Grupo de Poincaré

Felipe Tovar Falciano

Teoria de Grupos

Um grupo G é uma coleção de objetos $\{a\}$ acrescida de uma operação $(\circ)$ definida entre todos os seus elementos, onde 4 condições são satisfeitas:

i) identidade: $\exists$ um elemento t.q. $\forall\ a \in G$
$a \circ e = e \circ a = e$

ii) fechamento: $\forall\ a,\ b \in G$
$a \circ b \in G$

iii) inversa: $\forall\ a \in G$, $\exists\ a^{-1} \in G$ t.q.
$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

iv) associatividade: $\forall\ a,\ b,\ c \in G$
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

obs:

a condição iii pode ser relaxada para $a \circ a^{-1} = e$, ou seja não é necessario que a inversa a esquerda seja igual a inversa a direita, i.e. $a^{-1} \circ a \neq e$

exemplo 1: grupo cíclico a^n

Um grupo cíclico é um grupo com um número finito de elementos gerado apartir de potências de um de seus elementos e então chamado de gerador do grupo. Em geral um grupo cíclico pode possuir mais de um gerador. Pela propriedade de fechamento, nos grupos cíclicos sempre existe um inteiro n tal que $a^n = e$. Este grupo é então denominado grupo a^n. Um exemplo é o grupo $a^4 = \left\{e, a, a^2, a^3\right\}$ com geradores: a, a^3. Uma possível representação pode ser encontrada no círculo unitário complexo onde teríamos $a^4 = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}$

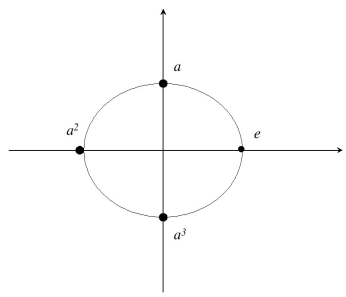


Figura 1: representação no círculo unitário do grupo cíclico a^4

exemplo 2: grupo abeliano

Um *grupo abeliano* é um grupo onde todos os seus elementos comutam, i.e. $a \circ b = b \circ a$. Uma maneira comum de se representar um grupo é através da sua tabela de elementos como mostrado abaixo. A maneira de se ler esta tabela é imediata; se por exemplo quisermos saber qual é o resultado do produto $a \circ b$ basta olharmos a posição na tabela cuja linha começa por a e a coluna por b. Para o grupo representado pela tabela da esquerda este resultado seria $a \circ b = c$. Note que este grupo não possui gerador já que qualquer elemento ao quadrado é igual a identidade, porém o grupo representado pela tabela da direita possui dois geradores (a, c). Este último grupo é equivalente ao a^4 do exemplo anterior. Estas duas tabelas são as únicas possibilidades para um grupo de 4 elementos. Podemos ver isto facilmente quando percebemos que devido as propriedades de grupos cada linha e cada coluna não pode possuir elementos repetidos.

	e	a	b	c
e	**e**	a	b	c
a	a	**e**	c	b
b	b	c	**e**	a
c	c	b	a	**e**

	e	a	b	c
e	**e**	a	b	c
a	a	b	c	**e**
b	b	c	**e**	a
c	c	**e**	a	b

Subgrupo Invariante

Seja um grupo G. Uma coleção de elementos H pertencentes a G é chamada de subgrupo de G se satisfizer todas as propriedades de grupo. Desta forma é evidente que todo subgrupo necessariamente contém a identidade. Seja $H \subset G$ um subgrupo. Se para $\forall\ a \ \epsilon\ G$ e $h \epsilon\ H$

$$a \circ h \circ a^{-1} \quad \epsilon \ \ H,$$

então H é dito um *subgrupo invariante* de G. A idéia básica é que H fica inalterado frente a atuação de qualquer elemento de G, i.e. um elemento de G atuando em um elemento de H gera outro elemento de H.

Classe à esquerda/ direita

Chamamos de *classe a esquerda* a coleção de elementos na forma $\{h\,a\}$, onde a é um elemento de G e h são todos os elementos de um subgrupo H de G. Da mesma forma definimos *classe à direita* por $\{a\,h\}$. Em geral ambas as classes não formam um subgrupo de G. Porém existe um caso interessante quando H é um subgrupo invariante de G. Neste caso a classes à esquerda é igual a classe à direita. De fato, para qualquer elemento $a \ \epsilon\ G$ temos

$$a \circ h = a \circ h \circ a^{-1} \circ a = h' \circ a \quad h,\ h' \epsilon \ \ H.$$

Utilizando as classes à esquerda podemos construir um novo grupo com as mesmas regras de operação do grupo original. Sejam Ha e Hb duas classes à esquerda do grupo G. Para quaisquer dois elementos

$h_1 a$ e $h_2 b$ pertencendo respectivamente as classes Ha e Hb temos

$$\begin{aligned} & h_1 \circ a \circ h_2 \circ b = h_1 \circ h_3 \circ a \circ b = h_4 \circ a \circ b \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & (Ha) \circ (Hb) = H(ab) \end{aligned}$$

Cada classe $[Ha]$ funciona como uma classe de equivalência. Uma coleção de objetos formam uma classe de equivalência quando satisfazem uma *relação de equivalência* ($\sim$) que é definida como uma relação que respeita três propriedades:

i) $a \sim a$ (reflexividade)

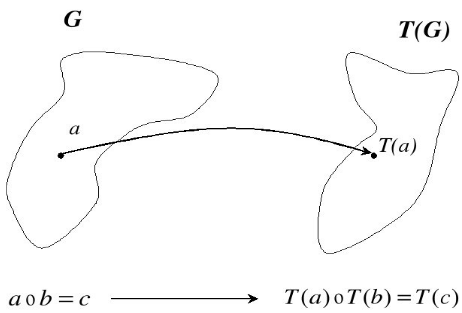
ii) Se $a \sim b$ então $b \sim a$ (simétrico)

iii) Se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$ (transitividade)

De acordo com esta construção o elemento identidade será o próprio subgrupo H. O mapa gerado por esta relação de equivalência é um *homomorfismo*, i.e. um mapa que preserva a operação do grupo original. O grupo gerado é chamado de *grupo quociente* e denominado por G/H.

Representação de Grupo

No exemplo 1 já nos referimos na representação do grupo a^4 de uma forma informal apelando para o senso comum. Pretendemos aqui, sem nos delongar demais, tentar formalizar a idéia de representação de um grupo. Um grupo é um conceito abstrato onde estabelecemos correlações entre seus constituintes, definindo assim a operação do grupo. Uma *representação* T do grupo G é a concretização das relações entre os elementos do grupo através de objetos matemáticos (funções, matrizes, vetores, tensores,...) tais que a operação do grupo seja preservada.



A representação de um grupo não é necessariamente unívoca. Podemos associar mais de um elemento de T a um mesmo elemento de G. Um exemplo de representação não-unívoca são os espinores de Dirac. Esses espinores são vetores quadri-dimensionais que servem como representação do grupo formado pela soma direta de duas representações irredutíveis do grupo de Lorentz, a saber $\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Esta representação não é unívoca pois ao aplicarmos uma rotação de 2π, o espinor é levado em menos ele, $\mathcal{R}\,(2\pi)\,\psi = -\psi$. Uma vez que uma rotação de 2π representa retornar a mesma direção, ambos os espinores representam o mesmo estado físico.

