

Geometria Diferencial

Felipe Tovar Falciano

Estrutura do espaço-tempo

Variedades e sistema de coordenadas

A variedade pode ser entendida como um contínuo formado pela coleção de todos os eventos possíveis. Um evento é uma coleção de valores reais que especificam o onde e o quando, ou seja, a variedade é a coleção contínua de todos os aondes e quandos. Porém, além de ser contínua, vamos demandar que uma dada variedade quadri-dimensional seja sempre localmente parecida com o espaço \mathbb{R}^4 . Formalmente, uma variedade pode ser definida como um espaço topológico dotado de um conjunto de cartas com certas propriedades para que sempre seja possível a construção de um sistema de coordenadas consistentemente¹. No entanto, para a finalidade de nossa discussão será suficiente definirmos variedade sem introduzir o conceito de espaço topológico.

Vale salientar que a variedade é apenas localmente parecida com o \mathbb{R}^4 mas pode ser muito diferente em termos globais. Isto significa que para uma região suficientemente pequena em torno de qualquer ponto da variedade sempre será possível mapearmos pontos da variedade em pontos do \mathbb{R}^4 . Porém, em geral será necessário mais de um mapa para podermos cobrir toda a variedade.

Numa variedade 4-dimensional \mathcal{M} , para um ponto $P \in \mathcal{M}$, existe um mapa φ tal que

$$P \longmapsto (x^0(P), x^1(P), x^2(P), x^3(P))$$

Assim o mapa φ associa a cada ponto $P \in \mathcal{M}$ uma quadrupla $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$. Estes números são chamados de coordenadas de P sob o mapa φ .

De maneira geral, definimos uma variedade 4-dimensional \mathcal{M} como uma coleção de pontos tal que para cada ponto de \mathcal{M} existe uma vizinhança aberta \mathcal{U} e um mapa bijetivo φ em um aberto de \mathbb{R}^4 com as seguintes propriedades:

¹O leitor interessado na definição formal do conceito de variedades como espaço topológico pode consultar a referência Nakahara [2003]

- a coleção de todos os abertos \mathcal{U}_k cobrem a variedade, ou seja $\sum_k \mathcal{U}_k = \mathcal{M}$
- Se $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, então um mesmo ponto P será levado ao \mathbb{R}^4 tanto por φ_i quanto por φ_j . Neste caso o mapa $\psi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é uma aplicação de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^4 , i.e. $\psi_{ij} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Se φ_j define as coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) e φ_i outras coordenadas (y^0, y^1, y^2, y^3) então ψ_{ij} define a transformação de coordenadas $y^i = y^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Cada aberto \mathcal{U}_k junto com sua coordenatização φ_k é chamado de carta de uma determinada região da variedade. Além disso, a coleção de todas as cartas formam o que chamamos de atlas. Se for possível construir um atlas tal que todas as interseções entre as cartas \mathcal{U}_k 's formem mapas $\psi_{ij} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que sejam k vezes diferenciáveis, então a variedade é dita uma variedade de classe C^k . As variedades diferenciáveis são aquelas cujas funções que definem os mapas ψ_{ij} são infinitamente diferenciáveis e analíticas.

Além de mapearmos localmente a variedade no \mathbb{R}^4 , podemos construir mapas que mapeiam a variedade nela mesma, ou seja, cada ponto da variedade é levado em outro ponto da variedade de maneira bijetiva. Uma propriedade importante dos mapas da variedade em si mesma é que eles formam um grupo desde de que definamos o mapa produto como sendo o resultado de realizarmos um mapa seguido do outro. Se o mapa a leva $x \rightarrow x'$ e o mapa b leva $x' \rightarrow x''$, então definimos o mapa $c = b \circ a$ como sendo o mapa que leva $x \rightarrow x''$. Uma coleção de elementos $A = \{a, b, c, \dots\}$ junto com uma dada operação (\circ) formam um grupo se satisfizerem 4 propriedades:

i) identidade: \exists um elemento t.q. $\forall a \in G$

$$a \circ e = e \circ a = a$$

ii) fechamento: $\forall a, b \in G$

$$a \circ b \in G$$

iii) inversa: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ t.q.

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

iv) associatividade: $\forall a, b, c \in G$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

A operação do grupo não precisa ser comutativa, i.e. $a \circ b \neq b \circ a$. Quando a ordem de composição não fizer diferença chamamos o grupo de abeliano. O grupo formado pelos mapas de variedade em si mesma é não-abeliano, ou seja, a ordem na qual operamos os mapas é significativa. Este grupo de mapeamento da variedade em si mesma é denominado de \mathcal{MMG} que

se refere ao termo em inglês *manifold mapping group*. O \mathcal{MMG} também pode ser entendido como associado a transformações de coordenadas. De maneira complementar, ao invés de ver a ação do \mathcal{MMG} como um mapa da variedade em si mesma que seria uma descrição ativa do processo, a atuação de cada elemento do \mathcal{MMG} pode ser vista como a implementação de uma transformação de coordenadas.

Em geral, teorias físicas distintas permitem leis de transformação de coordenadas diferentes. Na mecânica newtoniana, a regra que conecta dois observadores inerciais é dada pelas transformações de Galileu enquanto que na relatividade restrita são as transformações de Lorentz de nos dizem como passar da descrição de um observador inercial para outro. Nestes casos, o grupo de simetria da teoria será associado apenas a um subgrupo do \mathcal{MMG} . Para que seja permitido transformações arbitrárias de coordenadas, como é o caso da Relatividade Geral, o grupo de simetria tem que ser o mais geral possível, ou seja, ele deve ser o próprio \mathcal{MMG} .

Para todos os efeitos iremos sempre assumir que temos variedades diferenciáveis de forma que toda e qualquer transformação de coordenadas será dada por funções analíticas.

Objetos geométricos

Para descrever teorias espaço-temporais, nos será suficiente definir dois tipos particulares de objetos matemáticos: os tensores e as densidades tensoriais. Estas duas classes de objetos se distinguirão pela lei de transformação frente a um mapeamento do tipo $x \mapsto x'$. Como veremos mais adiante os tensores podem ser entendidos como casos particulares das densidades tensoriais.

O exemplo mais simples de tensor é o que chamamos de campo escalar $\varphi(x)$. O campo escalar tem uma única componente, i.e. este tensor associa a cada ponto da variedade um número real. Por definição sob um mapeamento $x'(x)$ o campo escalar se transforma

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \quad .$$

O objeto seguinte são os tensores de um índice que chamaremos de vetores.

Vetores e Campos Vetoriais

Um vetor ao qual estamos bem familiarizados da mecânica clássica é o vetor velocidade instantânea. Em mecânica clássica, a descrição dinâmica de uma partícula pontual é completamente especificada quando temos sua trajetória como função do tempo que funciona como um parâmetro externo. Neste caso a velocidade instantânea é definida como sendo o vetor tangente a curva em cada um dos pontos da trajetória que nada mais é do que a derivada com relação ao parâmetro da curva. De maneira similar iremos definir os vetores a partir do conceito de derivada direcional.

