas coordenadas do ponto de intersecção da reta com S^2, mais uma coordenada sobre R_+. O espaço união é feixe fibrado, também frequentemente chamado <u>espaço completo</u>. Ele é sempre definido de modo a ser uma variedade diferenciável. Isso implica em exigir muita coisa, mas nós aqui não entraremos nesses detalhes[2,3] (que são essenciais).

Temos assim, uma variedade-base, uma fibra, e uma ligação entre as duas. No caso do fibrado tangente do § III.2, essa ligação está na condição $X(p) = X_p \in T_p(E)$. A cada ponto p, "cola-se" o respectivo espaço tangente. Isso se caracteriza por uma aplicação

$$\pi : T(E) \to E \quad ,$$

tal que,

$$\pi(X \in T_p(E)) = p \quad . \tag{1}$$

π é a <u>projeção</u> do feixe fibrado. Como foi dito, cada elemento X do fibrado é uma <u>secção</u>, ou seja, uma aplicação

$$X : E \to T(E) \tag{2}$$

De modo geral, define-se uma secção como qualquer aplicação da variedade no espaço completa, tal que a projeção a leve de volta ao ponto inicial: de (1) e (2), a composição $\pi o X$ é a identidade em E.

Em mecânica ondulatória, um estado físico é representado por uma função de onda $\Psi(x)$, ou por qualquer produto desta por uma fase: a cada ponto x, "cola-se" um espaço funcional unidimensional, um raio. Obtém-se, porém, um fibrado trivial, já que se pode escolher a mesma fase em todos os pontos. No caso de um potencial central, em que houver degenerescência, a cada ponto $\underline{x}$ se cola um espaço (de dimensão $\ell(\ell+1)$, por exemplo),mas novamente se tem um fibrado trivial e a linguagem geométrica é desnecessária. Em geral, a não trivialidade aparece quando a fibra pode se alterar de um ponto para o outro.

Consideremos ainda uma vez, o fibrado tangente e uma particular fibra $T_p(E)$. Como $T_p(E)$ é isomorfo a R^n, um elemento seu pode ser tomado como um vetor coluna. Dois de seus vetores estarão sempre relacionados por uma transformação dada por uma matriz nXn. O conjunto dessas transformações na fibra (ou dessas matrizes) forma o grupo linear GL (n,R). Um grupo de Lie agindo sobre a fibra de modo a ligar dois quaisquer de seus elementos (ou seja, agindo de modo "transitivo"), é chamado de <u>grupo de estrutura</u> do fibrado.

Um importante teorema de existência[2] diz que: dados uma variedade E e um grupo G atuando em um espaço F, existe um único fibrado de base E, fibra F e grupo de estrutura G. Em geral, o fibrado é designado pela terna:

$$P = (E,F,G)$$

Assim,

$$T(E) = \left\{E,R^n,GL(n,R)\right\} . \tag{3}$$

Voltemos à fibra $T_p(E)$, e seja $B_p(E)$ o conjunto de to das as bases vetoriais. Como dissemos abaixo da eq. (III.2.13), uma base $\{X_i\}$ corresponde à uma matriz nXn (X_i^j), constituída pelas componentes de seus membros em alguma outra base escolhida como fundamental. Ademais, passa-se de uma dessas bases à outra pela ação dos grupos das mesmas matrizes (eq. (III.2.14)). Esse grupo, o mesmo GL (n,R) que encontramos no fibrado tangente, é um grupo de Lie e é isomorfo a $B_p(E)$. Este último é então, uma variedade, e podemos formar o <u>feixe fibrado das bases</u> lineares sobre a variedade E:

$$B(E) = \left[E,\ B_p(E),\ GL(n,R)\right] \quad ,$$

ou, pelo isomorfismo,

$$B(E) = \left[E,\ GL(n,R),\ GL(n,R)\right] \quad . \tag{4}$$

Seu espaço completo é a união

$$B(E) = \bigcup_{p\in E} B_p(E) \quad ,$$

e a definição deve ser assortida de uma projeção

$$\pi:\ B(E) \to E$$

tal que,

$$\pi\left[\{X_i\} \in B_p(E)\right] = 1 \ .$$

Um fibrado como este, em que a fibra típica é isomorfa ao grupo de estrutura, é um <u>fibrado principal</u>.

2. *Fibrados Principais*

Como um grupo de Lie pode agir sobre si mesmo, a todo fibrado (E, F, G) se pode fazer corresponder um principal (E, G, G), obtido pela substituição da fibra pelo próprio grupo de estrutura. Diz-se, nesse caso, que (E, F, G) é associado a (E, G, G). As equações (3) e (4) mostram que o fibrado tangente é associado ao das bases.

Dado um principal (E, G, G), pode-se obter muitos que lhe são associados, tomando como fibras espaços em que G tenha uma representação fiel (isto é, espaços cujo grupo total de transformações tenha um sub-grupo isomorfo a G).