Representação Irredutível

A definição de representação irredutível requer o conceito de subgrupo invariante. Como já mencionado anteriormente, um *subgrupo invariante* $W \subset G$ é um subgrupo cuja aplicação de qualquer elemento $a \,\epsilon\, G$ reproduz novamente W, i.e. $\forall\, a \,\epsilon\, G$ e $w \,\epsilon\, W$, $a \circ w \,\epsilon\, W$. Um grupo G arbitrário possui minimamente dois subrgrupos invariantes: $\{\emptyset\}$, G.

Definimos então *representação irredutível* como a representação na qual os únicos subespaços invariantes são o próprio grupo G e o vazio $\{\emptyset\}$.

exemplo:

> um exemplo simples de representação irredutível pode ser dado para o grupo de rotação em 3 dimensões $\vec{J} = \{J_x, J_y, J_z\}$. Como esses operadores não comutam não podemos diagonalizá-los simultâneamente, mas podemos diagonalizar os operadores J^2 e J_z. Pode-se mostrar que os autovalores desses operadoes são proporcionais a $j\,(j+1)$ e a m respectivamente, onde j e m são inteiros positivos. Os subespaços com valores de j fixos são invariantes pela aplicação de qualquer um dos geradores J_x, J_y, J_z e não possuem nenhum subespaço invariante contido neles, i.e. são representações irredutíveis do grupo.

idéia : a construção da representação irredutível é feita para separar o grupo em subespaços ortogonais. Esta representação deixa o grupo separado no maior número de subgrupos invariantes possível e assim nos seus constintuintes mais básicos.

Lema de Schur

O Lema de Schur tem sua importância ao estabelecer a condição para que uma dada representação de um grupo G seja uma representação irredutível. A condição necessária e suficiente para que uma representação V de um grupo G seja uma representação irredutível é $\forall$ elemento de $A \,\epsilon\, V$ tal que $[A, T] = 0$ para $\forall\; T \,\epsilon\, V$ seja proporcional a identidade. Em palavras, qualquer elemento do grupo que comute com todos os outros elementos tem que ser proporcional a identidade.

exemplo:

> No exemplo anterior temos que $\left[J^2, J_i\right] = 0$ para $i = x, y, z,$. Devido ao lema de Schur J^2 deve ser proporcional a identidade. E de fato ao calcularmos encontramos $J^2 = 2\,\mathcal{I}$.

Geradores de um Grupo

Em alguns grupos, porém não necessariamente em todos, podemos encontrar uma classe de objetos que nos ajudam a estudar a sua estrutura local. Estes objetos, chamados de geradores do grupo, formam uma coleção $S = \{g_1, g_2, \ldots\}$ que não são necessariamante elementos do grupo. Esta coleção de objetos forma um sistema de *geradores* se a aplicação sucessiva de todas as suas combinações a qualquer um dos elementos do grupo gerar todo o grupo. Note que qualquer combinação linear de geradores de um determinado grupo é ainda gerador deste grupo.

exemplo:

No grupo cíclico a^n o elemento a é um possível gerador do grupo. Já no caso da representação do grupo ser unitária, os seus geradores não fazem parte do grupo, pois sendo $U = e^{i\,\alpha\,T}$ tal que $U\,U^{\dagger} = 1$ e $\alpha\,\epsilon\,\Re \;\Rightarrow\; T = T^{\dagger}$. Assim T não é unitário e não faz parte do grupo.

Nota: ***Operador de Casimir***

Em física existe um objeto importante na classificação de um grupo, que em geral esta associado com alguma simetria da teoria, chamado de operador de casimir. Definimos o *operador de casimir* de um grupo como o elemento, diferente da identidade, que comuta com qualquer outro elemento do grupo. Pelo lema de Schur, se a representação for irredutível então o operador de casimir tem que ser proporcional a identidade.

Grupo de Lie e Grupo Paramétrico

Um grupo de Lie é essencialmente um grupo de parâmetros contínuos. Para formalizar melhor a noção de grupo de Lie vamos definí-lo de duas formas equivalentes. Para isto primeiramente definamos o conceito de grupo paramétrico. Um grupo G é dito *grupo paramétrico* se for possível pelo menos localmente parametrizá-lo por r parâmetros reais

$$g = g\,(t_1, t_2, \ldots, t_r)$$

de forma que o produto e a inversa sejam funções contínuas dos r parâmetros

$$g\,(s)\,g\,(t) = g\,(f\,(t,s))\,.$$

Um *grupo de Lie* nada mais é do que um grupo paramétrico onde a função que define a operação do grupo é uma função real analítica, i.e se a função puder ser expressa localmente como uma série de Taylor em cada ponto do domínio de definição.

Podemos da mesma forma definir grupo de Lie de uma maneira mais usual entre os físicos. Um *grupo de Lie* G de dimensão r é uma variedade r-dimensional tal que o mapa inverso e a multiplicação ($I(g) = g^{-1}$ e $f(g_1, g_2) = g_1 g_2$) são do tipo C^{∞}. Cada ponto da variedade é um elemento do grupo e a aplicação de qualquer elemento $g\,\epsilon\,G$ sobre G gera um difeomorfismo de $G \longrightarrow G$. Não é difícil perceber que essas duas definições são equivalentes, i.e. um grupo de Lie é necessariamente um grupo de parâmetros contínuos.

Geradores de grupos de Lie

Um grupo de Lie é um grupo de parâmetros contínuos e além disso também é uma variedade. Seja então o grupo de Lie r-dimensional G. Cada elemento do grupo, i.e. cada ponto da variedade pode ser caracterizado por r parâmetros independentes, de forma que podemos descrever seus elementos na forma

$$a = a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \equiv a(\vec{\alpha})$$

onde implicitamente definimos a identidade do grupo por $e \equiv a(\vec{0})$. Em primeira aproximação, usando série de Taylor,

$$a(\vec{\alpha}) = e + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial a}{\partial \alpha_k}\bigg|_{\vec{\alpha}=\vec{0}} \alpha^k = e + \sum_{k=1}^{r} \xi_k \, \alpha^k$$

onde $\xi_k \equiv \frac{\partial a}{\partial \alpha_k}\Big|_{\vec{\alpha}}$ são os geradores (infinitesimais) do grupo de Lie. Note que pela própria definição os geradores do grupo não dependem dos parâmetros usados para caracterizar o grupo.

Num grupo de Lie, conhecendo os seus geradores, podemos construir qualquer elemento finito do grupo integrando ao longo dos parâmetros. Esta integração pode ser feita atráves da aplicação sucessiva dos geradores do grupo. Tomemos um elemento infinitesimalmente próximo da identidade $a(\delta\alpha)$. Usando uma representação do grupo

Grupo		*Representação*	
$a(\delta\alpha)$	$\longrightarrow$	$T(a(\delta\alpha))$	elemento do grupo
ξ_k	$\longrightarrow$	Γ_k	geradores

Podemos escrever o elemento infinitesimal do grupo como

$$T(a(\delta\alpha)) = \lim_{L \longrightarrow \infty} T\Big(a\Big(\frac{\alpha}{L}\Big)\Big) = 1 + \sum_{k=1}^{r} \Gamma_k \, \delta\alpha^k = 1 + \lim_{L \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r} \Gamma_k \, \frac{\alpha^k}{L}$$

Por outro lado, o produto de q vezes do mesmo elemento infinitesimal nos fornece

$$[T(a(\delta\alpha))]^q = 1 + q \sum_{k=1}^{r} \Gamma_k \, \delta\alpha^k = T(a(q\,\delta\alpha)) \,.$$

Assim podemos escrever,

$$T(a(\alpha)) = \lim_{L \longrightarrow \infty} T\Big(a\Big(L\,\frac{\alpha}{L}\Big)\Big) = \lim_{L \longrightarrow \infty} \Big[T\Big(a\Big(\frac{\alpha}{L}\Big)\Big)\Big]^L = \lim_{L \longrightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{r} \Gamma_k \, \alpha^k\right]^L$$

i.e. $$\boxed{T(a(\alpha)) = e^{\sum_{k=1}^{r} \Gamma_k \, \alpha^k}}$$

Esta expressão é válida nas proximidades da identidade de cada elemento de um grupo de Lie, com r α^k parâmetros reais e Γ_k operadores de sua representação. No caso em que o grupo de Lie é compacto e conexo pode-se mostrar que esta é a expressão geral de qualquer um dos elementos deste grupo de Lie.

obs: Devido a estrutura dos grupos de Lie é suficiente para caracterização dos operadores de Casimir a imposição de sua comutação com os geradores do grupo, já que desta forma ele automaticamente irá comutar com qualquer outro elemento.

