Relatividade Restrita

Felipe Tovar Falciano

Cinemática relativística

A teoria da relatividade restrita propõe uma modificação da mecânica newtoniana para compatibilizá-la com o eletromagnetismo de Maxwell. A mudança fundamental se dá na relação entre os observadores inerciais. Neste sentido, a relatividade restrita pode ser entendida como uma reformulação da cinemática da mecânica clássica. A relatividade restrita, como formulada por Einstein, baseia-se em dois postulado: a validade do princípio da relatividade, e a constância da velocidade da luz no vácuo.

O princípio da relatividade estabelece a equivalência entre todos os observadores inerciais. Este princípio esta presente tanto na mecânica newtoniana quanto na relatividade restrita. Na mecânica newtoniana, a implementação matemática deste princípio se dá através das transformações de Galileu.

A constância da velocidade da luz no vácuo, nos obriga a rever a transformação que conecta dois observadores inerciais. Isto é fácil de entender, pois se um observador $\mathcal{O}$ em repouso observa uma partícula com velocidade $\vec{u}$ e outro observador $\mathcal{O}'$ com velocidade $\vec{v}'$ com relação a $\mathcal{O}$, as transformações de Galileu nos dizerm que $\mathcal{O}'$ medirá uma velocidade $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}'$. Logo, as transformações de Galileu são incompatível com a constância da luz no vácuo.

As transformações que conectam dois referênciais inerciais na relatividade restrita são denominadas de transformações de Poincaré.

Numa perspectiva moderna, as transformações de Poincaré podem ser derivadas pela imposição da invariância do intervalo definido por $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$, onde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ e definimos a coordenada temporal multiplicando pela velocidade da luz c, ou seja temos $x^0 \equiv c\,t$. A exigência da invariância do intervalo funciona como a implementação matemática do segundo postulado da relatividade restrita. Com efeito, num intervalo de tempo $\mathrm{d}t$, a luz percorre uma distância $c\mathrm{d}t$. Logo, para a trajetória da luz, o intervalo é sempre zero, i.e. $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = 0$. Impor a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2$ implica na constância da velocidade da luz no vácuo. Desta maneira, se dois observadores $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ têm sistemas de coordenadas $\{x^\mu\}$ e $\{x'^\mu\}$, então a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$ implica em

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad . \tag{1}$$

Derivando esta equação com relação a x^λ temos

$$\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\beta}\right) = 0 \quad . \tag{2}$$

Nesta equação temos três índices livres. Assim, podemos re-escrevê-la trocando λ por α e depois λ por β. Somando (2)+ $(\lambda \leftrightarrow \alpha)$ e subtraindo $(\lambda \leftrightarrow \beta)$ temos

$$2\eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = 0 \quad . \tag{3}$$

As transformações têm que ser não-singulares de forma que podemos multiplicar esta equação por $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\rho}$ e obter como condição para a invariância do intervalo $\mathrm{d}s^2$ a expressão

$$\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad , \tag{4}$$

com a matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ e o vetor a^μ ambos constantes. A invariância do intervalo exige apenas que o vetor a^μ seja constante, mas levando a transformação acima na eq. (1) vemos que a matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ é condicionada a satisfazer

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu \quad , \quad i.e. \quad \Lambda^t\eta\Lambda = \eta \quad . \tag{5}$$

Uma vez que o determinte de uma matriz real é igual a de sua transposta, a eq. (5) nos mostra que $\det(\Lambda) = \pm 1$. Além disso, escolhendo $\mu = \nu = 0$ na equação acima temos

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^0{}_0 \geqslant +1 \\ \Lambda^0{}_0 \leqslant -1 \end{array} \right. \tag{6}$$

Essas transformações entre observadores inerciais formam um grupo. O setor $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$ está associado a transformações discretas as quais implementam as inversões espaciais, temporais e espaço-temporais. Já o setor com $\Lambda^0{}_0 \geqslant -1$ são transformações contínuas. É possível mostrar que, para o setor contínuo, os vetores constantes a^μ implementam translações enquanto a matriz Λ está associada a rotações e a transformações de velocidade ("boosts"). As transformações entre referênciais sem incluir as translações, i.e. $\Lambda \neq 0$ mas $a^\mu = 0$ são chamadas de transformações de Lorentz enquanto que as completas são denominadas de transformações de Poincaré.

A equação (5) determina os coeficientes da matriz Λ. É possível mostrar que, a menos de uma possível rotação espacial, a transformação que conecta o referencial $\{x'^{\mu}\}$ com velocidade $\vec{v}$ com relação a $\{x^{\mu}\}$ é

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + (\gamma - 1)\,\frac{\vec{x}.\vec{v}}{v^2}\,\vec{v} + \gamma\,\vec{v}\,t \qquad \text{com} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{7}$$

Da expressão acima podemos ler diretamente as componentes da matriz de Lorentz quando temos uma pura transformação de velocidade ("boosts")

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \quad , \quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = \gamma\frac{v^i}{c} \quad , \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + (\gamma - 1)\,\frac{v^i v^j}{v^2} \qquad . \tag{8}$$

Essas transformações nos mostra que as direções perpendiculares ao movimento não se alteram. Com efeito, definindo $\vec{x}_{\parallel} \equiv (\vec{x}.\vec{v}/v^2)\vec{v}$ e $\vec{x}_{\perp} \equiv \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$, a equação (7) nos dá

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma\left(\vec{x}_{\parallel} + \vec{v}.t\right) \qquad , \qquad \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$$

Concluímos assim que as direções perpendiculares são preservadas enquanto que a direção ao longo da velocidade sofre uma transformação de velocidade como indicada acima.