As teorias de Gauge são realizadas sobre fibrados principais e/ou seus associados. A teoria de Yang-Mills (§II.3) tem por base o espaço de Minkowski, por grupo de estrutura o SU(2) e por fibra o espaço de spin isotópico. Este último será sempre um espaço em que SU(2) possa ser representado: uma representação de dimensão 2 como a apresentada para os nucleons, uma de dimensão 3 que seria necessária para o pion, etc. A fibra desempenha assim o papel do espaço interno.

Tomemos um ponto p do fibrado principal P=(E, G, G), e um entorno U de sua projeção $m = \pi(p) \in E$. Localmente, P será o produto direto U x G. Enquanto π é uma projeção global de P sobre E, apenas localmente haverá uma projeção análoga sobre o grupo: esta dependerá do entorno, e será indicada por $F_U:\pi^{-1}(U) \to G$. Pode-se juntar π e F_U em uma aplicação

$$f_U:\pi^{-1}(U) \to U \times G \quad ,$$

$$f_U(p) = \left(\pi(p), F_U(p)\right) \quad . \tag{5}$$

Na definição rigorosa de espaço fibrado principal, que omitimos, impõe-se condições suficientemente restritivas para que f_U seja um difeomorfismo (isomorfismo diferenciável); ele é chamado uma <u>trivialização</u>. Ele permite obter coordenadas para p, dadas as de $m = (x^i)$ e de $F_U(p) = g^1,\dots,g^d)$:

$$P = \left[m, g = F_U(p)\right] = (x^1,\dots,x^n; g^1,\dots,g^d) \quad . \tag{6}$$

O ponto p é também o valor de uma secção local S_U^g

$$p = S_U^g(m) \quad . \tag{7}$$

O nome "secção" vem do fato de, a g fixado, S_U^g ter por valores de P um conjunto de pontos isomorfos a $U \subset E$. Esse conjunto é uma subvariedade de P. Essas secções são por vezes chamadas "secções triviais".

O que acabamos de dizer vale em uma carta (U,x) da variedade-base E. Antes de examinar o que acontece quando de uma transformação de SLC, notemos o ponto seguinte: pode-se chegar ao ponto P também por um processo em dois passos:

1) usa-se a secção S_U^e, obtendo $p' = S_U^e(m) = (m,e)$; e = identidade em G;

2) como o grupo age sobre a fibra, aplica-se o elemento $g = F_U(p)$ a p': escreveremos $p = p'(m,e)\, g = (m,g)$; pode-se então escrever

$$S_U^g = S_U^e\, g = S_U^e\, F_U(p) \quad . \tag{8}$$

Em outra carta, (V,y),

$$p = S_V^g(m) = \left[S_V^e\, F_V(p)\right](m) \quad .$$

Comparando,

$$S_V^e = S_U^e \, F_U(p) \, F_V^{-1}(p) \equiv S_U^e \, g_{UV}(m) \quad . \tag{9}$$

A aplicação $g_{UV}(m)$ assim definida é a <u>função de transição</u> e descreve o efeito sobre a fibra de uma mudança de SLC. A equação (9) mostra como se transforma uma secção por uma tal mudança ; $g_{UV}(m)$ é um elemento do grupo; se a fibra for um espaço vetorial $g_{UV}(m)$ será representado por uma matriz e teremos

$$s'_i = S_j \, g_{ji}(x) \quad , \tag{10}$$

expressão do mesmo tipo de (II.46), que dá a mudança de um campo por uma transformação de Gauge.

Note-se que a transformação leva um elemento do grupo (da fibra) em outro; é dada por um membro do próprio grupo, que contém assim os efeitos de mudanças de SLC sobre a fibra.

3. *Espaço Tangente a um Fibrado Principal*

O fibrado P, sendo ele mesmo uma variedade, podemos analisar seus espaços tangentes. Devido à trivialização local , os campos sobre P têm componentes localmente separados segundo os espaços tangentes à base (componentes horizontais) e segundo os espaços tangentes à fibra (componentes verticais).

Dado um ponto $p \in P$, o <u>espaço vertical</u> sobre P é definido como

$$V_p = \{X \in T_p(P) \text{ tais que } \pi(X) = 0\} \quad .$$

Quer dizer: é o espaço dos vetores que não têm componentes segundo a base.

Uma <u>conexão</u> H sobre um principal P é uma atribuição, para cada ponto p (feita de modo contínuo e diferenciável quando p varia), de um <u>espaço horizontal</u> H_p sobre este p; este é tal que:

$$H_p + V_p = T_p(P) \quad ;$$

ademais, impõe-se que um campo horizontal permaneça horizontal pela ação do grupo: $g(H_p) = H_{pg}$. Qualquer campo $X \in T_p(P)$ se escreverá então

$$X_p = V_p X + H_p X \quad .$$

Estamos aqui cometendo vários abusos de linguagem : quando dizemos "tangente à base", deveríamos dizer espaço "isomorfo ao tangente à base". Não se trata de nuance secundária porque os isomorfismos não são únicos. Por exemplo, eles podem depender da base vetorial (não são "naturais"). Levar essas minúcias em conta tomaria muito tempo, mas dois pontos requerem esclarecimento: 1) o que significa "tangente ao grupo"; 2) como se procede à separação horizontal-vertical. Este último caso será o tema do próximo §.