Seja uma dada curva $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ de parâmetro λ e uma função f definida numa região da variedade que contém a curva $\gamma(\lambda)$. Vamos nos restringir a analisar os valores da função f apenas ao longo dos pontos que

compõem a curva γ , ou seja

$$f(x^\alpha) \text{ tal que } x^\alpha = x^\alpha(\lambda) \implies f(x^\alpha(\lambda)) = f(\lambda) \quad .$$

Sendo uma curva contínua, podemos calcular sua variação ao longo da curva

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \quad .$$

Podemos fazer o mesmo raciocínio para outras funções quaisquer. A única alteração na expressão acima seria trocar a função f pela nova função a ser analisada. Logo, podemos abstrair e definir o operador

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad , \quad (1)$$

o qual define a derivada direcional ao longo da curva $\gamma(\lambda)$. Se considerarmos agora uma outra curva $\Gamma(\mu)$ que intercepta a curva $\gamma(\lambda)$ num dado ponto P , então também podemos definir derivada direcional ao longo da curva $\Gamma(\mu)$ por

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{dx^\alpha}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad . \quad (2)$$

Note que no ponto P o conjunto de todas as derivadas direcionais associadas as todas as curvas que passam por P formam um espaço vetorial. Em particular, a combinação linear de duas derivadas direcionais é de novo uma derivada direcional. De fato, no ponto P existe uma correspondência 1 – 1 entre todos os vetores tangentes e todas as derivadas direcionais. Este espaço vetorial em P é chamado de espaço tangente a P e denotado por T_P . Naturalmente, neste caso a dimensão do espaço tangente será igual a dimensão da própria variedade, i.e. $\dim(T_P) = \dim(\mathcal{M})$.

A derivada direcional deve ser entendida como um operador que num dado ponto fixo ao atuar em funções nos fornecem um número real. Assim iremos definir vetores como o operador que mapeia funções em números reais. Sendo \mathcal{F} o espaço das funções, o vetor $\vec{V} \equiv \frac{d}{d\lambda}$ é tal que $\vec{V} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$. Sua aplicação sobre uma função $f \in \mathcal{F}$ será

$$\vec{V}(f) \equiv \frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \quad .$$

Da mesma forma, as derivadas parciais $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ também são vetores que definem as direções ao longo das curvas do sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$. Na realidade, pelas expressões (1) e (2) vemos que os vetores $\vec{e}_\alpha \equiv \partial_\alpha$ funcionam como uma base vetorial na qual qualquer outro vetor pode ser expresso.

Por fim, temos então que um dado vetor $\vec{V} \equiv \frac{d}{d\lambda}$ pode ser expresso

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \quad \text{onde,} \quad \begin{cases} V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \\ \vec{e}_\alpha = \partial_\alpha \end{cases}$$

Apesar das componentes V^α e da base vetorial \vec{e}_α dependerem da coordenatização escolhida, o vetor \vec{V} em si é independente do sistema de coordenadas usado. Pela regra da cadeia temos $\partial_{\alpha'} = (\partial x^\beta / \partial x'^\alpha) \partial_\beta$. Logo a lei de transformação dos vetores de base se escreve

$$\vec{e}'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\beta \quad . \quad (3)$$

Como o vetor \vec{V} não depende da coordenatização, suas componentes deverão se transformar de maneira inversa aos vetores da base para compensar suas transformações

$$V'^\beta = V^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \quad . \quad (4)$$

Componentes que se transformam como os vetores de base (\vec{e}_α) são chamadas de componentes covariantes, enquanto que componentes que se transformam da maneira inversa como as componentes V^α do vetor são chamadas de contravariantes. Note que cada vetor foi definido em um único ponto da variedade, ou de maneira mais adequada, cada vetor é definido em um dado espaço tangente T_P que por construção só é definido em um ponto da variedade. A distribuição de vetores pela variedade forma os campos vetoriais.

Um campo vetorial é uma regra pela qual se associa a cada ponto da variedade um vetor. A maneira pela qual anexamos vetores em cada ponto da variedade irá atribuir ao campo certas propriedades. Se a variação entre vetores anexados a pontos vizinhos da variedade for contínua então o campo é de classe C^0 . Caso sua derivada também seja contínua então o campo vetorial será de classe C^1 . Havendo campos vetoriais de classe C^1 , pode-se mostrar que é sempre possível encontrar curvas tais que seus vetores tangentes coincidam com o campo vetorial original. Estas curvas são chamadas de curvas integrais do campo vetorial. De fato, toda curva tem em cada um de seus pontos um vetor tangente. Ademais, o inverso também é verdade. Note que se o campo vetorial é de classe C^1 , a partir de qualquer ponto da variedade é possível construirmos curvas cujos vetores tangentes coincidem com o campo vetorial simplesmente resolvendo as equações

$$V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad \xrightarrow{\text{integrando}} \quad x^\alpha(\lambda) \quad (5)$$

Como este é um sistema ordinário de primeira ordem, dado o ponto inicial a solução é única. Assim, as curvas integrais dos campos vetoriais nunca se cruzam e preenchem toda a variedade. A esta coleção de curvas integrais chamamos de congruências.

Tensores e Densidades Tensoriais

Os vetores são aplicações lineares cujas imagens são os números reais. Além disso, estas aplicações têm apenas uma entrada, ou seja, um vetor é uma aplicação linear que, em um dado ponto fixo, a função fornece um número real. Podemos generalizar estes mapas ao considerar um número maior de entradas, como por exemplo uma aplicação que a cada par de vetores nos fornece um número real. Estas aplicações multiplas definem o que chamamos de tensores.

Assim, definimos um tensor \mathbf{T} do tipo $\binom{p}{q}$ como uma aplicação linear que possui p componentes contra-variantes e q covariantes. Por essa definição, os vetores são tensores do tipo $\binom{1}{0}$. Para incluirmos todos os tipos de tensores nesta nomenclatura, definimos os campos escalares como sendo um tensor do tipo $\binom{0}{0}$. Esta definição é razoável pois os campos escalares não possuem índices e já nos associam um número real a cada ponto da variedade.

Os tensores como objetos geométricos não dependem da base escolhida para os representarmos. As componentes de um tensor do tipo $\binom{p}{q}$ se transformam como

$$T'^{\alpha\beta\dots\gamma}{}_{\mu\nu\dots\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\epsilon}} \dots \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \dots \frac{\partial x^{\psi}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\rho\epsilon\dots\delta}{}_{\tau\theta\dots\psi} \quad (6)$$

Note que a lei de transformação dos tensores é linear e homogênea. De fato, a condição necessária e suficiente para que um objeto geométrico seja um tensor é de que ele se transforme seguindo a lei de transformação (6).