Os novos efeitos cinemáticos que surgem na relatividade restrita são fundamentalmente associados as transformações de velocidade eq. (8). Ademais, os efeitos de rotações e translações já são bem conhecidas. Por esses motivos, vamos focar nas transformações de velocidade e explorar suas consequências.

Contração de Lorentz

Sejam dois referências inerciais tais que $\mathcal{S}'$ se move com velocidade $\vec{v}$ com relação a $\mathcal{S}$. Suponha que um observador $\mathcal{O}'$ carregue consigo em $\mathcal{S}'$ um objeto, por exemplo uma barra de comprimento l'. A atribuição de um comprimento l' para o objeto significa que num dado instante t' suas extremidades se localizam entre os pontos $\vec{x}'_2$ e $\vec{x}'_1$. Do ponto de vista de um observador $\mathcal{O}$ locado em $\mathcal{S}$ o comprimento desse mesmo objeto será l. O ponto importante a reconhecer é que medidas puramente espaciais em $\mathcal{S}'$ são feitas a t' fixo enquanto que em $\mathcal{S}$ são feitas a t fixo. Assim, o que o observador $\mathcal{O}$ identificará como comprimento da barra é a distância $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$

num dado instante t. Pelas transformações de lorentz eq. (7) temos que

$$\begin{aligned} l = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| &= \left| \gamma(\vec{x'}_{\parallel 2} - \vec{x'}_{\parallel 1}) + \vec{x'}_{\perp 2} - \vec{x'}_{\perp 1} \right| \\ &= \sqrt{\left| \vec{x'}_2 - \vec{x'}_1 \right|^2 + (\gamma^2 - 1) \left| \vec{x'}_{\parallel 2} - \vec{x'}_{\parallel 1} \right|^2} \geqslant l' \end{aligned} \tag{9}$$

Logo, objetos em movimento parecerão ter um comprimento menor do que em repouso. Esta contração dos objetos em movimento está intimamente relacionada à diferença na marcação temporal dos referências inerciais. De um outro modo, a medida de distância no referencial $\mathcal{S}'$ ocorre num dado instante t' fixo enquanto que no referencial $\mathcal{S}$ as medidas de distância ocorrem com t fixo.

Dilatação Temporal

De maneira complementar ao que discutimos na contração de Lorentz, uma medida de tempo é por definição o registro de um relógio ideal em repouso. Como na relatividade restrita o espaço-tempo é plano, o termo relógio ideal aqui se refere a qualquer sistema físico periódico que nos permita com precisão contar cíclos.

Seja então um relógio rigidamente atrelado ao referêncial $\mathcal{S}'$ que se move com velocidade $\vec{v}$ com relação a $\mathcal{S}$. Suponha que um relógio de $\mathcal{S}'$ meça $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. As transformações de Lorentz nos dizem que um observador $\mathcal{O}$ em $\mathcal{S}$ usará um outro relógio cujo intervalo temporal será $\Delta t = t_2 - t_1$. Este intervalo temporal esta associado ao do referêncial $\mathcal{S}'$ por

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'_2 - t'_1 = \gamma \left(t_2 + \frac{1}{c^2} \vec{v}.\vec{x}_2 \right) - \gamma \left(t_1 + \frac{1}{c^2} \vec{v}.\vec{x}_1 \right) \\ &= \gamma \Delta t + \frac{\gamma}{c^2} \vec{v}. \left(\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \right) \\ &= \gamma \Delta t \geqslant \Delta t \qquad , \end{aligned} \tag{10}$$

onde usamos o fato do relógio em $\mathcal{S}$ estar parado com relação a este referencial, i.e. $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$. Como o relógio que mede Δt esta em repouso no referêncial $\mathcal{S}$, vemos que relógios em movimento são ralentados. Se escolhermos Δt como sendo a unidade de tempo usado para medir intervalos temporais, como por exemplo 1 segundo, a eq. (10) nos indica que 1 segundo no relógio de $\mathcal{S}'$ demora mais do que 1 segundo em $\mathcal{S}$ de forma que enquanto $\mathcal{S}'$ mede uma unidade de tempo, $\mathcal{S}$ medirá um valor $\gamma \geqslant 1$ de unidades de tempo.

Há um outro efeito cinemático na relatividade restrita , geralmente não enfatizado, associado a sincronização de relógios. Embora, para um mesmo observador, o ritmo de todos os relógios seja constante, em geral, a sincronização é feita a partir de uma fase que depende da posição de cada relógio. De fato, olhando novamente para as transformações de Lorentz temos

$$t = \gamma \left(t' + \frac{1}{c^2} \vec{v} . \vec{x}' \right) \quad . \tag{11}$$

Para dois relógios parados em $\mathcal{S}'$ e posicionados em dois pontos A e B cuja distância é $\vec{x}'_a - \vec{x}'_b$, num dado instante t' fixo, um observador em $\mathcal{S}$ associará tempos diferentes a estes dois relógios embora t' esteja fixo. A diferença temporal entre estes dois relógios será de

$$\delta t = \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} . (\vec{x}'_a - \vec{x}'_b) \quad . \tag{12}$$

Note porém que esta diferença se deve a uma diferença de fase. Todos os relógios em $\mathcal{S}'$ têm o mesmo ritmo porém o observador $\mathcal{O}$ em $\mathcal{S}$ identificará que os ponteiros de relógios em pontos diferentes em $\mathcal{S}'$ estão marcando valores diferentes. Esta diferença se mantém constante com a passagem do tempo e depende da distância entre estes relógios de $\mathcal{S}'$.

