Introdução à Inflação Cósmica*

FELIPE TOVAR FALCIANO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FíSICAS

Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro - RJ

* Texto extraído da Tese de doutorado defendida em Março de 2008.

Sumário

Capítulo 1

Teoria Linear de Perturbações Cosmológicas

Nos capítulos anteriores, estudamos o formalismo hamiltoniano para a TRG e vimos que seria necessário usarmos métodos para lidarmos com sistemas vinculados devido às liberdades de calibre da teoria. No presente capítulo, vamos desenvolver a teoria linear de perturbações cosmológicas nos preocupando apenas com o formalismo que será usado no desenvolvimento dos resultados seguintes e, por isso, nos limitaremos apenas em lidar com o essencial necessário deste formalismo.

Primeiramente, vamos mostrar como podemos, de uma maneira consistente, definir uma teoria de perturbações cosmológicas e quais devem ser as variáveis dinâmicas desta descrição. Tendo estabelecido a linguagem conveniente, vamos derivar as equações dinâmicas para perturbações escalares a partir das equações da TRG. Em seguida, nos focalizando apenas no caso de um Universo permeado por um campo escalar clássico, encontraremos finalmente as equações básicas para a descrição da evolução de perturbações lineares num Universo homogêneo e isotrópico.

1.0.1 Formalismo

As observações cosmológicas nos mostram que o Universo é, em larga escala, homogêneo e isotrópico. As estruturas encontradas, por exemplo em aglomerados de galáxias, podem ser explicadas a partir da evolução de um pequeno desvio da homogeneidade observada. Devido à natureza atrativa da gravitação, qualquer desvio da homogeneidade gera uma instabilidade gravitacional a qual tenderia a crescer exponencialmente. Porém, devido à expansão do Universo, o crescimento das perturbações, em geral, segue uma lei de potência.

Para explicarmos completamente a formação de estrutura do Universo precisamos levar em conta efeitos gravitacionais não lineares Ref.[24, 27]. No entanto, antes mesmo de estudarmos a evolução dessas perturbações temos que estabelecer quais são as adequadas condições iniciais, ou seja, qual é o perfil de distribuição da densidade de matéria, o qual sabemos que está, através das equações de Einstein, associado às perturbações da métrica.

A teoria linear das perturbações da métrica nos possibilita descrever a evolução dessas perturbações num regime anterior à formação de estrutura, gerando assim as condições iniciais para esta teoria.

Com o desenvolvimento do paradigma inflacionário, que será discutido no capítulo seguinte, a teoria de perturbações [1] se mostrou um formalismo fundamental nas previsões cosmológicas. A partir do seu desenvolvimento pode-se explicar, por exemplo, as flutuações da radiação cósmica de fundo, tornando-se assim indispensável para qualquer análise e teste de modelos teóricos para o Universo primordial.

A TRG foi construída para ser uma teoria invariante por transformações arbitrárias de coordenadas. Esta invariância está associada à idéia de que os sistemas de coordenadas são completamente arbitrários e por isso não contém nenhum significado físico. Esta liberdade de calibre nos cria uma dificuldade técnica na construção de uma teoria de perturbações lineares pois, uma vez que é permitido fazer qualquer transformação de coordenadas, temos que garantir que as quantidades que descreverão as perturbações de uma dada métrica são de fato perturbações físicas e não meras componentes artificiais criadas por uma mudança de coordenadas.

Existem alguns métodos possíveis para tratar este problema. Uma possibilidade seria, por exemplo, descrevermos a gravitação no formalismo de equações quase-maxwellianas e descrevermos as perturbações em termos das componentes do tensor de Weyl Ref.'s [1]-[6]. Uma vez que as métricas conformalmente planas possuem tensor de Weyl igual a zero, qualquer

[1] Vamos usar o termo teoria de perturbações como uma abreviação para teoria linear de perturbações gravitacionais, sendo sempre sub-entendido que estamos considerando a descrição do Universo através da métrica FLRW.

componente não nula do tensor de Weyl para a métrica de FLRW representará necessariamente uma verdadeira perturbação.

Por conveniência, optamos por trabalhar com as variáveis invariantes de calibre em primeira ordem desenvolvidas primeiramente por Bardeen [8, 9]. Neste formalismo, as variáveis das perturbações são identificadas com componentes da métrica perturbada. De maneira análoga, poderíamos ter escolhido trabalhar num dado calibre, como o calibre síncronton e, tomando cuidado para identificarmos corretamente aos graus de liberdade físicos das perturbações, evoluirmos o sistema mesmo que as variáveis não sejam invariantes de calibre. No entanto, neste procedimento, não é fácil o acompanhamento dos graus de liberdade físicos o que torna a análise dos resultados menos clara e mais difícil de interpretar.