Lembremos em primeiro lugar o que seja a "<u>álgebra de Lie de um grupo de Lie</u>". Este sendo uma variedade, seus campos formam uma álgebra de Lie (§III.2). Mas o que se chama álgebra de Lie L(G) de um tal grupo G é uma sub-álgebra daquela, varrida pelos geradores. Estes satisfazem (compare com III.2)

$$\left[J_a , J_b\right] = C^d_{ab}\, J_d \quad . \tag{11}$$

Ao contrário do que ocorre no caso geral, estes C^d_{ab} são constan tes ("de estrutura"), independem do ponto sobre a variedade-grupo.

A correção que devemos fazer é a seguinte: o espaço vertical é na verdade isomorfo à álgebra de Lie do grupo G e não a seu espaço tangente. Para esse espaço, podemos usar uma base $\{J_a^*\}$, onde o asterisco lembra o isomorfismo. Na prática, escolhe-se sempre um homomorfismo (que preserva operações), de modo que os J_a^* também satisfaçam à eq. (11).

4. *Forma Conexão*[4]

Se escolhermos uma base $\{X_i\}$ para P, podemos calcular as componentes de uma métrica sobre P (eq. (III.18)). Se impuzermos que a métrica γ_{ij} torne ortogonais entre si os espaços verticais e horizontais, e que em cada setor ela se reduza às métricas $g_{\mu\nu}$ (sobre base) e g_{ab} (Killing-Cartan sobre o grupo, eq. (II.55)) ela será única, e fixada por

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ij}\, X^i_\mu\, X^j_\nu &= g_{\mu\nu} \\ \gamma_{ij}\, X^i_\mu\, X^j_a &= 0 \\ \gamma_{ij}\, X^i_a\, X^j_b &= g_{ab} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Aqui, $i,\ j = 1,2,\ldots,n+d$; $\mu,\nu = 1,\ldots,n$; $a,\ b=1,\ldots,d$; X^j_i é a componente de X_i em uma base qualquer.

Existe, por exemplo, uma base sobre P na qual

$$(\gamma_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & g_{ab} \end{array}\right) \qquad (13)$$

Nessa base, o setor vertical é gerado pelos J_a^* e o vertical, por campos $\{\partial_\mu^*\}$, tais que $\pi(\partial_\mu^*) = \partial_\mu$, estes gerando a base natural em E. Nesta base (chamada "base de levantamento"), se calcularmos os comutadores, chegaremos ao resultado seguinte:

$$\left.\begin{aligned} \left[J_a^*, J_b^*\right] &= C_{ab}^d \; J_d^* \\ \left[J_a^*, \partial_\mu^*\right] &= 0 \\ \left[\partial_\mu^*, \partial_\mu^*\right] &= -F_{\mu\nu}^a \; J_a^* \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Nesta última, os coeficientes de estrutura $-F_{\mu\nu}^a$ são surpreendentemente diferentes de zero; o comutador de dois campos horizontais não é horizontal ! É claro que a notação não foi escolhida arbitrariamente, mas isso nós veremos mais adiante.

Nessa base, os cálculos são especialmente simples. Podemos escolher uma outra, por exemplo, tal que a última expressão em (14) se anule. Esta seria a base natural no setor horizontal e, lembrando a eq. (6), teríamos $X_\mu = \partial_\mu$. A ela se chega aplicando a secção trivial S_U^e à base natural em U. Ela é chamada "base do produto direto".

A conexão é inteiramente caracterizada por uma forma sobre P, com valores na álgebra L(G). Esse tipo de forma a valores vetoriais (lembre-se que a álgebra é um espaço vetorial) é especificada do seguinte modo: dada uma base $\{J_a\}$ do espaço vetorial, ela se escreve

$$\gamma = J_a \; \gamma^a \quad , \qquad (15)$$

onde γ^a é uma 1-forma usual sobre P; cada γ^a leva um campo de P em uma função e assim γ o leva em um elemento do espaço vetorial L(G). A tarefa da <u>forma conexão</u> γ é projetar $T_p(P)$ sobre a álgebra, que é (vale repetir) isomorfa ao espaço vertical. Assim,

$$\gamma(J_a^*) = J_a \text{ , ou } \gamma^a(J_d^*) = \delta_d^a \tag{16}$$

$$\gamma^a(\partial_\mu^*) = 0 \tag{17}$$

Quando definimos conexão, impuzemos também que a ação do grupo preserve a horizontalidade. Isso exige de γ um comportamento especial sob transformações. Daremos aqui apenas o resultado, que não é trivial:

$$\gamma' = Ad\ g^{-1}(\gamma) \tag{18}$$

A representação adjunta é uma representação do grupo sobre a sua álgebra de Lie. Ad_h é o representante de $h \in G$ nessa representação. Assim, a forma conexão, pela ação de um $g \in G$, se transforma segundo a representação adjunta de g^{-1}. Quando se toma para a álgebra um espaço matricial, γ e g serão matrizes e