As propriedades cinemáticas das transformações de Lorentz modificam as distâncias espaciais e temporais gerando a contração de Lorentz e a dilatação temporal. Este comportamento dos corpos em movimento fecundou uma série de pseudo-paradoxos dos quais o mais famoso é certamente o chamado paradoxo dos gêmeos[1] associado a dilatação temporal.

Dada a simetria das transformações de Lorentz com relação à direção da velocidade do observador, descrever o afastamento de um observador $\mathcal{B}$ com velocidade $\vec{v}$ com relação a um observador $\mathcal{A}$ parado é equivalente a descrever o observador $\mathcal{B}$ parado e $\mathcal{A}$ se movendo com velocidade $-\vec{v}$. Este fato é a manifestação da equivalência entre observadores inerciais. No entanto, como vimos a pouco, a passagem de tempo depende do estado de movimento do observador.

Se relógios em movimento sofrem dilatação temporal, a passagem de tempo para observadores com velocidade relativa entre si deve ser diferente.

[1] A existência de um paradoxo teórico em qualquer teoria física é suficiente para termos de abandoná-la. Se a relatividade restrita contivesse de fato um paradoxo em seu interior teríamos que no mínimo reformulá-la para sanar suas inconsistências. Na realidade o que temos em relatividade restrita são pseudo-paradoxos, ou seja, questões que a primeira vista parecem gerar um paradoxo mas que com um análise mais cuidadosa se mostram dissolvidos. Por questões históricas é praxe denominar a situação que descrevemos nesta seção por paradoxo dos gêmeos mas é preciso atentar que se trata apenas de um pseudo-paradoxo.

A dificuldade surge ao lembrarmos que enquanto observadores inerciais, e por isso equivalentes, ambos podemos afirmar que estão parados e é o outro que se move. Neste raciocínio ambos concluiriam que o outro observador é mais jovem do que a ele próprio. É evidente que esta resposta não é satisfatória. Não é possível que um observador seja ao mesmo tempo mais jovem e mais velho que outro observador.

Na literatura esta discussão aparece na forma do paradoxo dos gêmeos. Suponha que dois gêmeos sejam separados, um permanecendo na Terra e o outro sendo levado para viajar numa espaço-nave com velocidade comparável a da luz durante alguns anos terrestres. A viagem do gêmeo que viajou na espaço-nave é tal que no meio do caminho ele inverte o sentido e retorna a Terra. Assim a questão que se coloca é quando houver o re-encontro qual dos dois gêmeos será mais velho, o que ficou na Terra ou o que o viajou na espaço-nave?

Existem várias maneiras de desmontar este pseudo-paradoxo sendo uma delas a consideração geométrica associada ao intervalo entre dois eventos. O intervalo entre dois eventos associados ao mesmo ponto espacial do referencial de um dado observador é nada mais que o tempo marcado pelo relógio que se move consigo, também chamado de tempo próprio. No caso onde a sequência de eventos está associada a mudanças espaciais, o intervalo é igual ao tempo medido por um relógio anexado ao referencial que se move junto, ou seja realiza a mesma sequência de eventos. O interessante em utilizar o intervalo é o fato dele ser um invariante de Lorentz e desta forma todos observadores inerciais devem necessariamente concordam em seu valor. Assim o paradoxo fica resolvido quando percebemos que o intervalo do gêmeo viajante ao longo de toda a viagem é menor do que o intervalo do gêmeo terrestre.

Uma outra abordagem possível para se entender este pseudo-paradoxo é observar que os gêmeos só são equivalentes durante a primeira metade da viagem. Existe uma diferença crucial entre as duas situações uma vez que enquanto o gêmeo terrestre permanece com velocidade constante ao longo de toda a viagem, o gêmeo viajante é acelerado para possibilitar o seu retorno à Terra. Esta assimetria rompe com a argumentação de equivalência global entre os gêmeos. Esta assimetria surge da presença de uma aceleração que conduz o gêmeo viajante numa mudança constante de referenciais. Dito de outra forma, enquanto o gêmeo terrestre permanece sempre em um mesmo referencial inercial, o gêmeo viajante muda de referencial ao longo de sua viagem. Contudo, é importante notar que a diferença de idade entre os gêmeos não é um efeito da aceleração propriamente dita. Existe três períodos de aceleração: primeiramente o gêmeo viajante acelera na espaço-nave para ganhar velocidade; depois a nave acelera fazendo o retorno à Terra e finalmente a terceira aceleração é para freiar a nave no momento que ela retorna à Terra.

É possível mostrar que os efeitos de dilatação temporal ao longo destes três períodos pode ser feito desprezíveis. Ademais, um argumento simple nos mostra que de fato não pode ser a aceleração a responsável pelo efeito[2]. Considere por exemplo duas situações: 1) o gêmeo na nave viaja com velocidade constante durante 1 ano marcado em seu relógio até o momento em que é acelerado e em seguida retorna à Terra. Na 2) o gêmeo viajante viaja com a mesma velocidade que a anterior porém por apenas 1 dia marcado em seu relógio, e em seguida, sofrendo a mesma aceleração, retorna a Terra. É claro que no segundo caso a diferença de idade será menor. De fato, a diferença de idade entre os gêmeos é proporcional ao tempo de viagem despendido com velocidade constante, e não ao período de aceleração (para uma boa discussão sobre este paradoxo ver Anderson [1967]).