Uma vez que a matriz jacobiana das transformações de coordenadas deve ser sempre não-nula, vemos que se um dado tensor for nulo, ou seja, num dado sistema de coordenadas todas as suas componentes são nulas, então ele continuará nulo em qualquer outro sistema de coordenadas. De maneira análoga, se um tensor tiver pelo menos uma componente não nula num dado sistema de coordenadas então ele sempre terá pelo menos uma componente não nula em qualquer outro sistema de coordenadas. É evidente que por uma transformação de coordenadas podemos anular algumas de suas componentes ou fazer com que componentes nulas se tornem diferente de zero. No entanto, a afirmação de que um tensor se anula (todas componentes são simultaneamente zero) é independente do sistema de coordenadas.

Existe uma série de operações que podemos realizar com tensores que nos fornecem novos tensores. Os casos mais comuns são

i) Adição ou subtração de tensores

A soma ou subtração em cada ponto da variedade de dois tensores do mesmo tipo é um tensor com o mesmo número de componentes co- e contravariantes.

ii) Multiplicação de tensores

O produto de um tensor do tipo $\binom{p}{q}$ com um outro do tipo $\binom{r}{s}$ forma um tensor do tipo $\binom{p+r}{q+s}$. Como exemplo, dado dois tensores \mathbf{F} e \mathbf{G} com componentes $F^{\alpha\beta}_{\rho}$ e G^{μ}_{ν} o tensor $\mathbf{T} \equiv \mathbf{FG}$ terá 3 componentes contravariantes e 2 covariantes, i.e $T^{\alpha\beta\mu}_{\rho\nu} = F^{\alpha\beta}_{\rho} G^{\mu}_{\nu}$.

iii) Contração de tensores

Num tensor do tipo $\binom{p}{q}$, a contração de um índice contravariante com um índice covariante nos fornece um tensor do tipo $\binom{p-1}{q-1}$.

Existe um conjunto particular de tensores que possui a propriedade de suas componentes assumirem os mesmos valores em quaisquer sistema de coordenadas. O tensor delta de Kronecker é definido por

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}$$

Sob um transformação de coordenadas $x \mapsto x'$ teremos

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

o que nos mostra que de fato δ^{μ}_{ν} é invariante sob transformações de coordenadas. Usando as propriedades i) e ii) acima podemos construir novos tensores com esta mesma propriedade do delta de Kronecker. Definindo o tensor antisimétrico do tipo $\binom{2}{2}$ por

$$\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \equiv \begin{vmatrix} \delta^{\mu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\alpha} \\ \delta^{\mu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\beta} \end{vmatrix} = \delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta}$$

onde o símbolo $||$ representa o determinante da matriz, vemos que

$$\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu \neq \nu, \mu = \alpha \text{ e } \nu = \beta \\ -1 & \text{se } \mu \neq \nu, \mu = \beta \text{ e } \nu = \alpha \\ 0 & \text{se houver índices repetidos} \end{cases}$$

De maneira similar, podemos também definir um tensor do tipo $\binom{3}{3}$ totalmente antisimétrico por

$$\delta_{\alpha\beta\rho}^{\mu\nu\sigma} \equiv \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\nu_\alpha & \delta^\sigma_\alpha \\ \delta^\mu_\beta & \delta^\nu_\beta & \delta^\sigma_\beta \\ \delta^\mu_\rho & \delta^\nu_\rho & \delta^\sigma_\rho \end{vmatrix} = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta \delta^\sigma_\rho - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta \delta^\sigma_\rho + \delta^\sigma_\alpha \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\rho - \dots$$

Estes tensores são úteis para expressarmos a parte antisimétrica de um tensor arbitrário. Com efeito, temos

$$A_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \quad , \quad B_{[\mu\nu\sigma]} = \frac{1}{3!}\delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\rho} B_{\alpha\beta\rho}$$

Outro tipo de objeto geométrico que iremos considerar são as chamadas densidades tensoriais. Os tensores não são o caso mais geral possível de objetos geométricos cuja lei de transformação seja linear e homogênea. Porém, se quisermos generalizar a lei de transformação (6) mas ainda assim mantendo-a linear e homogênea com relação aos tensores, a única possibilidade é incluímos uma função que dependa apenas da transformação de coordenadas considerada. É fácil perceber que a única função não trivial que podemos construir com as devidas propriedade é o próprio jacobiano da transformação. Assim, definimos a densidade tensorial \mathcal{T} de peso p como o objeto geométrico que sob uma transformação de coordenadas se transforma como

$$\mathcal{T}'^{\mu\dots\nu}_{\alpha\dots\beta} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^p \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \cdots \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\beta} \mathcal{T}^{\sigma\dots\rho}_{\lambda\dots\epsilon} \quad (7)$$

onde $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^p$ é justamente o jacobiano da transformação elevado a potência p . Deste ponto de vista, os tensores podem igualmente ser considerados como densidades tensoriais de peso zero. Devido a presença do jacobiano, as densidades tensoriais de peso -1 serão importantes objetos geométricos para compôr elementos de volume invariantes sob transformações de coordenadas. Com efeito, o volume infinitesimal usado em integrais $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ muda por uma transformação de coordenadas com o Jacobiano, i.e $d^3x' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| d^3x$. Logo se h for uma densidade tensorial de peso -1 temos que $dV \equiv h d^3x$ é invariante por uma transformação de coordenadas.

A definição do tensor delta de Kronecker foi feita com um índice covariante e outro contravariante. Este ponto é fundamental para termos a propriedade de suas componentes assumirem sempre os mesmos valores em quaisquer sistema de coordenadas. O objeto geométrico que mantém esta propriedade mas que apresenta apenas índices co- ou contravariantes são as chamadas densidades tensoriais de Levi-Civita. Numa variedade de dimensional 4, a densidade de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é uma densidade tensorial de peso

1 tal que

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu = 0, \nu = 1, \rho = 2, \sigma = 3 \text{ ou } \forall \text{ permutação par} \\ -1 & \text{para } \forall \text{ permutação ímpar} \\ 0 & \text{caso haja índices repetidos} \end{cases} \quad (8)$$

Sendo uma densidade de peso 1, ela se transformará

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\gamma} \quad (9)$$

Note que o lado direita desta expressão no caso em que $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2$ e $\sigma = 3$ é justamente o determinante da matriz $\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\beta}$, i.e.

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\gamma}} \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\gamma} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{-1} \quad (10)$$

Logo, é evidente que as componentes da densidade tensorial $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ são invariantes sob transformações de coordenadas já seguem a mesma regra que a equação (8).