$$\gamma' = g^{-1}\ \gamma\ g \quad . \tag{19}$$

O isomorfismo entre T(E) e espaço horizontal pode ser dado de muitas maneiras: cada secção $S:E \to P$ define uma delas. Por exemplo, uma secção leva a base natural $\{\partial_\mu\}$ de T(E) em uma coleção de campos $S(\partial_\mu)$ sobre P; vimos acima um exemplo: a secção trivial S_U^e leva $\{\partial_\mu\}$ na base natural para o espaço horizontal, que também denotamos por $\{\partial_\mu\}$ por não existir praticamente nenhuma diferença entre as duas. Existirá uma especial secção S^* que leva $\{\partial_\mu\}$ na $\{\partial_\mu^*\}$ das equações (14). Dados os elementos $S(\partial_\mu)$, a ação de γ sobre eles levará à álgebra:

$$\gamma\,[s(\partial_\mu)] = J_a \gamma^a\,[s(\partial_\mu)]\ . \tag{20}$$

Define-se, para cada secção, uma 1-forma sobre U, a valores na álgebra, por

$$A^{(s)}(\partial_\mu) \equiv J_a\, A_\mu^{(s)a} \equiv \gamma\,[\underline{s}(\partial_\mu)] \tag{21}$$

Cada $A_\mu^{(s)a}$ será a componente de uma 1-forma usual sobre U e, portanto,

$$A^{(s)} = J_a\, A_\mu^{(s)a}\, dx^\mu \equiv A_\mu^{(s)}\, dx^\mu\ . \tag{22}$$

Assim, cada secção permite obter uma dessas projeções da forma conexão sobre a variedade base. Uma transformação g do grupo fará passar uma secção s a uma s', segundo a eq. (10). Como $A^{(s)}$ mudará ? Sua alteração dependerá simultaneamente das de s e de γ (eq. (19)). O cálculo é um tanto longo[4], e só daremos o resultado: com $A' = A^{(s')}$, $A = A^{(s)}$,

$$A' = g^{-1} A\, g + g^{-1}\, dg\ . \tag{23}$$

Para as componentes definidas em (22),

$$A'_\mu = g^{-1} A_\mu\, g + g^{-1}\, \partial_\mu\, g\ . \tag{24}$$

Compare-se com a transformação (II.51) de um potencial de gauge. É tentador interpretar os potenciais de gauge como essas conexões projetadas sobre a variedade-base.

Recordemos a secção trivial S_U^e, que leva à base natural $\{\partial_\mu\}$ em P. Definamos

$$B_\mu^a \equiv A_\mu^{(S_U^e)a} = \gamma^a\,[\partial_\mu]\ .$$

De (16), $\gamma^{b}(J_a^* B_\mu^a) = \gamma(\partial_\mu) = B_\mu^b$. Comparando com (17) e definindo

$$B_\mu = J_a^* \; B_\mu^a \quad , \tag{25}$$

chega-se a

$$\partial_\mu^* = \partial_\mu - B_\mu \equiv D_\mu \quad , \tag{26}$$

a eq. (II.50) definindo a derivação covariante. Compreende-se então a última equação (14). Usando as (14) e (23), tira-se

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \; B_\nu^a - \partial_\mu \; B_\mu^a + C_{bd}^a \; B_\mu^b \; B_\nu^d \quad , \tag{27}$$

que é a eq. (II.52). Da identidade de Jacobi, $\left[\partial_\mu^*, [\partial_\nu^*, \partial_\lambda^*]\right]$ + permutações cíclicas = 0, sai a identidade de Bianchi:

$$D_\mu F_{\nu\lambda}^a + \text{permutações cíclicas} = 0 \quad . \tag{28}$$

Há algumas diferenças de sinal com as fórmulas do capítulo II. Deve-se à utilização de geradores hermitianos (iJ_a), que lá foi feita. As demais diferenças ($g \longleftrightarrow U^{-1}$, a transporta em (10)) podem ser eliminadas redefinindo algumas coisas.

Assim, a interpretação geométrica do que é feito nas teorias de gauge é clara: os potenciais de gauge são as conexões projetadas segundo a secção trivial; as transformações de gauge são mudanças de secções[5] (o que inclui mudanças de base e de SLC). As intensidades de campo de gauge aparecem como objetos de não holonomia no fibrado. E de todas as equações da teoria, somente duas das de Maxwell (II.56) não são puramente geométricas.

A existência de uma base natural sobre o espaço horizontal, em que $F^a_{\mu\nu}$ se anula, tem um aspecto de princípio de equivalência para as teorias de gauge.

Um comentário: em toda a discussão acima, utilizamos bases e SLC determinados. A teoria geral dos fibrados pode porém, ser toda construída sem referência desse tipo, de forma totalmente invariante(3).

Dada a métrica (13), podemos calcular os Christoffels, o tensor de curvatura e a curvatura escalar. A expressão desta última, independe da base usada e é

$$R_P = R_E + R_G - \frac{1}{4} F^2 \quad . \tag{29}$$

O último termo é (II.54). É-se tentado a utilizar esse escalar da maneira usual como uma densidade Lagrangeana de Hilbert-Einstein. Obtém-se assim uma compatibilização(6) das teorias de gauge com a gravitação Einsteiniana. A curvatura R_G do grupo aparece como uma "constante cosmológica". Talvez sua presença tenha um significado profundo, ainda não explorado.

