GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO

M.D. Maia

Universidade de Brasília
Departamento de Física

ÍNDICE

I - *SIMETRIAS EM VARIEDADES*

I.1 - *Introdução*

Estas notas sobre o problema de caracterização de simetria em física clássica são motivadas por um interesse renovado neste problema fundamental da física teórica.

Se é verdade que os problemas mais atuais envolvendo simetrias surgem no contexto de mecânica quântica, elas implicam na existência de um certo grau de simetria no limiar clássico da teoria.

O exemplo mais marcante de uma teoria física moderna onde surgem dificuldades relacionadas com a caracterização de simetria é a teoria da relatividade. Esta teoria, por apresentar um alto grau de generalidade decorrente de sua formulação matemática, aparenta violar alguns aspectos físicos consagrados. Assim por exemplo algumas soluções das equações de Einstein podem ser incompatíveis com o princípio de causa e efeito tal como o mesmo é atualmente formulado. Do mesmo modo algumas soluções aparentemente não apresentam nenhuma estrutura de simetria.

Estas propriedades não devem necessariamente ser tomadas como falhas ou deficiências da teoria mencionada. Na realidade elas podem e geralmente são consideradas como fortes atributos. Isto se deve ao fato de esta teoria admitir como soluções particulares casos simétricos e causais conhecidos. Portanto, admitindo-se sempre uma mente aberta às indagações, as situações acausais e assimétricas podem ser consideradas como válidas em condições físicas diferentes daquelas às quais esta mos habituados, mas mesmo assim podendo existir na natureza. Assim sendo não haveria motivos para podar as potencialidades da teoria.

Naturalmente uma teoria física somente é uma teoria quando ela, ou pelo menos seus fundamentos puderem ser verificados experimentalmente. Ás vêzes torna-se necessário abandonar um resultado teórico apesar de sua estrutura lógica, em favor de uma realidade física mais evidente, pelo menos dentro das limitações que permitam realizar experiências físicas.

Como exemplo deste comportamento podemos mencionar a possibilidade da existência matemática de monopolos magnéticos os quais seriam evidenciados por uma alteração das equações de Maxwell, dando-lhes maior estética formal (o que é uma forma de simetria). Isto é, do mesmo modo como temos div $E = K\rho$, poderíamos ter também div $H = m\beta$. Entretanto como não se observa monopolos magnéticos adota-se a expressão div $H = 0$. (Trabalhos recentes parecem indicar que sob certas condições existe uma probabilidade não nula de se observar monopolos magnéticos.) Neste exemplo a estética formal cedeu lugar à evidência experimental. Caso as equações de Maxwell venham a ser alteradas futuramente, então a simetria destas equações deverão ser reexaminadas , produzindo possivelmente uma alteração nas teorias físicas que se fundamentam nestas equações e na sua simetria (teoria eletromagnética e relatividade especial. Este não seria o caso com a introdução de monopolos magnéticos.) Um outro exemplo, agora mais diretamente associado à questão de simetria é a possibilidade de existência matemática de potenciais avançados em eletrodinâmica os quais são relegados por contradizerem o princípio de causa e efeito. Caso estejamos preparados a abandonar este princípio poderemos considerar um esquema mais amplo e simetrias para as equações de Maxwell fundamentado no grupo conforme. Se tal simetria fosse considerada por Minkowski em lugar do grupo de Poincaré, possivelmente teríamos hoje uma teoria especial da relatividade bastante diferente da teoria atual, onde o espaço-tempo contaria com seis dimensões.

I.2 - *Simetrias*

O conceito de simetria é suficientemente amplo e intuitivo para que se possa tentar defini-lo. Nas manifestações artísticas a noção de simetria nos dá uma idéia de racionalização ou de compreensão geralmente em termos como ritimicidade e harmonia de formas. Em outras palavras, estes conceitos parecem indicar a existência de um esforço humano para a compreensão da arte. Entretanto parece-nos que a arte em si é fortemente subjetiva e como tal ela poderia prescindir de qualquer tentativa de descrição formal.

Em geometria a noção de simetria deixa de ser menos intuitiva para se tornar mais objetiva e formal. Assim quando observamos um triângulo equilátero percebemos de imediato que tal figura possue uma simetria bem marcante. Podemos inclusive traduzir esta simetria através de noções geométricas bem estabelecidas tais como equidistância entre os vértices e um ponto central ou a igualdade dos lados.

A noção de simetria pode ser considerada do ponto de vista formal, como sendo uma propriedade de invariância sob transformações dadas. Por exemplo, no caso do triângulo equilátero a simetria do mesmo pode ser expressa através de rotações de 120º em torno do eixo passando por seu centro e perpendicular a seu plano. Um observador no plano do triângulo não observará nenhuma mudança após estas rotações. Equivalentemente, poderíamos manter o triângulo fixo e fazer o observador girar de 120º em torno do mesmo eixo (fig. 1).

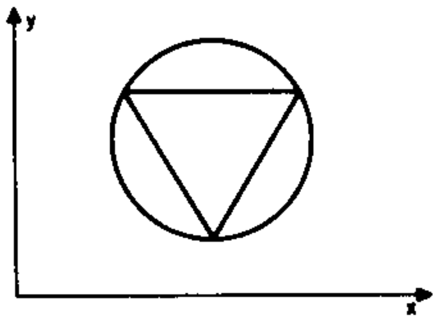


Figura 1

Se descrevermos os pontos do plano por meio de coordenadas cartezianas a rotação de 120º em qualquer dos casos pode ser expressa pela transformação de coordenadas

$$X' = RX$$

onde R é a matriz

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad , \quad \theta = 120^0$$

Uma grande parte das simetrias que ocorrem em física clássica pode ser descrita por meio de transformações de coordenadas. Entretanto existem outros tipos de simetria que são descritas por meio de transformações de funções. Isto ocorre por exemplo quando efetuamos a adição de uma constante à uma função sob operação de derivada. Neste caso a expressão resultante não se altera e dizemos que a adição da constante é uma operação de simetria para a expressão dada. Tais tipos de simetria geralmente descritas como simetrias de calibre (ou de Gauge) são extremamente importantes. Nestas notas lidaremos com simetrias que decorrem ou podem ser escritas por transformações de coordenadas.

I.3 - *Variedades*

É comum encontrar-se textos de física matemática onde equações diferenciais são dadas em termos de coordenadas , sem que haja nenhuma menção explícita sobre a natureza do espaço onde estas coordenadas são definidas. Em geral assume-se que este espaço é o R^3 pois sabemos que este espaço pode descrever as coordenadas de um ponto em um laboratório. Parece haver aqui uma ligeira confusão de conceitos. Isto é, entendemos que R^3 é um espaço vetorial e aqui estamos procurando uma estrutura matemática que seja adequada para descrever, pelo menos localmente, o meio ambiente físico que é um conjunto formado de eventos que podem ser interpretados como pontos. Admitiremos que estamos trabalhando em uma escala de grandeza tal que a distribuição de pontos possa ser tomada como contínua. (Ao que tudo indica, esta hipótese é válida para diâmetros iguais ou superiores a 10^{-13} cm, o diâmetro típico de uma partícula elementar)(1). Com esta hipótese podemos afirmar que o meio ambi-

ente físico pode ser descrito matematicamente como possuindo uma estrutura de variedade diferenciável.

Seja M um conjunto de pontos e seja *U* um *subconjunto de M*. Uma carta de dimensão n em M é um par ordenado (X,U) onde $X: U \to D$, $D \subset R^n$, aberto é uma aplicação 1:1 e sobre[2]. Percebemos portanto que o que uma carta faz é associar *biunivocamente* a um ponto $p \in U$ um ponto $X(P)$ em R^n contido em D. Como cada ponto de R^n tem n coordenadas $u_1 \ldots u_n$, então, podemos dizer que a carta atribui coordenadas ao ponto p de *M*, *através das coordenadas* u_i e da aplicação X. Na realidade as coordenadas de p podem ser descritas pelas n aplicações compostas

$$x^i = u^i \circ X \text{ ,}$$

denominadas as funções coordenadas locais de M.

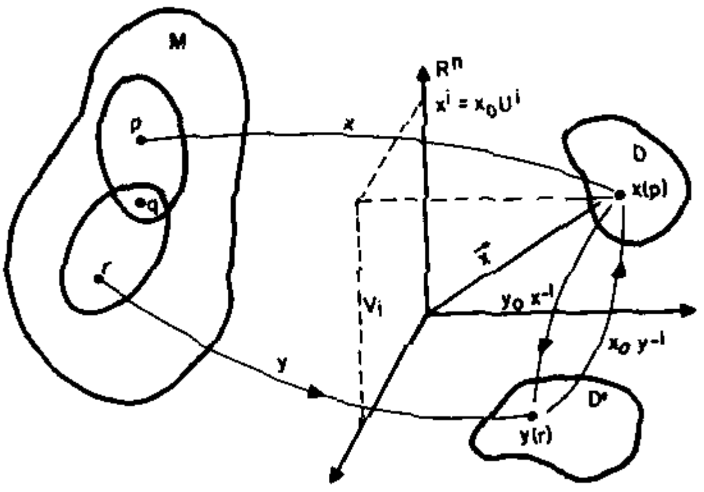


Figura 2

Assim para o ponto $p \in M$, $x_i(p) = u^i \circ X(p) = u^i\ (X(p)) = p^i$ e $p = (p_1 \ldots p_n)$. Naturalmente um ponto de M pode ter mais de *uma* carta. Se X e Y são 2 cartas elas são ditas diferenciáveis quando as funções compostas $X \circ Y^{-1}$: $D' \to D$ e $Y \circ X^{-1}$. $D \to D'$ são diferenciáveis em R^n. Uma coleção de cartas diferenciáveis e que cubra M é dita um <u>atlas</u> diferenciável de M em R^n. Um conjunto M munido de um atlas diferenciável R^n é dito uma <u>variedade diferenciável</u> de dimensão n. Toda superfície de R^3 bem como o próprio R^3 são variedades. A noção de variedade é na verdade uma extensão natural do conceito de superfície em geometria diferencial com a diferença que uma variedade não precisa estar imersa em um espaço euclideano e portanto representa uma estrutura mais geral(3). Esta estrutura em princípio é adequada para descrever o meio ambiente físico com as condições de continuidade admitidas.

Como no exemplo simples do triângulo equilátero, um grande número de simetrias de objetos definidos na variedade podem ser descritos por meio de transformações de coordenadas. Um conjunto de n coordenadas x^i construido como acima constitui um sistema de coordenadas locais denotado por $\{x^i\}$.

Sejam $\{x^i(p)\}$ e $\{x'^i(p)\}$ dois sistemas de coordenadas do ponto $p \in M$. Isto significa que temos duas cartas X e Y do atlas de M tais que

$$x^i(p) = u^i \circ X(p) \quad \text{e} \quad x'^i(p) = u'^i \circ Y(p) \quad ,$$

ou, equivalentemente

$$X(p) = (x^1(p),\ldots,x^n(p)) \quad ; \quad Y(p) = (x'^1(p),\ldots,x'^n(p))$$

Por definição a composta $X \circ Y^{-1} = g$ é uma aplicaçao diferenciável de R^n. Daí podemos escrever $X = g \circ Y$ e então $X(p) = g \circ Y(p)$. Isto é

$$x^i(p) = u^i \circ X(p) = u^i \circ g \circ Y(p) \ .$$

Denotando $g^i = u^i \circ g$, resulta que

$$x^i(p) = g^i \circ Y(p) = g^i(x'^1(p),\ldots,x'^n(p)) \quad . \qquad (I.3.1)$$

Esta expressão descreve o que se chama uma transformação das coordenadas x'^i para x^i. Considerando que g é inversível ($g^{-1} = Y \circ X^{-1} = f$) obtemos a transformação inversa

$$x'^i(p) = f^i(x^1(p),\ldots,x^n(p)) \quad , \qquad (I.3.2)$$

onde $f^i = u^i \circ f$.
O conjunto destas transformações de coordenadas em M é estrutura *muito ampla denominado o grupo de transformações* da variedade.

Duas propriedades importantes são:

Teorema (I.1)

A matriz jacobiana de uma transformação de coordenadas *locais em uma variedade é igual à inversa da matriz* jacobiana de transformação inversa.

De fato, de (I.3.1) e (I.3.2) temos

$$x^i = g^i(f^1(x' \ldots x^n), \ldots , f^n(x' \ldots x^n)) \quad ,$$

de onde tiramos

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i{}_j = \frac{\partial g^i}{\partial x'^k}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} \quad ,$$

o que mostra que a *matriz* $J^{-1} = (\frac{\partial g^i}{\partial x'^k}) = (\frac{\partial x^i}{\partial x'^k})$ é a inversa de $J = (\frac{\partial f^k}{\partial x^j}) = (\frac{\partial x'^k}{\partial x^j})$.

<u>Teorema</u> (I.2)

Dado um sistema de coordenadas local $\{x^i\}$ definido em uma vizinhança U_p de $p \in M$ e um conjunto de n aplicações $f^i: U_p \to R$ tais que tenha a matriz jacobiana não singular. Então as funções x'^i definidas por

$$x'^i = f^i(x^1,\dots,x^n) \quad ,$$

definem um outro sistema de coordenadas em U_p.

Com as coordenadas $\{x^i(p)\}$ de $p \in M$, definimos o vetor de R^n

$$X(p) = (x^1(p),\dots,x^n(p)) \quad .$$

Isto significa que podemos construir uma carta (X,U_p) de M desde que X satisfaça às demais condições de definição de carta. Por outro lado, considere a transformação

$$x'^i = f^i(x^1,\dots,x^n) \quad ,$$

tal que tenha matriz jacobiana não singular. Então por aplicação do teorema das funções inversas podemos construir a transformação inversa (local)

$$x^i = g^i(x'^1,\dots,x'^n)$$

e definir uma aplicação $Y: U_p \to R^n$, por

$$Y(p) = (x'^1(p),\dots,x'^n(p)) \; .$$

Portanto $x^i(p) = g^i \circ Y(p)$. Agora, cada função g^i é diferenci-

ável e podemos escrever

$$x^i(p) = u^i \circ g \circ Y(p) \quad .$$

Mas como $x^i = u^i \circ X$, resulta que $X = g \circ Y$, ou seja $X \circ Y^{-1} = g$ é diferenciável. Portanto $\{Y, U_p\}$ é uma carta de M e consequentemente as funções x'^i definem um sistema de coordenadas em U_p.

I.4 - *Objetos Geométricos em uma Variedade*

Com a definição de variedade obtivemos uma idéia da descrição matemática da arena onde os problemas de simetria serão tratados. Resta agora definir formalmente o que serão os objetos e as equações que estarão *sujeitas às simetrias em questão*. Como as variedades são entidades suficientemente genéricas, um grande número de objetos podem ser definidos como casos particulares *de aplicações entre variedades*.

Se M e N são duas variedades, uma aplicação $F: M \to N$ associa um ponto p de M a um ponto F(p) de N. Torna-se desejável caracterizar *o conceito de diferenciabilidade de tais aplicações*. Para isto usamos o conceito de diferenciabilidade em R^n. Sejam $X: M \to D$, $Y: N \to D$ cartas de M e N respectivamente. *Dizemos que $F: M \to N$ é diferenciável quando a composta* $Y \circ F \circ X^{-1}$: $: D \to D'$ é uma aplicação diferenciável de R^n em R^m (Fig. 3).

Quando F é inversível e F^{-1} é diferenciável dizemos *que F é um difeomorfismo entre variedades.*

Um exemplo simples de aplicação entre variedades é dado pelas próprias cartas onde $N = R^n$ e Y = identidade. Outro exemplo de aplicação é dado pela definição de curva em uma va-

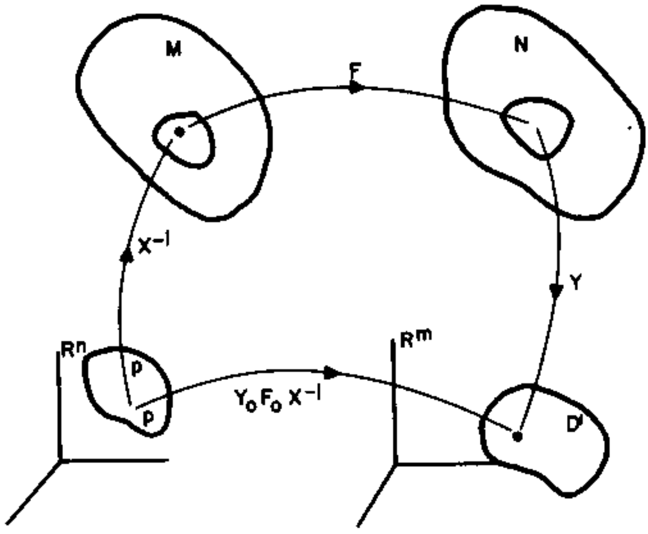


Figura 3

riedade. De modo semelhante às curvas em superfícies uma curva em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to M$, onde I é um subconjunto aberto de R. De acordo com a definição de diferenciabilidade, a composta $X \circ \alpha : I \to R^n$ deve ser diferenciável onde X é uma carta cujo domínio contém a imagem da curva (Fig. 4). Finalmente o conceito de função real diferenciável $f : M \to R$ em uma variedade torna-se evidente (tome N = R na definição de diferenciabilidade).

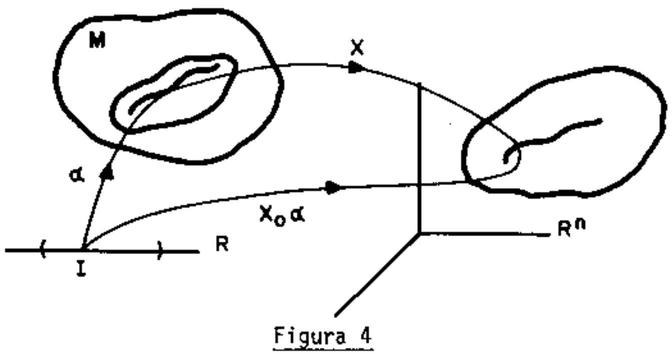


Figura 4

De posse da noção de curva em uma variedade, podemos agora definir um vetor tangente. Como uma variedade não é necessariamente um espaço vetorial não podemos falar arbitrariamente de vetores em M. Entretanto podemos associar a M a noção de vetor tangente como sendo o vetor tangente à uma curva de M.