Por construção, estas densidades satisfazem as seguintes relações

$$\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon_{\nu\beta\rho\gamma} = 0! \delta_{\nu\beta\rho\gamma}^{\mu\alpha\lambda\sigma} \quad (11)$$

$$\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma} = 1! \delta_{\nu\beta\rho}^{\mu\alpha\lambda} \quad (12)$$

$$\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon_{\nu\beta\lambda\sigma} = 2! \delta_{\nu\beta}^{\mu\alpha} \quad (13)$$

$$\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon_{\nu\alpha\lambda\sigma} = 3! \delta_{\nu}^{\mu} \quad (14)$$

$$\varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\sigma} = 4! \quad (15)$$

Na álgebra linear, uma matriz quadrada \mathbf{M} possui uma inversa \mathbf{M}^{-1} se $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbb{1}$. De maneira similar, definimos como inversa de um tensor \mathbf{D} do tipo $\binom{0}{2}$ o tensor \mathbf{D}^{-1} do tipo $\binom{2}{0}$ tal que $D^{-1\mu\alpha} D_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. De posse da densidade de Levi-Civita podemos construir a inversa de \mathbf{D} a partir do seu menor definido por

$$m^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial D_{\mu\nu}} \det D = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon^{\nu\beta\rho\gamma} D_{\alpha\beta} D_{\lambda\rho} D_{\sigma\gamma} \quad (16)$$

onde usamos o fato de que o determinante em termos das densidades de Levi-Civita se escreve como $\det D = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\alpha\lambda\sigma} \varepsilon^{\nu\beta\rho\gamma} D_{\mu\nu} D_{\alpha\beta} D_{\lambda\rho} D_{\sigma\gamma}$. Assim, a inversa de \mathbf{D} será dada por

$$D^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\det D} m^{\mu\nu} \quad (17)$$

Devido as propriedades da densidade de Levi-Civita, é fácil perceber que de fato $D^{\mu\alpha}D_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Nota ainda que o determinante de uma matriz, por ser definido com duas densidades de Levi-Civita, é uma densidade tensorial de peso 2. Em particular, a raiz quadrada do determinante é uma densidade tensorial de peso 1. Logo, se quisermos construir um volume invariante por transformações arbitrárias de coordenadas precisamos multiplicar o volume infinitesimal, que é uma densidade de peso -1 pela raiz quadrada do determinante de um tensor. Como veremos mais adiante, a métrica $g_{\mu\nu}$ é o tensor natural a ser utilizado por definir as noções de distância. Ademais, em teorias espaço-temporais, a métrica tem determinante negativo, i.e $sign(g) = -1$. Com efeito, o volume infinitesimal quadridimensional

$$dV \equiv \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (18)$$

é invariante por transformações arbitrárias de coordenadas.

Estrutura afim

Uma das questões fundamentais em física é determinarmos como um dado sistema irá evoluir, ou seja, como ocorre a sequência de transformações que caracterizam sua evolução. É evidente que para isso precisamos definir como os objetos geométricos variam na variedade.

Numa variedade arbitrária não existe uma regra a priori que determine o meio pelo qual os objetos devam ser levados de um ponto a outro. A determinação deste procedimento é o que chamamos de estrutura afim da variedade, ou seja, a estrutura afim estabelece como um dado objeto geométrico varia ao passarmos com ele pela variedade.

O objeto que codifica esta informação é o que chamamos de conexão. Em outras palavras, numa variedade arbitrária a conexão não é previamente estabelecida mas é parte da caracterização de suas propriedades.

Derivada covariante

Uma das ferramentas mais úteis em física para estudarmos a variação de um dado objeto matemático é certamente o conceito de derivada no cálculo diferencial. Note porém que a derivada simples de um tensor em geral não é um objeto geométrico o que a torna inadequada. O único caso em que a derivada simples constrói um tensor é a derivada de um escalar. A propriedade do escalar $\phi(x^\alpha)$ de se transformar como $\phi'(x') = \phi(x)$ faz com que

$$\partial_{\alpha'}\phi'(x') = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\partial_\beta\phi(x) \quad (19)$$

Assim a derivada simples de um escalar se transforma como um tensor do tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. No entanto, no caso geral precisamos do auxílio da conexão com a qual somos capazes de definir um tipo de derivada que é um objeto geométrico e como tal oportuna para descrever a variação de tensores. De fato, suponha que tenhamos um campo vetorial A^μ definido num aberto

da variedade e em particular nos pontos infinitesimalmente próximos x^α e $x'^\alpha = x^\alpha + dx^\alpha$. Podemos fazer uma expansão em Taylor tal que $A^\mu(x'^\alpha) = A^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) = A^\mu(x^\alpha) + \partial_\beta A^\mu dx^\beta + \mathcal{O}(dx^2)$. No entanto, segurando até primeira ordem, o objeto definido por $dA^\mu \equiv A^\mu(x'^\alpha) - A^\mu(x^\alpha) = \partial_\beta A^\mu dx^\beta$ não é um objeto geométrico. Podemos facilmente verificar isto ao lembrarmos da lei de transformação para vetores e calcularmos

$$dA'^\mu = \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dA^\nu + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} A^\nu dx^\alpha \quad ,$$

o que nos mostra que dA^μ não se transforma como um vetor. Esta dificuldade pode ser remediada através do conceito de transporte paralelo. A idéia é definirmos um procedimento para levarmos um vetor de um ponto a outro de forma que, no ponto de chegada, a diferença do vetor que já existia no local pelo transportado seja um verdadeiro tensor. Para um dado vetor de componentes $A^\mu(x^\alpha)$ que é definido no ponto x^α , definimos no ponto $x^\alpha + dx^\alpha$ um outro vetor A^μ_{\parallel} dado por

$$A^\mu_{\parallel}(x^\alpha + dx^\alpha) \equiv A^\mu(x^\alpha) + \delta A^\mu(x^\alpha) \quad , \quad (20)$$

de tal forma que ao compararmos $A^\mu(x^\alpha + dx^\alpha)$ com $A^\mu_{\parallel}(x^\alpha + dx^\alpha)$ encontremos um tensor que nos dê a sua variação. Logo, queremos que $A^\mu - A^\mu_{\parallel}$ se transforme como um vetor, i.e.

$$\left(A^\mu - A^\mu_{\parallel} \right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \left(A^\alpha - A^\alpha_{\parallel} \right) \quad . \quad (21)$$

Além disso, é natural que este procedimento tenha duas propriedades. A primeira é de que se fizermos dx^α ir a zero, ou seja, o ponto final ser igual ao ponto de partida devemos recuperar $A^\mu = A^\mu_{\parallel}$ o que deve ser expresso por $\delta A^\mu = 0$. A outra propriedade se manifesta ao considerarmos que o próprio vetor A^μ seja nulo. Neste caso esperamos que novamente δA^μ vá a zero. Estas duas propriedades podem ser implementadas ao considerarmos que δA^μ seja bilinear em A^μ e dx^μ . Assim somos levados a escrever

$$\delta A^\mu \equiv -\Gamma^\mu_{\beta\alpha} A^\alpha dx^\beta \quad , \quad (22)$$

onde incluímos o sinal menos apenas por conveniência futura. Note que dado o vetor A^μ e os pontos inicial e final que determinam dx^α , o δA^μ fica completamente caracterizado por $\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$. Este termo é o que chamamos de conexão e que codifica as propriedades afins da variedade.