Tudo isso nada tem a ver com uma teoria de gauge para a gravitação. Mostra apenas que se pode fazer uma teoria de gauge qualquer,compatível com a gravitação.

Naturalmente, essa linguagem é apenas uma ferramenta com a qual se pode fazer geometria de uma maneira geral e correta. A parcela de teoria da gravitação que é mera geometria (a quase totalidade das equações, salvo as equações de Einstein) , pode ser proveitosamente reescrita assim. Apenas para esclarecer algumas das equações dadas acima, vamos discutir brevemente o fibrado das bases de uma variedade semi-Riemanniana a 4 dimensões.

Esse fibrado existe sempre, ao lado do fibrado tangente, seu associado.

Sejam J_a os geradores de seu grupo de estrutura, $GL(4,R)$, representáveis por matrizes 4x4.

Na linguagem usual, introduz-se a diferenciação covariante (por exemplo) como

$$Da^{\mu} = da^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu}\, a^{\nu} \quad ,$$

onde a conexão $\omega_{\nu}{}^{\mu}$ é dada em função dos Christoffels:

$$\omega_{\nu}{}^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\, dx^{\lambda} \; .$$

Alega-se que da^{μ} não é, por si só, "um vetor". Na linguagem dos fibrados (veja eq. (26)) isso se diz: da^{μ} tem componentes verticais, a serem compensadas pelo potencial de gauge B_{μ}. Diz-se, também, que o último termo na equação de transformação dos Christoffels,

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\sigma'}_{\rho'\eta'}\, \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\, \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{g}}\, \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\eta}}\, \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}} \; ,$$

"quebra a tensorialidade". Ele corresponde ao termo vertical $g^{-1}dg$ da equação (23).

A equação (25) dá a conexão como uma matriz. Reescrevâmo-la:

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma^{a}_{\mu}\, J^{*}_{a}$$

Seus elementos de matriz serão

$$\Gamma^{i}_{\mu j} = \Gamma^{a}_{\mu}\, (J^{*}_{a})^{i}_{j} \quad . \tag{30}$$

Essa equação permite realçar o significado dos índi -

ces, em geral obscurecido no caso de GL(4,R) pelo fato de também os índices de linha e coluna correrem de 1 a 4. O mesmo acontece com as componentes do tensor de curvatura. A matriz

$$F_{\mu\nu} = J_a^* \, F_{\mu\nu}^a$$

terá elementos

$$R^i{}_{j\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \, (J_a^*)_j^i \quad . \tag{31}$$

O fato de as equações de caráter geométrico da teoria da gravitação poderem ser obtidas como as do fibrado das bases de uma variedade pseudo-Riemanniana sugeriu a Yang[7] que a gravitação fosse uma teoria de gauge para o GL(4,R). Ele não obteve, porém, as equações de Einstein. Uma teoria de gauge para a gravitação deveria obtê-las como as equações de Maxwell-Yang-Mills, a partir de uma lagrangeana quadrática na curvatura, como (II.54).

Referências

1. V.I. Arnold, "Ordinary Differential Equations", MIT Press, 1973; capítulo 5.

2. N. Steenrod, "The Topology of Fibre Bundles", Princeton Un. Press, 1951, §3.2.

3. Textos gerais sobre fibrados: existem muitos, raramente claros. Citaremos:
A. Lichnerowicz, "Theorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie, Ed. Cremonese, Roma 1962; S. Kobayashi, K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry", Interscience, 1963; vol. I; M. Spivak, "Differential Geometry", Pu

blish or Perish, Berkeley, 1970.
Todos os livros modernos de geometria diferencial estão vazados nessa linguagem.

4. Aqui vamos utilizar sobretudo o belo artigo de Y.M. Cho, J. Math. Phys. 16, 2029 (1975) (com referências).

5. A. Trautman, Rep. Math. Phys. 1, 29 (1970).

6. Y.M. Cho, P.S. Jang, Phys. Rev. D12, 3789 (1975); R. Tabensky, J. Math. Physics 17, 1 (1976).

7. C.N. Yang, Phys. Rev. Letters 33, 445 (1974).

V. *GRAVITAÇÃO COMO INTERAÇÃO "DE GAUGE"*

Desde o trabalho de Utiyama[1] sobre a teoria geral dos campos de Gauge, vem-se tentando enquadrar a gravitação nesse esquema. Essas tentativas possuem cada uma algum pecado grave: ou o potencial de Gauge não aparece como um campo compensador[1,2] (conexão), ou se viola o princípio de equivalência[3] por resultarem espaços não Riemannianos, ou as equações obtidas não são as de Einstein[4], ou ainda, porque a lagrangeana não é tipicamente a das teorias de Gauge (II.54). Ora, por tudo o que vimos acima, a parte mais física dessa teoria está na lagrangeana, ou melhor, nas equações de Maxwell- Yang -Mills (MYM). O resto é praticamente geometria pura. Vamos apresentar aqui apenas um caso em que as equações de Einstein são as equações de MYM.