Seja $\alpha(t)$ uma curva de M e seja F o conjunto de todas as funções reais diferenciáveis em M. O vetor tangente $\alpha'(t_o)$ a α no ponto $p = \alpha(t_o)$ é uma aplicação

$$\alpha'(t_o) : F \to R \quad ,$$

definida por

$$\alpha'(t_o)\,[f] = \left.\frac{df(\alpha(t))}{dt}\right|_{t_o} \quad . \qquad (I.4.1)$$

Para que possamos realmente atribuir a $\alpha'(t_o)$ o caráter de vetor, adicionamos à esta definição a seguinte propriedade. Se $\alpha'(t_o)$ e $\beta'(t_o)$ são vetores tangentes às curvas $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ no ponto comum $p = \alpha(t_o) = \beta(t_o)$ e $a,b \in R$ então $a\alpha'(t_o) + b\beta'(t_o)$ é um terceiro vetor tangente definido por

$$(a\alpha'(t_o) + b\beta'(t_o))\,[f] = a\alpha'(t_o)\,[f] + b\beta'(t_o)\,[f] \; . \qquad (I.4.2)$$

Com esta propriedade pode-se facilmente verificar que *o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é um espaço vetorial denominado o espaço tangente a M em p e denotado por $T_p(M)$*. Pode-se verificar também que *a dimensão de $T_p(M)$ é igual à dimensão n de M*. Consequentemente existe em cada $T_p(M)$ uma base $\{e_i\}$ formada por n vetores linearmente independentes e_i. Cada um destes vetores é tangente à uma curva de M que são chamadas *as curvas coordenadas da base*.

A notação $\alpha'(t_o)$ $[f]$ em (I.4.1) é a mesma notação usada para a derivada direcional da função f com relação ao vetor $\alpha'(t_o)$. De modo geral se $v_p \in T_p(M)$ então a derivada direcional de f na direção v_p é denotada por v_p $[f]$ que é exatamente a expressão que define v_p como elemento de $T_p(M)$. Entretanto para a expressão "derivada direcional" ficar devidamente caracterizada, atribuimos-lhe duas propriedades adicionais que são:

(a) $v_p\,[af+bg] = av_p\,[f] + bv_p\,[g]$, $a,b \in R, f,g, \in \mathcal{F}$ e

(b) $v_p\,[fg] = v_p\,[f]\,g(p) + f(p)v_p\,[g]$.

É útil escrever a expressão de um vetor tangente v_p em termos das coordenadas locais. Se (X,U_p) é uma carta de M e $f:M \to R$ então podemos definir a aplicação diferenciável $F:R^m \to R$ por $f = F \circ X$ (Fig. 5).

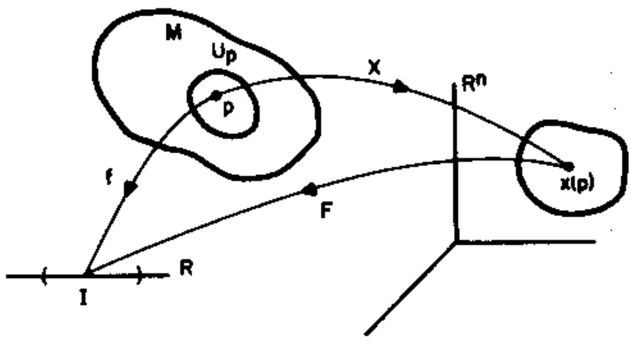


Figura 5

se $X(p) = (x^1(p),\ldots,x^n(p))$. Então $f(p) = F \circ X(p) = F(x^i(p))$. Usando a diferenciabilidade de F podemos expandir f em série de Taylor. Seja $p' = p + \Delta p$ outro ponto em U_p. Então

$$f(p+\Delta p) = F(x^1(p),\ldots,x^n(p) + \Delta x^i \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p + \ldots$$

Tomando em seguída a *derivada direcional de $f(p+\Delta p)$ com rela - ção ao vetor tangente* v_p, temos (usando a propriedade (a)),

$$v_p\left[f(p+\Delta p)\right] = v_p\left[f(p)\right] + v_p\left[\Delta x^i \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p\right] + \dots \quad .$$

Mas como $F(x'(p),\dots,x^n(p)$ é uma *constante* o *primeiro termo* acima anula-se. Por outro lado, usando a propriedade (b),

$$v_p\left[\Delta x^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p\right] = v_p\left[\Delta x^i\right] \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p + \Delta x^i(p) v_p \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)\right] \quad .$$

Mas,

$$\Delta x^i(p) = x^i(p) - x^i(p) = 0 \quad \text{e} \quad v_p\left[\Delta x^i\right] = v_p[x^i] \ .$$

Seja $\alpha(t)$ a curva em M passando por p e cuja tangente em $p = \alpha(t_0)$ *seja o vetor* v_p. Então por definição de vetor tangente

$$v_p[x^i] = \left.\frac{dx^i(\alpha(t))}{dt}\right|_{t_0} = \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\frac{d\alpha^j}{dt}\right|_{t_0} = \left.\frac{\partial \alpha^i}{dt}\right|_{t_0} , \qquad (I.4.3)$$

onde α^i são as componentes do vetor $X \circ \alpha = X(\alpha(t)) \in R^n$ (conforme Fig. 4). Então $\left.\frac{d\alpha^j}{dt}\right|_{t_0}$ representa a componente i do vetor *tangente* v_p *em* R^n *a qual* denotamos por v^i. Portanto $v_p[x^i] = v^i$ e

$$v_p\left[f(p+\Delta p)\right] = v^i \left.\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)\right|_p$$

Note que nesta última expressão não consideramos os termos subsequentes da série de Taylor porque de fato estes termos sendo proporcionais a $\Delta x_i(p)$ serão sempre zero. Como a expressão acima é válida para qualquer ponto de U_p, podemos escrever:

$$v_p[f] = v^i \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)\Big|_p \qquad (I.4.4)$$

Note que esta expressão é a mesma que (I.4.1) quando $v_p = \alpha'(t_o)$ e $v^i = (\frac{\partial\alpha^i}{dt})_p$. Em particular tomando v_p como sendo um dos vetores de base e_i, resulta que $v^j = (e_i)^j = \delta^j{}_i$ e

$$e_i[f] = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)\Big|_p \qquad (I.4.5)$$

e em particular $e_i[x^j] = \delta^j{}_i$. Desta relação pode-se mostrar que os e_i são linearmente independentes. Neste caso diz-se que a base $\{e_i\}$ é a base natural associada ao sistema de coordenadas $\{x_i\}$.

Teorema (I.3)

Se $\{x^i\}$ e $\{x'^i\}$ são dois sistemas de coordenadas locais em M as bases naturais associadas se relacionam como

$$e'_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\, e_j \quad .$$

Seja $\{e'_i\}$ a base natural associada a $\{x'^i\}$. Então de (I.4.4) temos

$$v'^i = v[x'^i] = v^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \ .$$

Mas $v^j = v[x^j]$ = (componente de v na base $\{e_j\}$) e $v'^j = v[x'^j]$ = (componente de v na base $\{e'_j\}$.). Portanto para um vetor v podemos escrever $v = v^i e_i = v'^i e'_i$ de onde obtemos

$$e_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\, e'_j$$

e como $\det(\partial x'^i/\partial x^i) \neq 0$ podemos obter a transformação in -

versa

$$e'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\, e_j \quad . \qquad (I.4.6)$$

Comparando esta expressão com (I.3.2) notamos que quando temos *uma transformação de coordenadas locais* $\{x^i\} \to \{x'^i\}$, *com ma*-triz jacobiana J, as bases naturais associadas transformam-se de acordo com a inversa da matriz jacobiana J^{-1}. Este fato jus*tifica o nome de vetores contravariantes dado aos vetores de* $T_p(M)$.

A expressão (I.4.6) é uma versão em coordenadas da *noção de aplicação derivada. Sejam M e N duas variedades dife*renciáveis e $F:M \to N$ uma aplicação diferenciável. A aplicação derivada F_* de F é uma aplicação entre os respectivos espaços *tangentes*

$$F_*:T_p(M) \to T_{F(p)}(N) \quad ,$$

definida por

$$(F_* v_p)\,[f] = v_p[f \circ F] \, . \qquad (I.4.7)$$

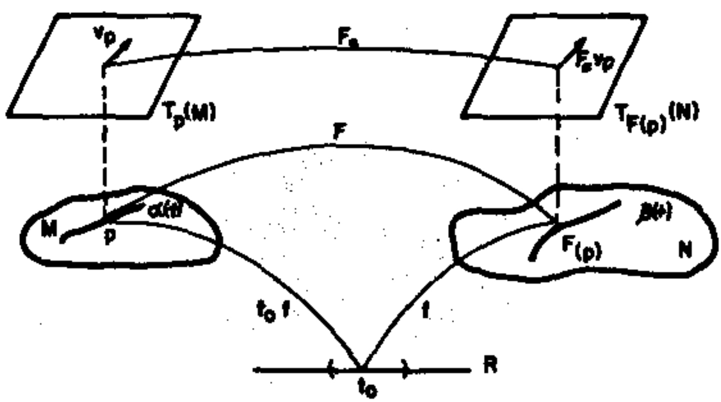


Figura 6

Seja $\alpha(t)$ uma curva em M. Então $\beta(t) = F(\alpha(t))$ é uma curva em N. Se $v_p = \alpha'(t_0)$, $p = \alpha(t_0)$ temos pela definição

$$F_*(\alpha'(t_0))\,[f] = \alpha'(t_0)[f \circ F] = \frac{d}{dt} f(F(\alpha(t))\Big|_{t_0} =$$

$$= \frac{d}{dt} f(\beta(t))\Big|_{t_0} = \beta'(t_0)\,[f] \; .$$

Em outras palavras, a aplicação derivada de F do vetor tangente a $\alpha(t)$ em M no ponto $P = \alpha(t_0)$ é igual ao vetor tangente à curva $\beta = F(\alpha)$ no ponto $F(\alpha(t_0))$ de N (Fig. 6).

<u>Teorema</u> (I.4)

A aplicação derivada é linear.

A demonstração é uma consequência imediata da propri edade (I.4.2) da derivada direcional.

Decorre deste teorema que se $\{e_i(p)\}$ é uma base de $T_p(M)$ então se dim M = dim N, $\{F_*(e_i)\}$ é uma base de $T_{F(p)}(N)$. Em particular quando M = N e denotamos $e_i' = F_*(e_i)$ então pela linearidade, $F_*(e_i)$ deve ser uma combinação linear de e_i. Comparando com (I.4.6) obtemos que os coeficientes desta combinação linear são exatamente os elementos da matriz jacobiana da transformação de coordenadas $\{x^i\}$ para $\{x'^i\}$. Portanto F_* é determinada em uma base pela matriz jacobiana de F. Comparando com (I.4.6) temos

$$F_*(e_i) = e_i' = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\, e_j \quad .$$

O conjunto de todos os vetores tangentes em todos os pontos de uma variedade M não é um espaço vetorial pois ele inclui vetores localizados em distintos pontos da variedade. Este conjunto é uma outra variedade denominada o <u>fibrado tangente</u> a M e é denotado por TM. Cada espaço tangente $T_p(M)$ está contido em TM e é denominado uma fibra de TM.

Com a noção de fibrado tangente a definição de campo vetorial em uma variedade torna-se bastante simples. Um campo vetorial V em M é uma aplicação

$$V:M \to T(M) \quad ,$$

tal que associa à cada ponto $p \in M$ um vetor tangente $V(p) \in T_p(M)$. Um exemplo óbvio é dado pelo campo tangente $\alpha'(t)$ à uma curva $\alpha(t)$ de M. A combinação linear de dois campos vetoriais é definida em cada ponto. Isto é,

$$(aV + bW) = aV(p) + bW(p)$$

onde $a,b \in R$. Esta expressão pode ser generalizada para o caso em que a e b são funções reais em M. Neste caso $(aV+bW)(p) = a(p)V(p)+b(p)W(p)$.

A derivada direcional de uma função $f:M \to R$, com relação a um campo vetorial V, $V[f]$ é definido também de acordo com o valor local $V(p)[f]$ em cada ponto $p \in M$. Enquanto $V(p)[f]$ é um número, $V[f]$ é uma função real em M.

Se U e V são dois campos vetoriais então pode-se associar um terceiro campo $W = [U,V]$ definido por

$$W[f] = [U,V][f] = U[V[f]] - V[U[f]]. \qquad (I.4.8)$$

$[U,V]$ é denominado o <u>parêntesis de Lie</u> de U,V.

Consideremos agora o espaço dual $T_p(M)^*$ de cada espaço *tangente* $T_p(M)$. *Conforme sabemos* $T_p(M)^*$ *é constituído pelas* aplicações lineares de $T_p(M)$ em R. Estes elementos são denominados 1-formas ou formas lineares ou covetores ou ainda vetores *covariantes de M.*

Do mesmo modo como definimos o fibrado tangente a M, podemos também definir o fibrado cotangente TM^* que é o conjun*to de todas as formas lineares definidas em todos os pontos de* M.

Um campo de formas lineares é uma aplicação

$$\phi : M \to TM^* \quad ,$$

tal que em cada ponto $p \in M$ associa uma forma linear $\phi_p \in T_p(M)^*$. *Estas formas lineares são aplicações lineares de* $T_p(M)$ *em* R. Isto é, se $u_p, v_p \in T_p(M)$, $a, b, \in R$

$$\phi_p(av_p + bw_p) = a\phi_p(v_p) + b\phi_p(w_p) \quad .$$

Se V é um campo vetorial em M e ϕ *um campo de for*mas, a expressão $\phi(V)$ denota uma função real em M tal que se $p \in M$

$$\phi(V)(p) = \phi_p(V_p) \quad .$$

A ocasião é oportuna para se definir algebricamente a diferencial de uma função $f : M \to R$. Se $f \in F$, a diferencial de f é uma aplicação

$$d : F \to TM^* \quad ,$$

tal que em cada ponto p de M associa uma forma linear dada por

$$df(v_p) = v_p[f] \quad . \qquad (I.4.9)$$

Das propriedades da derivada direcional segue-se que df é uma forma linear e

$$d(fg) = gdf + fdg \quad . \qquad (I.4.10)$$

Teorema (I.5)

Seja $\{x^i\}$ um sistema de coordenadas locais em $U_p \subset M$. Então as diferenciais dx^i formam uma base de $T_p(M)^*$ que é a base dual da base natural de $T_p(M)$ associada a $\{x^i\}$.

Seja V um campo vetorial em M. Como cada coordenada x^i é uma função de $\mathcal{F}$, segue-se da definição de diferencial que

$$dx^i(V) = V[x^i] = V^j e_j[x^i] = V^j dx^i(e_j) \quad ,$$

onde colocamos $V = V^j e_j$, $\{e_j\}$ sendo a base natural associada a $\{x^j\}$. Por outro lado, vimos que $V^i = V[x^i]$. Portanto devemos ter

$$dx^i(e_j) = \delta^i_j \quad ,$$

o que define as formas lineares dx^i como sendo elementos da base dual da base $\{e_i\}$.

Decorre deste teorema que qualquer forma linear ϕ pode ser escrita como combinação linear de dx^i:

$$\phi = \phi_i dx^i \quad ,$$

onde $\phi_i = \phi(e_i)$. Em particular, se $\phi = df$ resulta $df = (df)_i dx^i$ onde $(df)_i = (df)(e_i) = e_i[f]$. Portanto,

$$df = e_i[f]\, dx^i \quad .$$

Suponto que f será uma das funções de transformação do sistema de coordenadas $\{x^i\}$ para $\{x'^i\}$, isto é colocado $f=x'^i(x^1\ldots x^n)$, resulta a transformação das bases de $T_p(M)^*$

$$dx'^i = e_i[x'^i]\, dx^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\, dx^i \quad ,$$

ou, denotando $dx^i = e^i$ e $dx'^i = e'^i$,

$$e'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\, e^j \quad . \tag{I.4.11}$$

Desta expressão decorre a designação de <u>vetores covariantes</u> aos vetores de $T_p(M)^*$.

O equivalente à aplicação derivada para o caso de formas lineares é denominado <u>retrocesso</u>. Seja $F:M \to N$ um difeomorfismo e seja ϕ um campo de formas lineares em M. O retrocesso de ϕ induzido por F é a aplicação

$$F^*:T_{F(p)}(N)^* \to T_p(M)^* \quad ,$$

definida por

$$(F^*\phi)_p(v_p) = \phi(F_*(v_p)) \quad , \tag{I.4.12}$$

onde $v_p \in T_p(M)$. Observamos que como $F_*v_p \in T_{F(p)}(N)$ então ϕ é uma forma linear de $T_{F(p)}(N)^*$ e ela é trazida no sentido inverso de F_* para $T_p(M)^*$ por meio do retrocesso F^*. É este sentido inverso que dá o nome de retrocesso a F^* (Fig. 7)(pág.22).

<u>Teorema</u> (I.6)

Seja $f:M \to R$ diferenciável. Então

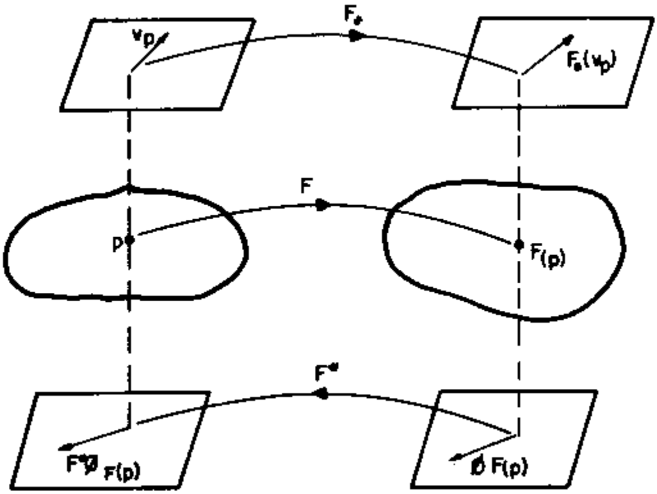


Figura 7

$$F^*(df) = d(f \circ F) \quad . \qquad (I.4.13)$$

Na definição de retrocesso tomemos ϕ = df. Então

$$(F^*(df)_p(v_p)=df(F_*(v_p)) = F_*(v_p)[f] = v_p[f \circ F] = d(f \circ F)(v_p).$$

Se isto vale para todo $v_p \in T_p(M)$ obtemos o resultado desejado.

Uma classe de objetos mais gerais que vetores e formas em uma variedade pode ser definida através de produtos tensoriais múltiplos entre $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$.

Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão m e n, respectivamente, com eles podemos formar o produto cartezia no V x W que é novamente um espaço vetorial. O produto tensorial entre V e W, denotado $V \otimes W$, é um espaço vetorial de dimensão m n que associa ao par (v,w) de V x W um vetor denotado por $v \otimes w$, satisfazendo às seguintes condições:

a) $u \otimes (v+w) = u \otimes v + u \otimes w$,

b) $(u+v) \otimes w = u \otimes w + v \otimes w$,

c) $au \otimes v = u \otimes av$, $a \in R$

d) se $\{e_i\}$ é uma base de V e $\{f_a\}$ uma base de W então $e_i \otimes f_a$ é uma base de $V \otimes W$.

Os vetores de um produto tensorial são denominados tensores. O produto tensorial de um espaço pode ser repetido r vêzes e seus elementos são chamados tensores contravariantes de ordem r, ou r-contravariantes. Se tomarmos V^* (dual de V) um produto tensorial repetido s vêzes de V^* produz tensores covariantes de ordem s ou s-covariantes.

Como $T_p(M)$ e $T_p(M)^*$ são espaços vetoriais, podemos tomar os produtos tensoriais r-contravariante e s-covariante destes espaços:

$$T_p(M)^r_s = \overset{r}{\otimes}\ T_p(M)\ \overset{s}{\otimes}\ T_p(M)^* \qquad (I.4.14)$$

Os elementos deste espaço produto são chamados tensores tangentes a M em p. Um campo tensorial em M é uma aplicação em M tal que para cada $p \in M$, associa um tensor tangente.

Seja $\{e^i\}$ a base natural associada a um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ de M e com base dual $\{e^i\}$. Então podemos escrever um tensor tangente a M em termos destas bases como

$$S = S^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell}\, e_i \otimes \ldots \otimes e_k \otimes e^j \otimes \ldots \otimes e^\ell \qquad (I.4.15)$$

onde $S^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell}$ são as componentes naturais do tensor S no sistema de coordenadas $\{x^i\}$.

Seja $F:M \to N$ um difeomorfismo e seja S um campo tensorial r-contravariante e s-covariante pertencente ao espaço produto tensorial $T_p(M)^r_s$. Então existe uma aplicação derivada F_* para cada fator $T_p(M)$ e um retrocesso F_* para cada $T_p(M)^*$, que induz uma aplicação tensorial

$$F^*_* T_p(M)^r_s \to T_{F(p)}(M)^r_s \quad ,$$

definida por

$$F^*_*(S) = (S^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell} \circ F^{-1}) F_*(e_i) \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes F_*(e_k) \otimes F^*(e^j) \otimes \ldots \otimes F^*(e^\ell). \qquad (I.1.16)$$

Se F é uma transformação de coordenadas de M (tomando M = N) e *comparando* as *expressões* de $F^*_*(S)$ nos dois sistemas de coordenadas obtemos a expressão de transformação das componentes do campo tensorial, substituindo $F_*(e_i) = e'_i$ e $F^*(e^i) = e'^i$.

$$S^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell} \circ F^{-1} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \ldots \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \ldots \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^q} = S^{m\ldots n}{}_{p\ldots q}$$

ou, denotando $S^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell} \circ F^{-1} = S'^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell}$, resulta:

$$S'^{i\ldots k}{}_{j\ldots\ell} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \ldots \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \ldots \frac{\partial x^q}{\partial x'^\ell} S^{m\ldots n}{}_{p\ldots q} \qquad (I.4.17)$$

Em particular, se S é um tensor de ordem zero (uma função f em M) então $F^*_*(f) = f \circ F^{-1}$ (Fig. 8) (pág. 25).

Os campos tensoriais representam uma classe particular dos objetos geométricos definidos em uma variedade, que incluem os campos vetoriais, campos de forma e funções reais definidas em M (tensores de ordem zero). Tais objetos, conforme

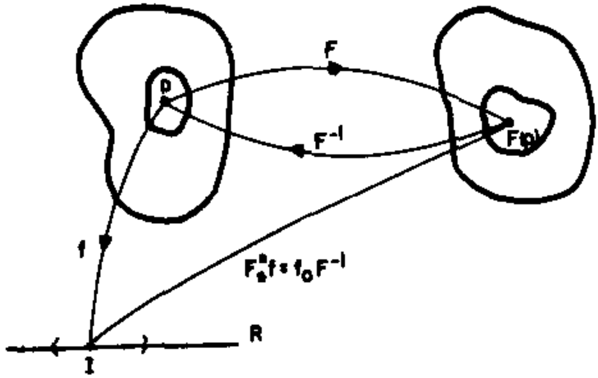


Figura 8

vimos, podem ser caracterizados por sua modalidade de transformação quando submetidos ā uma transformação de coordenadas em M. Num sentido mais amplo, um objeto geométrico Ω em M é uma aplicação de M em uma outra variedade ou uma estrutura algébrica ou mesmo um espaço, com a condição que sob uma transformação de coordenadas em M ele possua uma transformação bem definida. Assim, os tensores, vetores e funções, são objetos geométricos com transformações dadas por (I.4.17). Entretanto existem outras entidades definidas em M que não são tensores e que possuem transformações conhecidas e são também objetos geométricos.

O problema de simetria que se apresenta aos objetos geométricos consiste em estudar a variação destas objetos sob dadas transformações de coordenadas ou, na procura de transformações de coordenadas que mantenham tais objetos invariantes. Este estudo de simetrias dos objetos geométricos será feito no Cap. III, juntamente com o estudo das simetrias das leis físicas que normalmente dizem respeito a estes objetos.

I.5 - *Leis Físicas*

Com a estrutura de variedade diferenciável representando o meio ambiente físico, podemos agora escrever equações diferenciais ou algébricas sobre estas variedades descrevendo matematicamente o comportamento de objetos geométricos os quais representarão geometricamente algum processo ou sistema físico.

Seja Y um objeto geométrico em M descrevendo o processo a ser estudado e Ω_k, $k = 1 \ldots m$ outros objetos geométricos supostamente conhecidos. Então uma equação diferencial em Y é um funcional definido sobre M, envolvendo Y, algumas de suas derivadas e Ω_k

$$f(y, y', \ldots y^{(p)}, \Omega_k) = g \quad , \qquad (I.5.1)$$

onde g é uma função conhecida em M. Dizemos que sob uma transformação de coordenadas a equação acima é <u>covariante</u> quando a dependência funcional de f e g nas coordenadas permanece a mesma. Isto significa que a equação pode ser lida exatamente da mesma forma nos dois sistemas de coordenadas. Quando isto ocorre, dizemos que a transformação de coordenadas é uma <u>simetria da equação</u>. Se associarmos à cada sistema de coordenadas de M um "observador" então quando há simetria podemos dizer que cada observador reconhece e interpreta a equação da mesma forma. No caso contrário, isto é, quando a transformação não mantém a equação covariante, a mesma assume formas diferentes para cada observador, possibilitando assim diferentes interpretações físicas. Uma equação que seja covariante sob uma dada transformação de coordenadas descrevendo algum processo físico pode então ser interpretada como uma <u>lei física</u> onde por lei entende

-se o caráter obrigatório de validade para um conjunto, ou "sociedade" de observadores. Qualquer observador, ou sistema de coordenadas, para o qual a equação tenha uma forma diferente daquela reconhecida pela "sociedade", deverá ser excluído da mesma.

Percebemos portanto que seria desejável que ao se definir uma lei física, tivéssemos o máximo possível de observadores que reconhecessem aquela lei como verdadeira. Isto é, o maior número possível de sistemas de coordenadas tal que ao se transformarem uns nos outros, mantenham a equação covariante. Tal lei seria o que poderíamos chamar de <u>lei física universal</u>. Idealmente uma lei física universal deveria ser covariante sob o grupo de todas as transformações de coordenadas possíveis em uma variedade. Denominamos tal grupo por "grupo de transformações de variedade" (GTV). Nas teorias físicas anteriores à relatividade geral não existe este conceito de universalidade, e elas são de certo modo seletivas no sentido de que aquelas teorias admitem apenas um conjunto restrito de sistemas de coordenadas entre os demais existentes na variedade.

Por outro lado, não são somente as leis físicas expressas por equações diferenciais que caracterizam os sistemas de coordenadas admissíveis. Existem em geral em uma teoria outras leis impondo condições sobre variação de determinados objetos geométricos sob transformação de coordenadas. Estas leis suplementares, em geral, dizem respeito a condições de medida e assim, para fins de organização da idéia de simetria de transformação de coordenadas, podemos separar estas em <u>simetrias de equações</u> e <u>simetrias de objetos</u>.

O conjunto destas simetrias definirão os sistemas de coordenadas compatíveis com uma dada teoria física.

Para fixarmos idéias consideremos a lei da gravitação de Newton. Assumindo que esta lei vale em alguma variedade M quadrimensional onde a coordenada tempo é do tipo absoluto, podemos escrever

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^i} , \qquad (I.5.2)$$

onde $\phi(x)$ é o potencial gravitacional, x^i as coordenadas espaciais da variedade e t a coordenada temporal absoluta. O <u>tempo absoluto</u> pode ser caracterizado matematicamente como sendo uma função

$$t: M \to R$$

tal que: (a) t seja definido a menos de uma transformação linear $t' = at+b$ (isto é, se t é um tempo absoluto t' também é um tempo absoluto); (b) cada valor t = constante determina uma subvariedade tridimensional Σ_t denominada uma seção de simultaneidade; (c) por cada ponto $p \in M$ passa somente uma Σ_t.

Uma vez estabelecida a estrutura de variedade pode-se pensar em atribuir à mesma uma estrutura geométrica. Isto significa definir em M conceitos geométricos tais como paralelismo e distância. Em princípio, para se introduzir esta geometria contamos apenas com a equação (I.5.2).

Denotando por h^{ij} a matriz unitária 3x3, então podemos reescrever a equação (I.5.2) como

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -h^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \qquad i,j = 1,2,3 \quad .$$

Comparando esta equação com a expressão geral da geodésica em uma variedade quadrimensional

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

obtemos a equação

$$\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = - h^{im} \frac{\partial\phi}{\partial x^m} \quad ,$$

cuja solução mais geral é

$$\Gamma^i_{jk} = \overset{o}{\Gamma}{}^i_{jk} + h^{im} \frac{\partial\phi}{\partial x^m} \frac{\partial t}{\partial j} \frac{\partial t}{\partial x^k} \quad , \qquad (I.5.3)$$

onde Γ^i_{jk} e $\overset{o}{\Gamma}{}^i_{jk}$ são os símbolos de Christoffel da conexão afim definida nas seções de simultaneidade de Σ_t. Diz-se que a equação (I.5.2) determina uma conexão afim ∇ em Σ_t a menos de uma conexão integrável $\overset{o}{\nabla}$. Esta conexão afim está intimamente associada à idéia de paralelismo em Σ_t de maneira que um conceito de geometria afim está definido nestas seções de simultaneidade. Sucede que existe também uma métrica em cada Σ_t implicitamente definida pela matriz h^{ij} e, portanto, a geometria afim de Σ_t é também uma geometria métrica. Estas duas geometrias são totalmente compatíveis e de fato pode-se mostrar que uma decorre da outra[4].

Agora, (I.5.2) é uma lei Física. Isto significa que só se admite referenciais em M nos quais a expressão (I.5.2) é válida. Dadas as coordenadas x,t e a função ϕ podemos obter outro conjunto x', t' e ϕ' para os quais (I.5.2) permanece válida desde que

$$(1) \qquad x'^{i} = A^{i}{}_{j}\, x^{j} + a^{i}(t) \quad ,$$

$$(2) \qquad t' = at + b \quad , \qquad\qquad (I.5.4)$$

$$(3) \qquad \phi' = \phi - \frac{d^2 a^i}{dt^2}\, x^i \quad ,$$

onde $A^{i}{}_{j}$ é uma matriz ortogonal e $a^{i}(t)$ uma função não nula e diferenciável em t, a,b constantes e $a \neq 0$.

O grupo de transformação de coordenadas formado pelas equações (1) e (2) é chamado o grupo generalizado de Galileu. Por outro lado, (3) define uma mudança do tipo gauge para o potencial gravitacional. Observamos que estas três equações definem as simetrias da teoria gravitacional Newtoniana. Sistemas de coordenadas que não satisfaçam (1) e (2) e funções ϕ não satisfazendo (3), corresponde a situações não aceitáveis na legislação de Newton no presente contexto.

Em cada Σ_t a métrica representada por h_{ij} transforma-se tensorialmente com as transformações (1) de (I.5.4). Desta forma (I.5.4) além de definir a simetria das equações de Newton define também a simetria da métrica de cada Σ_t. (A simetria de uma métrica é denominada uma isometria.). Portanto, a simetria da teoria gravitacional Newtoniana está completamente definida pelas transformações (I.5.4).

De modo semelhante, a teoria especial da relatividade possui um grupo de simetrias que é o grupo de Poincaré. Este é um grupo de simetrias para as equações de Maxwell (consideradas como leis físicas) e para o objeto geométrico definido pela métrica de Minkowski. Novamente este grupo de simetria define o conjunto de observadores que estão em comum acordo com as equações de Maxwell e com a métrica de Minkowski.

Finalmente, a teoria geral da relatividade estabelece as equações de Einstein que são suficientemente gerais para serem covariantes com o GTV. As soluções destas equações definem as geometrias dos espaços-tempo dadas pelas métricas pseudo Riemániana. Neste caso não há exigência de simetria para estas métricas e, de modo geral, elas não existem. Entretanto em praticamente todas as soluções conhecidas, onde se pode constatar aspectos físicos desta teoria, existe uma simetria desta métrica. Isto não significa que somente as soluções com isometrias seja fisicamente aceitável, significa talvez, apenas o fato de que o estágio atual de nossa compreensão da natureza temos maior facilidade em compreender as soluções isométricas. Assim, por exemplo, aspectos relativos a leis de conservação e mesmo a construção da teoria quântica de campo em relatividade geral exigem a presença de isometrias. Entretanto uma tal exigência pode apenas refletir o fato de que estamos habituados a formular estes conceitos simetricamente. Por outro lado, o grupo de isometrias em um espaço-tempo é a formulação mais simples da idéia de movimento. Portanto se queremos descrever movimentos em relatividade geral, onde a noção de medida em métrica permaneça invariante, então a existência de isometria é imperativa. Percebemos, portanto, que a conceituação de um grupo de isometrias de um espaço-tempo é importante, e lidaremos com este assunto mais detalhadamente no Cap. III.

II - *PROPRIEDADES FORMAIS DOS GRUPOS*

II.1 - *Grupos e Subgrupos*

Um conjunto G de elementos a, b, c, ..., dotado de uma operação binária (denote *) envolvendo dois elementos de G é um grupo, se esta operação é fechada em G e: (a) associativa $a*(b*c) = (a*b)*c$; (b) existe um elemento neutro 1, $a*1 = 1*a = a$; (c) para cada elemento de G existe um inverso a^{-1}, $a*a^{-1} = 1$. Caso se adicione a condição $a*b = b*a$, então G diz-se comutativo ou abeliano.

A ordem g de um grupo com um número finito de elementos é o número destes elementos. Caso o número de elementos de G seja infinito G diz-se um grupo de ordem infinita.

Como exemplos de grupos podemos citar:

(1) O conjunto dos números inteiros incluindo zero e com a operação de adição.

(2) O conjunto das matrizes reais 3x3 com determinante não nulo com a operação produto.

(3) O conjunto $A = \{0,1\}$ com a seguinte operação (soma módulo 2):

$$a+b = \text{resto } (\frac{a+b}{2}) \quad , \quad a,b \in A \quad .$$

Por simplicidade, adotaremos daqui por diante a notação multiplicativa para a operação *.

Um subconjunto $H \subset G$ é um subgrupo de G, se com a mesma operação de G os elementos de H forma um grupo. Se $H \subset G$, $H \neq G$ então H é um subgrupo próprio de G. Evidentemente, o ele mento neutro de G deve estar contido em um subgrupo H.

Os elementos de um grupo G podem ser escritos em termos de certos parâmetros. Neste aspecto um grupo G comporta-se como sendo uma variedade e os mencionados parâmetros equivalem às coordenadas da variedade. Assim o grupo A do exemplo (3) acima, pode ser descrito em termos de um parâmetro Θ assumindo valores 0 e 1.

$$A = \{0,1\} = \{\Theta \in R \mid \Theta = 0 \quad \text{ou} \quad 0 = 1\} .$$

Neste caso temos um grupo finito de ordem 2 com 1 parâmetro . Por outro lado, considere o grupo de rotações em torno de um eixo fixo de R^3, com um ângulo de rotação Θ. Neste caso, temos novamente um grupo de um parâmetro. Caso o eixo mude de direção, teremos 3 outros parâmetros a considerar. Se a variação do ângulo Θ e dos três parâmetros do eixo for contínua, teremos um grupo contínuo de 4 parâmetros.

A dimensão de um grupo é o número máximo de parâmetros necessários para descrever todos os elementos do grupo.

Dado um grupo G, dois elementos p e q de G são ditos conjugados ou equivalentes quando existe um terceiro elemento a de G tal que

$$q = apa^{-1} \quad .$$

Denote $q \sim p$ (lê-se q equivalente ou conjugado a p). Notamos imediatamente que a conjugação define uma relação de equivalência no sentido de que: (a) a conjugação é reflexiva ($q \sim q$); (b) a conjugação é simétrica $q \sim p \longrightarrow p \sim q$; (c) a conjugação é transitiva $q \sim p$, $p \sim r \longrightarrow q \sim r$. A importância deste fato reside na existência de classes de equivalência em G. Isto é, podemos separar em G os subconjuntos formados pelos elementos equivalentes com relação a r (a classe de equivalência de G módulo r). É evidente que o elemento r pertence à classe. O elemento identidade de G pertence a qualquer classe de equivalência pois $I = rIr^{-1}$.

<u>Teorema</u> (II.1)

Dado um grupo G, o conjunto

$$rG = \{rx \mid x \in G \quad , \quad r \in G, \text{ fixo}\}$$

é idêntico ao próprio G.

De fato, se r é um elemento fixo em G, então à medida que variamos x os valores $rx \in G$ descrevem todos os elementos de G. Em particular, para $x = r^{-1}$, $rx = I$. Portanto o conjunto rG é o próprio G. Uma demonstração mais formal obtém-se provando que $rG \supset G$ e $rG \subset G$.