De maneira análoga a definição convencional de derivada, tomaremos a variação infinitesimal do vetor num dado ponto como sendo o limite da

diferença entre A^α e A^α_{\parallel} quando fazemos $dx^\alpha \rightarrow 0$. A esta operação damos o nome de derivada covariante. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{dx^\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{A^\mu(x + dx) - A^\mu_{\parallel}(x + dx)}{dx^\alpha} \right) &= \lim_{dx^\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{dA^\mu(x) - \delta A^\mu(x)}{dx^\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu A^\lambda \quad . \end{aligned}$$

Para distinguirmos a derivada covariante da deriva simples iremos adotar a notação convencional definida na literatura. A derivada simples de um vetor será designada por uma vírgula simples, i.e.

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha A^\mu \equiv A^\mu_{,\alpha} \quad . \quad (23)$$

Já a derivada covariante será expressa pelo símbolo ∇ ou por um ponto e vírgula de forma que a derivada covariante de um vetor se escreve

$$\nabla_\alpha A^\mu \equiv A^\mu_{;\alpha} = A^\mu_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu A^\lambda \quad . \quad (24)$$

Um dos objetivos primeiros de definirmos a derivada covariante é de que tenhamos um tensor para caracterizar a variação ao longo da variedade. Assim, por construção, queremos que $\nabla \vec{A}$ seja um tensor do tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cuja lei de transformação de suas componentes é bem estabelecida. Por uma transformação de coordenadas definida por $x'^\mu(x^\alpha)$, as componentes do tensor $\nabla \vec{A}$ se transformam de acordo com

$$A'^\mu_{;\alpha} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} A^\nu_{;\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} (A^\nu_{,\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\nu A^\lambda) \quad (25)$$

Logo, encontramos a lei de transformação da conexão

$$\Gamma'_{\alpha\rho}{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\beta\sigma}^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\rho} \quad . \quad (26)$$

Como comentado no início desta seção, a derivada simples de um escalar se transforma como um tensor. Assim iremos definir a derivada covariante de um escalar como sendo idêntica a sua derivada simples, i.e. $\nabla_\alpha \phi(x) \equiv \partial_\alpha \phi(x)$. Esta definição junto com a derivada covariante de um vetor nos fixa completamente a derivada covariante de um tensor arbitrário. É fácil verificar que, para $B^\alpha A_\alpha$ se transformar como um escalar, a derivada covariante de um tensor do tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deve ser definida por

$$\nabla_\alpha A_\mu \equiv A_{\mu;\alpha} = A_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda A_\lambda \quad . \quad (27)$$

Generalizando temos então que a derivada de um tensor \mathbf{T} do tipo $\binom{p}{q}$ será dada por

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma} &\equiv T^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma;\alpha} \\ &= T^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma,\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu T^{\lambda\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma} + \dots + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu T^{\mu\dots\lambda}{}_{\rho\dots\sigma} + \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda T^{\mu\dots\nu}{}_{\lambda\dots\sigma} - \dots - \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda T^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\lambda}\end{aligned}\quad (28)$$

Tendo definido a derivada covariante de um tensor arbitrário, nos resta estabelecer a derivada covariante das densidades tensoriais. Vale lembrar que os tensores são um caso particular de densidades tensoriais os quais têm peso zero. Assim, nossa definição de derivada covariante para densidades tensoriais deve reobter a noção de derivada covariante definida a pouco para o caso de densidades tensoriais de peso zero.

Vamos exigir que a derivada covariante de uma densidade tensorial $\binom{q}{r}$ de peso p se transforme como uma densidade tensorial $\binom{q}{r+1}$ de também de peso p . Para isso, a derivada covariante de uma densidade vetorial \mathcal{T}^μ de peso p será

$$\nabla_\alpha \mathcal{T}^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \mathcal{T}^\lambda - p \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda \mathcal{T}^\mu \quad , \quad (29)$$

enquanto que para densidades $\binom{0}{1}$ teremos

$$\nabla_\alpha \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda \mathcal{T}_\mu - p \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda \mathcal{T}_\mu \quad . \quad (30)$$

De maneira geral, a derivada covariante de uma densidade tensorial de peso p possui um termo extra com sinal negativo e dado por p vezes o produto direto da própria densidade tensorial com a conexão com dois índices contraídos, i.e.

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \mathcal{T}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma} &\equiv \mathcal{T}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma;\alpha} \\ &= \mathcal{T}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma,\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \mathcal{T}^{\lambda\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma} + \dots + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \mathcal{T}^{\mu\dots\lambda}{}_{\rho\dots\sigma} + \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \mathcal{T}^{\mu\dots\nu}{}_{\lambda\dots\sigma} - \dots - \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda \mathcal{T}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\lambda} - p \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda \mathcal{T}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma} \quad .\end{aligned}\quad (31)$$

Tensor de curvatura

Um fato importante associado a derivada covariante é que apesar dela possuir propriedades similares a derivada simples, como por exemplo satisfazer a regra de Leibniz, a derivada covariante não comuta, ou seja, não podemos trocar a ordem de derivação como fazemos com a derivada simples. A segunda derivada covariante aplicada deve ser um tensor do tipo $\binom{0}{3}$ cujas componentes serão

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu = \partial_\beta \partial_\alpha A_\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda A_\lambda - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \partial_\beta A_\lambda - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \nabla_\alpha A_\lambda - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \nabla_\lambda A_\mu \quad . \quad (32)$$

Se a derivada covariante comutasse deveríamos ter $\nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu = \nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu$. No entanto, um cálculo direto nos mostra que

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu - \nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu = R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} A_\lambda + 2T^\lambda{}_{\alpha\beta} A_{\mu;\lambda} \quad (33)$$

onde $T^\lambda{}_{\alpha\beta} \equiv 2\Gamma^\lambda{}_{[\alpha\beta]}$ é a torção e

$$R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} \equiv \Gamma^\lambda{}_{\beta\mu,\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu,\beta} + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\varepsilon} \Gamma^\varepsilon{}_{\beta\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\varepsilon} \Gamma^\varepsilon{}_{\alpha\mu} \quad (34)$$

é o tensor de curvatura. Apesar de $R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}$ ser completamente definido em termos da conexão, que como já mencionamos não é um verdadeiro tensor, este objeto é de fato um tensor. Podemos nos convencer de que $L^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}$ é um tensor de duas formas. Na eq. (33), se passarmos o termo associado a torção para o outro lado da equação temos que todos os termos do lado esquerdo são verdadeiros tensores. Assim, a única possibilidade é de que o lado direito também o seja. Como A_λ são as componentes de um tensor, a princípio arbitrário, podemos concluir que $R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}$ deve ser também um verdadeiro tensor. De maneira mais direta, usando eq. (26) é possível mostrar que por uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'(x)$ temos

$$R'^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\varepsilon} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} R^\varepsilon{}_{\nu\sigma\rho} \quad (35)$$

que é justamente a lei de transformação de um tensor do tipo $\binom{1}{3}$.