Antes porém, citemos alguns casos de toerias heterodoxas, diferentes de Einsteiniana. Lembremos que esta última só está experimentalmente comprovada com erros da ordem de 1%. Não se pode, em princípio, descartar a possibilidade de se a ver algum dia suplantada por alguma outra, sobretudo a pequenas distâncias. Isto,apesar de sua simplicidade e beleza, de seus sucessos de previsão e do repetido fracasso de sucessivas rivais e variantes.

O ponto fundamental a destacar é que, enquanto as teorias de Gauge tratam de transformações em espaços internos, a gravitação parece estar exclusivamente voltada para o espaço--tempo. Isso pode significar que ela seja um caso à parte.Transformações no espaço-tempo formam o grupo de Poincaré (§II.1). A teoria de Gauge para este grupo é a teoria de Einstein-Car tan[5,6], que parece ter vantagens quando há fontes spinoriais, mas leva a espaços não Riemannianos, além de usar uma lagrangeana não "de Gauge".

• Foram tembém propostos modelos relacionados ao grupo de Lorentz[4], que pecam por levarem às equações de Yang

$$R_{\mu\nu;\lambda} - R_{\mu\lambda;\nu} = 0 \tag{1}$$

ao invés das de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

para o caso livre.

Suponhamos que a natureza não cometa pecados desse tipo, e restringir-nos ao caso Riemanniano e Einsteiniano.

1. *Métrica Riemanniana*

Comecemos por mais um pouco de geometria. Dado um fibrado (E,G,G), suponhamos que exista um subgrupo G' de G, e que exista um outro fibrado principal (E,G',G'). Este será chamado o <u>reduzido</u> do outro.

Dado o fibrado B(E), pode-se fazer a redução de seu grupo GL(n,R) ao subgrupo das transformações ortogonais O(n) . Essa redução se pode fazer de muitas maneiras. Um resultado extremamente interessante é o seguinte[7]:

Cada redução determina sobre E uma métrica Riemanniana (!).

Dado B = (E,Bp(E), GL(n,R)), seja uma redução sua, (E,Op(E),O(n)) onde Op(n) é o conjunto das bases ortonormais no ponto $p \in E$. O espaço $Tp(E)$ sendo isomorfo a R^n, existe nele um produto interno invariante por $O(n)$. Cada elemento $b \in B$ é uma base, representável por uma matriz nxn. Dado um ponto $r \in R^n$ (um vetor coluna), essa matriz fornece um outro vetor $X = br$; dados dois pontos de R^n, seu produto interno será (se $Y = bs$)

$$(r,s) = (h^{-1}X,\ h^{-1}Y) \ . \tag{3}$$

Então, dados $X,Y \in Tp(E)$, define-se a métrica (que se verifica ser Riemanniana)

$$g(X,Y) = (h^{-1}X,\ h^{-1}Y) \quad , \tag{4}$$

onde (,) é o produto interno de R^n. Como este é invariante por $O(n)$, a métrica independe da escolha de b.

O processo pode ser invertido: dada uma métrica Riemanniana g sobre E, considera-se o subconjunto de $B(E)$ constituído pelos $b = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que sejam ortogonais por g. Então, b pertencerá ao fibrado das bases ortonormais sobre E se, e somente se,

$$(r,s) = g(br,bs) \tag{5}$$

para todos os $r,s \in R^n$.

Dada uma variedade tetradimensional E dotada de uma métrica (semi-) Riemanniana g e um SLC induzindo uma base natural $\{\partial_\mu\}$

$$g(X,Y) = g(\partial_\mu,\partial_\nu)X^\mu X^\nu = g_{\mu\nu}\ X^\mu X^\nu \ , \tag{6}$$

para dois campos quaisquer sobre E. Uma outra base $\{h_\alpha\}$ e sua dual $\{\theta^\alpha\}$ serão dadas por

$$h_\alpha = h^\mu_\alpha \, \partial_\mu \qquad ; \qquad \theta^\alpha = \theta^\alpha_\mu \, dx^\mu \tag{7}$$

a partir das naturais. O fato de serem duais, $\theta^\alpha(h_\beta) = \delta^\alpha_\beta$, implica em:

$$\theta^\alpha_\mu = (h^{-1})^\alpha_\mu .. \tag{8}$$

A base $\{h_\alpha\}$ é definida pela matriz (h^μ_α), e pertence a B(E). Passaremos ao reduzido com O(n), impondo a ortogonalidade por g:

$$g(h_\alpha, h_\beta) = g_{\mu\nu} h^\mu_\alpha h^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad , \tag{9}$$

onde a métrica de Minkowski $\eta : \eta_{00} = -\eta_{ii} = 1$ aparece como um delta de Kronecker pseudo-euclideano. Invertendo a segunda equação (7), calculamos

$$g(X,Y) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu (X,Y) = g_{\mu\nu} dx^\mu(X) dx^\nu(Y) =$$

$$= g_{\mu\nu} h^\mu_\alpha \theta^\alpha(X) h^\nu_\beta \theta^\beta(Y) = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha(X) \theta^\beta(Y) = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha_\mu X^\mu \theta^\beta_\nu X^\nu \ .$$

Por outro lado, isto é a equação (4), já que o último termo é $(h^{-1}X, h^{-1}Y)$ no espaço de Minkowski. Por outro lado, convencionando $h^\alpha_\mu \equiv \theta^\alpha_\mu$, isto e (6) dão

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \, h^\alpha_\mu \, h^\beta_\nu \ . \tag{10}$$

Nesta e na equação (9), reconhecem-se as tetradas h^μ_α.