Se H é um subgrupo de G o conjunto rH onde r é um elemento fixo de G é denominado um <u>coset esquerdo</u> ou <u>classe lateral esquerda</u> de H. Note que agora H é apenas um subconjunto de G de modo que $rH \neq H$ pois agora o elemento r não necessita estar em H. Mesmo assim, o conjunto rH contém r. De fato, H contém I, logo $r = rI \in rH$. Consequentemente a classe lateral esquerda rH de H nem sempre é um grupo. Isto pode ocorrer somente quando $r \in H$ pois neste caso H sendo um subgrupo, contém n^{-1} e portanto $rr^{-1} = I \in rH$.

<u>Teorema</u> (II.2)

Se duas classes laterais esquerdas de um grupo G, aH e bH têm um elemento em comum elas são idênticas.

Temos $a,b \in G$, $H \subset G$, $a \in aH$, $b \in bH$. Seja x um elemento comum às 2 classes laterais. Então $x = ar$, $x = bs$, $r,s \in H$. Logo, $ar = bs$ e $a = bs\,r^{-1} = bt$, $t = sr^{-1} \in H$. Logo, $aH = \{am|m \in H\} = \{btm|m,t \in H\} = \{bn|n \in H\} = bH$.

De moto inteiramente análogo, às classes laterais esquerdas pode-se definir com propriedades semelhantes às classes laterais direitas Ha de um grupo G. Um subgrupo N de G tal que as classes laterais esquerda e direita são iguais $aN = Na$, é chamado um <u>subgrupo normal</u> de G. Da condição $aN = Na$ resulta

$$N = a^{-1}Na = \{q = a^{-1}xa|x \in N\ a \in G \text{ fixo}\} .$$

Em outras palavras, os elementos de um subgrupo normal de G são equivalentes entre si, o que significa que N define uma classe de equivalência em G.

Naturalmente pode-se definir classes laterais de subgrupos de G do mesmo modo como definimos classes laterais de G. Se A e B são 2 classes laterais esquerdas de um subgrupo normal N de G, $A = aN$ e $B = bN$, então o conjunto de elementos xy onde $x \in A$ e $y \in B$, pertencem a uma terceira classe lateral C de G, denotada por $C = AB$. Resulta que C é uma classe lateral de N. De fato, temos que $x = ap$ e $y = bq$, $p,q \in N$. Logo, os elementos de C são da forma $xy = apbq$. Entretanto, como N é um subgrupo normal as classes laterais esquerdas e direitas de N são idênticas. Isto é, se $p,q \in N$ tem-se que $apa^{-1}=r$ e $bqp^{-1} = s$ $r,s \in N$. Portanto, $ap = ra$ e $bq = sb$ e $xy =$

$= apbq = apsb$. Como $p,s \in N$, $ps \in N$ e, novamente usando o fato que N é normal $psb = bm$, $m \in N$. Logo, $xy = abm = cm$, $c = ab$, mostrando que xy pertence à uma classe lateral esquerda da N que é $C = AB = cN$.

O resultado acima permite considerar uma operação produto entre as diversas classes laterais de um grupo G definido do seguinte modo: Se A e B são duas classes laterais esquerda de um mesmo grupo G, formados com um mesmo subgrupo normal N de G, então o produto $C = AB$ é uma terceira classe lateral cN onde $c = ab$, $A = aN$ e $B = bN$.

Pode-se facilmente verificar que com esta operação produto o conjunto de todas as classes laterais de um subgrupo normal N de G forma um grupo[5]. O elemento identidade é a classe lateral $I = 1.N = N$ pois se A é outra classe lateral, $A = aN$, então

$$AI = AN = \{xy = cm | c = a.1,\ m \in N\} =$$

$$= \{z = am | m \in N\} = A \quad .$$

O elemento inverso de $A = aN$ é $A^{-1} = a^{-1}N$, pois $C = AA^{-1} = \{xy = cm | c = aa^{-1} = 1,\ m \in N\} = \{z = m | m \in N\} = N$.

Finalmente, observa-se que o produto das classes laterais é associativo: se $A = An$, $B = bN$, $C = cN$, então $(AB)C = (ab)cN = a(bc)N = A(BC)$. Este subgrupo formado pelo conjunto das classes laterais de N em G é chamado o <u>grupo quociente de G por aN</u> e é denotado por G/N. Intuitivamente podemos visualizar G/N do seguinte modo: como cada classe lateral formada com N define uma classe de equivalência em G, o conjunto de todas as classes laterais formadas com N, isto é, o grupo quociente

G/N, tem como elementos estas classes de equivalência. Como duas classes laterais distintas não podem ter um elemento comum, então os elementos de G/N são subconjuntos separados (disjuntos) em G. Portanto G/N representa a divisão de G em distintas classes de equivalência de N.

II.2 - *Homomorfismo de Grupos*

Se G e G' são dois grupos, um <u>homomorfismo</u> de G em G' é uma transformação de G em G' que preserva as leis de composição de G e G', isto é, uma aplicação

$$h:G \to G' \quad ,$$

tal que se $x,y \in G$, $xy \in G$ e $h(xy) = h(x)h(y) \in G'$. Embora estejamos usando a mesma notação multiplicativa para os 2 grupos, convém lembrar que na última expressão $h(x)h(y)$ é calculado segundo a lei de composição de G'.

Uma situação particular ocorre quando G' = G. Neste caso h é dito um <u>homomorfismo de G</u>.

O conjunto de elementos K de G que são levados por h no elemento identidade de G' é chamado o <u>núcleo do homomorfismo</u>. Se I' é o elemento identidade de G', então $x \in K$ se $h(x)=I'$.

Quando um homomorfismo $h:G \to G'$ admite uma inversa $h^{-1}:G' \to G$ então temos um <u>isomorfismo</u> entre G e G'. Neste caso a correspondência entre elementos de G e G' é 1:1, e o núcleo de um isomorfismo contém apenas o elemento identidade I de G. Um isomorfismo de G em G é chamado um <u>automorfismo</u> de G.

<u>Lema</u>:

Se h é um homomorfismo de G, então

$$h(x) = h(y) \longrightarrow x = y \quad .$$

De fato, $h(x^{-1})h(x) = h(x^{-1})h(y)$,
portanto, $h(I) = h(x^{-1}y)$ de onde decorre a propriedade.

<u>Teorema</u> (II.3)

O núcleo de um homomorfismo $h:G \to G'$ é um subgrupo normal de G.

Mostremos inicialmente que o núcleo de h é um subgrupo de G. Seja K o núcleo de h. Então a identidade de G está em K pois $I' = h(I)$. Por outro lado, se $x \in K$, x^{-1} também está em K pois $h(x)h(x^{-1}) = h(I) = I'$ mas como $h(x) = I'$ segue-se que $h(x^{-1}) = I'$.

Em seguida mostremos que K é normal, isto significa mostrar que $aK = Ka$, $a \in G$.

Seja $z \in aK$, isto é, $z = ax$, $x \in K$. Então, $h(z) = h(ax) = h(a)h(x) = h(a)$. Por outro lado, suponha em $t \in Ka$, isto é, $t = ya$, $y \in K$. Então $h(t) = h(y)h(a) = h(a)$. Portanto,

$$h(ta^{-1}) = h(t)h(a^{-1}) = h(a)h(a)^{-1} = I' \quad ,$$

mostrando que ta^{-1} também é um elemento de K. Como t depende de y, que é arbitrário, tome em particular $y = x$. Então $ta^{-1} = x$ e resulta que $ta^{-1} = a^{-1}z$, ou seja, $za = at$.

Note que z e t não pertence a k. Entretanto o homomorfismo prevê uma relação entre h e t. De $h(t) = h(a)$ e $h(z) = h(a)$, resulta $h(z) = h(t)$. Logo, $h(z^{-1})h(z) = h(z^{-1})h(t)$ ou

$h(z^{-1}t) = h(z^{-1}t)$, isto é, $h(I) = I' = h(z^{-1}t)$. Portanto, $z^{-1}t \in K$. Denote $z^{-1}t = u$, $u \in k$. Logo, $t = zu$. Por outro lado, $t = xa$ e $z = ax$. Portanto, $xa = axu$. Como $x,u \in K$, então $xu = v \in K$. Logo, $xa = av$, ou seja, $Ka = aK$.

<u>Teorema</u> (II.4)

Seja N um subgrupo normal de G. Então a aplicação $h:G \to G/N$ que associa a cada elemento de G a classe lateral à qual pertence é um homomorfismo de G cujo núcleo é N.

Sejam A e B duas classes laterais de $N: A = aN$, $B=bN$. *Então se* $x \in A$ *e* $y \in B$, $h(x) = A$, $h(y) = B$. Logo, $h(x)h(y) = AB = C$. Como A,B são elementos do grupo quociente G/N então C também pertence a G/N. Consideremos em seguida o produto xy e mostremos que se $x \in A$, $y \in B$, então $xy \in C = AB$. Podemos escrever $x = ar$, $y = bs$, $r,s \in N$. Portanto $xy = arbs$. Como $rb \in Nb$ *e* $Nb = bN$, *segue-se que* $rb = br'$, $r' \in N$. Logo, $xy = abr's$. Porém $r's \in N$, de onde $xy \in abN = AB = C$. Portanto temos que $xy \in AB$ e $h(xy) = h(x)h(y) \in AB$, mostrando que h é um homomorfismo.

Finalmente, para mostrar que N é o núcleo de h, basta *observar que no grupo G/N, N é o elemento* identidade. Se $x \in N$ e $N = 1N$ então $h(x) = N$, de modo que $h:N = \{$identidade de $G/N\}$.

II.3 - Grupos Contínuos

De acordo com o número de seus elementos um grupo pode se classificar como <u>grupo finito</u> quando o número de elementos for finito, ou grupo infinito em caso contrário. Por outro lado, um grupo infinito pode ter sua dimensão (número de parâmetros) finita ou infinita. Além disto, um grupo infinito pode ser classificado como sendo discreto quando o número de seus elementos é infinito mas enumerável. Quando o número de elementos é infinito e variam continuamente, então teremos um grupo infinito contínuo.

Um grupo G é dito um grupo de transformações quando os elementos de G são operadores em um espaço vetorial V denominado o espaço do grupo. Quando em particular os elementos do grupo são operadores lineares no espaço V o grupo de transformação é simplesmente denominado um grupo linear.

De modo geral, dizer que um grupo G é um grupo de transformações corresponde a identificar o espaço V onde o grupo atua. Assim, por exemplo, o grupo das matrizes reais 3 x 3 com determinante 1 é um grupo linear atuando em R^3.

Dado um grupo linear, podemos sempre associar a cada elemento do grupo uma matriz em uma base do espaço se $a \in G$ e $\{e_i\}$ é uma base de V, os elementos da matriz de a, a_{ij} são dados por

$$a(e_i) = a_{ij}e_j \quad . \tag{II.3.1}$$

Desta forma, os elementos do grupo linear G são naturalmente associados à uma representação matricial.

Os grupos de simetria dos diversos sistemas ou teorias físicas podem ser finitos, como no caso das simetrias das estruturas cristalinas que aparecem em teorias do estado sólido , ou podem ser grupos infinitos discretos em alguns casos especiais mas de modo particular, consideraremos aqui os grupos infinitos contínuos de transformação atuando em um espaço vetorial real, como é o caso das transformações de coordenadas em uma variedade, ou atuando em um espaço complexo, como ocorre no caso de transformações em um espaço de Hilbert em mecânica quântica.

Enquanto os grupos finitos possuem propriedades que podem caracterizá-los como sendo típicamente algébricos, os grupos contínuos possuem propriedades analíticas e geométricas. De fato, estes grupos podem ser descritos por uma estrutura de variedades análoga às descritas na Seção I.3.

Se G é um grupo contínuo com dimensão finita g, então os elementos de G são descritos como funções de seus parâmetros. Seja g o conjunto dos parâmetros independentes de G. Para cada elemento de G associamos um certo número de parâmetros que podem ser escritos como combinação linear dos g parâmetros independentes $\Theta_1 \dots \Theta_g$. Assim temos um conjunto de parâmetros P que é um espaço vetorial do tipo R^g, e cujos vetores são as enuplas $(\Theta_1, \dots, \Theta_g)$. Então podemos definir uma carta em G, (X,G), onde $X: G \to P$ associa a cada elemento $r \in G$ os parâmetros que o descrevem:

$$X(r) = (\theta_1, \dots, \Theta_g) \quad . \qquad (II.3.1)$$

Como anteriormente, X é inversível e

$$r = X^{-1}(\theta_1, \dots, \Theta_g) \quad . \qquad (II.3.2)$$

Por simplicidade, denotaremos daqui por diante $X^{-1}(\Theta_1, \dots\dots, \Theta_g) = X^{-1}(\Theta)$. Dizer que G é contínuo e seus elementos variam continuamente, significa que podemos sempre escolher um elemen to s tão próximo de r quanto se queira. Dito ainda de outro modo, podemos sempre selecionar uma vizinhança de um elemento r de G contendo outro elemento de G. Esta vizinhança é relacionada por X à uma vizinhança de P, que é bem definida por meio da noção de distância ou métrica em P.

Do mesmo modo como em uma variedade, os parâmetros associados a um determinado elemento de G não são únicos. Assim, se

$$r = x^{-1}(\Theta) \quad e \quad r = Y^{-1}(\Theta')$$

então se a composição

$$\Theta' = Y \circ X^{-1}(\Theta) \qquad (II.3.3)$$

é diferenciável, ela representa uma transformação de parâmetros da mesma forma como (I.3.1) representa uma transformação de coordenadas.

Assim o grupo G dotado de uma coleção de tais cartas é uma variedade. Evidentemente, esta estrutura de variedade deve ser compatível com a estrutura de grupo. Isto é, se Θ_{0i} são os parâmetros associados ao elemento identidade I de $G: I = X^{-1}(\Theta_{01},\ldots,\Theta_{0g})$. Então, se $r = X^{-1}(\Theta)$, da condição de grupo segue-se que $X^{-1}(\Theta)X^{-1}(\Theta_0) = X^{-1}(\Theta_0)X^{-1}(\Theta) = r$. Por outro lado, o elemento inverso de $r = X^{-1}(\Theta)$ é $r^{-1} = (X^{-1}(\Theta))^{-1} = X^{-1}(\overline{\Theta})$ tal que

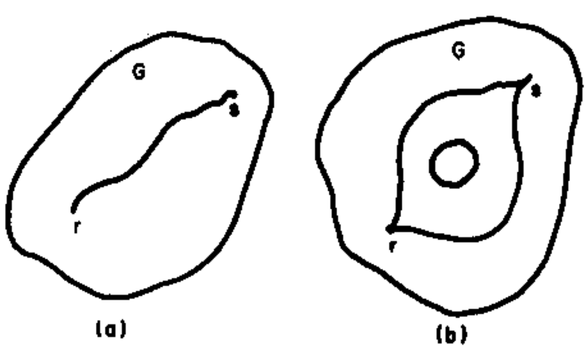
$$X^{-1}(\Theta)X^{-1}(\overline{\Theta}) = X^{-1}(\Theta)(X^{-1}(\Theta))^{-1} = X^{-1}(\Theta_0) = I \quad .$$

Finalmente, se $r = X^{-1}(\Theta)$, $s = X^{-1}(\Theta')$ então $rs = X^{-1}(\Theta)X^{-1}(\Theta') = X^{-1}(\Theta'') = t$, portanto

$$\Theta'' = X(X^{-1}(\Theta), X^{-1}(\Theta')) = \phi(\Theta, \Theta') \quad , \qquad \text{(II.3.4)}$$

onde ϕ denota a função resultante de Θ e Θ'. Esta relação entre os parâmetros é consequência da estrutura de grupo e aqui exigiremos que a função ϕ seja uma função analítica no sentido de que elas possam ser expandidas em série de potências convergente em uma determinada vizinhança U_X em P. Com esta exigência a variedade G é dita ser uma variedade analítica e olhada como grupo G, ele é dito ser um grupo de Lie finito de g parâmetros.

Como G é ao mesmo tempo um grupo e uma variedade, podemos associar ao mesmo propriedades tanto algébricas como geométricas. Assim, por exemplo, podemos definir em G uma curva exatamente como descrito na Fig. 4, isto é, como uma aplicação $\alpha: I \to G$, onde $X \circ \alpha$ deve ser diferenciável. Um grupo de Lie G é dito conexo quando dois de seus elementos r,s podem ser unidos por uma ou mais curvas de G (Fig. 8a). Por outro lado, G é multiplamente conexo quando existe múltiplas curvas ligando dois elementos de G, porém para estas curvas não podem ser levadas uma outra por deformações contínuas (Fig. 8b).



(a) (b)

Figura 8

Uma outra propriedade topológica é o fechamento do grupo. Um grupo de Lie é dito <u>fechado</u> quando os parâmetros Θ_i variam em um intervalo $a_i \leq \Theta_i \leq b_i$.

Quando os elementos do grupo de Lie G são operadores em um espaço vetorial V, temos um <u>grupo de Lie de transformação</u>. Se $r \in G$ e $x \in V$, então $r(x) = x' \in V$. Como $r = X^{-1}(\Theta)$, podemos expressar também

$$x' = X^{-1}(\Theta)(x) = f(\Theta,x) \qquad (II.3.5)$$

onde f deve ser uma função analítica dos parâmetros Θ. Esta analiticidade decorre da analiticidade de (II.3.4). De fato, a operação de transformação acima deve satisfazer às condições de grupo. Isto é, se $x' = f(\Theta,r)$ e $x'' = g(\Theta',x')$, então $x'' = g(\Theta',f(\Theta,x)) = f(\phi(\Theta,\Theta'),x) = g(\Theta'',x)$ onde g é analítica em Θ''. Além disto, a partir de (II.3.5) devemos ser capazes de obter a transformação inversa correspondente, pelo menos localmente, ao elemento inverso do grupo:

$$x = f^{-1}(x',\overline{\Theta}) \ .$$

Para que esta inversa exista é necessário que f seja uma função <u>regular</u> em x. Isto é, que sua matriz jacobiana

$$J(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

seja não singular.

Quando a transformação em V induzida por G é linear então os elementos de G possuem uma representação matricial naturalmente associada à uma base de V. Isto é, tomando a base $\{e_i\}$ de V, então de (II.3.5)

$$e'_i = f(e_j,\theta) = a_{ij}(\theta)e_j \quad ,$$

onde os g elementos da matriz $a_{ij}(\theta)$ são independentes. A seguir listamos alguns exemplos de grupos de Lie de transformação de uso frequente em física. Estes grupos são apresentados como se fossem definidos pelos seus elementos de matriz em uma base arbitrária do espaço do grupo. Observe que em alguns casos o grupo é formado por elementos complexos e estes grupos usualmente aparecem em mecânica quântica.