Ágebra de Lie

Definimos como álgebra de Lie $\mathcal{G}$ sobre $\Re$, o espaço vetorial $\mathcal{G}$ acrescido de uma operação bilinear $[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, tal que para quaisquer A,B,C ϵ $\mathcal{G}$ as seguintes relações são satisfeitas:

$$\begin{array}{lcll} [A\,,\,B] = -[B\,,\,A] \quad \Longrightarrow \quad [A\,,\,A] = & 0 & & \text{antisimétrica} \\ [[A\,,\,B]\,,C] + [[B\,,\,C]\,,A] + [[C\,,\,A]\,,B] = & 0 & & \text{identidade de Jacobi} \end{array}$$

Através do estudo de álgebra de Lie podemos caracterizar certas propriedades interessantes dos grupos de Lie. De fato, a todo grupo de Lie G existe uma álgebra de Lie associada aos seus geradores Γ_i [1]

$$[\Gamma_i\,,\,\Gamma_j] = C_{ij}^k \Gamma_k$$

onde os C_{ij}^k são as constantes de estrutura do grupo. Estas constantes, a menos de uma mudança de base dos geradores, caracterizam completamente a estrutura local do grupo de Lie. Fica faltando apenas caracterizar as propriedades topológicas do grupo. Vale salientar que a relação entre álgebras de Lie e grupos de Lie não é unívoca. Em geral, a cada álgebra de Lie está associada a mais de um grupo de Lie.

Corolário

Existe uma correspondência 1 a 1 entre álgebras de Lie e grupos de Lie simplimente conexos. Um grupo de Lie $\mathcal{G}$ conexo é dito simplimente conexo se qualquer curva fechada em $\mathcal{G}$, i.e. construída pela parametrização do próprio grupo, puder ser deformada a um ponto. Este grupo é chamado de grupo de cobertura universal da álgebra.[2]

exemplo:

A álgebra do momento angular caracteriza localmente o grupo de rotação. A esta álgebra podemos identificar dois grupos de Lie: o grupo de rotações SO(3), e o grupo de spin SU(2). Pode-se mostrar que o grupo SO(3) não é simplismente conexo, enquanto que o SU(2) é o grupo de cobertura universal desta álgebra. Este resultado ainda pode ser estendido para mostrar que qualquer grupo SO(N) para $N \geq 3$ não é simplismente conexo, enquanto que qualquer SU(N) é simplismente conexo. O isomorfismo entre estas álgebras é definido pelo mapa $\phi_{jk}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{tr}\,\{\sigma_{\mathbf{j}}\,[\,\mathbf{a}\,,\sigma_{\mathbf{k}}]\,\}$ onde $\mathbf{a}$ ϵ $\mathbf{su(2)}$ e σ são as matrizes de Pauli. Se escolhermos a representação onde $\mathbf{a_j} = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{2}}\sigma_{\mathbf{j}}$ encontramos

$$\phi(\mathbf{a_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(\mathbf{a_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(\mathbf{a_3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] "Group Theory in Physics"-Vol.2, Cornwell; Teorema 3 pag.388
[2] "Group Theory in Physics"-Vol.2, Cornwell; cap 11.7

Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré é certamente um dos grupos matemáticos mais importantes da física teórica. Sua primeira associação direta com alguma estrutura da natureza advém das transformações entre dois referenciais inerciais. Desta forma a sua estrutura revela uma das simetrias fundamentais da natureza. Como veremos mais adiante a sua caracterização é também importante para a teoria quântica da matéria pois postula-se que as partículas elementares estão intimamente relacionadas com as representações irredutíveis do grupo de Poincaré.

Tentando explicar os resultados negativos do experimento de Michelson e Morley, Lorentz postulou as leis de transformações entre dois referenciais inerciais hoje chamadas em sua homenagem de transformações de Lorentz. Embora Lorentz à essa altura já tivesse derivado as relações de contração espacial e dilatação temporal associada há estas transformações, ele não atribuía realidade a esses conceitos. Lorentz, por exemplo, não interpretava a coordenada temporal associado ao referencial em movimento como a posição do ponteiro de um relógio preso a este referencial.

Em 1904 no Congresso Internacional das Artes e das Ciências em Saint Louis, Estados unidos, Poincaré formulou pela primeira vez o princípio da relatividade o qual estabelece a completa igualdade entre quaisquer dois referenciais inerciais. Percebendo a sua importância, Poincaré estudou a estrutura matemática do grupo associado à estas transformações e foi o primeiro a interpretar esta simetria através da invariância do intervalo entre eventos, conceito definido abaixo.

A real contribuição de Einstein, Lorentz e Poincaré ao desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita ainda é debate entre historiadores da ciência. Acredita-se que a devida interpretação física e esclarecimento do novo modo necessário de pensar deva ser atribuída à Einstein, embora grande parte do desenvolvimento teórico já estivesse em construção. É inclusive questionado até que ponto Einstein se baseou nos trabalhos de seus colegas, fato nunca assumido publicamente pelo cientista. De qualquer modo, é indiscutível que estes três foram personagens fundamentais no desenvolvimento desta teoria.

Na teoria da relatividade restrita[3] se desenvolveu o conceito de intervalo entre dois eventos definido por $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Quaisquer dois eventos que sejam ligados por um feixe de luz terão então o seu intervalo associado igual a zero já que neste caso $v = c$ e $ds^2 = c^2dt^2\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0$.

Devido ao segundo postulado da relatividade, a saber a constância da velociade da luz para referenciais inerciais, devemos então impor que se num dado referencial inercial o intervalo é nulo ele terá que se anular para qualquer outro. Pode-se mostrar que se além do princípio da relatividade e da constância da velocidade de luz, impussermos que o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico então as leis de transformações entre referenciais inerciais são tais que o intervalo é invariante, ou seja o seu valor é o mesmo para todos os referenciais inerciais, e as transformações são necessariamente lineares.

Tendo dito a motivação física vamos agora procurar pelas transformações lineares onde o intervalo é invariante. No que se segue vamos adotar a convenção de soma de Einstein onde quaisquer dois índices repetidos são somados. Definimos a métrica do espaço-tempo como $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. Podemos então escrever o intervalo como $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, onde $x^0 = ct$. Se impussermos a sua invariância temos

$$ds'^2 = ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

[3]como apenas trataremos de questões associadas a relatividade restrita, ocultaremos o termo restrito e caso haja possibilidade de ambiguidade mencionaremos explicitamente para distinguir da teoria da relatividade geral.

