

Equações Dinâmicas da Relatividade Geral

Felipe Tovar Falciano

Equações de Einstein

A Relatividade Geral é uma teoria dinâmica para descrever o campo gravitacional o qual devido às discussões anteriores se confunde com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Dito de outra forma, o campo dinâmico que descreve a gravitação é a própria métrica do espaço-tempo.

Nesta seção iremos apresentar as equações dinâmicas da teoria da Relatividade Geral que fornecem como a estrutura do espaço-tempo se deforma e evolui. Vale ressaltar que as equações dinâmicas de uma dada teoria não podem ser derivadas mas apenas propostas. Embora seja comum na física moderna termos princípios variacionais e de simetria dos quais em certos casos é possível obtermos equações dinâmicas, isto não faz com que estas equações sejam de fato deduzidas. Estes princípios são interessantes por nos dar uma leitura abstrata do uso de certas dinâmicas porém não as validam.

Do ponto de vista lógico é equivalente postular as equações dinâmicas ao invés de postular os princípios que nos permitem obtê-las¹. Na realidade o ponto crucial que devemos nos ater é a aplicabilidade das novas equações propostas. Tendo definido consistentemente (sem inconsistências internas) uma dada teoria, cabe a física propor meios de testar sua validade com cheques sistemáticos aos experimentos. Neste sucesso a posteriori é que reside o valor da teoria e em particular de suas equações dinâmicas. Contudo, meramente postular uma teoria é um tanto quanto árido. Por isso, iremos seguir uma série de argumentos que embora não possam servir como dedutivos serão úteis no entendimento do raciocínio físico e da natureza das modificações propostas.

O princípio de equivalência nos direciona para que ao menos localmente sempre seja possível construirmos um sistema de coordenadas onde a métrica

¹No caso do princípio variacional seria como postular qual deve ser a Lagrangiana que gera a boa dinâmica do campo físico em questão. Note porém que em geral não há uma relação unívoca entre os princípios e as equações dinâmicas. Em particular a ação pode não compartilhar das mesmas simetrias das equações dinâmicas ou eventualmente pode não ser possível encontrarmos princípios que nos levem univocamente as equações dinâmicas.

se identifique com a métrica de Minkowski e a conexão seja zero. Desta forma somos levados a considerar que a geometria do espaço-tempo deve ser descrita por uma métrica riemanniana onde a conexão se limita apenas ao símbolo de Christoffel, ou seja, em Relatividade Geral a derivada covariante da métrica é nula e não consideraremos estruturas afim com torção.

As equações dinâmicas de uma teoria descrevem a evolução do sistema a partir de equações diferenciais de segunda ordem (com exceção de alguns casos particulares). Desta forma, as equações de campo para a gravitação devem ser equações de segunda ordem para o tensor métrico. Ademais, é fundamental que estas equações sejam covariantes, ou seja, as equações da Relatividade Geral devem ser expressas como relações entre tensores.

Pode-se mostrar (veja Weinberg [1972]) que o tensor de curvatura é o único tensor que pode ser construído com a métrica e suas derivadas até segunda ordem e que seja linear nos termos de derivadas de segunda ordem. De uma certa forma, é natural que o tensor de curvatura seja o objeto geométrico a ser considerado já que a gravitação está associada as propriedades da estrutura do espaço-tempo. Por sua própria definição o tensor de curvatura manifesta as condições de integrabilidade da variedade e caracteriza a não-comutatividade da derivada covariante.

Um outro guia no caminho às equações da Relatividade Geral deve ser a própria gravitação newtoniana. Dado o seu amplo sucesso na descrição dos fenômenos gravitacionais na vizinhança da Terra e no sistema Solar, pelo menos em algum regime específico, a Relatividade Geral deve se reduzir as equações da gravitação newtoniana. Por ser um campo conservativo, os efeitos gravitacionais sobre uma partícula pontual no regime da gravitação newtoniana podem ser expressos através do par de equações

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F} = -m \vec{\nabla} \phi \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (2)$$

onde eq. (1) representa a 2^o lei de Newton e eq. (2) é a equação de Poisson para o potencial $\phi(\vec{x})$ do campo gravitacional newtoniano².