(a) $GL(n,R)$ — grupo linear real. Este é o grupo de todas as matrizes $n \times n$ reais não singulares. Trata-se de um caso particular do grupo linear n dimensional $GL(n)$, onde se impõe a condição de que as matrizes sejam reais. Neste caso temos n^2 parâmetros.

(b) $SL(n)$ — grupo unimodular ou especial. É o grupo de matrizes complexas $n \times n$ com determinante 1. Esta condição elimina um parâmetro entre os $n \times n$ parâmetros complexos, resultando $2n^2 - 2 = 2(n^2-1)$ parâmetros reais.

(c) $SL(n,R)$ — grupo real unimodular. Trata-se do caso particular do exemplo anterior quando as matrizes são reais, resultando a dimensão n^2-1.

(d) $U(n)$ — grupo unitário. Este é o grupo de todas as matrizes unitárias (isto é, tais que $UU^\dagger = 1$, onde $U^\dagger=(U^*)^T$ = =(conjugado hermitiano de U). Se U_{ij} são os elementos da matriz, a condição acima é $U_{ij}U^*_{kj} = \delta_{ik}$, ou seja:

$$U_{ij}U^*_{ij} = 1 \quad e \quad U_{ij}U_{kj} = 0 \quad i \neq k \quad .$$

A primeira expressão tem n equações reais e a segunda tem $n(n-1)/2$ equações complexas. Portanto, a dimensão de $U(n)$ é $2n^2 - n(n-1) - n = n^2$.

(e) *$SU(n)$ — grupo unitário especial. Este grupo é o caso particular* do anterior com a condição de que as matrizes tenham determinante 1. Isto implica na equação complexa $\det u = 1$, que elimina um parâmetro independente e portanto a dimensão de $SU(n)$ é n^2-1.

(f) $O(n)$ — grupo ortogonal. É o grupo formado pelas matrizes reais ortogonais. A condição de ortogonalidade $OO^T = 1$ *nos dá $n(n+1)/2$ equações reais. Portanto $O(n)$ tem dimen*são $n^2-n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Observe que a notação mais correta para este grupo seria $O(n,R)$. Entretanto a situação complexa $O(n,C)$ é igual ao grupo $U(n)$, pois no caso complexo a unitariedade corresponde à ortogonalidade.

(g) $SO(n)$ — grupo ortogonal especial. Trata-se do caso especial de $O(n)$ quando $\det O = 1$. A sua dimensão é $n(n-1)/2$. *Este é o grupo de rotações em um espaço vetorial n*-dimensional.

Da definição de isomorfismo entre grupos, resulta que dois grupos de Lie são isomorfos quando possuem o mesmo número de parâmetros independentes e a expressão de relação entre os parâmetros (II.3.4) é a mesma para os dois grupos. Assim, por exemplo, se G é o grupo $SO(2)$ e G' é o grupo de transformações *em R definido por*

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{a\xi + d} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a & d \end{vmatrix} = 1 \quad .$$

Então, tanto G como G' têm o mesmo número de parâmetros independentes que é 3. Além disto os elementos G e G' podem ser representados por matrizes reais 2 x 2 com determinante 1. Portanto, G é isomorfo a G'.

II.4 - *Álgebra de Lie de um Grupo de Lie*

Considere que temos uma transformação em um espaço vetorial V gerada por um grupo de Lie. Explicitamente

$$x'^i = f^i(x^1 \ldots x^n , \Theta_1 \ldots \Theta_g) = f^i(x^i,\Theta_\mu) \quad . \qquad (II.4.1)$$

Se $x'^i + dx'^i$ são as coordenadas de um ponto nas proximidades do ponto de coordenada x'^i, então partindo da hipótese de continuidade dos parâmetros podemos supor que existem valores dos parâmetros $\delta\Theta_1 \ldots \delta\Theta_g$ suficientemente pequenos tais que

$$x'^i + dx'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n , \Theta_1 + \delta\Theta_1, \ldots, \Theta_g + \delta\Theta_g) \quad .$$

Como f^i é função analítica dos parâmetros podemos expandir o lado direito da equação acima em uma série de Taylor em torno de $\delta\Theta_\mu = 0$, obtendo

$$dx'^i = \Sigma \left. \frac{\partial f^i(x,\Theta+\delta\Theta)}{\partial\Theta_\nu} \right|_{\delta\Theta=0} \delta\Theta_\nu \ldots = \Sigma\, a_{i\nu}(x)\delta\Theta_\nu \ldots \quad . \qquad (II.4.2)$$

onde $a^{i\nu} = \left. \frac{\partial f^i(x,\Theta+\delta\Theta)}{\partial\Theta_\nu} \right|_{\delta\Theta=0}$. Caso $\delta\Theta_\nu$ seja suficientemente pequeno, podemos desprezar os restantes termos da série.

Considere agora uma função diferenciável $h:V \to R$. Queremos saber como h varia sob a transformação infinitesimal aci ma. Como h é contínua, é razoável supor que a variação de h será um infinitesimal dh dado por

$$dh = \Sigma \frac{\partial h}{\partial x'^{i}} dx^{i} = \Sigma \frac{\partial h}{\partial x'^{i}} a^{i}{}_{\mu}(x)\delta\Theta_{\mu} =$$

$$= \Sigma\ \delta\Theta_{\mu}(\Sigma\ a^{i}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{i}})h = \Sigma\ \delta\Theta_{\mu}X_{\mu}h \quad , \qquad (II.4.3)$$

onde denotamos

$$X_{\mu} = a^{i}{}_{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i}} \qquad (II.4.4)$$

que é um operador diferencial linear atuando no espaço F das funções diferenciais em V. Estes operadores são denominados os operadores infinitesimais do grupo de Lie.

Naturalmente a variação dh produz uma nova função h'

$$h' = h + dh = (1 + \Sigma\ \delta\Theta_{\mu}X_{\mu})h \quad .$$

Em particular, se h é a própria coordenada x^{i} obtemos a transformação infinitesimal das coordenadas de um ponto do espaço:

$$x'^{i} = x^{i} + dx^{i} = (1 + \Sigma\ \delta\Theta_{\mu}X_{\mu})x^{i} = x^{i} + \Sigma\ \delta\Theta_{\mu}a^{i}{}_{\mu} \ . \qquad (II.4.6)$$

A combinação linear de dois operadores infinitesi - mais X_{μ}, Y_{μ} é novamente um operador infinitesimal definido por $(aX_{\mu} + bY_{\mu})f = aX_{\mu}f + bY_{\mu}f$, $a,b \in R$. Com esta definição o conjunto de operadores infinitesimais atuando em um espaço vetorial é um espaço vetorial. Além disto, decorre de (II.4.3) que qualquer outro operador infinitesimal $\bar{L}$ em V é uma combinação linear dos operadores X_{μ}

$$\bar{L} = \Sigma\ \delta\Theta_{\mu}X_{\mu} \quad . \qquad (II.4.5)$$

Finalmente, os operadores X_μ são linearmente independentes. De fato, se $C_\mu \in R$, então $\Sigma C_\mu X_\mu = 0$ implica em $\Sigma C_\mu X_\mu(x^i) = 0$, ou seja, $\Sigma C_\mu a^i{}_\mu = 0$ mas $\det a^i{}_\mu \neq 0$, de modo que $C_\mu = 0$. Portanto os operadores infinitesimais formam uma base do espaço vetorial dos operadores infinitesimais.

O comutador entre 2 operadores infinitesimais X_μ e X_ν é definido por

$$\left[X_\mu, X_\nu\right] = X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu =$$

$$= a^i{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^i} a^j{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^j} - a^j{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^j} a^i{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^i} =$$

$$= (a^i{}_\mu \frac{\partial a^j{}_\nu}{\partial x^i} - a^j{}_\nu \frac{\partial a^i{}_\mu}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad . \qquad \text{(II.4.7)}$$

<u>Teorema</u> (II.5)

O comutador entre dois operadores infinitesimais de um grupo de Lie é uma combinação linear dos operadores infinitesimais X_μ.

Consideremos duas transformações de coordenadas consecutivas em V. Uma de x para x' com parâmetros Θ_μ, dada por (II.4.1) e a outra infinitesimal de x' para $x'+dx'$ com parâmetros $\delta\Theta_\mu$ dada por (II.4.6). Então decorre da propriedade (II.3.5) que a relação entre os parâmetros das duas transformações:

$$\Theta_\mu + d\Theta_\mu = \phi_\mu(\Theta_1, \ldots, \Theta_g , \delta\Theta_1, \ldots, \delta O_g)$$

deve ser analítica. Portanto expandindo o lado direito em série de Taylor convergente em torno de $\delta\Theta_\mu = 0$, segue-se que

$$\theta_\mu + d\theta_\mu = \phi_\mu(\theta_1,\dots,\theta_g\ ,\ 0,\ \dots,\ 0) + \Sigma \left.\frac{\partial\phi_\mu(\theta,\delta\theta)}{\partial\delta\theta_\nu}\right|_{\delta\theta=o} \delta\theta_\nu + \dots$$

$$= \theta_\mu + \chi_{\mu\nu}(\theta)\,\delta\theta_\nu + \dots \ , \qquad \text{(II.4.8)}$$

onde denotamos

$$\chi_{\mu\nu}(\theta) = \left.\frac{\partial\phi_\mu(\theta,\delta\theta)}{\partial\delta\theta_\nu}\right|_{\delta\theta=o} \qquad \text{(II.4.9)}$$

e usamos o fato de que $\phi_\mu(\theta,0) = \theta_\mu$ pois para $\delta\theta_\sigma = 0$ obtemos a identidade $\theta_u = \phi_u(\theta_1,\dots,\theta_2\ ,\ 0,\ \dots,\ 0)$. Admitindo que os valores $\delta\theta_\mu$ são suficientemente pequenos de modo que seus produtos sejam desprezíveis em presença de $\delta\theta_\mu$, podemos desprezar os demais elementos da série. Portanto identificamos

$$d\theta_\mu = \chi_{\mu\nu}(\theta)\,\delta\theta_\nu \ .$$

Das propriedades de grupo segue-se que podemos inverter esta equação. Se $\overline{\chi}_{\mu\nu}(\theta)$ denota os elementos da matriz inversa de $\chi_{\mu\nu}(\theta)$, escrevemos

$$\delta\theta_\mu = \overline{\chi}_{\mu\nu}(\theta)\,d\theta_\nu \ .$$

Portanto em (II.4.2),

$$dx'^i = \Sigma\, a^i{}_\mu \chi_{\mu\nu}(\theta)\,d\theta_\nu \quad ,$$

de onde tiramos

$$\frac{\partial x'^i}{\partial\theta_\nu} = \Sigma\, a^i{}_\mu\, \overline{\chi}_{\mu\nu}(\theta) \ . \qquad \text{(II.4.10)}$$

Esta equação descreve o movimento de um ponto em V a partir de sua posição inicial x correspondente a $\theta_\mu = 0$. As funções coordenadas $x^i(\theta)$ sendo diferenciáveis em θ_μ, satisfazem $\partial^2 x^i/\partial\theta_\mu\partial\theta_\nu = \partial^2 x^i/\partial\theta_\nu\partial\theta_\mu$, isto é

$$\frac{\partial a^i{}_\nu \bar{X}_{\nu\mu}}{\partial\theta_\lambda} = \frac{\partial a^i{}_\nu \bar{X}_{\nu\lambda}}{\partial\theta_\mu} .$$

Ou seja

$$a^i{}_\nu \left(\frac{\partial\bar{X}_{\nu\mu}}{\partial\theta_\lambda} - \frac{\partial\bar{X}_{\nu\lambda}}{\partial\theta_\mu}\right) + \bar{X}_{\nu\mu}\frac{\partial a^i{}_\nu}{\partial\theta_\lambda} - \bar{X}_{\nu\lambda}\frac{\partial a^i{}_\nu}{\partial\theta_\mu} = 0 .$$

Notando que $a^i{}_\nu(\theta) = a^i{}_\nu(x^j(\theta))$ temos novamente usando (II.4.9)

$$\frac{\partial a^i{}_\nu}{\partial\theta_\lambda} = \frac{\partial a^i{}_\nu}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\theta_\lambda} = \frac{\partial a^i{}_\nu}{\partial x^j} a^i{}_\rho \bar{X}_{\rho\lambda} .$$

Portanto, substituindo na expressão acima obtemos

$$\frac{\partial C^\nu_{\tau\sigma}(\theta)}{\partial\theta_\mu} a^i{}_\nu = 0 . \qquad \text{(II.4.13)}$$

Agora as funções $a^{i\nu}(x)$ são definidas por (II.4.2) e como a matriz formada por estes elementos é inversível tendo posto g, resulta finalmente que

$$\frac{\partial C^\nu_{\tau\sigma}(\theta)}{\partial\theta_\mu} = 0 ,$$

mostrando que $C^\nu_{\tau\sigma}(\theta)$ são constantes em θ, que passamos a denotar por $C^\nu_{\tau\sigma}$. Estas constantes são denominadas as <u>constantes de estrutura</u> do grupo de Lie.

Considerando (II.4.12), (II.4.4) e a definição da comutador *(I.4.7)*, resulta

$$\left[X_\mu, X_\nu\right] = C^\lambda_{\mu\nu} a^j{}_\lambda \frac{\partial}{\partial x^j} = C_{\mu\nu} X_\lambda \ , \qquad (II.4.14)$$

o que demonstra o teorema.

De (II.4.12) deduz-se também que

$$C^\tau_{\mu\nu} = - C^\lambda_{\nu\mu} \quad . \qquad (II.4.15)$$

Além disto, os comutadores definidos por (II.4.7) satisfazem à identidade de Jacobi

$$\left[[X_\lambda, X_\mu], X_\nu\right] + \left[[X_\nu, X_\lambda], X_\mu\right] + \left[[X_\mu X_\nu], X_\lambda\right] = 0 \quad ,$$

que em virtude de (II.4.14) pode ser escrita como

$$C^\rho_{\lambda\mu} C^\sigma_{\rho\nu} + C^\rho_{\nu\lambda} C^\sigma_{\rho\mu} + C^\rho_{\mu\nu} C^\sigma_{\rho\lambda} = 0 \quad . \qquad (II.4.16)$$

Conforme vimos, o conjunto dos operadores infinitesimais é um espaço vetorial. Com a definição do comutador entre 2 operadores infinitesimais, pode-se definir uma operação produto neste espaço que é fechada em virtude de (II.4.14). Com este produto o espaço dos operadores infinitesimais passa a ter uma estrutura de álgebra, denominada a álgebra de Lie do grupo de Lie.

A importância desta álgebra está contida nos resultados obtidos por Lie que estabeleceu a inversão do teorema acima. Isto é, dado um conjunto de constantes $C^\lambda_{\mu\nu}$ satisfazendo (II.4.15) e (II.4.16) então pode-se achar as funções $\overline{X}_{\mu\nu}$ e $a_{i\mu}$ satisfazendo às equações diferenciais (II.4.12). Uma vez obtidas estas funções podemos incorporá-las na equação (II.4.10):

$$\frac{\partial x^i}{\partial \theta_\mu} = \overline{X}_{\nu\mu}(\Theta) X_\nu x^i \quad , \quad \overline{X}_{\nu\mu}(0) = \delta_{\nu\mu} \qquad (II.4.17)$$

e por integração, obter o grupo de transformação de Lie. Assim, grande parte das propriedades dos grupos de Lie podem ser estudadas através da álgebra de Lie do grupo[6,7].

Considere em seguida uma reparametrização na variedade do grupo de parametrização carteziana para uma parametrização polar.

Como já dissemos, o conjunto dos parâmetros de um grupo de Lie é composto por enuplas, ordenadas $(\Theta_1,\ldots,\Theta_g)$ que gera um espaço vetorial do tipo R^g. Podemos expressar cada um destes parâmetros em termos do produto de dois parâmetros s_i e t:

$$\Theta_i = s_i t \quad , \qquad \text{(II.4.18)}$$

de modo que cada "vetor" $\Theta_1,\ldots,\Theta_g$, do espaço de parâmetros define uma reta neste espaço passado pela origem e dada pela equação acima com direção s_i e parâmetro t. Neste caso, cada transformação do grupo corresponde a um ponto em cada uma destas retas. A transformação identidade corresponde à origem, ou seja, ao valor $t = 0$ no espaço dos parâmetros, o que em (II.4.1)

$$x'^i = f^i(x,0) \ .$$

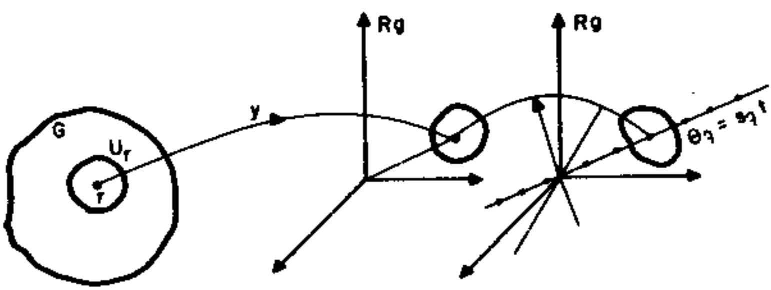


Figura 9

Como estamos lidando com um grupo de transformações, à cada elemento do grupo associado $\theta_1,\ldots,\theta_g$, corresponde um operador $S(\theta_1,\ldots,\theta_g)$ atuando no espaço do grupo. Estes operadores são funções dos parâmetros do grupo e na reparametrização polar $S(\theta_1,\ldots,\theta_g) = S(s_1t_1,\ldots,s_gt)$, temos que para cada conjunto de valores fixos de $s_1,\ldots,s_g$, isto é, para cada uma das retas (II.4.18) o operador S dependerá de t e podemos denotá-lo por S(t). Nesta situação, a transformação de coordenada $x^i(0)$ para $x^i(t)$ pode ser simbolicamente representada por

$$x^i(t) = S(t)x^i(0) \quad ,$$

de onde, usando (II.4.17) e (II.4.18)

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{\partial x^i}{d\theta_\mu}\frac{d\theta_\mu}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial\theta_\mu}s_\mu = s_\mu\bar{X}_{\nu\mu}(\theta)X_\nu x^i \quad ,$$

ou

$$\frac{dS(t)}{dt} = s_\mu\bar{X}_{\nu\mu}(s_\rho,t)X_\nu S(t) \ .$$

Tomando este valor em $t = 0$, lembrando que $S(0) = 1$ e $\bar{X}_{\nu\mu}(0) = \delta_{\nu\mu}$

$$\left.\frac{dS(t)}{dt}\right|_{t=0} = s_\mu X_\mu \ .$$

Agora, como as funções f^i em (II.4.1) são analíticas em θ, segue-se que os operadores S(t) devem também ser analíticos em t. Portanto a expansão em série de Taylor de S(t) em torno de $t = 0$ é convergente:

$$S(t) = S(0) + t\left.\frac{dS}{dt}\right|_0 + \ldots ,$$

ou

$$S(t) = 1 + ts_\mu X_\mu + \ldots . \quad (II.4.19)$$

Aplicando este operador em $x^i(0)$ resulta em

$$x^i(t) = x^i(0) + ts_\mu X_\mu x^i(0) + \ldots \quad (II.4.20)$$

Desta expressão pode-se concluir que qualquer valor de $x^i(t)$ *pode ser obtido a partir do valor inicial $x^i(0)$ bastando para* isto considerar os sucessivos termos na série de Taylor.