Formalmente podemos definir transformações de calibre de perturbações com relação a uma determinada métrica de fundo de duas maneiras: transformações passivas ou ativas. Suponha que tenhamos uma variedade $\mathcal{M}$ que represente o espaço-tempo físico onde definimos uma estrutura de fundo e associamos a toda e qualquer variável $\mathcal{Q}$[2] em $\mathcal{M}$ uma função específica $\mathcal{Q}^{(0)}(x^\alpha(p))$ de forma que a dependência funcional de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em x^α seja fixa para todo ponto $p \in \mathcal{M}$. Tendo definido esta estrutura de fundo podemos então definir as perturbações simplesmente como

$$\delta\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(x^\alpha(p)) - \mathcal{Q}^{(0)}(x^\alpha(p)).$$

Para um outro sistema de coordenadas $\tilde{x}^\alpha$ teremos naturalmete para o mesmo ponto p

$$\tilde{\delta\mathcal{Q}}(p) = \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{x}^\alpha(p)) - \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{x}^\alpha(p)).$$

Da mesma forma que antes, a dependência funcional de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em $\tilde{x}^\alpha$ é a mesma que de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em x^α. A transformação $\delta\mathcal{Q} \longrightarrow \tilde{\delta\mathcal{Q}}$ é a definição da transformação de calibre (passiva) associada à transformação de coordenada $x^\alpha \longrightarrow \tilde{x}^\alpha$.

A outra maneira de definirmos transformações de calibre é utilizarmos uma outra variedade e definirmos um difeomorfismo entre esta variedade de fundo $\mathcal{N}$ e a variedade espaço-temporal física $\mathcal{M}$. Se a variedade de fundo possuir um sistema de coordenada rígido x_r, um dado difeomorfismo $\mathscr{D} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ induz um sistema de coordenadas em $\mathcal{M}$ pela associação $\mathscr{D} : x_r^\alpha \longrightarrow x^\alpha$. Se utilizarmos um outro difeomorfismo $\tilde{\mathscr{D}}$, teremos a indução de um

[2]Estamos omitindo os possíveis indíces de $\mathcal{Q}$ mas esta variável pode ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

novo sistema de coordenadas $\tilde{\mathscr{D}} : x_r^\alpha \longrightarrow \tilde{x}^\alpha$. Para cada um destes difeomorfismo, podemos definir nossas variáveis perturbadas respectivamente como $\delta\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(p) - \mathcal{Q}^{(0)}(\mathscr{D}^{-1}(p))$ e $\tilde{\delta\mathcal{Q}}(p) = \tilde{\mathcal{Q}}(p) - \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{\mathscr{D}}^{-1}(p))$. Novamente definimos uma transformação de calibre como a passagem de $\delta\mathcal{Q} \longrightarrow \tilde{\delta\mathcal{Q}}$. Estas duas abordagens são equivalentes, sendo que a primeira mostra mais claramente a dependência das transformação de calibre na escolha do sistema de coordenadas enquanto que a segunda salienta a dependência na relação entre a variedade de fundo e a variedade física espaço-temporal.

No caso de considerarmos transformações infinitesimais

$$x^\alpha \longrightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha,$$

a transformação de calibre é caracterizada pela derivada de Lie na direção do vetor ξ,

$$\tilde{\delta\mathcal{Q}} - \delta\mathcal{Q} = \mathscr{L}_\xi Q. \tag{1.1}$$

O estudo de perturbações será feito num Universo descrito pela métrica de FLRW de forma que podemos definir a métrica a partir do intervalo de acordo com a separação $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$ onde assumimos que a métrica de fundo é dada por

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\nu dx^\mu = N^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{\mathcal{K}}{4} r^2)^2} \left[\mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + sen^2(\theta) \mathrm{d}\phi^2 \right) \right].$$

A parte perturbada da métrica pode ser dividida em três setores, os quais evoluem de forma independente: escalar, vetorial e tensorial. Essa separação das componentes da perturbação é baseada em suas propriedades frente a transformações de coordenadas tri-espaciais em cada hipersuperfície que define o folheamento da variedade associada à métrica de fundo.

As perturbações vetoriais e tensoriais não geram nenhuma instabilidade gravitacional de forma que para o estudo da formação de estrutura basta analizarmos o setor escalar Ref.[7]. De fato, para um Universo em expansão, as perturbações vetoriais decaem inversamente proporcionais ao fator de escala, enquanto que as perturbações tensoriais geram ondas gravitacionais que não influenciam na evolução dos desvios da homogeneidade da densidade de matéria.