Descrição Quadri-dimensional

Na mecânica clássica, a natureza absoluta do espaço e do tempo faz com que o tempo absoluto da mecânica newtoniana seja um parâmetro adequado para descrever a evolução dos sistemas físicos. Certamente isto não impositivo mas apenas uma escolha. Qualquer parâmetro monotônico se mostra adequado para este fim. Em algumas de suas formulações, a mecânica clássica pode inclusive ser descrita tratando o tempo absoluto newtoniano como uma mera coordenada extra do espaço de configuração (veja por exemplo Lanczos [1970], Lemos [2004]). Porém, com o advento da relatividade restrita e o efeito da dilatação temporal, mostra-se mais apropriado usarmos um outro parâmetro para descrevermos as trajetórias das partículas.

Da mesma forma que a mecânica newtoniana, a relatividade restrita descreve a evolução do sistema físico como a variação espacial de partículas no decorrer do tempo. Contudo, agora, a noção de espaço e de tempo dependem de observador. Note que o que tem significado físico é a posição num dado instante de tempo, ou seja, um ponto no espaço-tempo. Pontos no espaço-tempo são chamados de eventos. Um evento é uma quadra de números reais no qual 3 caracterizam uma localização espacial e a quarta a localização temporal. Com a noção de evento estamos implicitamente supondo que tudo o que acontece ocorre no espaço e no tempo. Na realidade, como a caracterização de um evento requer simultaneamente 4 números reais, construímos a noção do espaço-tempo quadri-dimensional. Assim um evento é expresso

[2]Na literatura podemos ainda encontrar diversas situações interessante que mostram que não pode ser a aceleração a causa do envelhecimento (veja Gruber and Price [1997], Boughn [1989], Desloge and Philpott [1991], Nikolić [2000], Falciano [2007]).

por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (13)$$

Neste contexto, a evolução de uma partícula será descrita por uma curva no espaço-tempo que denominamos linha de universo da partícula. A trajetória de uma partícula se define por uma sucessão de eventos. O choque físico entre duas partículas, por exemplo, é descrito pelo contato de suas linhas de universo. Cada ponto da linha de universo caracteriza simultaneamente uma posição e um instante de tempo. Para percorrermos esta linha de universo precisamos de um parâmetro externo que por construção não pode ser o tempo coordenada já que ele próprio deve ser função deste parâmetro. Embora haja escolhas mais ou menso adequadas, a parametrização das linhas de universo é arbitrária (nos deparamos com esta situação nas seções **??** e **??**). Temos então que a linha de universo de uma partícula é uma curva $x^\mu(\lambda)$ que a cada valor do parâmetro λ nos determina um evento.

A velocidade instantânea na mecânica newtoniana é definida como a derivada da trajetória com relação ao parâmetro evolutivo que neste caso é o tempo. De maneira similar, definimos a quadri-velocidade como sendo a derivada da linha de universo com relação a seu parâmetro, i.e. definimos as componentes da quadri-velocidade $\vec{v}$ por

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \qquad . \qquad (14)$$

Falta ainda definirmos o parâmetro pelo qual iremos descrever a evolução das partículas. Para partículas massivas, nos quais seu intervalo é sempre positivo, um parâmetro conveniente é usarmos o tempo próprio da própria partícula como o parâmetro ao longo de sua linha de universo. Como o tempo próprio é por definição o tempo marcado pelo relógio atrelado ao observador, i.e. $\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau$, fazer $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\tau$ implica que o módulo da sua quadri-velocidade se normaliza

$$v_\mu v^\mu = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = c^2 g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = c^2 \qquad . \qquad (15)$$

O tempo próprio $\mathrm{d}\tau$, assim como o intervalo $\mathrm{d}s$, é um parâmetro afim que coloca a curva geodésica na sua forma mais simples. No caso de partículas sem massa, o intervalo associado a sua trajetória é nulo, de forma que não podemos definir um tempo próprio. Iremos designar vetores nulos que são tangentes as linhas de universo de partículas sem massa por k^μ. Assim temos de

$$k_\mu k^\mu = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \qquad , \qquad (16)$$

onde agora o parâmetro λ é qualquer parâmetro afim que deixa a geodésica também na sua forma mais simples. Iremos sempre assumir que o parâmetro da quadri-velocidade é tal que sua norma é constante, i.e. $v_\mu v^\mu = c^2$ para tipo-tempo ou $k_\mu k^\mu = 0$ para vetores nulos.

Se a quadri-velocidade for do tipo tempo, i.e. estiver associada a uma partícula massiva, então num dado instante sempre existe um sistema de coordenada no qual ela esta instantâneamente parada. Suponha que com relação a um referencial inercial $\mathcal{S}$ ela possua velocidade $\vec{v}$. Dada sua normalização eq. (15), com relação a um sistema de coordenadas comovente com ela, i.e. no qual ela esta instantâneamente parada, teremos $v^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Porém como este sistema de coordenadas comovente se relaciona com $\mathcal{S}$ por uma transformação de Lorentz, temos que sua quadri-velocidade num referencial em que sua velocidade é $\vec{v}$ será

$$v^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \qquad . \tag{17}$$

A quadri-aceleração é definida como a derivada da quadri-velocidade, i.e.

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} \qquad . \tag{18}$$

Usando explicitamente a eq. (17) encontramos

$$a^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c} \vec{v}.\vec{a} \ , \ \frac{\gamma^4}{c^2} (\vec{v}.\vec{a})\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \qquad . \tag{19}$$

Dada a normalização da quadri-velocidade eq. (15) temos que a quadri-aceleração é sempre ortogonal a quadri-velocidade. De fato,

$$a^\mu v_\mu = \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\lambda} v_\mu = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} (v^\mu v_\mu) = 0 \qquad . \tag{20}$$

Este resultado independe se a curva é geodésica ou acelerada[3]. A ortogonalidade da quadri-aceleração com a quadri-velocidade é sempre possível e depende de uma escolha apropriada do parâmetro usado para descrever a trajetória.