Seria desejável obter a transformação correspondente *ao comutador $[X_\mu, X_\nu]$ de dois operadores infinitesimais. Consi*deremos um segundo operador $T(t)$ correspondente à transforma - ção com parâmetros $\theta'_\mu = s'_\mu t$. Do mesmo modo, por expansão em *série de Taylor obtemos*

$$T(t) = 1 + ts'_\mu X_\mu + \ldots ,$$

que aplicado a $x^i(0)$ nos dá

$$x'^i(t) = x^i(0) + ts'_\mu X_\mu x^i(0) + \ldots .$$

Calculando a expansão de Taylor até *ordem* 2 de $S^{-1}(t)T^{-1}(t)S(t)T(t)$ obtemos, usando as expressões acima:

$$S^{-1}(t)T^{-1}(t)S(t)T(t) \sim 1 + t^2 s_\mu s_\nu [X_\mu X_\nu] . \quad (II.4.21)$$

Aplicando em $x^i(0)$ resulta na transformação procurada

$$x'^i(t) = x^i(0) + t^2 s_\mu s_\nu [X_\mu X_\nu] x^i(0) + \ldots \quad (II.4.22)$$

Esta expressão permite-nos combinar os teoremas de álgebra de Lie com as propriedades de continuidade (*analiticidade do grupo de Lie*, expressas pelas transformações infinitesimais). Reciprocamente, podemos usar esta relação para expressar propriedades analíticas do *grupo em termos de álgebra de Lie. Assim*, por exemplo, considerando um grupo de Lie abeliano, os operadores da álgebra de Lie deste grupo satisfazem ST = TS o que implica que $S^{-1}T^{-1}ST = S^{-1}ST^{-1}T = 1 = 1$. *Pela relação (II.4.21)* isto implica em

$$\left[X_\mu, X_\nu\right] = 0 \quad ,$$

ou seja, por (II.4.14): $C^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. Neste caso temos uma álgebra de Lie onde o produto de dois de seus elementos é sempre zero.

A teoria dos subgrupos de Lie pode também ser traduzida em termos das respectivas subálgebra. Assim se H é um subgrupo de G com h operadores infinitesimais, os g-h operadores *de G restantes estão no subgrupo complementar G-H*. Como H é um subgrupo o comutador entre dois operadores infinitesimais de H estará em H:

$$\left[X_\mu X_\nu\right] = C^{\tau}_{\mu\nu}X_\lambda \quad , \quad \lambda = 1 \ldots h \quad ,$$

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \qquad , \quad \lambda = h+1 \ldots g \quad .$$

Um subgrupo normal de um grupe de Lie G é denominado um <u>subgrupo invariante</u> *de G. Para um subgrupo invariante N temos* $rN = Ns$, $r,s \in G$ o que implica que se $p,q \in N$, $r \in G$, $p^{-1}r^{-1}pr \in N$. Em termos de operadores isto corresponde a dizer que se *P(t) é um operador do subgrupo N e R(t) um operador de G*, então $P^{-1}R^{-1}PR$ é um operador de N. Mas por (II.4.21) isto implica que o comutador $[X_\mu, X_\nu]$ deve ser um operador infinitesimal de N. Novamente de (II.4.14) resulta que

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \lambda = h+1 \ldots g \ .$$

Um grupo de Lie é dito simples quando não possue subgrupos invariantes próprios. Neste caso a equação acima não pode ter solução.

Finalmente, um grupo de Lie G é dito semisimples quando não possue subgrupos invariantes abelianos. Isto é, G é semisimples se

$$C^{\lambda}_{\mu\nu}{}' = 0 \quad , \quad \mu, \nu = 1 \ldots g \ ,$$

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \lambda = h+1 \ldots g \ .$$

III - *ISOMETRIAS*

III.1 - *Derivada Covariante em M*

Na descrição do meio ambiente físico por meio de uma variedade diferenciável, admitimos que esta variedade seja um espaço-tempo de uma determinada teoria física fundamental que contém um conjunto de leis físicas com propriedades de simetria bem definidas. Procuraremos agora caracterizar em propriedade de simetria de objetos geométricos no espaço-tempo e em particular analisar as simetrias do tensor métrico.

A caracterização das simetrias de um objeto geométrico pode ser descrita,a grosso modo, como sendo o resultado da análise da variação local deste objeto sob uma dada transformação de coordenada na variedade. Nesta seção assumiremos que os objetos em estudo são tensoriais, podendo inclusive ser funções (escalares) considerada como tensores de ordem zero.

Seja M o espaço-tempo em questão e $f:M \to R$ uma função diferenciável em M. Para avaliar localmente a variação de f em uma direção v de $T_p(M)$, basta calcular sua derivada direcional dada por (I.4.1). Por outro lado, a variação local de um campo vetorial W em uma direção v em um ponto p é dada pela <u>derivada covariante</u> de W com relação a V em p:

$$\nabla_v W(p) = \frac{d}{dt} W(\alpha)\Big|_{t=t_o} \qquad \text{(III.1.1)}$$

onde $\alpha(t)$ é a curva tal que $\alpha'(t_o) = V$ e $\alpha(t_o) = p$. O resultado é um vetor de $T_p(M)$. Admitindo que isto vale para todos os pontos de uma região, o resultado é um campo vetorial

$$\nabla_{\alpha'} W = \frac{d}{dt} W(\alpha)$$

Desta definição decorrem as seguintes propriedades (que o leitor pode verificar facilmente):

(a) linearidade em $W: \nabla_V(aW+bW') = a\nabla_V W + b\nabla_V W'$

(b) linearidade em $V: \nabla_{aV+bV'}(W) = a\nabla_V W + b\nabla_{V'} W$

(c) se $f: M \to R: \nabla_V f = V[f]$ e $\nabla_V(fW) = V[f]W + f\nabla_V W$.

Seja $\{e_i\}$ uma base de campo em M. Isto é, um conjunto de 4 campos vetoriais em M tais que em cada ponto p, $\{e_i(p)\}$ é uma base de $T_p(M)$. Então podemos calcular a derivada covariante de e_i com relação a e_j obtendo um outro campo vetorial que se escreve como combinação linear de e_k, isto é,

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k \quad . \qquad \text{(III.1.2)}$$

Os coeficientes Γ^k_{ij} são denominados os símbolos de Christoffel da conexão afim ∇ de M na base $\{e_i\}$. Pode-se verificar que Γ^k_{ij} não são quantidades tensoriais em M.

Em termos de componentes podemos expressar a derivada covariante de um campo vetorial em função dos símbolos de Christoffel. Escrevendo $W = W^i e_i$ e $V = V^j e_j$ obtemos:

$$\nabla_V W = \nabla_V(W^i e_i) = V[W^i]\, e_i + W^i \nabla_V e_i =$$

$$= V[W^i]\, e_i + W^i \nabla_{V^j e_j} e_i = V[W^i]\, e_i + W^i V^j \nabla_{e_j} e_i$$

$$= (\frac{\partial W_k}{\partial x^j} V^j + W^i V^j \Gamma^k_{ij}) e_k \quad . \qquad \text{(III.1.3)}$$

Em particular, tomando $V = e_m$, isto é, $V^j = \delta^j_m$, temos

$$\nabla_{e_m} W = (\frac{\partial W^k}{\partial x^m} + W^i \Gamma^k_{im}) = W^k{}_{;m} e_k \quad ,$$

onde denotamos

$$W^k{}_{;m} = \frac{\partial W^k}{\partial x^m} + W^i \Gamma^k_{im} \qquad \text{(III.1.4)}$$

De modo análogo, pode-se calcular a derivada covariante de um tensor $T = T^{ij} e_i \otimes e_j$, obtendo

$$\nabla_V T = V\left[T^{ij}\right] e_i \otimes e_j + T^{ij} \nabla_V (e_i \otimes e_j) =$$

$$= V\left[T^{ij}\right] e_i \otimes e_j + T^{ij} V^k (\nabla_{e_k} e_i \otimes e_j + e_i \otimes \nabla_{e_k} e_j)$$

$$= (\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} V^k + T^{mj} V^k \Gamma^i_{km} + T^{im} V^k \Gamma^j_{km}) e_i \otimes e_j \quad .$$

Em particular, se $V = e_n$ e denotando

$$T^{ij}{}_{;n} = (\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^n} + T^{mj} \Gamma^i_{nm} + T^{im} \Gamma^j_{nm}) \quad , \qquad \text{(III.1.5)}$$

obtemos

$$V_{e_m} T = T^{ij}{}_{;m} e_i \times e_j \quad .$$

Derivadas covariantes de 1-formas (vetores covariantes) e de tensores mistos são obtidos de modo análogo, respeitando as posições dos respectivos índices.

O interesse que temos nestas derivadas reside no fato de que elas medem a variação de um objeto geométrico tensorial e é precisamente esta variação que queremos estudar.

III.2 - *Grupos de Difeomorfismo a 1 Parâmetro*

Recapitulando, no Capítulo I falamos sobre os objetos e equações que são submetidos às simetrias. Falamos também sobre a variedade onde estes objetos devem ser definidos. Em seguida, no Capítulo II falamos sobre grupos de modo geral e de grupos contínuos de transformação atuando em um certo espaço vetorial. Para formalizar a idéia de simetria, procuramos unir os resultados de I e II, caracterizando grupos contínuos de transformação sobre uma variedade. Seja $\{x^i\}$ um sistema de coordenadas em M e G um grupo de Lie de transformação atuando no espaço de coordenadas de M, promovendo transformações do tipo (I.3.5):

$$x'^i = f^i(x^1 \cdots x^4, \theta_1 \dots \theta_g) .$$

Como as funções f^i são analíticas em θ, a expansão em série de Taylor em torno de $\theta = 0$ é convergente e até o termo de primeiro grau substituindo $\theta_\mu = s_\mu t$ de acordo com (II.4.18) e (II.4.20), obtemos

$$x'^i(t) = x^i(0) + ts_\rho X_\rho x^i(0) \quad . \qquad \text{(III.2.1)}$$

Conforme dissemos anteriormente, os números ordenados s_ρ definem a direção de uma reta em R^n passando pela origem. Para cada reta temos uma transformação de G cujo valor final depende do valor do parâmetro t. Assim, para um determinado valor t_o, $x^i(t_o)$ são as coordenadas de um ponto de variedade e $x'^i(t_o)$ são as coordenadas de um ponto nas vizinhanças do primeiro. Neste ponto podemos definir um vetor tangente em $T_p(M)$ cujas componentes na base natural associada ao sistema de coordenada $x^i(0)$ são ($t_o = 0$):

$$\xi^i(x,0) = s_\rho X_\rho x^i(0) \quad .$$

Tomando $x'^i(t)$ suficientemente próximo de $x^i(0)$ o vetor acima terá módulo infinitesimal. Referimo-nos a este vetor como sendo o descritor da transformação infinitesimal de coordenadas (III.2.1) que pode ser escrita como

$$x'^i(t) = x^i(0) + t\xi^i(x^i,0) \quad . \qquad (III.2.1)$$

Para cada conjunto de valores fixos dos parâmetros s_ρ a transformação infinitesimal acima dependerá apenas dos valores atribuidos a t. Portanto, fixando s_ρ obtemos uma transformação infinitesimal das coordenadas dos pontos de variedade, dependendo de apenas 1 parâmetro. Se p(0) é o ponto de coordenadas $x^i(0)$ e p(t) é o ponto de coordenadas $x^i(t)$, então notamos que a transformação acima induz uma aplicação diferenciável

$$h_t : M \rightarrow M$$

tal que $h_t(p(0)) = p(t)$. Então para t = 0 obtemos a transformação identidade $h_o(p(0)) = p(0)$. Por outro lado, se $p(t) = h_t(P(0))$ e $p(t') = h_{t'}(p(t))$, então definimos a composta $h_{t'} \circ h_t$ por

$$p(t') = h_{t'} \circ h_t(p(0)) = h_{t'+t}(p(0)) \quad .$$

Finalmente, para cada $h_t(p)$ existe uma inversa $(h_t)^{-1} = h_{-t}$ tal que

$$p(0) = (h_t)^{-1}(p(t)) = h_{-t} \circ h_t(p(0)) = h_o(p(0)) \ .$$

Note também que com a definição de composição acima, temos que a associatividade é satisfeita:

$$h_t o(h_{t'} \circ h_{t''}) = h_t o(h_{t'+t''}) = h_{(t+t')+t''} = (h_t \circ h_{t'}) \circ h_{t''} \ .$$

Além disto, a composição é também comutativa: $h_t \circ h_{t'} = t_{t+t'} = t_{t'} \circ h_t$. Portanto o conjunto de aplicações h_t define um grupo abeliano, contínuo, de transformações de 1 parâmetro na variedade. Este grupo é denominado o <u>grupo de difeomorfismos de 1 parâmetro</u> na variedade induzido por cada descritor ξ^i e é denotado por G_1.

Para cada ponto p o grupo G_1 associa uma curva em M definida por

$$\alpha(t) = h_t(p) \ .$$

Esta curva é denominada a <u>órbita</u> de p gerada por G_1. Se x^i são as coordenadas de p então as coordenadas de um ponto p' da órbita $\alpha(t)$ são dadas por

$$x'^i(t) = x^i + t\xi^i(x) + \ldots$$

Desta expressão concluimos que o vetor tangente à órbita é o próprio descritor

$$\xi^i = \frac{\partial x'^i}{dt} \qquad \text{(III.2.2)}$$

<u>Teorema</u> (III.2)

Cada ponto de M está contido em apenas uma ór -

bita de G_1.

Sejam p e q dois pontos distintos de M tais que a órbita de p não contenha q e vice-versa. Admitamos que as duas órbitas contêm um ponto comum r

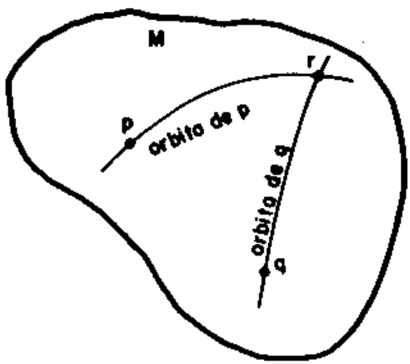


Figura 10

então existem números t_1 e t_2 tais que

$$r = \alpha(t_1) = h_{t_1}(p) \quad , \quad r = \beta(t_2) = h_{t_2}(q) \quad .$$

logo, $h_{t_1}(p) = h_{t_2}(q)$. Como h_t é um difeomorfismo, existe a inversa $(h_t)^{-1}$. Logo, $p = h_{t_2 - t_1}(q) = h_{t_3}(q)$, o que mostra a existência de um valor do parâmetro t tal que $p = \beta(t_3)$. Mas p não pode pertencer à órbita de q. Portanto, não é possível a existência dos valores t_1 e t_2, tais que r pertença às duas órbitas simultaneamente. Portanto, as órbitas de G_1 nunca se encontram.

O conjunto de todas as órbitas de G_1 em M é denominado a <u>trajetória</u> de G_1. Trata-se pois de uma congruência de curvas em M (Fig. 11, pág. 66).

Seja f uma função definida em M. O vetor tangente à órbita $\alpha(t)$ do ponto $p = \alpha(t_o)$ é tal que

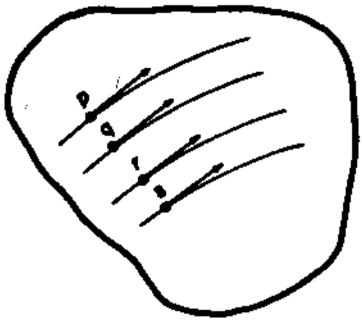


Figura 11

$$\xi^i(p)\,[f] = \frac{d}{dt}\,(f(h_t(p))\Big|_{t_o} = \frac{d}{dt}\,f(\alpha(t))\Big|_{t_o} = \alpha'(t_o)\,[f] \;. \qquad \text{(III.3.3)}$$

Portanto, dado G_1 é sempre possível determinar o campo tangente às órbitas. Entretanto o inverso não é sempre uma verdade[8]. Isto é, dado um campo vetorial ξ^i não podemos garantir a existência de um G_1 associado a ξ^i. Isto dependerá da existência das curvas integrais do campo ξ^i. Entretanto, se nos limitarmos a valores pequenos de t então as órbitas de um grupo G_1 podem ser consideradas como sendo curvas integrais dos campos ξ^i nas vizinhanças de um ponto. O resultado é uma trajetória que é apenas localmente definida e portanto pertence a um <u>grupo G_1 local</u> definido do seguinte modo: seja $p \in M$ e U_p uma vizinhança de p. Seja $\varepsilon > 0$ e considere a família de aplicações $h_t: M \to M$ tais que: (a) $t < \varepsilon$; (b) h_t é um difeomorfismo de U_p sobre $h_t(U_p)$; (c) a aplicação h_t é diferenciável em t para $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ e (d) se $|t|$, $|s|$, $|t+\varepsilon| < \varepsilon$ e $q \in U_p$, então $h_t \circ h_s(q) = h_{t+s}(q)$.

Pode-se mostrar que um campo vetorial ξ^i em M é sempre localmente integrável. Deste modo podemos reduzir o problema de determinação de simetrias locais de objetos em M ao problema de determinação dos campos vetoriais descritores ξ^i.