2. *Diferencial Exterior Sobre um Fibrado*[8]

Relembremos as equações (IV.25) e (IV.27): tratam de formas sobre um entorno U na variedade-base E, que provêm da pro jeção de equações sobre o fibrado. Como a diferença entre J_a e J_a^* não é importante, vamos esquecê-la. A eq. (IV.25) define uma 1-forma sobre U a valores em L(G):

$$B \equiv B_\mu dx^\mu = J_a B^a_\mu dx^\mu \ . \qquad (11)$$

(IV.27) dá uma 2-forma sobre U a valores em L(G):

$$F \equiv F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = J_a F^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \ . \qquad (12)$$

Tendo em mente que B e F são matrizes de formas, a identidade de Bianchi (II.24) ou (IV.28) pode ser posta na forma compacta

$$dF + [B,F] = 0 \qquad (13)$$

O espaço completo P sendo uma variedade, sobre ele estará definida uma diferenciação exterior (§ III.5). A exemplo do que foi feito para obter a eq. (IV.26), que corresponde a uma projeção de derivação sobre U, definamos uma operação de projeção H, que projeta sobre U uma operação sobre P. Pode-se definir assim uma diferencial exterior horizontal

$$D \equiv Hd \qquad (14)$$

Esse H é uma representação taquigráfica de uma série de operações, que generalizam o "aplainamento horizontal" levando a (IV.26). Um belo resultado é a relação entre a forma curvatura e a conexão que se acha:

$$F = DB \qquad (15)$$

Acha-se ademais que,

$$DF = dF + [B,F] \ , \qquad (16)$$

então, (13) diz que

$$DF = 0 \quad . \tag{17}$$

Isso generaliza as equações de Maxwell (III.44)

$$dF = 0 \quad .$$

Esta última é exatamente (17) no caso de um grupo unidimensional como SU(1).

A pergunta que logo vem à mente é: como se generalizam as demais equações de Maxwell (III.45) ? Estas,

$$\delta F = 0$$

são as realmente dinâmicas. O operador codiferencial δ requer uma métrica para se definir (§ III.5). Podemos tomar sobre P uma métrica como (IV.13), cuja parte horizontal seja a métrica em U. Analogamente a (14), definimos

$$\Delta = H\delta \tag{18}$$

sobre U (nada a ver com laplaciano !). Isso feito, encontra-se outro belo resultado: as equações de MYM (II.56),

$$D^{\mu}F_{\mu\nu} = 0 \tag{19}$$

são exatamente

$$\Delta F = 0 \tag{20}$$

Como dantes, estas generalizam (III.45). Sua versão algo mais detalhada é

$$*d*F + *[B,*F] = 0 \quad , \tag{21}$$

com $*$ operador de Hodge na métrica sobre U.

3. *A Gravitação Segundo Popov-Daikhin*[9]

Se escrevermos a lagrangeana (II.54) em componentes detalhadas,

$$L = -\frac{1}{4}\, g_{ab} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F^{a}_{\mu\nu} F^{b}_{\alpha\beta} \;, \tag{22}$$

onde g_{ab} é a métrica de Cartan sobre o grupo. Como equações de Euler-Lagrange, obtêm-se

$$g_{db} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} F^{b}_{\alpha\beta;\alpha} - g_{ab} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} C^{a}_{df} B^{f}_{\nu} F^{b}_{\alpha\beta} = 0 \tag{23}$$

Isso deveria ser o mesmo que (20) ou (21). Esta última, em componentes, é

$$\Delta F = J_a (g^{\nu\lambda} F^{a}_{\nu\mu;\lambda} - C^{a}_{bd} g^{\nu\lambda} B^{b}_{\lambda} F^{d}_{\nu\mu}) dx^{\mu} \quad , \tag{24}$$

que leva a

$$g^{\mu\lambda} F^{a}_{\lambda\mu;\lambda} - C^{a}_{bd} g^{\nu\lambda} B^{b}_{\lambda} F^{d}_{\lambda\mu} = 0 \quad . \tag{25}$$

Esta equação é a mesma que (23), quando a métrica g_{ab} é a de Cartan. Note-se,porém, que ela independe da métrica sobre o grupo; qualquer métrica sobre o grupo (e sempre existe alguma) dá a mesma equação (25), inclusive quando a forma de Cartan não é uma métrica, mas degenera. Este é o caso quando dos grupos não semi-simples, como o de Poincaré. As eqs. (25) são portanto as equações dinâmicas de MYM (20) para grupos quaisquer.