A definição do quadri-momento será feita como uma extensão direta da quadri-velocidade. Embora a posteriori a definição que faremos se mostre adequada, vale notar que a definição do quadri-momento só será eficaz se estiver relacionada com certas leis de conservação. Tanto a energia quanto

[3]Em Relatividade Geral, como a gravitação é identificada com a estrutura do espaço-tempo, o termo curva acelerada é sinônimo de curvas que não são geodésicas do espaço-tempo.

o momento linear na mecânica newtoniana têm suas definições fundadas nas leis de conservação de energia e do momento respectivamente. Com relação as transformações de Galileu, a lei de conservação de momento é invariante e a da energia só é válida em referenciais inerciais diferentes porque a do momento também o é.

As transformações de Lorentz mesclam coordenadas espaciais com temporais, logo é razoável que uma nova lei de conservação quadri-dimensional surja. Pode-se mostrar que é possível definir o momento relativístico de tal forma que haja uma tal lei de conservação (para esta construção veja Bergmann [1976]). De maneira alternativa, iremos definir o quadri-momento em analogia com o momento linear da mecânica newtoniana. Esta duas abordagens chegam ao mesmo resultado. Definimos então o quadri-momento como o produto da massa pela quadri-velocidade, i.e.

$$p^\mu \equiv m v^\mu = (m\gamma c, \vec{p}) \quad \text{com} \qquad \vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad . \tag{21}$$

Embora as três componentes espaciais do quadri-momento sejam naturalmente o momento linear, não é evidente qual o significado físico de sua componente temporal p^0. Para compreender seu significado, note que a variação de energia mecânica de um sistema é associada ao trabalho realizado para movê-lo ao longo de sua trajetória de forma que temos

$$\mathrm{d}E = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l} = \vec{v}.\mathrm{d}\vec{p} = \vec{v}.\mathrm{d}\left(m\gamma\vec{v}\right) = mv\mathrm{d}(\gamma v) = \mathrm{d}\left(m\gamma c^2\right) \qquad . \tag{22}$$

Comparando eq. (21) e (22) vemos que a menos de uma constante

$$E = p^0 c = m\gamma c^2 \qquad . \tag{23}$$

É imediato verificar que a partir da identificações físicas de suas componentes e de sua própria definição, o módulo do quadri-momento se escreve

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 v^\mu v_\mu = m^2 c^2 \qquad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} \qquad . \end{aligned} \tag{24}$$

Estas expressão nos fornece a relação relativística entre energia, momento e massa de uma partícula relativística. No caso particular de uma partícula em repouso recaímos na famosa formula $E = mc^2$. A eq. (23) tem dois limites importantes. Quando a velocidade da partícula é muito baixa se comparada com a velocidade da luz, i.e. $v \ll c$, a expressão da energia se torna $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}\left[(v/c)^4\right]$. Identificando o segundo termo como a energia cinética de uma partícula não-relativística, o primeiro termo passa a

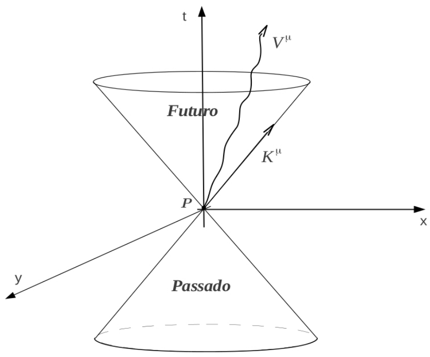

Figura 1: Estrutura causal da relatividade restrita. A partir do ponto P, os cones caracterizam as superfícies nulas sobre as quais partículas sem massa se propagam enquanto as regiões internas são as regiões acessíveis à partículas massivas.

ser entendido como uma energia potencial, ou seja, a massa das partículas são apenas mais uma forma de energia. Esta identificação entre massa e energia é de extrema importância. De um ponto de vista teórico essa equivalência nos indica que não apenas corpos massivos devem gerar e sofrer ação de campos gravitacionais mas também toda e qualquer forma de energia[4]. Experimentalmente, esta relação nos permite calcular por exemplo a energia liberada num processo de decaimento radiativo.

O outro limite que nos interessa na expressão da energia ocorre quando a velocidade da partícula é comparável com a velocidade da luz. Se diferenciarmos a eq. (23) temos $\mathrm{d}E = m\gamma^3 v \mathrm{d}v$. Esta expressão nos fornece a variação na energia quando a velocidade varia de v para $v + \mathrm{d}v$. De maneira complementar, esta mesma relação pode ser interpretada como nos mostrando a quantidade de energia necessária para mudarmos a velocidade de v para $v + \mathrm{d}v$. Note porém que quando a velocidade tende a velocidade da luz, i.e. $v \longrightarrow c$, o fator de Lorentz diverge. Podemos assim concluir que para uma partícula massiva atingir a velocidade da luz é necessário fornecer uma quantidade infinita de energia. Dito de outra forma, nenhuma partícula massiva pode atingir a velocidade da luz.

As únicas partículas que viajam à velocidade da luz são as partículas sem massa. Na seção **??** vimos que no limite da ótica geométrica as perturbações com velocidade de fase iguais à velocidade da luz no vácuo se propagavam

[4]Deve-se notar que esta identificação entre matéria e energia vale apenas para a energia mecânica. A extrapolação de que qualquer tipo de energia deva gravitar já inclui as idéias fundamentais do princípio de equivalência na sua formulação forte.

ao longo de superfícies nulas dadas por $x^\mu x_\mu = 0$ e assim fazendo com que suas trajetórias tenham intervalo nulo, i.e. $\mathrm{d}s^2 = 0$. Por outro lado, os vetores k^μ definidos na eq. (**??**) nos definiam a direção de propagação das perturbações. Agrupando estas informações identificamos o vetor k^μ como o quadri-momento de partículas sem massa[5].