Se de fato a métrica funciona como o campo dinâmico da gravitação, então no limite de validade da gravitação newtoniana o potencial ϕ deve estar relacionado com as componentes da métrica. Além disso, a densidade ρ que funciona como fonte para o campo gravitacional newtoniano é apenas uma das componentes do tensor energia-momento. Para que as equações sejam covariantes temos que considerar não apenas algumas componentes mas

²O termo c^2 no denominador da fração na equação de Poisson se deve ao fato de estarmos considerando ρ como sendo densidade de energia e não de matéria.

escrever equações que relacionem tensores. Desta forma, em Relatividade Geral o tensor energia-momento completo é fonte para a gravitação.

Seguindo este raciocínio poderíamos esperar de que as equações de Einstein relacionassem de alguma forma curvatura (gravitação) com sua fonte (tensor energia-momento). Contudo é fácil perceber de que não podemos equacionar o tensor de Riemann com o tensor energia-momento. Uma equação do tipo

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \kappa (T_{\alpha\beta}T_{\mu\nu} - T_{\alpha\nu}T_{\mu\beta}) \quad (3)$$

que relaciona curvatura com o tensor energia-momento e respeita todas as simetrias destes tensores não funciona pois em regiões sem matéria ($T_{\mu\nu} = 0$) teríamos que o espaço seria plano ($R_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$). No entanto sabemos que fora da Terra temos campo gravitacional. A equação acima não respeita o fato de que a gravitação é uma interação de longo alcance.

Um outro caminho que a princípio parecia promissor e que inclusive foi tentado sucessivas vezes antes da formulação da Relatividade Geral é considerar que o campo gravitacional fosse descrito por um campo escalar cuja equação dinâmica se assimilaria a equação de Klein-Gordon. Tentativas desse tipo podem ser encontradas nos trabalhos de M. Abraham, G. Nordström e do próprio Einstein já no ano de 1912 (para uma discussão mais detalhada veja Anderson [1967], Einstein [1912], Abraham [1912] e Nordström [1912]).

Uma das dificuldades que estes autores encontraram nesta formulação foi como incluir o tensor energia-momento como sua fonte. Dado que as equações propostas não tinham índices livres, parecia inevitável que apenas o traço do tensor energia-momento aparecesse nas equações. Entretanto o seu traço não pode ser a única fonte da gravitação pois se o fosse campos eletromagnéticos não gravitariam. De fato, o traço do tensor energia-momento para o campo eletromagnético é sempre zero.

Note que estas teorias escalares se distinguem pelo fato da gravitação não ser associada a métrica do espaço-tempo mas apenas a um campo escalar. Um dos avanços qualitativos operados por Einstein no desenvolvimento da Relatividade Geral foi justamente identificar o campo gravitacional com a métrica do espaço-tempo. De toda sorte, mesmo com essa identificação, equações do tipo

$$R = \kappa T \quad (4)$$

apresentam o mesmo tipo de dificuldade com relação aos campos eletromagnéticos, além do fato de ser apenas 1 equação dinâmica para determinar 10 componentes do tensor métrico, o que está longe de ser um sistema fechado.

Já os traços do tensor de curvatura não sofrem dessas dificuldades levantadas. Dizer por exemplo que o tensor e o escalar de Ricci são nulos não

implica que o espaço seja plano. Ademais, uma equação tensorial envolvendo o tensor de Ricci resultaria em 10 equação dada sua simetria.

Como tanto $R_{\mu\nu}$ quanto R já possuem derivadas segunda da métrica, vamos considerar então apenas combinações lineares destes objetos. Termos como $R_{\mu\nu;\lambda}$ ou $R_{\mu\lambda}R^\lambda{}_\nu$ farão com que tenhamos derivadas superiores ou que tenhamos termos não-lineares de derivada segunda. Por ser uma variedade riemanniana, os termos de derivada primeira da métrica não formam tensores pois sua derivada covariante é zero. Assim é razoável considerarmos uma equação do tipo

$$R_{\mu\nu} + a R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5)$$

onde a , Λ e κ são constantes a serem determinadas. Os dois primeiros termos são de deriva segunda enquanto que o terceiro é de ordem zero em derivadas. Para encontrar o valor de Λ e κ precisaremos desenvolver esta equação em casos específicos, porém podemos fixar o valor de a com o uso das identidades de Bianchi. No espaço plano (relatividade restrita) a divergência do tensor energia-momento está associada a lei de conservação destas quantidades. Sua generalização será exigir que a divergência do $T_{\mu\nu}$ ainda se anule no espaço curvo. Assim, se tomarmos a divergência da eq. (5) teremos