A tentativa de Yang[4] se baseia no fibrado das bases, com GL(4,R) como grupo de estrutura. Nesse caso, definindo

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = F^{a}_{\lambda\nu} (J^{a})^{\lambda}_{\mu} \quad , \tag{26}$$

e tomando uma base

$$(J_a)^{\lambda}_{\mu} \equiv (J^k_m)^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\lambda}_m \delta^k_{\mu} \quad ,$$

a eq. (24) dá

$$\Delta F = J^{\nu}_{\rho} g^{\lambda\rho} \left[R_{\mu\nu;\lambda} - R_{\mu\lambda;\nu} \right] dx^{\mu} \quad , \tag{27}$$

que leva à equação (1). Pode-se reduzir (§ 1) GL(4,R) a seu subgrupo SO(3,1) (ou seja, ao grupo de Lorentz). No caso, os $J^{\nu\rho}$ se reduzem aos $\mu^{\nu\rho}$ das equações (II.6,7). A equação (27) permanece; a teoria de Gauge para o grupo de Lorentz leva às equações de Yang.

Um grupo de Poincaré é o afim do de Lorentz; acrescenta-lhe as translações como um produto semi-direto (equações II. 5, 6, 7). Dado o GL(4,R), existe o seu afim Af(r,R). Com esse grupo se pode formar o fibrado das bases afins $\bar{B}$. Deste, o fibrado das bases é uma redução. Outra redução levaria a um fibrado sobre o grupo das translações (II.5).

Enquanto espaço vetorial, a álgebra de Lie de Af(4,R) é a soma direta de GL(4,R) e um espaço R^4 do tipo Minkowski. As formas a valores nessa álgebra se separam em duas partes, cada uma com componentes em um dos espaços-fatores. Por exemplo, a curvatura $\bar{F}$ sobre o fibrado afim $\bar{B}$ será

$$\bar{F} = (F,f) \quad , \tag{28}$$

onde f é uma 2-forma a valores R^4. Tomemos neste último uma base natural $\{e_{\mu}\}$. Se refizermos as considerações acima, o resultado é notável: a expressão da equação (24) se torna

$$\Delta\bar{F} = (\Delta F,\rho) \tag{29}$$

onde ΔF é o mesmo de (24) e ρ é uma 1-forma

$$\rho = - e_{\alpha}\, g^{\alpha\lambda}\, R_{\lambda\mu}\, dx^{\mu} \tag{30}$$

A equação generalizada de MYM para o fibrado das bases afins,

$$\Delta\bar{F} = 0 \quad , \tag{31}$$

leva assim simultaneamente a (27) e às equações de Einstein (2) ! Note-se que (2) implica (1) como uma identidade trivial.

Novamente, pode-se reduzir Af(4,R) ao grupo de Poincaré, sem que os resultados acima se alterem. Ainda por analogia com as equações de Maxwell (agora (III.47)), Popov e Daikhin mostraram que, dado um tensor $T_{\mu\nu}$, sempre existe uma forma-corrente τ tal que as equações

$$\Delta\bar{F} = \tau \tag{32}$$

e

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{33}$$

sejam equivalentes. Isso é feito pelo mesmo raciocínio acima, usando porém

$$\rho = -e_{\alpha} g^{\alpha\lambda}\, (T_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\, T\, g_{\lambda\mu}) dx^{\mu} \tag{34}$$

A conclusão parece ser a seguinte: as equações de Einstein são as equações de Maxwell-Yang-Mills para o grupo das translações (II.5) no espaço-tempo. Isso pode parecer meio estranho e merece estudo mais aprofundado. Sobretudo se lembrarmos que o invariante de Casimir desse grupo é essencialmente ligado à massa (eq. (II.8)).

O mesmo resultado foi obtido por Cho(10), por caminho bem diverso. Ele segue a linha geral das teorias de Gauge na linguagem dos fibrados e escolhe uma Lagrangeana quadrática que, por uma curiosa conspiração, se mostra equivalente à de Hilbert-Einstein.

Referências

1. R. Utiyama, Phys. Rev., 101, 1597 (1956).
2. T.W. Kibble, J. Math. Phys. 2, 211 (1961).
3. Caso geral dos modelos que levam a espaços com torção, como os de Einstein-Cartan.
4. C.N. Yang, Phys. Rev. Letters 33, 445 (1974).
   M. Carmeli, Nuclear Physics B38, 621 (1972).
   M. Carmeli, Phys. Rev. D14, 2518 (1976) (e referências).
5. C.A.P. Galvão, Tese de Doutorado, CBPF, 1976.
6. Y.M. Cho, Phys. Rev. D14, 3335 (1976).
7. S. Kobayashi, K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry", Interscience, 1963; vol. I, 1963.
8. D.A. Popov, Theor. Math. Physics 24, 347 (1975) (ref.russa).
9. L.A. Popov, L.I. Daikhin, Doklady 20, 818 (1976).
10. Y.M. Cho, Phys. Rev. D14, 2521 (1976).