Logo temos a relação

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}. \tag{1}$$

Se diferenciarmos esta relação encontramos

$$\eta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \right] = 0 \tag{2}$$

Como os índices μ, ν e λ são índices livres podemos escrever esta mesma equação trocando $\lambda \leftrightarrow \mu$ e $\lambda \leftrightarrow \nu$.

$$\eta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right] = 0 \tag{3}$$

$$\eta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right] = 0 \tag{4}$$

Somando (2)+ (3) e subtraindo (4) temos

$$2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0.$$

Esta expressão pode ser simplificada multiplicando-a por $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\xi}} \eta^{\xi\sigma}$. Lembrando que $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\xi}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\beta}{}_{\xi}$ temos

$$\frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} = 0.$$

A solução desta equação é simplismente

$$x'^{\sigma} = \Lambda^{\sigma}{}_{\alpha} x^{\alpha} + a^{\sigma} \tag{5}$$

onde $\Lambda^{\sigma}{}_{\alpha}$ e a^{σ} são constantes. Esta é a única transformação linear não-singular que deixa o intervalo invariante. Devido a relação (1) as matrizes Λ devem satisfazer a condição

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \tag{6}$$

$$i.e. \quad \Lambda^t \eta \Lambda = \eta \qquad \Rightarrow \quad det(\Lambda) = \pm 1. \tag{7}$$

Note que escolhendo $\mu = \nu = 0$ na condição (6)

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Lambda^0{}_0 & \geq +1 \\ \Lambda^0{}_0 & \leq -1 \end{cases}$$

Através destas relações podemos classificar o grupo de Lorentz[4] fazendo referencia aos quatro setores distintos. Se $det(\Lambda) = 1$ ($det(\Lambda) = -1$) chamamos de transformação própria (imprópria), e se $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ ($\Lambda^0{}_0 \leq -1$) de transformação ortócrona (não-ortócrona).

$det(\Lambda) = +1$	,	$\Lambda^0{}_0 \geq +1$	própria ortócrona
$det(\Lambda) = +1$	,	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$	própria não-ortócrona
$det(\Lambda) = -1$	,	$\Lambda^0{}_0 \geq +1$	imprópria ortócrona
$det(\Lambda) = -1$	,	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$	imprópria não-ortócrona

[4]denomina-se grupo de Lorentz o subgrupo do grupo de Poincaré ausente de translações, ou seja $a^{\sigma} = 0$ e $\Lambda \neq 0$

O grupo de Lorentz possui apenas um único subgrupo, a saber o setor próprio ortócrono. ânfácil perceber que esta é a única possibilidade quando lembramos que um subgrupo necessariamente possui a identidade como um de seus elementos. O interessante desta decomposição é poder expressar qualquer elemento do grupo de Lorentz apartir de um dos elementos do subgrupo próprio ortócrono. De fato, pode-se mostrar que utilisando as matrizes de inversão espacial (I_s), inversão temporal (I_t) e inversão espaço-temporal (I_{st}) definidas por

$$I_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{st} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qualquer elemento do grupo de Lorentz pode ser escrito na forma $I_k\,\Lambda$, com $k = 0, s, t, st$, onde subentende-se que $I_0 = 1$.

Para analisarmos o grupo de Poincaré, precisamos da lei de composição do grupo pois é através dela que encontraremos as transformações infinitesimais e consequentemente a álgebra do grupo. Tomemos assim duas transformações sucessivas.

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \\ x''^{\alpha} &= \overline{\Lambda}^{\alpha}{}_{\beta} x'^{\beta} + \overline{a}^{\alpha} = \overline{\Lambda}^{\alpha}{}_{\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\xi} x^{\xi} + \overline{\Lambda}^{\alpha}{}_{\beta} a^{\beta} + \overline{a}^{\alpha} \end{aligned}$$

Lê-se desta transformação,

$$T(\overline{\Lambda}, \overline{a})\, T(\Lambda, a) = T(\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a}). \tag{8}$$

Da própria lei de composição do grupo podemos escrever[5]:

$$\begin{aligned} &\textit{identidade} \qquad T(1,0) = 1 \\ &\textit{inversa} \qquad T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \end{aligned}$$

Numa dada transformação infinitesimal $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + w^{\alpha}{}_{\beta}$ e $a^{\alpha} = \epsilon^{\alpha}$, onde w e ϵ são infinitesimais, a condição (6) impõe que os w sejam antisimétricos, ou seja $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$. Assim aos 4 parâmetros independentes associados ao vetor ϵ temos que acrescentar mais 6 parâmetros da matriz 4-dimensional antisimétrica w, chegando a um total de 10 parâmetros independentes para caracterizar localmente o grupo de Poincaré.

Suponha uma dada transformação infinitesimal. Se tratando de uma transformação infinitesimal, podemos expressá-la mantendo apenas a primeira ordem nos parâmetros independentes.

$$T(1 + w, \epsilon) = 1 + \frac{i}{2} w_{\mu\,\nu} J^{\mu\,\nu} - i\,\epsilon_{\rho} P^{\rho}$$

Esta é uma expressão abstrata onde cada índice distingue elementos diferentes. Pela antisimetria de $w_{\mu\,\nu}$, $J^{\mu\,\nu}$ também é antisimétrico. Os termos $J^{\mu\,\nu}$ e P^{ρ} são os geradores do grupo, e como tal não dependem dos parâmetros da expansão. Para encontrar a álgebra dos geradores do grupo vamos utilizar a lei de composição do grupo aplicada à transformação infinitesimal.

$$\begin{aligned} T(\Lambda, a)\, T(1 + w, \epsilon)\, T^{-1}(\Lambda, a) &= T(\Lambda, a)\, T(\Lambda^{-1} + w\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a - w\Lambda^{-1}a + \epsilon) \\ &= T(1 + \Lambda w \Lambda^{-1}, -\Lambda w \Lambda^{-1} a + \Lambda\epsilon) \\ &= 1 + \frac{i}{2} w_{\alpha\beta} \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} \Lambda_{\nu}{}^{\beta} J^{\mu\nu} - i\left(\Lambda_{\rho}{}^{\alpha}\epsilon_{\alpha} - \Lambda_{\rho}{}^{\alpha} w_{\alpha}{}^{\beta} \Lambda_{\nu\beta}\, a^{\nu}\right) P^{\rho} \end{aligned}$$

[5]a rigor teríamos que provar que as transformações com Λ e a constantes formam de fato um grupo, no entanto as propriedades de fechamento e associatividade são triviais por se tratar de matrizes constantes.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
T(\Lambda,a)\,T(1+w,\epsilon)\,T^{-1}(\Lambda,a) &= T(\Lambda,a)\,\left[1+\frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\,\nu}-i\,\epsilon_\rho P^\rho\right]T^{-1}(\Lambda,a)\\
&= 1+\frac{i}{2}w_{\mu\nu}T(\Lambda,a)\,J^{\mu\nu}T^{-1}(\Lambda,a)-i\,T(\Lambda,a)\,\epsilon_\rho T^{-1}(\Lambda,a)
\end{aligned}
$$

onde utilizamos o fato que $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = \Lambda_\beta{}^\alpha$. Sendo os parâmetros independentes, podemos separar os termos desta equação para cada um dos parâmetros.