III.3 - *Derivadas de Lie*

Seja Ω um objeto geométrico tensorial em M. Queremos determinar o descritor de uma transformação infinitesimal em M tal que seja uma simetria local de Ω. O resultado se apresentará como uma equação diferencial definida em M envolvendo o descritor ξ^i e o objeto Ω. Conforme vimos na Seção II.1, o problema é intimamente associado à idéia de derivada covariante do objeto Ω em alguma direção ξ^i a ser determinada e que será o vetor tangente à órbita de um G_1 local. Impondo-se a condição de que Ω não varia, obteremos a equação de simetria local procurada.

Como as curvas às quais ξ^i são tangentes são supostamente órbitas de um G_1 local a variação é ligeiramente diferente daquela dada pela derivada covariante.

Definimos a <u>derivada de Lie</u> de um objeto Ω de M com respeito a um campo vetorial ξ^i, no ponto $p = \alpha(t_0)$, onde $\alpha(t) = h_t(p)$ por

$$£_\xi \Omega = - \frac{d}{dt}\left(h_{t*}(\Omega)\right)\Big|_{t_0} \quad , \qquad \text{(III.3.4)}$$

onde h_t é a aplicação derivada de h_t.

Resulta desta definição que o caráter tensorial de Ω não é alterado pela derivada.

A fim de melhor entender o significado da derivada de Lie, suponhamos que Ω é um campo vetorial V. Então,

$$\pounds\, V = -\frac{d}{dt}\,(h_{t*}(V)) \quad , \qquad\qquad (III.3.5)$$

Temos que $h_{t*}(V)$ é novamente um campo vetorial em M. Suponhamos que V é o campo tangente à alguma curva $\gamma(s)$ de M, passando por $P = \gamma(s_0)$ com $V(p) = \gamma'(s_0)$. Seja $h_{t_1}(\gamma(s))$ a imagem desta curva transportada por h_t para $t = t_1$. Seja $q = h_{t_1}(\gamma(s_0))$ a interseção de $h_{t_1}(\gamma(s))$ com órbita de $p : \alpha(t) = h_t(p)$.

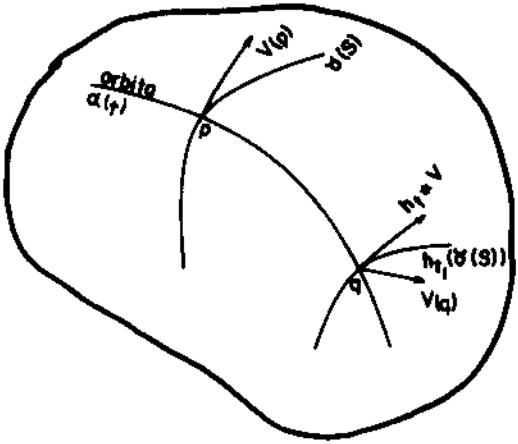


Figura 12

Como V é um campo vetorial arbitrário em M, seu valor V(q) em q de modo geral não coincide com $h_{t_1*}V$. A derivada de Lie mede a variação de V ao longo de $\alpha(t)$, isto é, a diferença $V(q) - h_{t*}(V)$ quando $t \to 0$, isto é, nas proximidades de p.

Teorema (III.3)

Se f é uma função real em M a derivada de Lie com relação a um campo vetorial ξ^i é igual à derivada direcional de f na direção de ξ.

Usando a definição:

$$\pounds_\xi f = -\frac{d}{dt}(h_{t*}(f))\Big|_{t_o} = -\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1}(p))$$

$$= -\frac{d}{dt}(f(h_{-t}(p)) = -\frac{d}{dt} f(\alpha(-t_o)) \ .$$

Seja $\alpha(t) = h_t(p)$ a órbita do ponto $p = \alpha(t_o)$. Então $h_t^{-1}(p) = h_{-t}(p) = \alpha(-t)$ e $\alpha'(-t_o) = -\xi(p)$. Portanto,

$$\pounds_\xi f = -\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t_o} = \alpha'(t_o)\,[f] = \xi(p)\,[f] \ , \quad \text{(III.3.6)}$$

Em particular, tomando $f = x^i$ resulta

$$\pounds_\xi x^i = \xi[x^i] = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\xi^j = \xi^i \quad . \qquad \text{(III.3.7)}$$

<u>Teorema</u> (III.4)

Se V é campo vetorial em M

$$\pounds_\xi V = [\xi, V] \ .$$

Tomando uma função real diferenciável f em M então $V[f]$ é uma outra função em M. Portanto,

$$\pounds_\xi(V[f]) = -\frac{d}{dt}(h_{t*}(V[f])) = -\frac{d}{dt}((h_{t*}V)[f \circ h_t^{-1}])$$

$$= -\left(\frac{d}{dt}(h_{t*}V)\right)[(f \circ h_t^{-1}] - (h_{t*}V)\left[\frac{d}{dt} f \circ h_t^{-1}\right]).$$

Por outro lado,

$$-\frac{d}{dt} h_{t*}V = \pounds_\xi V \quad (\text{em } t_o) \ ,$$

e

$$(h_{t*}V)\left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1})\right] = (h_{t*}V)\left[G \circ h_t^{-1}\right] = h_{t*}(V\,[G]) \ ,$$

onde denotamos $G \circ h_t^{-1} = \frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1})$, isto é, $G = \left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1})\right] \circ h_t$. Portanto,

$$(h_{t*}V)\left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1})\right] = h_{t*}(V\left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1}) \circ h_t\right]) \ .$$

Porém o campo vetorial V em M é tal que $V\left[H \circ h_t\right] = V\,[H]$ para uma certa função H em M. Logo, tomando $H = \frac{d}{dt} f \circ h_t^{-1}$, resulta

$$h_{t*}(V\left[\frac{d}{dt} f \circ h_f^{-1}\right] \circ h_t) = h_{t*}V\left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1})\right]$$

$$= V\left[\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1}) \circ h_t^{-1}\right] = V\left[\frac{d}{dt} f \circ h_t^{-1}\right] = V\left[-\mathfrak{L}_\xi f\right]$$

Portanto,

$$\mathfrak{L}_\xi(V\,[f]) = (\mathfrak{L}_\xi V)\left[f \circ h_t^{-1}\right] + V\left[\mathfrak{L}_\xi f\right]$$

Usando o teorema anterior, $\mathfrak{L}_\xi(V\,[f]) = \xi\left[V\,[f]\right]$ e $\mathfrak{L}_\xi f = \xi\,[f]$. Logo,

$$\mathfrak{L}_\xi V\left[f \circ h_t^{-1}\right] = \xi\left[V\,[f]\right] - V\left[\xi\,[f]\right] = \left[\xi, V\right]\,[f] \ ,$$

ou

$$\mathfrak{L}_\xi V = \left[\xi, V\right] \qquad \text{(III.3.8)}$$

Note que a derivada de Lie calcula a variação de uma função f (no caso acima $f \circ h_t^{-1}$) no ponto p. Então como f era anteriormente definida em p, tudo se passa como se a função f fosse calculada em um ponto de órbita $h_t(p)$, diferente de p e este valor fosse posteriormente trazido de volta para p, por meio de h_t^{-1}, para então calcularmos a derivada com relação a t.

Do primeiro teorema acima podemos concluir agora que uma transformação infinitesimal de coordenadas do tipo (III.2.1) é uma simetria local de uma função escalar $f:M \to R$ quando esta função não varia ao longo da órbita do grupo G_1 local associado. Isto é, quando

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi\,[f] = 0 \quad .$$

Portanto, podemos determinar os campos vetoriais descritores resolvendo a equação acima em ξ. Isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\xi^i = 0 \quad .$$

Por outro lado pelo segundo teorema, a transformação infinitesimal será uma simetria do campo vetorial V quando

$$\mathcal{L}_\xi V = [\xi, V] = 0 \quad .$$

De modo geral se Ω é um tensor então uma transformação infinitesimal será uma simetria local de Ω quando Ω não varia ao longo da órbita do grupo G_1 associado:

$$\mathcal{L}_\xi \Omega = 0 \quad .$$

Ainda que a definição de derivada de Lie tenha sido feita para objetos geométricos tensoriais, ela se estende a outros objetos geométricos desde que a diferença $\Omega(p) - h_{t*}(\Omega)$ resulta em um tensor.

Em seguida estudaremos alguns casos importantes de simetrias de objetos geométricos.

III.4 - *Isometrias*

Admitindo que a variedade M é um espaço-tempo, ela é dotada de uma estrutura geométrica definida por uma afinidade ou uma métrica. Enfim, por um dispositivo que permita aos observadores deste espaço-tempo realizar medidas de paralelismo ou de distância. Em geral, dada uma forma de geometria, é possível deduzir a outra. A noção de métrica é possivelmente mais intuitiva que a afinidade e este fato pode explicar porque Newton — Minkowski e Einstein assumiram este conceito como fundamental. Nas teorias de espaço tempo absoluto, esta métrica é Euclideana e definida nas seções de simultaneidade descritas na Seção I.5. Além disto, conforme pode-se verificar se $x'^i = x^i + \xi^i$ é uma transformação infinitesimal de coordenadas nestas seções de simultaneidade e pertencentes ao grupo de Galileu, então

$$(\pounds_\xi g)\Big|_{\Sigma_t} = 0 \quad ,$$

mostrando que a métrica, na teoria Newtoniana é uma noção de medida "invariante", no sentido de que ela é a mesma em todos os pontos de Σ_t.

Analogamente, na teoria especial da relatividade a métrica também assume um caráter invariante. Na realidade, a vinculação da simetria com ã métrica é,neste caso, muito mais profunda, pois é exatamente a partir do grupo de simetria das equações de Maxwell que se define a métrica do espaço-tempo como sen do uma forma quadrática invariante sob aquela simetria.

Em relatividade geral não há um postulado relativo à existência de isometrias, o que de certo modo contrasta com as teorias fundamentais precedentes. De qualquer forma, em quase todas as soluções onde é possível a realização de testes experimentais, existem isometrias.

Considerando estes precedentes de profundo significado físico as transformações que deixam a noções de métrica invariante devem ser simetrias importantes em uma teoria física.

De modo geral, se M é uma variedade com uma métrica g, uma isometria de M é uma aplicação $h:M \to M$ tal que mantém a métrica invariante

$$g(V,W) = g(h_*(V)\ ,\ h_*(W)) \qquad (III.4.1)$$

onde V e W são campos vetoriais em M.

Teorema (III.5)

Seja M uma variedade com uma métrica g. Considere um grupo G_1 em M induzido por um descritor ξ e tal que as transformações de G_1 em M sejam isometrias. Então

$$\mathfrak{L}_\xi g = 0 \quad .$$

Seja $\{e_i\}$ uma base de campo em M. Nesta base o tensor g tem componentes $g_{ij} = g(e_i,e_j)$ tal que $g = \Sigma g_{ij} e^i \otimes e^j$, onde $\{e^i\}$ é uma base de campos de formas em M. Então g é um tensor covariante de $2^{\underline{a}}$ ordem e sua derivada de Lie é novamente um tensor covariante de 2ª ordem

$$\pounds_\xi g = -\frac{d}{dt}(h_t^* g)$$

Mas se V e W são dois campos vetoriais em M

$$\begin{aligned}(h_t^* g)(V,W) &= \left[h_t^*(g_{ij}\, e^i \otimes e^j)\right](V,W) \\ &= (g_{ij} \circ h_t^{-1})(h_t^*\, e^i \otimes h_t^*\, e^j)(V,W) \\ &= (g_{ij} \circ h_t^{-1}) \left[(h_t^*\, e^i(V))(h_t^*\, e^j(W))\right] \\ &= (g_{ij} \circ h_t^{-1}) \left[(e^i(h_{t*}V))(e^j(h_{t*}W))\right] \\ &= (g_{ij}(h_t^{-1})\, e^i \otimes e^j)(h_{t*}V, h_{t*}W) = g(h_{t*}V, h_{t*}W) \ ,\end{aligned}$$

onde usamos a definição de retrocesso (I.4.12). Como por hipótese, G_1 é uma isometria, por (III.4.1) segue-se que

$$(h_t^* g)(V,W) = g(V,W)$$

para todo par de campos vetoriais V e W em M. Logo, $h_t^* g = g$ para todo t. Assim,

$$\pounds_\xi g = -\frac{d}{dt}(h_t^* g) = -\frac{d}{dt} g \quad .$$

Porém g não depende de t como evidenciado novamente por (III.4.1), portanto,

$$\pounds_\xi g = 0 \ . \qquad \text{(III.4.2)}$$

Esta equação é denominada a <u>equação de Killing</u> para a métrica g de M. Como dissemos anteriormente, esta equação determina os deçritores ξ tais que a transformação infinitesimal $x'^i = x^i + \xi^i$ é uma isometria localmente definida.

Teorema (III.6)

Se ξ é o descritor de uma isometria, então

$$\pounds_\xi \, g_{ij} = \xi^k_{,i} \, g_{kj} + \xi^k_{,j} \, g_{ki} - \xi^k g_{ij,k} = 0$$

De fato, temos que a derivada de Lie preserva o caráter tensorial. Assim, como $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$,

$$\pounds_\xi g = G_{ij} \, e^i \otimes e^i$$

onde G_{ij} contém a variação das componentes de g. Denotando $G_{ij} = \pounds_\xi g_{ij}$, então se ξ é o descritor de uma isometria, resulta que

$$\pounds_\xi g_{ij} = 0 \, .$$

Vejamos agora a expressão de $\pounds_\xi g_{ij}$. Da definição de derivada de Lie

$$\pounds_\xi g = \pounds_\xi (g_{ij} e^i \otimes e^j) = - \frac{d}{dt} h_t^* \, (g_{ij} e^i \otimes e^j) \Big|_{t=0}$$

$$= - \frac{d}{dt} \left[(g_{ij} \circ h_t^{-1}) \, h_t^* e^i \otimes h_t^* \, e^j \right] \Big|_{t=0}$$

$$= - \frac{d}{dt} \, (g_{ij} \circ h_t^{-1}) \Big|_{t=0} (h_t^* e^i \otimes h_t^* e^j) \Big|_{t=0} - (g_{ij} \circ h_t^{*-1}) \Big|_{t=0}$$

$$\times \, (\frac{d}{dt} \, h_t^* e^i) \otimes (h_t^* e^j) \Big|_{t=0} - (h_t^* e^i) \otimes (\frac{d}{dt} \, h_t^* e^j) \Big|_{t=0}$$

$$= \mathfrak{L}_\xi g_{ij}\ e^i \otimes e^j + (g_{ij} \circ h_t^{-1})\Big|_{t=0}\Big[(\mathfrak{L}_\xi e^i) \otimes e^j + e^i \otimes (\mathfrak{L}_\xi e^j)\Big] ,$$

onde usamos $h_t^* e^i\Big|_{t=0} = e^i$ e $g_{ij} \circ h_t^{-1}\Big|_{t=0} = g_{ij}(p)$.
Agora se V é um campo vetorial qualquer (constante com relação a t):

$$(\mathfrak{L}_\xi e^i)(V) = (-\frac{d}{dt}\, h_t^* e^i)\Big|_{t=0}(V) = -\frac{d}{dt}\,(h_t^* e^i)\Big|_{t=0}(V) =$$

$$= -\frac{d}{dt}\, e^i(h_t^* V)\Big|_{t=0} = e^i(-\frac{d}{dt}\, h_t^* V)\Big|_{t=0} = e^i(\mathfrak{L}_\xi V) =$$

$$= e^i([\xi, V]) = e^i(W) = W^i$$

onde $W = [\xi, V]$.
Por outro lado,

$$W[f] = [\xi, V][f] = \Big[\xi\Big[V[f]\Big]\Big] - \Big[V\Big[\xi[f]\Big]\Big] =$$

$$= \xi\Big[V^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big] - V\Big[\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big] =$$

$$= \xi^j V^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - V^k \xi^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - V^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^j} .$$

Portanto,

$$W = \Big[\xi, V\Big] = -V^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} = -V^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k}\, e_j .$$

Assim,

$$\mathfrak{L}_\xi e^i(V) = -V^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\, e^k(V) ,$$

ou seja,

$$\mathfrak{L}_\xi e^i = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\, e^k .$$

Portanto,

$$\pounds_\xi g = \pounds_\xi g_{ij} e^i \otimes e^j - g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} e^i \otimes e^j - g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} e^i \otimes e^k$$

$$= \xi\left[g_{ij}\right] e^i \otimes e^j - g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} e^i \otimes e^j - g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} e^i \otimes e^k$$

$$= (\xi^k g_{ij,k} - g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}) e^i \otimes e^j \quad .$$

O termo entre parêntesis é denotado usualmente por $\pounds_\xi g_{ij}$ e não deve ser confundido com $\pounds_\xi g_{ij} = \xi[g_{ij}]$ onde os g_{ij} nesta última expressão são olhados como funções. A notação correta para o termo entre parêntesis seria $(\pounds_\xi g)_{ij}$. Como ξ é o descritor de uma isometria então $\pounds_\xi g = 0$, de onde resulta a equação de Killing no sistema de coordenadas $\{x^i\}$

$$\xi^k{}_{,i} g_{kj} \oplus \xi^k{}_{,j} g_{ki} - \xi^k g_{ij,k} = 0 \qquad \text{(III.4.4)}$$

<u>Corolário</u>

A equação de Killing em termos de derivadas covariantes é

$$\xi_{(i;j)} = 0 \quad .$$

De (III.1.4) podemos escrever

$$\xi^k{}_{,i} = \xi^k{}_{;i} - \xi^m \Gamma^k_{mi}$$

e, analogamente, para $\xi^k{}_{,j}$. Portanto,

$$\xi^k{}_{,i} g_{kj} = \xi^k{}_{;i} g_{kj} - \xi^m \Gamma^k_{mi} g_{kj} \quad ,$$

$$\xi^k{}_{,j} g_{ki} = \xi^k{}_{;j} g_{ki} - \xi^m \Gamma^k_{mj} g_{ki} \quad .$$

Somando estas equações e subtraindo $\xi^k g_{ij,k}$, levando em conta (III.4.4) obtemos

$$\xi^k{}_{;i} g_{kj} + \xi^k{}_{;j} g_{ki} - \xi^m \Gamma^k_{mi} g_{kj} - \xi^m \Gamma^k_{mj} g_{ki} + \xi^k g_{ij,k} = 0$$

ou

$$\xi^k{}_{;i} g_{kj} + \xi^k{}_{;j} g_{ki} - \xi^m (g_{ij,m} + g_{kj} \Gamma^k_{mi} + g_{ki} \Gamma^k_{mj}) = 0$$

O termo entre parêntesis é a derivada covariante do tensor métrico (conforme (III.1.5)) e esta se anula $g_{ij;k} = 0$. Portanto, obtemos, após multiplicação por g^{kn} e lembrando que $g_{kj} g^{km} = \delta^m_j$

$$\xi^k{}_{;j} + \xi^k{}_{;i} = 0 \quad .$$

Novamente, usando a anulação da derivada covariante de g, agora sob forma contravariante, a equação acima leva a

$$\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0 \quad ,$$

ou seja,

$$\xi_{(i;j)} = 0 \qquad \text{(III.4.5)}$$

onde o parêntesis nos índices significa a simetrização completa nos mesmos.