$$\nabla_\nu R^\nu{}_\mu + a \partial_\mu R = 0 \quad . \quad (6)$$

Contudo as identidades de Bianchi, eq. (??) nos dizem que em qualquer variedade riemannianna $2\nabla_\nu R^\nu{}_\mu = \partial_\mu R$. Logo, para que a conservação da energia manifestada pela divergência do tensor energia-momento não imponha novas restrições ao tensor métrico temos que tomar $2a = -1$. Por outro lado, ao fixarmos este valor para a constante a temos automaticamente que a divergência do $T_{\mu\nu}$ será nula em qualquer situação de campo gravitacional. Se torna uma consequência das equações de Einstein a conservação do tensor energia-momento.

Observe que as equações de Einstein, eq. (5), dizem respeito a dinâmica para o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$. Porém em geral ela não especifica a evolução do conteúdo material. Cada campo físico tem sua própria equação dinâmica. Por exemplo, campos escalares satisfazem a equação de Klein-Gordon enquanto que campos espinoriais a equação de Dirac. Este alerta é para que a conservação do $T_{\mu\nu}$ não seja vislumbrada como uma equação dinâmica para os campos de matéria. Em casos bem particulares como para um único campo escalar, a divergência do tensor energia-momento é proporcional a sua equação dinâmica³. Neste caso, impôr a anulação da divergência do

³O tensor energia-momento para um campo escalar se escrever

$$T^{\mu\nu} = \varphi^{,\mu}\varphi^{,\nu} - \left(\frac{1}{2}\varphi^{,\alpha}\varphi_{,\alpha} - V(\varphi)\right)g^{\mu\nu} \quad .$$

tensor energia-momento é equivalente a impôr sua equação de Klein-Gordon. Porém, em geral isto não é verdade sobretudo se tivermos campos de matéria que interagem entre si. Da mesma forma que na mecânica clássica, em casos particulares podemos usar as leis de conservação para resolver certas dinâmicas mas em geral a informação contida nestas leis de conservação não são suficientes para encontrarmos toda a dinâmica do sistema as quais devem advir das equações de movimento.

Um outro ponto importante a salientar é de que partículas testes em Relatividade seguem geodésicas. Isto se deve ao fato delas serem consideradas como pontuais e pequenas o suficiente para que sua influência na estrutura do espaço-tempo possa ser desprezada⁴. Assim, em conformidade com o princípio de equivalência, partículas testes devem seguir geodésicas que no fundo são a generalização da idéia de linha reta para espaços curvos. De uma outra formam também podemos entendê-la como uma generalização do princípio de Inércia de Galileu ou mesmo como a segunda lei de Newton⁵

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad . \quad (7)$$

Retornando a eq. (5), ainda temos duas constantes a analisar. A constante Λ que multiplica a métrica nas equações de Einstein é denominada na literatura de constante cosmológica. Nos dias correntes ela se tornou importante pelo seu papel no modelo padrão da cosmologia. Esta constante pode fazer o papel de uma energia escura e eventualmente acelerar a expansão do Universo de Friedmann. Contudo, sua existência deve ser analisada com cuidado.

Uma vez que dentro da própria definição do tensor energia-momento já aparece o tensor métrico, poderíamos mover o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ para o lado di-

Logo, com sua divergência encontramos

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \varphi^{;\mu} \left(\square\varphi + \frac{\delta V}{\delta\varphi} \right) \quad .$$

⁴Caso ela tivesse estrutura interna e assim apresentasse momento angular apareceria um acoplamento entre seu momento e o tensor de curvatura descrito pelas equações de Mathisson-Papapetrou-Dixon (veja Mathisson [1937], Papapetrou [1951] e Dixon [1974])

⁵No escopo da mecânica newtoniana a primeira lei de Newton não pode ser derivada como caso particular da segunda na ausência de forças. A lei da Inércia em Newton é fundamental até mesmo para dar sentido ao conceito de força uma vez que estabelece a classe de equivalência de observadores inerciais. Porém na Relatividade Geral, como não temos uma classe privilegiada de observadores, não temos algo similar a primeira lei de Newton embora ainda possamos identificar uma certa lei de Inércia no sentido de que partículas testes que não interagem com nada outro a não ser o campo gravitacional devem seguir o caminho que extremiza sua trajetória, ou seja, geodésicas.

reito da eq. (5) e considerar que ele representa um conteúdo de matéria como por exemplo o vácuo dos campos quânticos. Neste sentido a constante cosmológica não seria uma constante da natureza mas um termo efetivo advindo de outras teorias como no caso citado da teoria quântica de campos. Porém, do ponto de vista gravitacional a presença de Λ na eq. (5) implica numa nova constante da natureza em pé de igualdade com a constante gravitacional newtoniana G no sentido de que são os experimentos que devem nos dizer o seu valor e devemos assumi-la como universal.