$$
\begin{aligned}
T(\Lambda,a)\,J^{\mu\nu}T^{-1}(\Lambda,a) &= \Lambda_\alpha{}^\mu\Lambda_\beta{}^\nu\left(J^{\alpha\beta}+a^\beta P^\alpha - a^\alpha P^\beta\right) && (9)\\
T(\Lambda,a)\,P^\rho T^{-1}(\Lambda,a) &= \Lambda_\alpha{}^\rho P^\alpha && (10)
\end{aligned}
$$

Note que para trasformações homogêneas, i.e. $a^\mu = 0$, o conjunto de geradores $J^{\alpha\beta}$ se transformam como um tensor enquanto que P^ρ se transforma como um vetor. No caso de translações, i.e. $\Lambda_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta$, P^ρ é invariante e $J^{\alpha\beta}$ se transforma da mesma forma que o momento angular frente a translações de origem. Estes dois resultados nos sugerem que os geradores P^ρ são responsáveis pelas translações da mesma forma que os geradores $J^{\alpha\beta}$ realizam rotações. Vale salientar que por estarmos tratando de um sistema espaço-temporal o termo rotações adquire um sentido mais amplo. As rotações que misturam coordenadas espaciais com temporais (por exmplo J^{0i}) são chamados de “boost” de Lorentz ou transformação de velocidade e estão associadas a imprimir uma dada velocidade a partícula ou referencial em questão.

Para determinarmos a álgebra dos geradores devemos considerar transformações infinitessimais atuando sobre os próprios geradores, i.e. devemos considerar transformações do tipo $T(\Lambda,a) = T(1+w,\epsilon)$ nas expressões (9) e (10). Aplicando $T(1+w,\epsilon)$ e depois colecionando termos em w e ϵ obtemos

$$
\begin{aligned}
\left[J^{\alpha\beta}\,,\,J^{\mu\nu}\right] &= i\left(\eta^{\alpha\mu}\,J^{\beta\nu}-\eta^{\beta\mu}\,J^{\alpha\nu}+\eta^{\alpha\nu}\,J^{\beta\mu}-\eta^{\beta\nu}\,J^{\mu\alpha}\right) && (11)\\
\left[\,P^\mu\,,\,J^{\alpha\beta}\right] &= i\left(\eta^{\mu\beta}\,P^\alpha-\eta^{\mu\alpha}\,P^\beta\right) && (12)\\
\left[\,P^\mu\,,\,P^\nu\,\right] &= 0 && (13)
\end{aligned}
$$

Esta é a álgebra do grupo de Poincaré. Antes de interpretá-la, façamos uma redefinição dos geradores. Vamos definir dois vetores tri-dimensionais separando assim as seis componentes do gerador das rotações. Desta forma definimos,

$$
\begin{aligned}
J_i &\equiv \epsilon_{ijk}J^{jk} \Rightarrow J^{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J_k\\
K^i &\equiv J^{0i}
\end{aligned}
$$

Em relação a esta nova nomenclatura a álgebra se escreve

$$
\begin{aligned}
[J_i,J_j] &= i\epsilon_{ijk}J^k & \qquad [K_i,P_j] &= -i\delta_{ij}P_0\\
[J_i,K_j] &= i\epsilon_{ijk}K^k & [K_i,P_0] &= -iP_i\\
[K_i,K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J^k & [P_\mu,P_\nu] &= 0\\
[J_i,P_j] &= i\epsilon_{ijk}P^k & [J_i,P_0] &= 0
\end{aligned}
$$

âninteressante notar que embora os geradores J^k satisfaçam uma álgebra fechada de operadores de rotação, os geradores das transformações de velocidade K^k não comutam nem com os geradores de rotação nem com os de translação P^k. De fato observamos que a aplicação sucessiva de duas transformações de velocidade em direções distintas seguidas da aplicação destas mesmas transformações de velocidade em ordem inversa é equivalente a uma rotação.

Uma possível representação para esta álgebra é:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De posse da álgebra do grupo podemos estudar as suas representações irredutíveis. Antes porém vamos construir as transformações finitas apartir das transformações infinitesimais. Para simplificar tomemos os geradores de rotação J^k como exemplo. Podemos escrever $T(\vec{w}, 0) = 1 + i\, w_i J^i$ onde w_i é infinitesimal e define um eixo de rotação $\vec{w}$. Note que se fizermos N aplicação teremos $T^N(\vec{w}, 0) = 1 + i\, N\; w_i J^i$, o que nos fornece a relação $T^N(\frac{\vec{w}}{N}, 0) = T(\vec{w}, 0)$. Para construirmos uma transformação finita basta tomarmos o limite N tendendo a infinito, pois neste caso teríamos

$$T(\vec{\theta}, 0) = \lim_{N \longrightarrow \infty} T^N(\frac{\vec{\theta}}{N}, 0) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \left[1 + i\, N\, \vec{\theta}.\vec{J}\right]^N = e^{i\vec{\theta}.\vec{J}}$$

onde agora o vetor $\vec{\theta}$ pode ser finito uma vez que $\lim_{N\to\infty} \frac{\vec{\theta}}{N}$ ainda é infinitesimal.

Este raciocínio pode ser extendido sem alterações para as outras transformações. Sendo então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários, θ e φ dois parâmetros angulares e $\vec{a}$ um vetor arbitrário, podemos escrever as transformações finitas na forma

$T(\theta\vec{u}, 0) = e^{i\theta\vec{u}.\vec{J}}$	rotações
$T(\varphi\vec{v}, 0) = e^{i\varphi\vec{v}.\vec{K}}$	transformações de velocidade
$T(0, \vec{a}) = e^{-i\vec{a}.\vec{P}}$	translações

Utilizando a álgebra dos geradores e o fato dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem unitários, pode-se mostrar que $(\vec{u}\cdot\vec{J})^3 = \vec{u}\cdot\vec{J}$ e que $(\vec{v}\cdot\vec{K})^3 = -\vec{v}\cdot\vec{K}$. A partir destas relações podemos reescrever $R(\vec{u}, \theta) \equiv T(\theta\vec{u}, 0)$ e $K(\vec{v}, \varphi) \equiv T(\varphi\vec{v}, 0)$ como

$$\begin{aligned} R(\vec{u}, \theta) &= 1 - (\vec{u}.\vec{J})^2[1 - cos(\theta)] + i\,\vec{u}.\vec{J}sen(\theta) \\ K(\vec{v}, \varphi) &= 1 + (\vec{v}.\vec{K})^2[1 - cosh(\varphi)] + i\,\vec{v}.\vec{K}senh(\varphi) \end{aligned}$$

Note que para qualquer rotação $R(\vec{u}, \theta)^0{}_0 = 1$. Isto é facilmente comprovado para a representação escolhida acima. Da mesma forma temos que $K(\vec{v}, \varphi)^0{}_0 = cosh(\varphi) > 1$. Além disso a inversa das transformações são simplismente $K^{-1}(\vec{v}, \varphi) = K(\vec{v}, -\varphi)$ e $R^{-1}(\vec{u}, \theta) = R(\vec{u}, -\theta)$.