Geodésica afim

Uma vez tendo estabelecido uma regra para transportarmos objetos de um ponto a outro da variedade podemos construir um conceito fundamental que é a definição de uma classe especial de curvas: as chamadas de curvas geodésicas. As curvas geodésicas são o conceito mais próximo de retas do espaço plano que podemos construir. A questão crucial então é como devemos definir estas curvas que extremizam a distância. Note que a característica fundamental de uma reta é que o seu vetor tangente é sempre colinear com a curva, ou seja, a variação do vetor tangente ao longo da curva é zero. De maneira análoga, vamos definir uma curva geodésica como sendo a curva cujo vetor tangente transportado paralelamente a própria curva é sempre proporcional ao vetor tangente no ponto em questão. O vetor tangente $\vec{\xi} = \frac{d}{d\lambda}$ do ponto x^α ao ser transportado paralelamente para um ponto infinitesimalmente próximo $x^\alpha + dx^\alpha$ se modifica para

$$\xi^\mu_{\parallel}(x + dx) = \xi^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \xi^\beta dx^\alpha = \xi^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\alpha d\lambda \quad . \quad (36)$$

Por outro lado, o vetor tangente no ponto $x'^\alpha = x^\alpha + dx^\alpha$ será

$$\xi^\mu(x') = \frac{dx'^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} d\lambda = \xi^\mu(x) + \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} d\lambda \quad . \quad (37)$$

Logo, a condição é $\xi^\mu_{||}(x+dx) = \sigma(\lambda, d\lambda) \xi^\mu(x')$ onde $\sigma(\lambda, d\lambda)$ representa a função de proporcionalidade que pode depender do ponto que é especificado pelo parâmetro λ e do incremento dado por $d\lambda$. No caso de incremento nulo, ou seja, $d\lambda \rightarrow 0$, que significa $x'^\alpha \rightarrow x^\alpha$, devemos recuperar o vetor tangente original para qualquer valor do parâmetro λ , i.e. $\sigma(\lambda, 0) = 1$. Como $d\lambda$ é infinitesimal, guardando termos até primeira ordem em $d\lambda$, podemos escrever $\sigma(\lambda, d\lambda) = 1 + \beta(\lambda)d\lambda$. Esta condição junto com as equações (36)-(37) nos fornece que o vetor tangente de uma curva geodésica deve satisfazer

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\alpha = -\beta(\lambda) \xi^\mu \quad . \quad (38)$$

As curvas integrais desta equação nos fornecem as geodésicas afim. Note que como a conexão esta contraída duas vezes com o vetor tangente apenas sua parte simétrica contribui para determinar as curvas geodésicas. Além disso, o parâmetro que escolhermos para caracterizar as curvas não alteram a imagem do mapa que a define, ou seja, duas curvas que diferem apenas nos seus parâmetros mapeam os mesmos pontos da variedade. Tendo esta liberdade, podemos reparametrizar eq. (38) com um novo parâmetro $s(\lambda)$ tal que

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = -\frac{s'' + \beta s'}{s'^2} \frac{dx^\mu}{ds} \quad , \quad (39)$$

onde s' e s'' significam primeira e segunda derivadas de s com relação a λ . Para uma função arbitrária $\beta(\lambda)$, a equação $s'' + \beta s' = 0$ sempre tem solução. Isto significa que é sempre possível definirmos um parâmetro $s(\lambda)$ tal que o lado direito da eq. (38) se anule. Na realidade temos uma família de parâmetros visto que se s satisfizer $s'' + \beta s' = 0$, então qualquer outro parâmetro $\tilde{s} = r s + p$ com r e p constantes também irá satisfazer esta equação. A estes parâmetros damos o nome de parâmetros afim. Assim temos que com relação a um dado parâmetro afim, a equação que define as curvas geodésicas é dada por

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0 \quad , \quad (40)$$

ou de maneira equivalente

$$\xi^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu = 0 \quad . \quad (41)$$

Geometrias Métricas

O último objeto fundamental que definiremos em nossa escalada de estruturas na variedade é o tensor métrico. A métrica tem pelo menos três finalidades fundamentais para nossa descrição física. Em primeiro lugar é com o tensor métrico que definimos adequadamente as noções de distância espacial e temporal, ou seja, é através do uso de uma métrica é que somos capazes de medir tempo e distâncias. Antes de definirmos de maneira formal, vejamos como isto ocorre na geometria euclidiana que estamos familiarizados.

O espaço euclidiano é nada mais do que o espaço tri-dimensional plano. Tendo dois vetores \vec{a} e \vec{b} , definimos o seu produto escalar pela soma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a^i b^i = \sum_{i,j} \delta_{ij} a^i b^j$$

onde δ_{ij} é a delta de kronecker, e a distância espacial entre dois pontos infinitesimalmente próximos por

$$dl^2 = \vec{dl} \cdot \vec{dl} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (42)$$

Em ambos os casos, a matriz δ_{ij} caracteriza a métrica do espaço plano, ou seja, a métrica $g(,)$ do espaço euclidiano é simplesmente a matriz identidade $g_{ij} = \delta_{ij}$. No entanto, isto só é verdade no sistema de coordenadas cartesiano. Sabemos que o elemento de linha quando escrito num sistema de coordenadas esférico assume a forma

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \quad (43)$$

onde agora a métrica não é mais a delta de Kronecker mas é expressa por

$$g(,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Além da métrica auxiliar na definição de distância infinitesimal como em eq. (42) ou eq. (43) ela como os tensores se transforma quando mudamos de sistema de coordenadas. Além disso, a partir do produto escalar entre dois vetores podemos definir a noção de ângulo entre estes dois vetores.

Uma outra propriedade importante que discutiremos em seguida de termos uma métrica definida na variedade é de podermos criar um mapa entre vetores e 1-formas. Isto é bastante útil pois nos possibilita identificar um único ente físico tanto com um campo vetorial quanto com o campo de 1-forma associado via o mapa gerado pela métrica.

Tensor métrico

Numa dada variedade, definimos a métrica como sendo um campo tensorial $g(,)$ do tipo $\binom{0}{2}$ que seja simétrico, linear e não-degenerado. Assim se tivermos num ponto dois vetores \vec{A} e \vec{B} a atuação da métrica será tal que

$$g(\vec{A}, \vec{B}) = a \in \mathfrak{R} \quad .$$

Da propriedade de ser linear temos que $g(\lambda\vec{A}, \vec{B}) = \lambda g(\vec{A}, \vec{B})$ com $\lambda \in \mathfrak{R}$. Além disso, a métrica deve ser simétrica, ou seja, $g(\vec{A}, \vec{B}) = g(\vec{B}, \vec{A})$. Se expandirmos os vetores \vec{A} e \vec{B} numa dada base vetorial \vec{e}_μ , i.e. $\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu$ e $\vec{B} = B^\nu \vec{e}_\nu$ teremos que

$$g(\vec{A}, \vec{B}) = A^\mu B^\nu g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \quad . \quad (44)$$