As transformações de Lorentz não alteram a natureza dos quadri-vetores. De fato, se um dado observador inercial identificar um vetor $\vec{v}$ como sendo tipo-tempo ($v^\mu v_\mu > 0$) qualquer outro observador inercial apesar de atribuir componentes diferentes para este vetor continuará concordando que o vetor é tipo-tempo. Esta fato está relacionado com as transformações de Lorentz satisfazerem $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$. A invariância da natureza dos quadri-vetores frente a transformações de Lorentz conjugada com a limitação de nenhuma partícula possuir velocidade acima da velocidade da luz impõe sobre os fenômenos físicos uma estrutura causal[6] que pode ser representada pictoricamente pela figura 1. Partículas massivas são caracterizadas por seus quadri-momentos tipo-tempo enquanto que partículas sem massa viajam a velocidade da luz e seus quadri-momentos são vetores nulos. Pontos na região externa ao cone nulo são causalmente desconectados com o ponto P central na figura. Isto significa que P não pode trocar informação com estas regiões, ou seja, não recebe nem envia sinais físicos para estas regiões[7].

[5]Sua componente temporal $k^0 = h\nu/c$ tem dimensão de energia por velocidade da luz e devido a inclusão da constante de Planck, coincide com a energia de uma fóton na descrição quântica não-relativística do fóton. Além disso, apesar da massa ser zero e a velocidade de propagação ser a velocidade da luz, a razão E/c é finita. Assim, podemos definir o quadri-momento de maneira unívoca para partículas com ou sem massa por $p^\mu = (E/c, \vec{p})$.

[6]Esta estrutura causal é válida para o espaço-tempo de Minkowski no qual a teoria da Relatividade Restrita está definida. Contudo, como a Relatividade Geral é definida em espaços-tempos riemannianos que são localmente plano, esta estrutura causal ainda é pelo menos localmente válida na Relatividade Geral.

[7]Note que este diagrama é do espaço-tempo. Como o espaço-tempo é plano, dois pontos espaciais sempre poderão ser conectados se não impussermos nenhum limite de tempo para esta troca de informação. A desconectividade causal mencionada se refere ao diagrama espaço-temporal que assim pressupõe a conexão entre dois pontos espaciais numa determinada duração temporal. Com a passagem do tempo o cone vai ser alargando mostrando assim que mais pontos se tornam causalmente conexos com P.

Campos de Matéria

Fluidos Relativíticos

Um fluido é por definição um contínuo de matéria cujos constituíntes têm dimensões bem menores do que as dimensões do sistema. Neste cenário podemos definir o elemento de fluido ao qual anexamos valores das quantidade físicas do sistema. É evidente que esta descrição não será sempre válida. O caso tradicional em que esta aproximação de contínuo falha é de um gás extremamente rarefeito. Por outro lado, existe também uma diferenciação do que seriam fluidos ou sólidos. Apesar desta separação não ser de toda bem definida podemos identificar características particulares de cada um desses estados da matéria.

Um elemento de fluido interage com outros elementos de fluido. Nos limitando as interações mecânicas, existe basicamente dois tipos de interação. Um elemento de fluido tem uma interação normal que esta associada a pressão mas também existe uma interação tangencial às faces do elemento de fluido. É justamente esta interação tangencial que causa fricção e identificamos com a viscosidade do fluido.

Os sólidos são caracterizados por possuírem uma interação tangencial muito forte que resulta numa manutenção de sua forma, ou seja, os sólidos não se deformam facilmente. Em contrapartida, os fluidos são mais maleáveis e fluem justamente pelas forças tangenciais entre os elementos de fluido não serem predominantes.

O caso limite é aquele de um fluido em que as interações tangenciais tendem a zero. Neste caso, o fluido não tem viscosidade nem fluxo de energia entre os elementos de fluido. Este caso limite é designado de fluido perfeito e se caracteriza por possuir apenas[8] densidade de energia ρ e pressão isotrópica p. Se não houver interações tangenciais entre os elementos de fluido, num dado ponto sempre existe um sistema no qual este elemento de fluido esta

[8]Na realidade, a afirmação correta é de que existe um campo de observadores no qual o fluxo de calor e a pressão anisotrópica se anulam.

em respouso.

De acordo com discussões anteriores, é esperado que estes conceitos familiares na descrição de fluidos não-relativísticos sejam generalizados para objetos quadri-dimensionais. Da mesma maneira em que definimos uma quadri-velocidade e um quadri-momento para a dinâminca de partículas pontuais relativísticas, os tensores puramente espaciais, como o tensor de estresse P^{ij} da mecânica de fluidos, deverão ser incorporados em tensores quadri-dimensionais. Assim, iremos construir um tensor quadri-dimensional $T^{\mu\nu}$ cujas componentes espaciais se identificam com o tensor de estresse P^{ij} se consideradas no sistema comóvel, ou seja $T^{ij} = P^{ij}$ neste sistema. O tensor $T^{\mu\nu}$ é denominado tensor energia-momento e caracteriza as densidades e fluxos de energia e momento dos fluidos.