Como um exemplo de aplicação, considere que M é o espaço-tempo de Minkowski com tensor métrico $\eta_{ij} = \text{diag}(1,1,1,-1)$ nas coordenadas $\{x^i\}$. Procuremos determinar as isometrias deste espaço-tempo. Neste caso as equações de Killing $\pounds_\xi \eta_{ij} = 0$, na forma (III.4.5) tornam-se

$$\xi^{k}{}_{,i}\eta_{kj} + \xi^{k}{}_{,j}\eta_{ki} = 0$$

ou

$$\xi_{j,i} + \xi_{i,j} = 0$$

isto é,

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0 \quad i = 1...4$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \qquad i \neq j \quad .$$

A solução geral deste sistema de equações diferenciais parci - ais é

$$\xi^i = \theta^i{}_j x_j + \theta^i$$

onde $\theta^i j$ e Θ^i são constantes e $\Theta_{ij} = -\Theta_{ij}$, $\Theta_{ij} = \eta_{ik}\theta^k j$. Notamos portanto que neste caso existem 10 parâmetros independen - tes. Os 6 parâmetros $\theta^i j$ correspondem às rotações enquanto os 4 parâmetros Θ^i correspondem às traslações. O grupo resultante é o grupo de Poincaré que é ao mesmo tempo um grupo de simetrias para as equações de Maxwell e o grupo de isometrias para a métrica de Minkowski.

A solução das equações de Killing torna-se mais complexa quando trabalhamos em um espaço-tempo com curvatura, ou mesmo quando usamos coordenadas curvilíneas em uma variedade plana. A título de exemplo, calculemos a solução de equações de Killing para o plano euclideano, E^2, em coordenadas polares.

O sistema de coordenadas é $(x^1, x^2) = (r, \Theta)$, $0 < r < \infty$, $0 < \Theta < 2\pi$. A métrica de E^2 em coordenadas polares é

$$(g^{ij}(r,\Theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} .$$

A equação de Killing pode então ser escrita como um sistema de 3 equações

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\xi \, g^{11} = 0 \quad , \\ &\mathcal{L}_\xi \, g^{22} = 0 \quad , \\ &\mathcal{L}_\xi \, g^{12} = \mathcal{L}_\xi \, g^{21} = 0 \end{aligned}$$

ou, usando (III.4.4)

$$\begin{aligned} &2 \; g^{1k} \; \xi^1{}_{,k} - g^{11}{}_{,k} \; \xi^k = 0 \\ &2 \; g^{2k} \; \xi^2{}_{,k} - g^{22}{}_{,k} \; \xi^k = 0 \\ &g^{1k} \; \xi^2{}_{,k} + g^{2k} \; \xi^1{}_{,k} - g^{12}{}_{,k} \; \xi^k = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &2 \; \xi^1{}_{,1} = 0 \\ &\frac{2}{r^2} \; \xi^2{}_{,2} - g^{22}{}_{,1} \; \xi^1 = 0 \\ &\xi^2{}_{,1} + \frac{1}{r^2} \; \xi^1{}_{,2} = 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^1}{\partial r} = 0 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial \Theta} = - \frac{1}{r} \; \xi^1 \\ &\frac{\partial \xi^2}{\partial r} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi^1}{\partial \Theta} \end{aligned}$$

Da primeira destas equações, concluimos imediatamente que $\xi^1 = f(\Theta)$. *Substituindo nas duas últimas equações resulta*

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = - \frac{1}{r} f(\theta)$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial r} = - \frac{1}{r^2} f'(\theta)$$

de onde concluímos que

$$\xi^2 = \frac{1}{r} f'(\theta) + g(\theta)$$

Aqui, $f(\Theta)$ e $g(\Theta)$ denotam funções arbitrárias de Θ. Considerando novamente a equação $\pounds_\xi g^{22} = 0$, isto é,

$$\frac{2}{r^2} \xi^2{}_{,2} = - \frac{2}{r^3} \xi^1$$

obtemos com os ξ^1 e ξ^2 encontrados acima:

$$g'(\Theta) = 0 \qquad e \qquad f(\Theta) + f''(\Theta) = 0$$

Portanto, g = constante = k e $f(\Theta) = a \cos\Theta + b \operatorname{sen}\Theta$ (a,b constantes). Portanto os vetores de Killing são dados por $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$, onde

$$\xi^1 = a \cos\Theta + b \operatorname{sen}\Theta$$

$$\xi^2 = k + \frac{1}{r} (- a \operatorname{sen}\Theta + b \cos\Theta)$$

os parâmetros do grupo são a, b e k, cujas variações nos dão os diversos vetores de Killing. Aqui a e b correspondem às translações, enquanto que k refere-se à uma rotação em torno da origem. Assim os vetores de Killing geram o grupo Euclideano no plano E^2.

O exemplo acima apesar de ser defendido apenas em E^2 é útil para ilustrar o método geral para obter soluções das equações de Killing em espaços-tempo com curvatura. O exemplo mais comum de espaço-gempo com curvatura e que possui vetores de Killing é o do espaço-gempo de Schwarzschild cuja métrica é dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -\gamma^{-1} & & & \\ & -r^2 & & \\ & & -r^2 \operatorname{sen}^2\theta & \\ & & & \gamma \end{pmatrix} ,$$

onde $\gamma(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, M = constante.

Aplicando esta métrica nas equações de Killing (III.4.4) com as coordenadas $x^1 = r$, $x^2 = \Theta$, $x^3 = \phi$, $x^4 = t$, resulta

$$g_{11}\ \xi^1{}_{,j} + g_{jj}\ \xi^j{}_{,1} - \xi^k\ g_{1j,k} = 0 \quad ,$$

$$g_{22}\ \xi^2{}_{,j} + g_{jj}\ \xi^j{}_{,2} - \xi^k\ g_{2j,k} = 0 \quad ,$$

$$g_{33}\ \xi^3{}_{,j} + g_{jj}\ \xi^j{}_{,3} - \xi^k\ g_{3j,k} = 0 \quad ,$$

$$g_{44}\ \xi^4{}_{,j} + g_{jj}\ \xi^j{}_{,4} - \xi^k\ g_{4jk} = 0 \quad .$$

Tomando em seguida $j = 1,2,3,4$ e eliminando as equações repetidas, observa-se que sobrem apenas 10 equações independentes, que são:

$$\frac{1}{\xi^1}\frac{\partial\xi^1}{\partial r} = \frac{M}{r^2\gamma} \qquad \xi^1 \neq 0$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial\Theta} = -\ \gamma\ r^2\ \frac{\partial\xi^2}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial\phi} = -\ \gamma\ r^2\ \operatorname{sen}^2\theta\ \frac{\partial\xi^2}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial \xi^4}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = \frac{\xi^1}{r}$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial \phi} = - \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial \xi^3}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial t} - \frac{\gamma}{r^2} \frac{\partial \xi^4}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial \phi} + \xi^1 + \xi^2 \cos\theta = 0$$

$$r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial \xi^3}{\partial \phi} + \gamma \frac{\partial \xi^4}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial t} = \xi^1 \frac{M}{r^2 \gamma}$$

A resolução deste sistema de equações nos dará as componentes ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4 do vetor de Killing dependente de 4 parâmetros. 3 destes parâmetros correspondem a rotações e o quarto corresponde à translação temporal, gerando assim o grupo de isometrias do espaço-tempo de Schwarzschild que é o isomorfo a SO(3) x O(1).

É interessante notar a partir da equação de Killing, que de fato é um sistema de $\frac{4.5}{e} = 10$ equações, que o número máximo de parâmetros admissíveis em um grupo de isometrias em um espaço-tempo é 10. De fato, temos 10 equações de 1ª ordem em ξ, que produzem por integração um total de 20 parâmetros (constantes de integração) que, contudo, reduzem-se a apenas 10 independentes. Os espaços tempo que admitem este número máximo, 10, de parâmetros devem necessariamente possuir curvatura constante(9). Assim, por exemplo, temos 10 parâmetros nos casos dos espaço-gempo de Minkowski de de Sitter. Estas isometrias geralmente decompõem-se em rotações e translações. Uma translação é uma particular isometria,cujo descritor é um campo vetorial paralelo ($\xi^{i}{}_{;k} = 0$).

III.5 - *Outras Simetrias*

As dificuldades em se obter soluções exatas das equações de Killing em relatividade geral tem motivado a procura de outras formas de simetria. De fato, alguns problemas tradicionais tais como a conservação de energia e a definição de teorias quânticas de campo em relatividade geral ressentem-se de uma falta de simetrias de objetos geométricos (especialmente a métrica) nesta teoria. Do ponto de vista desta problemática, pode-se apresentar algumas alternativas que enumeramos a seguir.

(a) Admitir que somente os espaços-tempo com isometrias são fisicamente aceitáveis;

(b) Admitir que a noção de isometria pode ser dispensável e que a atual dependência de certos conceitos físicos nas isometrias é decorrência da peculiaridade das teorias atuais. Assim, em substituição às isometrias, outras formas de simetrias seriam postuladas.

(c) Admitir seriamente a noção de isometria aproximada. Isto é, impor condições adicionais às equações de Killing de modo que estas sejam válidas apenas em condições especiais.

Enquanto que a alternativa (a) é mais fácil de se aceitar, ela apresenta uma enorme restrição à teoria geral da relatividade.

Por outro lado, a alternativa (b) tem sido abordada sob diversos aspectos. Do ponto de vista clássico, simetrias alternativas a isometrias podem ser consideradas, assumindo que outros objetos geométricos importantes sejam "invariantes". Assim, além das isometrias definidas pela equação de Killing temos as seguintes simetrias:

(a) Colineação de Ricci

$$\pounds_\xi R_{ij} = 0 \quad ,$$

onde R_{ij} é o tensor de Ricci de M.

(b) Colineação de Curvatura

$$\pounds_\xi R^i_{jk\ell} = 0 \quad ,$$

onde $R^i_{jk\ell}$ é o tensor de Riemann.

(c) Colineação Conforme de Weyl

$$\pounds_\xi C^i_{jk\ell} = 0 \quad ,$$

onde $C^i_{jk\ell}$ é o tensor de Weyl.

(d) Colineação Projetiva de Weyl

$$\pounds_\xi W^i_{jk\ell} = 0 \; ,$$

onde $W^i_{jk\ell}$ é o tensor de curvatura projetiva de Weyl:

$$W^i_{jk\ell} = R^i_{jk\ell} - \frac{1}{3}\,(\delta^i_\ell R_{jk} - \delta^i_k R_{j\ell}) \quad .$$

(e) Colineação Afim

$$\pounds_\xi \Gamma^i_{jk} = 0$$

Além destas, pode-se considerar também uma outra forma de simetria em que a derivada de Lie de um objeto não seja zero, mas sim igual à uma função conhecida. Então, nestes casos, de acordo com a interpretação de derivada de Lie, não temos realmente uma simetria do objeto. Em compensação a sua variação sendo conhecida torna-se possível considerar estas transformações como sendo uma forma fraca de simetria. As "simetrias" deste tipo mais conhecidas são:

(f) Movimento Homotético

$$\pounds_\xi g_{ij} = 2cg_{ij} \quad , \quad c = \text{constante.}$$

(g) Movimento Conforme Especial

$$\pounds_\xi g_{ij} = 2fg_{ij} \quad , \quad f_{,jk} = 0 \; .$$

(h) Movimento Conforme

$$\pounds_\xi g_{ij} = - 2fg_{ij} \quad .$$

(i) Colineação Projetiva

$$\pounds_\xi \Gamma^i_{jk} = I^i_{jk} \quad \text{onde} \quad I^i_{jk} = -\delta^i_j f_{,k} - \delta^i_k f_{,j}$$

(j) Colineação Projetiva Especial

$$\pounds_\xi \Gamma^i_{jk} = J^i_{jk} \quad \text{onde} \quad J^i_{jk} = -\delta^i_j f_{,k} - \delta^i_k f_{,j} \; , \; f_{,jk} = 0 \; .$$

(k) Colineação Conforme Especial

$$\pounds_{\xi}\Gamma^{i}_{jk} = K^{i}_{jk} \quad \text{onde} \quad K^{i}_{jk} = -\delta^{i}_{j}f_{,k} - \delta^{i}_{k}f_{,j} - g_{ik}g^{i\ell}f_{,\ell}, f_{,jk} = 0$$

(ℓ) Colineação Conforme

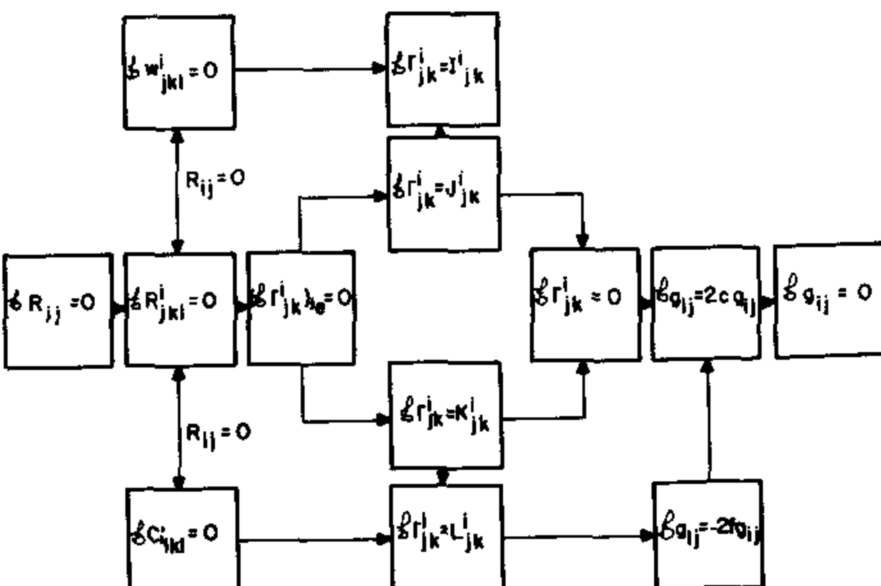
$$\pounds_{\xi}\Gamma^{i}_{jk} = L^{i}_{jk} \quad \text{onde} \quad L^{i}_{jk} = -\delta^{i}_{j}f_{,k} - \delta^{i}_{k}f_{,j} - g_{jk}g^{i\ell}f_{,\ell} \ .$$

Finalmente, pode-se nesta tendência à generalização da idéia de simetrias considerar variações das derivadas de Lie como em

(m) Colineação de Curvatura Especial

$$(\pounds_{\xi}\Gamma^{i}_{jk})_{;\ell} = 0 \ .$$

Estas simetrias podem ser relacionadas em um diagrama onde a seta indica particularização(10).



Possivelmente, entre estas as simetrias mais conhecidas e importantes são as transformações conformes. Esta importância decorre da covariância das equações de Maxwell sob transformações conformes no espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, em relatividade geral os grupos conformes são quase tão raros quanto as isometrias(11).

Finalmente, a alternativa (c) tem sido considerada também com distintas interpretações. A noção clássica de isometria aproximada encontra seu exemplo mais típico no chamado grupo de Bondi-Metzner-Sachs—BMS). Suponha que temos um espaço-tempo assintoticamente plano. Isto é, que seu tensor de curvatura tende a zero no infinito. Então uma transformação de coordenadas infinitesimal $x'^i = x^i + \xi^i$ é uma transformação infinitesimal do grupo BMS quando $\xi_{(i;j)} = 0$ vale assintoticamente (apenas). Como assintoticamente $R^i_{jk\ell} = 0$, então o grupo resultante na região assintótica deveria ser o grupo de Poincaré. Isto entretanto não ocorre, e o resultado obtido é um grupo (BMS) muito mais amplo. De fato, trata-se de um grupo de Lie infinito formado pelo grupo de Lorentz e uma generalização das translações (denominada supertranslação(12)). O fato de que se trata de um grupo de isometrias assintótico, definido em uma região onde não exista gravitação é fisicamente interessante pois poder-se-ia fazer uso deste fato para se definir partículas elementares por meio das representações do grupo BMS, segundo a concepção de Wigner(13). Entretanto tal proposição é de difícil realização prática em um grupo de Lie infinito do tipo BMS.

Outras formas de isometria aproximada podem ser consideradas localmente e, em particular, uma simetria do tipo de Sitter tem sido proposta como uma propriedade local adicional aos espaços tempo[14].

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

1 - Foley, K.J. et al. - Phys. Rev. Lett. <u>19</u>, 193, 622 (1967).

2 - Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R. - The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge U. Press (1974) (pág. 10).

3 - O'Neil, B. - Elementary Differential Geometry. Academic Press (1966).

4 - Maia, M.D. - Noticiário da Soc. Brasil. de Matemática <u>11</u>, 4, (1979).

5 - Lang, S. - Estruturas Algébricas, Ao Livro Técnico (1972). (pág. 11).

6 - Hammermesh, M. - Group Theory, Addison-Wesley (1964) (pág. 279).

7 - Varadarajan, V.S. - Lie Groups, Lie Algebras and their Representations - Prentice Hall, (1974).

8 - Pirani, F.A.E. - Em Lectures on General Relativity Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, Vol.1(1964). A. Trautmann, F.A.E. Pirani, H. Bondi.

9 - Eisenhart, L.P. - Riemannian Geometry, Princeton U. Press (6ª impressão) (1966).

10 - Katzin G.H.; Levine, I. Davis, W.R. - Journ. Math. Phys., <u>10</u>, 617 (1969).

11 - Defrise-Carter, L. - Cumm. Math. Phys. <u>40</u>, 273 (1975).

12 - McCarthy, P.J. - J. Math. Phys. <u>13</u>, 1837 (1972).

13 - Wigner, E.P. - Group Theory and its Applications to Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press (1959).

14 - Halpern, L. Gen. Rel. Gravitation, 8, 623, (1977).

15 - Lopes, L. Classical Symmetries: An Elementary Survey. Latin America School of Physics (Caracas) (1966).