Num dado ponto da variedade, para cada valor de μ e ν $g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$ assume um valor real. Além disso como $g(\vec{A}, \vec{B})$ não depende da base vetorial escolhida mas os termos A^μ e B^ν dependem, vemos que $g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$ são as componentes do tensor métrico escrita na base \vec{e}_μ , i.e.

$$g_{\mu\nu} \equiv g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \quad . \quad (45)$$

Sendo um campo tensorial do tipo $\binom{0}{2}$, em cada ponto da variedade n-dimensional, $g_{\mu\nu}$ define uma matriz simétrica 4×4 . O fato da métrica ser não-degenerada significa que o determinante de $g_{\mu\nu}$ em cada ponto da variedade é sempre não-nulo, i.e. $g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$. Esta propriedade nos garante que se $g(\vec{A}, \vec{v}) = 0$ para qualquer \vec{v} , então necessariamente $\vec{A} = 0$. Além disso, com o uso de seu determinante podemos construir sua inversa. De maneira equivalente podemos definir a inversa da métrica $g^{-1}(,)$ que é um tensor do tipo $\binom{2}{0}$ o qual tem componentes $g^{\mu\nu}$ tais que por definição

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \quad . \quad (46)$$

A métrica sendo um tensor $\binom{0}{2}$ possui duas entradas para vetores $g(,)$. Se escolhermos um vetor específico \vec{A} e ocuparmos apenas uma das entradas da métrica o resultado é um tensor do tipo $\binom{0}{1}$, ou seja, a cada novo vetor ele associa um número real. Note que este objeto é completamente caracterizada pela métrica $g(,)$ e o vetor \vec{A} . Neste sentido a métrica faz um mapa entre vetores, que em são tensores do tipo $\binom{1}{0}$, em tensores do tipo $\binom{0}{1}$. Logo usando eq. (45) temos que

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu \quad . \quad (47)$$

De maneira análoga, podemos usar a inversa da métrica $g^{-1}(,)$ para realizar o mapa inverso. Sendo do tipo $\binom{2}{0}$, se atuarmos em um tensor do tipo $\binom{0}{1}$ encontramos um tensor do tipo $\binom{1}{0}$, ou seja, temos um vetor

$$A^\mu \equiv g^{\mu\nu} A_\nu \quad , \quad (48)$$

A operação definida nas equações eq. (47) e eq. (48) são o que denominamos respectivamente de abaixamento e levantamento de índices. Note que de posse do mapa criado pela métrica, a definição de um dado vetor que era feita apenas por suas componentes contravariante pode agora também ser feita pela definição das componentes covariante associadas ao campo tensorial do tipo $\binom{0}{1}$. Se soubermos as componentes covariante A_μ , basta usarmos eq. (48) para encontramos suas componentes contravariante A^μ , ou vice-versa com o uso de eq. (47).

Em nossa nomenclatura diríamos que uma matriz é um objeto que tem um índice contra e outro covariante. O traço da matriz é dado pela soma direta de seus termos da diagonal. Assim, uma dada matriz M tem traço dado por

$$tr(M) = M^\mu{}_\mu = M^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\mu = M_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad . \quad (49)$$

Ademais, é a partir da métrica que definimos o conceito de distância infinitesimal. Note que no espaço euclidiano, a distância dl entre dois pontos infinitesimalmente próximos x_0 e $x_0 + dx$ é calculada usando o famoso teorema de Pitágoras. Num sistema cartesiano temos $dl = \sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, onde δ_{ij} representa a métrica do espaço plano.

Para um espaço geométrico genérico, iremos definir a distância entre dois pontos a partir de uma generalização da definição euclidiana convencional. Assim, num espaço métrico arbitrário iremos definir o intervalo entre os pontos x e $x + dx$ por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad . \quad (50)$$

Na terminologia matemática, o tensor métrico é sempre um objeto cujos autovalores são positivos definidos. No entanto, em física lidamos com

variedades cuja métrica não é positiva definida, ou seja, quando a diagonalizamos num ponto, usando um sistema de coordenadas adequado, ela assume a forma $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Tendo dois vetores \vec{A} e \vec{B} , o produto escalar entre eles será

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv g(\vec{A}, \vec{B}) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad . \quad (51)$$

O módulo ao quadrado de um dado vetor \vec{A} é simplesmente $|\vec{A}|^2 = g(\vec{A}, \vec{A})$. Porém para métricas espaço-temporais pode acontecer $g(\vec{A}, \vec{A}) \leq 0$. Denominaremos o vetor de acordo com o sinal de seu módulo, i.e.

$$\begin{aligned} |\vec{A}|^2 > 0 & \quad , \quad \text{vetor tipo-tempo} \\ |\vec{A}|^2 = 0 & \quad , \quad \text{vetor nulo} \\ |\vec{A}|^2 < 0 & \quad , \quad \text{vetor tipo-espaço} \end{aligned}$$

Para vetores tipo-tempo ou tipo espaço nos quais $|\vec{A}|^2 \neq 0$, podemos definir o ângulo entre vetores fazendo uso de eq. (51). Assim, sendo \vec{A} e \vec{B} dois vetores não nulos, o ângulo entre eles é definido por

$$\cos \theta \equiv \frac{g(\vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\sqrt{\|A_\alpha A^\alpha\|} \sqrt{\|B_\lambda B^\lambda\|}} \quad . \quad (52)$$

É imediato notar que $-1 < \cos \theta < 1$ como esperado. Quando $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ dizemos que os vetores não nulos \vec{A} e \vec{B} são ortogonais entre si. Caso queiramos incluir os vetores nulos nesta descrição, seremos forçados a permitir que o ângulo se torne imaginário. Isto acontece pois como o módulo de um vetor nulo é zero não somos capazes de normalizar eq. (52) de forma que o módulo do cosseno do ângulo entre um vetor nulo e um outro tipo-tempo ou tipo-espaço será em geral maior que 1, i.e. $|\cos \theta| \geq 1$. Além disso, é conveniente definirmos a noção de ortogonalidade independente do valor de θ . Assim, dizemos que dois vetores arbitrários são ortogonais, ou perpendiculares, se o seu produto escalar for zero, i.e.

$$g(\vec{A}, \vec{K}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B} \quad . \quad (53)$$

Desta definição, vemos que vetores nulos são por definição perpendiculares a si mesmo já que seu módulo é zero.