Para finalizar a análise das transformações finitas vamos provar o seguinte teorema.

teorema:

Qualquer transformação de Lorentz em 4 dimensões pode ser decomposta em uma transformação de velocidade conjugada a uma rotação, e esta decomposição é unívoca.

$$\Lambda = R(\vec{u},\theta)K(\vec{v},\varphi) \;\text{ ou }\; K(\vec{v}',\varphi')R(\vec{u}',\theta')$$

Vamos definir para uma transformação arbitrária Λ as suas componentes como ${\Lambda^0}_0 = cosh(\varphi)$ e ${\Lambda^0}_i = v^i\, senh(\varphi)$. Note que esta parametrização respeita o vínculo $({\Lambda^0}_0)^2 - ({\Lambda^0}_i)^2 = 1$. Assim podemos construir uma transformação de velocidade tal que ${K(\vec{v},-\varphi)^0}_0 = cosh(\varphi) = {\Lambda^0}_0$ e ${K(\vec{v},-\varphi)^i}_0 = -v^i\, senh(\varphi) = -{\Lambda^0}_i$. Pela propriedade de grupo das transformações de Lorentz podemos construir uma transformação definida por $R \equiv \Lambda K(\vec{v},-\varphi)$. A componente ${}^0{}_0$ desta transformação é dada por ${R^0}_0 = {\Lambda^0}_\mu {K^\mu}_0 = ({\Lambda^0}_0)^2 - ({\Lambda^0}_i)^2 = 1$. Logo esta transformação é uma rotação. Usando a inversa $K^{-1}(\vec{v},\varphi) = K(\vec{v},-\varphi)$ chegamos a decomposição $\Lambda = R(\vec{u},\theta)K(\vec{v},\varphi)$. Para mostrar que esta decomposição é única suporemos ao contrário de que haja uma outra decomposição tal que $\Lambda = R(\vec{u},\theta)K(\vec{v},\varphi) = R(\vec{x},\xi)K(\vec{y},\sigma)$. Novamente usando as transformações inversas encontramos que $R^{-1}(\vec{x},\xi)R(\vec{u},\theta) = K(\vec{y},-\sigma)K(\vec{v},\varphi)$, no entanto a aplicação de duas rotações ainda é uma rotação o que implica que ${[K(\vec{y},-\sigma)K(\vec{v},\varphi)]^0}_0 = \frac{1-\sigma\,\varphi\,\vec{y}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\varphi^2}} = 1$. A única solução possível para este vínculo é $\vec{y} = \vec{v}$ e $\sigma = \varphi$. Cqd

Até o momento toda a análise do grupo de Poincaré foi feita com uma ligação forte com as transformações espaço-temporais. No entanto, como já mencionado anteriormente, as representações irredetíveis do grupo de Poincaré estão relacionadas com a classificação das partículas elementares. Portanto é de interesse estudarmos e construírmos as diversas representações irredutíveis possíveis. Este programa requer algum passos: a obtenção da álgebra dos geradores do grupo, resultado já obtido; encontrar os operadores de casimir do grupo, pois cada subespaço formado por valores fixos destes operadores é uma representação irredutível; e finalmente construir e classificar as representações destes subespaços.

As representações irredutíveis do grupo de Lorentz são mais facilmente analisadas usando uma outra base de geradores. Nesta nova base os geradores são separados em dois grupos desacoplados. Definamos então os geradores:

$$M_a = \frac{1}{2}\left(J_a + iK_a\right) \quad e \quad N_a = \frac{1}{2}\left(J_a - iK_a\right)$$

a partir da álgebra dos $J's$ e dos $K's$ encontramos:

$$\begin{aligned} [M_a\,,\,M_b] &= i\,\epsilon_{abc}M_c \\ [N_a\,,\,N_b] &= i\,\epsilon_{abc}N_c \\ [M_a\,,\,N_b] &= 0 \end{aligned}$$

Assim conseguimos desacoplar os geradores do grupo de Lorentz em duas álgebras de momento angular. Esta álgebra é bem conhecida e seu descrutinamento pode ser encontrado em qualquer livro básico de mecânica quântica, por isso nos restringiremos a apenas enunciar os resultados.

Em relação a diagonalização dos operadores M^2 e M_z encontramos respectivamente autovalores $m(m+1)$ e m_z onde m_z assume valores discretos cuja diferença entre dois valores sucessivos é um inteiro e restritos à condição $-m < m_z < +m$. ânnotório o fato do operador de casimir deste subespaço ser o próprio M^2.

Todas estas considerações são igualmente válidas para a álgebra associada aos N_i, e uma vez que os subespaços invariantes são obtidos fixando os autovalores dos operadores de casimir, i.e. fixando os valores m e n, cada um desses subespaços invariante tem dimensão $(2m+1)(2n+1)$.

A transformação inversa nos mostra que $\vec{J} = \vec{M} + \vec{N}$, ou seja $J_z = M_z + N_z$. Assim identificamos o spin de cada uma das representações com o valor $m + n$. A tabela abaixo mostra as dimensões e o spin das três representações de menor dimensão.

(m,n)	dim	spin
(0,0)	1	0
$(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$	2	1/2
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	1

Mais adiante vamos estudar com mais detalhes cada um dessas representações, porém vale apena salientar que a operação de inversão espacial não é bem definida para todas as representações irredutíveis. Note que $[I_s, \vec{J}] = 0$, porém $[I_s, \vec{K}] \neq 0$, vemos então que a inversão espacial só é bem definida para representações onde $\vec{K} = 0$, i.e. representações do tipo (m, m) onde $m = n$. De fato, a aplicação de inversão espacial na representação $(\frac{1}{2}, 0)$ que é conhecida como espinor esquerdo de Weyl leva esta representação na representação $(0, \frac{1}{2})$ chamada de espinor direito de Weyl, e vice e versa. Porém pode-se construir uma representação que é a soma direta destas duas representações $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ chamada de espinores de Dirac, onde a operação de inversão espacial é bem definida.

Nos resta repetir esta mesma análise agora para o grupo de Poincaré. Os operadores de casimir terão que ser construídos apartir dos geradores $(P^\mu, J^{\alpha\beta})$ e necessariamente escalares de Lorentz, já que eles deverão comutar com todos os geradores deste grupo. Da álgebra do grupo (11)-(13) percebemos que

$$\begin{aligned} [P^\mu P_\mu, P^\nu] &= 0 \\ \left[P^\mu P_\mu, J^{\alpha\beta}\right] &= 0 \end{aligned}$$

Lembrando os resultados da teoria da relatividade restrita temos que $P^\mu P_\mu = m^2$, ou seja os autovalores deste operador de casimir é essencialmente o que convencionamos chamar de massa!

O outro operador de casimir é o quadrado de um outro vetor $W^2 = W^\mu W_\mu$. Este vetor, chamado de vetor de Pauli-Lubanski, é definido por $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu J_{\alpha\beta}$ onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é um tensor totalmente antisimétrico com $\epsilon^{0123} = 1$. Por ser um invariante de Lorentz temos que $[W^\mu W_\mu, J^{\alpha\beta}] = 0$, e pela sua própria definição $W^\mu P_\mu = 0$ da onde se mostra que $[W^\mu W_\mu, P^\alpha] = 0$.

As componentes do vetor de Pauli-Lubanski são dadas por

$$\begin{aligned} W^0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} P_i J_{jk} = \vec{P} \cdot \vec{J} \\ W^i &= P_0 J^i - \vec{P} \cdot \vec{K} \end{aligned}$$

As classificações das representações irredutíveis serão dadas pelos domínios de valores possíveis dos autovalores destes operadores de casimir. Os subespaços ($P^2 < 0$,W^2) e ($P^2 = 0$,$W^2 \neq 0$) não serão explorados pois aparentemente estes casos não se realizam na Natureza. As partículas associadas ao caso ($P^2 = m^2 < 0$,W), comumente chamadas de Tackions, possuem propriedades ecêntricas, como viajar com velocidades superiores a velocidade da luz o que acarreta problemas de causalidade.