Porém neste cenário, sua existência modifica fundamentalmente a teoria. Poderíamos até considerar que a inclusão do termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ nos define uma teoria diferente do caso que em $\Lambda = 0$. De fato, o estado fundamental do campo gravitacional da teoria com ou sem constante cosmológica é diferente. Se considerarmos que a constante cosmológica é nula então o estado fundamental do campo deve ser o espaço plano de Minkowski onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $R_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$. Porém se $\Lambda \neq 0$ então o estado fundamental é a solução de de Sitter⁶. Como nossa discussão se restringirá à teoria da gravitação e não a sua aplicação à cosmologia, para todos os efeitos iremos assumir que não há constante cosmológica, i.e. $\Lambda = 0$ a menos que seja explicitamente reintroduzida e salientada. Dito isto, tomaremos as equações de Einstein como sendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (8)$$

⁶Uma consequência de assumirmos que Λ de fato representa uma constante universal da natureza e de que o estado fundamental do campo gravitacional é a solução de de Sitter é de que o grupo de simetria local não deve ser mais o de Poincarè mas sim o grupo de de Sitter. Neste caso, as partículas elementares deveriam ser classificadas a partir dos autovalores dos operadores de Casimir deste novo grupo e não apenas com relação a seu spin e massa (além dos números quânticos associados as simetrias internas que não remetem ao espaço-tempo).

Aproximação de Campo Fraco

Limite Newtoniano

Para concluirmos e explicitarmos as equações de Einstein precisamos determinar o valor da constante κ . Para tal iremos analisar esta equação num regime que já temos controle sobre o comportamento físico do sistema, a saber, no limite da gravitação newtoniana. Este limite na verdade requer duas aproximações. Iremos supor que o campo gravitacional é fraco e de que as partículas testes tem baixas velocidades já que a gravitação newtoniana só é bem definida para regimes não relativísticos. Baixas velocidades significa que $|\vec{v}| \ll c$ de forma que temos $ds = c d\tau \approx c dt$. Assim a equação da geodésica eq. (7) simplifica para

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i = 0 \quad . \quad (9)$$

Considerarmos que o campo gravitacional é fraco implica em podermos escrever a métrica na forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ onde as componentes de $h_{\mu\nu}$ são arbitrárias mas incluímos um parâmetro de expansão ε muito menor do que 1, $|\varepsilon| \ll 1$. Além disso, a gravitação newtoniana descreve campos gravitacionais que não dependem do tempo de forma que assumiremos que $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$. Levando esta aproximação na equação acima encontramos

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\varepsilon \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00} = -\vec{\nabla} \phi \quad , \quad (10)$$

onde a última igualdade vem da identificação da força gravitacional com o gradiente do potencial newtoniano $\phi(\vec{x})$. Temos então que nesta aproximação a componente zero-zero da métrica se relaciona com o potencial newtoniano por

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad . \quad (11)$$

Tendo associado a métrica com o potencial newtoniano podemos agora analisar o regime de campo fraco das equações de Einstein. Como a métrica

se relaciona com o potencial ϕ , as equações de Einstein irão nos fornecer como o conteúdo de matéria determina este potencial que é justamente a informação contida na equação de Poisson. Na aproximação que estamos considerando iremos associar a componente zero-zero das equações de Einstein com a equação de Poisson e assim determinar qual é o valor apropriado para a constante κ que permitirá recuperarmos os resultados já obtidos da gravitação newtoniana.