A componente $i - j$ do tensor P^{ij} representa o fluxo de momento î na direção ĵ. Porém em relatividade, da mesma maneira que momento e energia não são mais dois conceitos distintos mas apenas componentes distintas do quadri-momento, devemos ter a componente T^{0j} representando o fluxo de energia (e não mais de momento î) na direção ĵ. Da mesma forma que P^{ij}, o tensor energia-momento deve ser simétrico o que implica em $T^{j0} = T^{0j}$. Enquanto T^{0j} representa fluxo de energia na direção ĵ, a componente T^{j0} significa fluxo de momento ĵ na direção temporal o que equivale a dizer densidade de momento da direção ĵ. Já a componente T^{00} representa a densidade de energia do fluido, i.e. $T^{00} = \rho$. Esta interpretação das componentes do tensor energia-momento está correta a menos de um ajuste de unidades que pode ser feito ao multiplicarmos pela velocidade da luz. Da mesma forma que definimos $x^0 = c\,t$ para que todas as componentes do vetor x^μ tivessem a mesma dimensão, temos que multiplicar as componentes T^{0j} por c. Resumindo, temos a interpretação das componentes do tensor energia-momento na forma

$$\begin{aligned}
&T^{00} = \text{densidade de energia}\\
&T^{0j}.\,c = \text{fluxo de energia na direção ĵ}\\
&T^{i0}.\,c^{-1} = \text{densidade de momento î}\\
&T^{ij} = \text{fluxo de momento î na direção ĵ}
\end{aligned}$$

Fluidos Perfeitos

No caso de fluidos perfeitos é fácil construírmos o tensor energia-momento. Pela sua própria definição, para fluidos perfeitos existe um sistema de coordenadas no qual não há fluxo de calor e o tensor de estresse é diagonal, i.e.

$T^{0j} = T^{j0} = 0$ e $T^{ij} = p\delta^{ij}$. A propriedade deste sistema é de ser comóvel com o fluido. Logo, sua quadri-velocidade neste sistema de coordenadas deve ser $v^\mu = (c, \vec{0}) = c\,\delta^\mu{}_0$. O fluido perfeito é caracterizado pela sua densidade de energia, pressão e quadri-velocidade. Por isso, é a partir destes objetos que devemos construir o tensor energia-momento. Se considerarmos o caso do espaço plano, localmente sempre existe um sistema de coordenadas no qual a métrica é $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. Com estas considerações, a forma que procuramos para o tensor energia-momento para um fluido perfeito é

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\frac{v^\mu}{c}\frac{v^\nu}{c} - p\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad .$$

Como a expressão acima é covariante, temos que ela é automaticamente válida para qualquer sistema de coordenadas. Assim, mesmo num sistema de coordenadas em que $g_{\mu\nu} \neq diag(1, -1, -1, -1)$ e $v^\mu \neq c\,\delta^\mu{}_0$ temos que o tensor energia-momento de um fluido perfeito se escreve

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\frac{v^\mu}{c}\frac{v^\nu}{c} - pg^{\mu\nu} \quad . \tag{25}$$

Neste ponto é construtivo compararmos este tensor energia-momento com as quantidades não-relativísticas a ele associadas. Para isso temos que estudar a expressão acima no limite não-relativístico que implica $|\vec{v}| << c$ mas também que a energia interna do fluido é muito menor do que sua energia de repouso. Faremos esta comparação no caso geral em que v^μ é arbitrário mas como estamos considerando o espaço plano, sempre podemos escolher um sistema em que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Nesta situação temos

$$T^{00} = \gamma^2(\rho + p) - p = \frac{\rho + pv^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \tag{26}$$

$$T^{0i} = \gamma^2(\rho + p)\frac{v^i}{c} \tag{27}$$

$$T^{ij} = \gamma^2(\rho + p)\frac{v^i}{c}\frac{v^j}{c} + p\delta_{ij} \tag{28}$$

A descrição de um fluido relativístico, por vezes, requer quantidades outras que o tensor energia-momento. As informações de quantidades conservadas como por exemplo a carga elétrica ou a diferença entre o número de partículas e anti-partículas podem ser implementadas na descrição de fluidos através da lei de conservação de correntes. Por fugir do escopo de nossa abordagem, iremos aqui considerar apenas fluidos neutros e sem a criação de partículas. No entanto, ainda assim existe uma lei de conservação justamente associada ao número de partículas. Se a dinâmica de um fluido é tal que não há criação nem aniquilação do número de partículas, então o vetor fluxo de partículas $N^\mu = nv^\mu$ deve se conservar no sentido de que seu divergente covariante é zero. Assim, temos que a forma diferencial da lei de conservação do número de partículas é expressa por

$$\nabla_\mu N^\mu = \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}.(n\vec{v}) = 0 \quad . \tag{29}$$

A forma diferencial das leis de conservação se dá através da anulação do divergente do tensor associado a quantidade conservada. Em particular, a lei de conservação da energia e do momento que na formulação não-relativística eram tidas como leis distintas, agora se juntam através da anulação do divergente do tensor energia-momento i.e.