Para partículas massivas temos $P^2 = m^2 > 0$. Podemos então escolher um referêncial comovente a partícula de forma que sua velocidade seja nula. Neste referêncial o vetor quadri-momento $P^\mu = (m, \vec{0})$, e assim encontramos para o vetor de Pauli-Lubanski $W^\mu = (0, m\vec{J})$, ou seja neste referêncial o escalar $W^2 = -m^2 J^2$. Uma vez que a velocidade é zero o autovalor associado a J^2 é apenas o próprio spin da partícula. Desta forma esta representação é caracterizada por dois parâmetros (m, s) onde $m > 0$ é a massa da partícula e $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$ é o valor de seu spin.

O último caso é caracterizado por $P^2 = W^2 = 0$. Estas partículas possuem massa de repouso zero, como os fótons, o que nos impede de repetirmos a análise anterior. Note porém que sendo $P^2 = 0$ então $|P^0| = |\vec{P}|$, e da mesma forma $|W^0| = |\vec{W}|$. Usando o vínculo $W^\mu P_\mu = 0$ encontramos que $P^0 W^0 = |\vec{P}| \cdot |\vec{W}| cos(\alpha)$, onde α é o ângulo entre os dois vetores. Se tomarmos o módulo dos dois lados da equação encontramos que $cos(\alpha) = \pm 1$. Isto implica que os vetores são paralelos ou antiparalelos, ou seja $\vec{W} = h \cdot \vec{P}$ e $W^0 = h \cdot P^0$. Porém tinhamos que $W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} = \pm h P^0 = \pm h |\vec{P}|$, e assim $h = \pm \hat{P} \cdot \vec{J}$. Esta quantidade é chamada de helicidade e nos fornece a projeção do momento angular ao longo da direção de propagação. Note que a helicidade pode assumir apenas dois valores o que nos indica que estas partículas possuem apenas dois graus de liberdade.

Para finalizar o estudo do grupo de Poincaré vamos estudar individualmente algumas de suas representações mais importantes, a saber, os espinores de Weyl, os espinores de Dirac e a representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Espinores de Weyl: Representação $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$

A dimensão desta representação é $2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$, logo a representação do grupo será composta por matrizes 2x2. Em duas dimensões as matrizes que reproduzem a álgebra de momento angular são as conhecidas matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes satisfazem as seguintes propriedades:

1. $[\sigma_i \, , \, \sigma_j] = 2\, i\, \epsilon_{ijk} \sigma^k$
2. $\sigma_i^2 = 1$
3. $\{\sigma_i \, , \, \sigma_j\} = 0$

Existe duas possibilidades para a representação dos geradores em função das matrizes de Pauli.

$$\begin{array}{ll} L : (\frac{1}{2}, 0) & \qquad J^i = \frac{\sigma^i}{2} \ , \ K^i = i\frac{\sigma^i}{2} \\ R : (0, \frac{1}{2}) & \qquad J^i = \frac{\sigma^i}{2} \ , \ K^i = -i\frac{\sigma^i}{2} \end{array}$$

A primeira representação é chamada de espinores esquerdos enquanto a outra de espinores direitos. A operação de Paridade leva os geradores $\vec{K} \longrightarrow -\vec{K}$, ou seja a operação de Paridade conecta a representação esquerda com a direita e vice e versa. Neste sentido, esta operação não é bem definida para apenas uma das representações. No entanto, acredita-se que na Natureza exista uma simetria associada a operação de Paridade composta com outras operações, sendo assim desejável descrever as partículas elementares por representações cuja operação de Paridade seja bem definida. Como veremos a seguir estes objetos são os espinores de Dirac, os quais são formados pela soma direta das duas representações de espinores de Weyl.

Os operadores finitos associados aos elementos do grupo são escritos como

$$
\begin{aligned}
T_L &= e^{\frac{i}{2}\theta\vec{u}.\vec{\sigma}+\frac{1}{2}\varphi\vec{v}.\vec{\sigma}} \\
T_R &= e^{\frac{i}{2}\theta\vec{u}.\vec{\sigma}-\frac{1}{2}\varphi\vec{v}.\vec{\sigma}}
\end{aligned}
$$

Note que estes operadores não são unitários. De fato, encontramos que $(T_R)^\dagger = (T_L)^{-1}$ e $(T_L)^\dagger = (T_R)^{-1}$. Percebemos assim que para construírmos escalares de Lorentz basta conjugarmos espinores esquerdos Ψ_L com espinores direitos Ψ_R de forma que ao aplicarmos uma transformação arbitrária tenhamos

$$\Psi_L^\dagger\Psi_R \longrightarrow \Psi_L^\dagger(T_L)^\dagger(T_R)\Psi_R = \Psi_L^\dagger\Psi_R,$$

e da mesma forma

$$\Psi_R^\dagger\Psi_L \longrightarrow \Psi_R^\dagger(T_R)^\dagger(T_L)\Psi_L = \Psi_R^\dagger\Psi_L.$$

A construção de vetores de Lorentz pode ser feita utilizando-se as propriedades das matrizes de Pauli. A componente temporal do vetor é sempre um escalar, logo $V^0 = \Psi_L^\dagger\Psi_L$ ou $V^0 = \Psi_R^\dagger\Psi_R$. Note que os operadores não são hermitianos apenas devido as transformações de velocidade. Podemos então tentar construir as componentes espaciais compondo o vetor de Pauli $\vec{\sigma}$ com os espinores.

$$V^\mu = \Psi_L^\dagger\sigma^\mu\Psi_L$$

onde definimos $\sigma^\mu = (1,\vec{\sigma})$. De fato, para rotações puras ($\varphi = 0, \theta \neq 0$) este vetor se transforma como um quadri-vetor de Lorentz. Vamos então analisar a sua transformação para as transformações de velocidade infinitesimais ($\varphi\vec{v} = \vec{w}, \theta = 0$).

$$
\begin{aligned}
\Psi_L^\dagger\Psi_L &\longrightarrow \Psi_L^\dagger e^{\frac{1}{2}\vec{w}\cdot\vec{\sigma}}e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{w}}\Psi_L = \Psi_L^\dagger e^{\vec{w}\cdot\vec{\sigma}}\Psi_L \\
&= \Psi_L^\dagger\Psi_L + w_k\Psi_L^\dagger\sigma^k\Psi_L \\
\Psi_L^\dagger\sigma^k\Psi_L &\longrightarrow \Psi_L^\dagger e^{\frac{1}{2}\vec{w}\cdot\vec{\sigma}}\sigma^k e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{w}}\Psi_L = \Psi_L^\dagger\left[\sigma^k + \frac{1}{2}w_i(\sigma^k\sigma^i + \sigma^i\sigma^k)\right]\Psi_L \\
&= \Psi_L^\dagger\sigma^k\Psi_L + w^k\Psi_L^\dagger\Psi_L.
\end{aligned}
$$

Esta é justamente a composição para uma transformação infinitesimal. Pode-se mostrar que além deste quadri-vetor podemos construir um outro com os espinores direitos dado por

$$\overline{V}^\mu = \Psi_R^\dagger\overline{\sigma}^\mu\Psi_R$$

onde definimos $\overline{\sigma}^\mu = (1,-\vec{\sigma})$. A partir destes objetos básicos compomos outros objetos tensoriais como por exemplo os escalares $\Psi_R^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi_R$ e $\partial_\mu\Psi_R^\dagger\overline{\sigma}^\mu\Psi_R$.