Variedades Riemannianas

Uma variedade riemanniana 4-dim é definida como um tripleto $(\mathcal{M}, \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}, g_{\mu\nu})$, i.e. é uma variedade quadri-dimensional \mathcal{M} que possui uma métrica $g_{\mu\nu}$ e cuja estrutura afim é dada pelo símbolo de Christoffel, i.e.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} (\partial_{\alpha}g_{\lambda\beta} + \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}) \quad . \quad (54)$$

Variedades riemannianas satisfazem a condição de metricidade que é expressa pela derivada da métrica ser nula, i.e. $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$. Ademais, a conexão sendo dada pelo símbolo de Christoffel, a torção também é zero, i.e. $T^{\mu}_{\alpha\beta} = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\mu} = 0$. Dada a condição de metricidade, vemos que as operações de multiplicar pela métrica e tomar a derivada covariante comutam de forma que

$$g^{\mu\beta} \nabla_{\lambda} (T^{\alpha\dots\sigma}_{\beta\tau\dots\rho}) = \nabla_{\lambda} T^{\alpha\dots\sigma\mu}_{\tau\dots\rho} \quad (55)$$

Em variedades riemannianas, podemos sempre escolher um sistema de coordenadas no qual a conexão se anula num dado ponto fiducial x_0 . Podemos mostrar este resultado fazendo uma expansão em Taylor a partir de um ponto fiducial x_0^{α} da transformação de coordenadas $x'(x)$ a qual escrevemos

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x_0) + a^{\mu}_{\alpha} (x^{\alpha} - x_0^{\alpha}) + \frac{1}{2}b^{\mu}_{\alpha\beta} (x^{\alpha} - x_0^{\alpha}) (x^{\beta} - x_0^{\beta}) + \dots \quad (56)$$

e a transformação inversa pode ser escrita de maneira similar trocando a^{μ}_{α} por A^{μ}_{α} e $b^{\mu}_{\alpha\beta}$ por $B^{\mu}_{\alpha\beta}$, tal que $A^{\mu}_{\nu} = (a^{-1})^{\mu}_{\nu}$. A lei de transformação da conexão eq. (26) calculada no ponto x_0^{μ} nos fornece

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} \Big|_{x_0} = a^{\lambda}_{\sigma} A^{\alpha}_{\mu} A^{\beta}_{\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Big|_{x_0} + a^{\lambda}_{\sigma} b^{\sigma}_{\mu\nu} \quad . \quad (57)$$

É fácil verificar que $a^{\lambda}_{\sigma} = O^{\lambda}_{\sigma}$ e $b^{\sigma}_{\mu\nu} = -O_{\mu}^{-1\alpha} O_{\nu}^{-1\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ satisfazem as condições para anularmos a conexão. Ademais com uma escolha adequada de O_{μ}^{α} podemos diagonalizar a métrica. De fato, a lei de transformação da métrica neste ponto é dada por

$$g'_{\mu\nu} = a^{\alpha}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta} = O^{\alpha}_{\mu} O^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta} \quad . \quad (58)$$

Da álgebra linear sabemos que uma matriz simétrica e não singular como a métrica é sempre diagonalizável. Concluimos que em variedade riemannianas além de podermos localmente anular a conexão por uma transformação

de coordenadas podemos simultaneamente tornar a métrica diagonal e se desejável com seus termos da diagonal iguais a ± 1 , ou seja $g_{\mu\nu}$ se torna ortonormal neste ponto.

A condição de integrabilidade eq. (33) define o tensor de curvatura, o qual reproduzimos por completeza

$$R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda + \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\lambda \Gamma_{\beta\mu}^\varepsilon - \Gamma_{\beta\varepsilon}^\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\varepsilon \quad . \quad (59)$$

Para analisar as simetrias deste tensor se mostra útil abaixarmos o seu primeiro índice. Assim, temos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\nu\alpha} - g_{\mu\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\nu\beta,\mu\alpha}) + g_{\mu\lambda} [\Gamma_{\alpha\varepsilon}^\lambda \Gamma_{\beta\nu}^\varepsilon - \Gamma_{\beta\varepsilon}^\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\varepsilon] \quad (60)$$

Da expressão acima, vemos que o tensor de Riemann é anti-simétrico nos seus dois primeiros índices e nos seus dois últimos. Além disso, ele também é simétrico pela troca simultânea dos dois pares, i.e. $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Além destas simetrias mais evidentes, o tensor de Riemann ainda satisfaz mais uma condição. Para identificarmos esta outra simetria, considere um sistema de coordenadas no qual a conexão se anula num dado ponto fiducial x_0 . Com relação a este sistema de coordenadas o tensor de Riemann neste ponto se reduz aos termos de derivada segunda da métrica. Analisando apenas os termos de derivada segunda, não é difícil mostra que a combinação de tensores de Riemann com permutação cíclica nos três últimos índices se anula. No entanto, esta é uma equação tensorial de forma que se ela vale um dado sistema de coordenadas ela deve ser válida para qualquer outro sistema. Além do mais, o ponto fiducial x_0 é completamente arbitrário, de forma que ela também deve ser válida para todos os pontos da variedade.

Podemos listar todas as condições de simetrias do tensor de Riemann:

$$\text{i) } R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (61)$$

$$\text{ii) } R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (62)$$

$$\text{iii) } R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (63)$$

$$\text{iv) } R_{\alpha[\mu\beta\nu]} = R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\nu\mu\beta} + R_{\alpha\beta\nu\mu} = 0 \quad (64)$$

Estas simetrias nos mostram que o tensor de Riemann possui apenas um traço, i.e $R_{\alpha\beta} \equiv R^\lambda{}_{\alpha\lambda\beta}$. De fato, contrair o primeiro índice com o segundo dá zero e com o quarto nos dá o menos resultado anterior apenas com um sinal trocado. Este tensor denominado de tensor de Ricci é simétrico, i.e. $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. Ainda podemos contrair o tensor de Ricci novamente com a métrica fornecendo o escalar de Ricci $R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$.

Uma outra propriedade importante do tensor de Riemann é de que eles satisfazem as identidades de Bianchi. As identidades de Bianchi estão associadas a condições de integrabilidade. Seguindo um raciocínio análogo ao que nos levou a condição $R_{\alpha[\mu\beta\nu]} = 0$, vamos considerar um sistema de coordenadas que anule a conexão em um dado ponto fiducial x_0 . Neste sistema de coordenadas, a derivada covariante do tensor de Riemann se escreve $R^\alpha_{\beta\mu\nu;\lambda}\Big|_{x_0} = \partial_\lambda\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\lambda\partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$. Usando esta expressão, é direto mostrar que a seguinte composição se anula

$$\nabla_{[\lambda}R^\alpha_{|\beta|\mu\nu]} = 2(\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda}) = 0 \quad . \quad (65)$$

Se tomarmos o traço desta equação contraindo os índices α e ν , encontramos

$$\nabla_\alpha R^\alpha_{\beta\lambda\mu} = \nabla_\lambda R_{\beta\mu} - \nabla_\mu R_{\beta\lambda} \quad (66)$$

e contraindo novamente agora nos índices β e λ , temos

$$\nabla_\alpha R^\alpha_{\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\mu R = \frac{1}{2}\partial_\mu R \quad (67)$$

Esta última equação nos mostra que em toda e qualquer variedade riemanniana, existe um tensor que é definido a partir de uma combinação específica do tensor e do escalar de Ricci que tem sempre divergente zero. De fato, definindo o tensor de Einstein por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad , \quad (68)$$

a eq. (66) nos mostra que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

Bibliografia

Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.