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{30}$$

Na expressão acima como o índice μ está livre temos na realidade quatro equações diferenciais, uma para cada valor de μ. A lei de conservação de energia e momento relativística é expressa pela equação (30) para qualquer espaço-tempo. Usando a expressão (25) para o tensor energia-momento de fluidos perfeitos, e considerando a lei de conservação do número de partículas (29) podemos re-escrever (30) na forma

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= \nabla_\nu \left(\frac{(\rho + p)}{n} \frac{n}{c^2} v^\mu v^\nu - p g^{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{n}{c^2} \nabla_\nu \left(\frac{\rho + p}{n} v^\mu \right) v^\nu - g^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{31}$$

Lembrando que $v^\mu v_\mu = c^2$ implica em $v_\mu \nabla_\nu v^\mu = 0$, a equação acima contraída com v^μ se escreve como

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} v_\mu = v^\nu \left(\frac{\partial \rho}{\partial x^\nu} - \frac{\rho + p}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad . \tag{32}$$

Uma das possíveis maneiras de se escrever a primeira lei da termodinâmica[9] é $\mathrm{d}\rho - (\rho + p)\mathrm{d}n/n = nT\mathrm{d}s$. Logo, a equação acima nos mostra que a entropia é conservada. Do mesmo modo que no caso não-relativístico as leis de conservação do número de partículas, do tensor energia-momento e a primeira

[9] A primeira lei da termodinâmica se escreve $\mathrm{d}E = \delta Q - p\mathrm{d}V$, onde $\delta Q = T\mathrm{d}S$. Pela definição de densidade de partículas, temos que $\mathrm{d}V = -\frac{V}{n}\mathrm{d}n$. Além disso $\mathrm{d}E = \rho\mathrm{d}V + V\mathrm{d}\rho$. Definindo a entropia específica $s = S/N$, temos $\mathrm{d}\rho - (\rho + p)\mathrm{d}n/n = nT\mathrm{d}s$.

lei da termodinâmica implicam em que a dinâmica dos fluidos são processos adiabáticos. Este desenvolvimento foi feito todo de forma covariante e não foi utilizado nenhuma propriedade do espaço ser plano de maneira que este resultado é válido para qualquer espaço-tempo.

No caso específico do espaço plano de Minkowski, existe um sistema de coordenadas global no qual a conexão se anula e a derivada covariante se simplifica para a derivada simples e a métrica assume a forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Assim, valorando a equação (30) neste sistema de coordenadas e com $\mu = 0$ encontramos

$$\partial_\nu T^{0\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\gamma^2(\rho + p)\Big) + \vec{\nabla}\left(\gamma^2(\rho + p)\frac{\vec{v}}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad . \tag{33}$$

Para as componentes espaciais temos

$$\partial_\nu T^{i\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma^2(\rho + p)\frac{v^i}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\gamma^2(\rho + p)\frac{v^i}{c}\frac{v^k}{c}\right) - \eta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} = 0 \quad . \tag{34}$$

Expandindo o segundo termo da equação acima e usando a equação (33) para simplificá-la encontramos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{c^2 - v^2}{\rho + p}\left(\vec{\nabla} p + \frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial p}{\partial t}\right) \quad . \tag{35}$$

Esta é a versão relativística da equação de Euler. Esta equação nos fornece a aceleração que o fluido sofre. Embora não haja um sistema que seja comóvel ao fluido ao longo de toda sua evolução, num dado instante sempre existe um sistema inercial que seja instantaneamente comóvel. No instante seguinte, de acordo com a própria equação acima este sistema inercial deixará de ser comóvel pois a velocidade do fluido já terá mudado. Porém neste instante, com relação a este sistema instantaneamente comóvel a velocidade do fluido é zero. Assim a equação acima se simplifica para

$$\frac{\rho + p}{c^2}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \quad . \tag{36}$$

Apesar da equação (36) só valer instantaneamente ela é bastante útil para evidenciarmos uma primeira modificação na contribuição da inérica na formulação relativística. A equação acima funciona como uma equação de força onde no lugar da massa inercial aparece o termo $(\rho + p)/c^2$. A presença do c^2 se dá simplesmente por estarmos considerando ρ como densidade de energia e não mais de massa de repouso. Note que temos a presença também da pressão que se soma a densidade de energia. Podemos então concluir que em relatividade a pressão também contribui para a inércia dos fluidos. Isto tem um efeito direto por exemplo no balanço estrutural das estrelas.

O que mantém a estrela numa configuração de quase equilíbrio é o balanço entre a força gravitacional que estimula o seu colapso e a pressão da energia advinda das reações nucleares no seu interior que a sustentam. Note que como a pressão agora também gera inércia, será necessário cada vez mais pressão para suportar o colapso. Enquanto na teoria newtoniana, a pressão apenas gerava uma força para fora da estrela, na relatividade a pressão tem um duplo papel. Ela continua gerando esta força de sustentação mas ao mesmo tempo também dificulta esta mesma sustentação por tornar sua própria força menos eficaz. Assim, se torna mais fácil colapsar um estrela em relatividade do que no cenário newtoniano. Vale ressaltar que este raciocínio é apenas heurístico. O desenvolvimento formal da estrutura estrelar requer o uso das equações de Einstein para o caso em questão.

Bibliografia

James L. Anderson. *Principles of Relativity Physics*. Academic Press, 1967.

Peter Gabriel Bergmann. *Introduction to the Theory of Relativity'*. Dover Publications, 1976.

S. P. Boughn. The case of the identically accelerated twins. *American Journal of Physics*, 57(9):791–793, 1989. doi: 10.1119/1.15894.

Edward A. Desloge and R. J. Philpott. Comment on "the case of the identically accelerated twins," by s. p. boughn [am. j. phys. [bold 5][bold 7], 791–793 (1989)]. *American Journal of Physics*, 59(3):280–281, 1991. doi: 10.1119/1.16580.

F. T. Falciano. Cinemática relativística: paradoxo dos gêmeos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(1):19–24, 2007.

Ronald P. Gruber and Richard H. Price. Zero time dilation in an accelerating rocket. *American Journal of Physics*, 65(10):979–980, 1997. doi: 10.1119/1.18700.

Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, 1970.

Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2004.

Hrvoje Nikolić. The role of acceleration and locality in the twin paradox. *Foundations of Physics Letters*, 13(6):595–601, 2000. ISSN 0894-9875. doi: 10.1023/A:1007866532278.