Espinores de Dirac: Representação $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$

Como comentado anteriormente, a representação dos espinores de Dirac é a soma direta das representações dos espinores de Weyl. Esta representação tem dimensão 4, e pode ser representada utilisando-se as matrizes de Pauli para construírmos matrizes 4x4. Uma possível representação dessas matrizes é a representação de Weyl. Em termos desta representação temos

$$\Psi \doteq \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}; \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma^\mu} \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

onde as matrizes γ^μ satisfazem a seguinte relação de anticomutação: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, sendo $\eta^{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$. Note que $\Psi^\dagger\gamma^0\Psi = \Psi_L^\dagger\Psi_R + \Psi_R^\dagger\Psi_L$ é um escalar. Definimos $\overline{\Psi} \doteq \Psi^\dagger\gamma^0$, de forma que $\overline{\Psi}\Psi$ é um escalar. ânfácil verificar que da mesma forma que construímos quadri-vetores com os espinores de Weyl podemos construir quadri-vetores a partir dos espinores de Dirac e as matrizes γ^μ. Assim temos

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Psi}\Psi & , & \text{escalar de Lorentz} \\ \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi & , & \text{quadri-vetor de Lorentz} \\ \overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi & , & \text{escalar de Lorentz} \\ \partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi & , & \text{escalar de Lorentz} \end{array}$$

.

Devido a sua importância nas descrições de fenânenos físicos, apenas mencionaremos a Lagrangeana associada a dinânica dos espinores de Dirac. A lagrangeana deve ser uma quantidade real e invariante de Lorentz (escalar). Definimos então a Lagrangeana de Dirac por

$$\mathcal{L} \doteq \frac{i}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right] - m\overline{\Psi}\Psi$$

.

Na literatura às vezes se escreve $\mathcal{L} \doteq i\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi +$termos de superfície, os quais não geram dinânica. A equação dinânica associada a estas partículas é $(-i\gamma^\mu\partial_{mu} + m)\Psi = 0$.

Tensores: Representação 4-dim $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

A estruturação do grupo de Poincaré tem origem nas suas aplicações em física. A primeira simetria associada ao grupo advém das transformações entre referenciais inerciais sob o escopo da teoria da relatividade restrita. O desenvolvimento histórico das transformações já foi amplamente exposto em diversos bons textos sobre o assunto. Esta apresentação pretende se valer de um apelo físico para derivar os elementos do grupo em quatro dimensões $(\Lambda^\mu{}_\nu)$.

Seja um referêncial inercial S o qual será escolhido como em repouso $(dx^i = 0)$, e outro referêncial S' com velocidade $\vec{v}$ medido pelo referêncial S. Pela simetria em questão temos que $\vec{v}'$, a velocidade de S medida por S', é igual a $-\vec{v}$. Sendo $\Lambda^\mu{}_\nu$ os elementos que conectam estes dois referênciais, temos que $dx'^0 = \Lambda^0{}_0 dx^0$ e $dx'^i = \Lambda^i{}_0 dx^0$. Logo,

$$\frac{dx'^i}{dx'^0} = \frac{1}{c}\frac{dx'^i}{dt'} = \frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0} \Longrightarrow \Lambda^i{}_0 = -\Lambda^0{}_0\frac{v^i}{c}.$$

Escolhendo a componente $\mu = \nu = 0$ do vínculo $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu\eta_{\alpha\beta}$ e usando o resultado anterior temos que

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i(\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Lambda^i{}_0 = -\gamma v^i/c \\ \Lambda^0{}_0 \doteq \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-v^2/c^2}} \end{array}\right.$$

Da mesma forma, podemos desenvolver a transformação inversa $S' \to S$. No entanto, neste caso temos que $dx'^i \neq 0$, i.e.

$$dx^0 = cdt = \Lambda^0{}_0(cdt') - \sum_i \Lambda^0{}_i dx'^i = \left[(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i \Lambda^0{}_i\Lambda^i{}_0\right] cdt.$$

Este resultado pode ser simplificado utilizando as expressões já obtidas e o fato dos v^i's serem linearmente independentes. De fato, temos

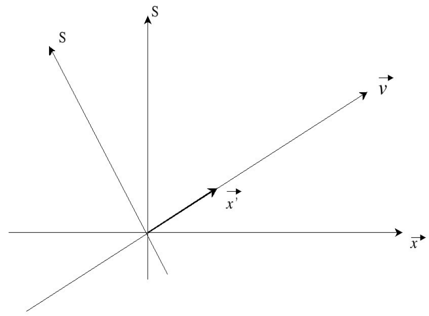
$$1 = \gamma^2 - \sum_i \Lambda^0{}_i \Lambda^i{}_0 \longrightarrow \sum_i \Lambda^0{}_i \frac{v^i}{c} = \frac{1-\gamma^2}{\gamma} = -\sum_j \gamma \frac{v^j}{c}\frac{v^j}{c} \ ,$$

donde concluímos que $\Lambda^0{}_i = -\gamma v^i/c = \Lambda^i{}_0$.

Com referência novamente ao vínculo $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}$, façamos agora $\mu = k$ e $\nu = 0$, e ao resultado multipliquemos por v^k e somemos o índice livre. Assim temos

$$\Lambda^0{}_k \Lambda^0{}_0 - \sum_i \Lambda^i{}_k \Lambda^i{}_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i,k} \Lambda^i{}_k v^i v^k = \gamma v^2 .$$

Para auxiliar na derivação de uma transformação geral, vamos definir uma rotação no eixo do sistema S de forma a alinhá-lo a velocidade $\vec{v}$ do referêncial S'. Após encontrada a transformação desejada nos restará apenas fazer a rotação inversa.



Este novo referêncial $S^\star$ é definido por $S^\star = \mathcal{R}S$, onde $\mathcal{R}$ é uma rotação tal que $x_1^\star \ // \ \vec{v}$. Em $S^\star$ apenas a componente $v^1 \neq 0$ e assim $\Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \gamma$, e $\Lambda^\mu{}_\nu = 0$ para qualquer outra possibilidade. Este resultado nos mostra que as componentes perpendiculares a velocidade de propagação não se alteram de forma que $\vec{dx}'_\perp = \vec{dx}^\star_\perp$. E as componentes paralelas se transformam conforme $\vec{dx}'_{//} = \gamma(\vec{dx}^\star_{//} - \vec{v}dt)$. Definindo $\vec{R}_{//} = (\vec{R}\cdot\vec{v})\vec{v}/v^2$, e $\vec{R}_\perp = \vec{R} - \vec{R}_{//}$ temos

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= \vec{R}'_\perp + \vec{R}'_{//} = \vec{R}^\star_\perp + \gamma(\vec{R}^\star_{//} - \vec{v}t) = \\ &= \vec{R}^\star + (\gamma - 1)(\vec{R}^\star \cdot \vec{v})\vec{v}/v^2 - \gamma\vec{v}t. \end{aligned}$$

Esta equação também é válida para o referêncial S desde que consideremos agora a velocidade com as suas três componentes com referência a este referêncial. ânfácil lermos desta expressão todas as componentes da transformação

$$\begin{aligned} \Lambda^0{}_0 &= \gamma \\ \Lambda^i{}_0 &= \Lambda^0{}_i = -\gamma\frac{v^i}{c} \\ \Lambda^i{}_j &= \delta^i{}_j + (\gamma - 1)\frac{v^i v^j}{v^2} \end{aligned}$$