Com relação as equações de Einstein o ponto importante é a ponderação do campo ser fraco o suficiente para podermos reter termos apenas até primeira ordem no parâmetro de expansão ε . Por exemplo, nesta aproximação a conexão se escreve

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \varepsilon \frac{\eta^{\mu\lambda}}{2} (\partial_{\alpha} h_{\lambda\beta} + \partial_{\beta} h_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad (12)$$

enquanto que o tensor de Riemann totalmente covariante é dado por

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{\varepsilon}{2} (\partial_{\beta} \partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\alpha\beta} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\beta\mu} - \partial_{\beta} \partial_{\alpha} h_{\nu\mu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad . \quad (13)$$

Temos ainda que levar em conta que a Relatividade é um teoria covariante que permite uma transformação arbitrária de coordenadas. Duas métricas conectadas por uma transformação de coordenadas representa na verdade a mesma situação física. Como estamos considerando aproximações lineares iremos permitir apenas transformações infinitesimais do tipo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \zeta^{\mu} \quad , \quad (14)$$

onde novamente incluímos o parâmetro de expansão de forma que o vetor ζ^{μ} é arbitrário. A partir da lei de transformação de tensores do tipo $\binom{0}{2}$ temos que a métrica muda conforme

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - \varepsilon (\partial_{\mu} \zeta^{\alpha} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} \zeta^{\alpha} g_{\alpha\mu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad . \quad (15)$$

Além disso, escrevendo a métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ esta transformação modifica o campo $h_{\mu\nu}$ por

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 2 \partial_{(\mu} \zeta_{\nu)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad . \quad (16)$$

Por ser uma mera transformação de coordenadas, os campos $h_{\mu\nu}$ e o $h'_{\mu\nu}$ representam a mesma situação física. De fato, a eq. (16) pode ser entendida como uma transformação de calibre para o campo $h_{\mu\nu}$. Note ainda que em primeira ordem o tensor de Riemann eq. (13) é invariante por esta transformação. Tomando adequadamente os traços do tensor de Riemann eq. (13),

podemos construir o tensor de Einstein linearizado $G_{\mu\nu}^{(L)}$ que representa o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$ guardando termos até primeira ordem em ε

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{\varepsilon}{2} \left[2\partial_\lambda \partial_{(\mu} h^\lambda_{\nu)} - \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - \square (h_{\mu\nu} - h \eta_{\mu\nu}) \right] , \quad (17)$$

onde definimos o traço $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ e o operador d'alambertiano é dado em termos do espaço plano, i.e. $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$. Apenas por uma questão de notação, é conveniente definirmos uma nova variável dada justamente pelos últimos termos da equação acima. Para distinguí-la usaremos o campo $\psi_{\mu\nu}$ de forma que temos

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h \eta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \psi = -h \quad \Rightarrow \quad h_{\mu\nu} \equiv \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\psi \eta_{\mu\nu} \quad . \quad (18)$$

Em termos deste novo objeto o tensor de Einstein linearizado se escreve

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{\varepsilon}{2} \left[2\partial_\lambda \partial_{(\mu} \psi^\lambda_{\nu)} - \square \psi_{\mu\nu} - \partial_\alpha \partial_\beta \psi^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right] . \quad (19)$$

Uma última simplificação será feita a partir da liberdade de calibre eq. (16). Pela transformação infinitesimal eq. (14) o campo $\psi_{\mu\nu}$ se transforma por

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu} \zeta_{\nu)} + \partial_\lambda \zeta^\lambda \eta_{\mu\nu} \quad . \quad (20)$$

Note que é sempre possível escolhermos um sistema de coordenadas (calibre) tal que o divergente do campo $\psi_{\mu\nu}$ se anula. De fato, suponha que $\partial_\nu \psi^{\mu\nu} \neq 0$ e escolha a transformação de coordenadas⁷ tal que $\square \zeta^\mu = \partial_\nu \psi^{\mu\nu}$. Por teste direto, vemos que esta transformação faz por anular o divergente de $\psi'_{\mu\nu}$, i.e. $\partial_\nu \psi'^{\mu\nu} = 0$. O sistema de coordenadas no qual o divergente de $h_{\mu\nu}$ é nulo é chamado de calibre transverso ou de calibre de Lorenz⁸. Assim, sem perda de generalidade, podemos trabalhar no calibre tranverso no qual o tensor de Einstein assume a forma $2G_{\mu\nu}^{(L)} = -\varepsilon \square \psi_{\mu\nu}$.

Nesta análise, estamos supondo que a métrica é aproximadamente plana. Para esta aproximação ser válida temos que o tensor de energia-momento também deve ser fraco o suficiente de forma que podemos tratá-lo como de primeira ordem. Assim, assumimos que $T_{\mu\nu} = \varepsilon T_{\mu\nu}^{(n)}$, onde o índice superior (n) faz menção a Newton.

⁷No espaço plano esta equação sempre tem solução de forma que na aproximação em questão sempre é possível fazermos esta escolha.

⁸O termo calibre de Lorenz é uma menção a semelhança na estrutura da equação que define o calibre. No eletromagnetismo a forma covariante do calibre de Lorenz se escreve $A^\mu{}_{,\mu} = 0$ que representa de maneira similar a anulação do divergente do potencial.

No calibre de Lorenz, as equações de Einstein linearizadas são dadas pelo par de equações

$$\square \psi_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}^{(n)} \quad , \quad (21)$$

$$\partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (22)$$

Num regime newtoniano, a única fonte efetiva da gravitação é a densidade de massa ρ/c^2 . Assim, tomaremos o tensor energia-momento como nulo a menos de sua componente zero-zero que será justamente a densidade de energia. Da eq. (21), sendo $T_{0i}^{(n)} = T_{ij}^{(n)} = 0$, temos que a única componentes não nula do campo $\psi_{\mu\nu}$ é a ψ_{00} . Ademais, o d'alambertiano se efetiva como um laplaciano de forma que a equação acima se reduz a

$$\nabla^2 \psi_{00} = 2\kappa\rho \quad , \quad (23)$$

a qual deve ser comparada com a equação de Poisson⁹

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G}{c^2} \varepsilon\rho \quad . \quad (24)$$

Sendo $\psi_{0i} = \psi_{ij} = 0$, temos que $\psi = \psi_{00}$. Levando este resultado na sua própria definição eq. (18) vemos que $\psi_{00} = 2h_{00}$, i.e. da eq. (11) temos que $\varepsilon\psi_{00} = 4\phi c^{-2}$. Logo, comparando eq. (23) com eq. (24) encontramos que a constante deve valer $\kappa = 8\pi G c^{-4}$.

Para chegarmos ao valor desta constante fizemos uma série de aproximação e consideramos um caso bem particular no qual o regime newtoniano deva valer. Porém, uma vez tendo estabelecido o valor da constante ele não pode mudar de caso para caso. De acordo, a equação que descreve a dinâmica do campo gravitacional na teoria da Relatividade Geral é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad . \quad (25)$$

Eventualmente será conveniente usarmos a constante κ nas equações mas de agora em diante será assumido que ela sempre vale $8\pi G/c^4$.

Este cálculo para encontrar o valor da constante κ nos mostra um outro resultado interessante. Note que não apenas $2h_{00} = \psi_{00}$ mas também todos os outros termos da diagonal. De fato, temos $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{1}{2}\psi_{00}$ e todos os outros $h_{\mu\nu}$ são zero. Lembrando que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ vemos que

⁹Incluímos o parâmetro de expansão na equação de Poisson pois havíamos expandido o tensor energia-momento até primeira ordem de forma que $T_{00} = \varepsilon T_{00}^{(n)} = \varepsilon\rho$.

a métrica adequada para reproduzir os efeitos da gravitação newtoniana se escreve por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad . \quad (26)$$

Se considerarmos o sistema solar no qual o potencial gravitacional relevante é dado pelo Sol temos que $\phi = -GM_{\odot}/r$ com a massa do Sol dada por $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ Kg}$, i.e. $GM_{\odot}/c^2 = 1.475 \text{ Km}$. No caso por exemplo da órbita da Terra cuja distância média Terra-Sol vale $1.496 \times 10^8 \text{ Km}$, o termo de correção ao espaço plano é da ordem de 10^{-8} . Este valor é realmente muito menor do que a unidade o que nos serve como um teste de consistência para nosso tratamento perturbativo onde seguramos termos apenas até primeira ordem em ε .

Bibliografia

M. Abraham. *Phys. Z.*, 13:1, 1912.

James L. Anderson. *Principles of Relativity Physics*. Academic Press, 1967.

W.G. Dixon. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 277:59, 1974.

A. Einstein. *Ann. Phys. Lpz.*, 38:355, 1912.

M. Mathisson. *Acta Phys. Pol.*, 6:167, 1937.

G. Nordström. *Phys. Z.*, 13:1126, 1912.

A. Papapetrou. *Proc. R. Soc. London*, 209:248, 1951.

Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1972.