1.0.2 Perturbações escalares

A parte da métrica associada às perturbações escalares pode ser escrita como

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2N^2\phi & -Na(t)B_{|i} \\ -Na(t)B_{|i} & 2a^2(t)\left(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}\right) \end{pmatrix}.$$

No calibre temporal conforme, o intervalo se escreve

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left\{(1+2\phi)\,\mathrm{d}\eta^2 - 2B_{|i}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}\eta - \left[(1-2\psi)\,\gamma_{ij} + 2E_{|ij}\right]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right\}. \tag{1.2}$$

Uma transfomação infinitesimal de coordenada é inteiramente definida por um vetor $\xi = (\xi^0, \xi^i)$, onde o tri-vetor pode ser decomposto em um tri-vetor com divergência nula e uma função escalar, ou seja, $\xi^i = \xi^i_T + \gamma^{ij}\xi_{|j}$ com $\xi^j_{T|j} = 0$. Como estamos interessados apenas nas perturbações escalares, a transformação infinitesimal mais geral pode ser caracterizada pelas duas funções escalares ξ^0 e ξ. Dada esta transformação infinitesimal, a métrica irá sofrer um transformação $\delta g_{\mu\nu} \longrightarrow \delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \Delta g_{\mu\nu}$. Podemos calcular a varição para cada uma das componentes da métrica perturbada definida em (1.2)

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{a'}{a}\xi^0 - \xi^{0\,\prime}, \qquad \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \qquad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \qquad \tilde{E} = E - \xi,$$

onde $'$ significa derivada com relação ao tempo conforme.

Claramente, estas variáveis não são invariantes por esta transformação infinitesimal de coordenada. A partir de uma combinação apropriada, podemos construir duas variáveis invariantes

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a}\left[(B - E')a\right]' \qquad \Psi = \psi - \frac{a'}{a}(B - E').$$

Estas duas variáveis foram introduzidas na literatura pela primeira vez por Bardeen [9]. Além dessa possível escolha, poderíamos ter tomado qualquer combinação linear destas ou definir quaisquer outras duas variáveis invariantes de calibre para representar o espaço bidimensional das funções escalares invariantes de calibre que definem a perturbação escalar da métrica. A escolha por estas duas variáveis se dá pela simplificação das equações dinâmicas e pela fácil associação da variável Φ, chamada de potencial de Bardeen, com o potencial Newtoniano.

Em geral, a perturbação de um campo escalar $\delta\varphi(\eta, x^i) = \varphi(\eta, x^i) - \varphi_0(\eta)$, onde $\varphi_0(\eta)$ é o seu valor no espaço-tempo de fundo, também não é invariante de calibre. Frente as transformações infinitesimais, esta perturbação se transforma $\delta\varphi(\eta, x^i) \longrightarrow \widetilde{\delta\varphi}(\eta, x^i) = \delta\varphi(\eta, x^i) -$

$\varphi_0'(\eta)\xi^0$. Da mesma forma que para as variáveis da métrica, podemos definir uma perturbação invariante de calibre

$$\delta\varphi^{\text{inv}} = \delta\varphi + \varphi_0'(B - E').$$

Tendo as quantidades invariantes de calibre definidas acima, vamos agora derivar, a partir das equações de Einstein, as equações de evolução das perturbações.

As equações para as perturbações são calculadas a partir das equações de Einstein utilizando a definição para a métrica perturbada $g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Ao inserírmos esta métrica no lado esquerdo das equações de Einstein encontramos

$$G^{\mu}{}_{\nu} = {}^{(0)}G^{\mu}{}_{\nu} + \delta G^{\mu}{}_{\nu}$$

onde ${}^{(0)}G^{\mu}{}_{\nu}$ condensa todos os termos que encontraríamos caso a métrica fosse apenas a métrica de fundo ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$.

Utilizando a métrica no calibre de tempo conforme, eq. (1.2), encontramos para o tensor de Einstein perturbado as seguintes equações

$$\delta G^{0}{}_{0} = \frac{2}{a^2}\left\{-3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}\phi + \psi'\right) + \nabla^2\left[\psi - \mathcal{H}(B - E')\right] + 3\mathcal{K}\psi\right\} \tag{1.3}$$

$$\delta G^{0}{}_{j} = \frac{2}{a^2}\left[\mathcal{H}\phi + \psi' - \mathcal{K}(B - E')\right]_{|j} \tag{1.4}$$

$$\delta G^{i}{}_{j} = -\frac{2}{a^2}\left\{\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}\phi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' - \mathcal{K}\psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta^{i}{}_{j} - \frac{1}{2}\gamma^{ik}D_{|kj}\right\} \tag{1.5}$$

onde definimos $D \doteq (\phi - \psi) + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E')'$.

Esses termos de perturbação para o tensor de Einstein não são invariantes de calibre para um transformação infinitesimal do sistema de coordenadas. Se utilizarmos a definição (1.1), encontramos

$$\delta G^{0}{}_{0} \longrightarrow \delta G^{0}{}_{0} - \left({}^{(0)}G^{0}{}_{0}\right)'\xi^0$$

$$\delta G^{0}{}_{j} \longrightarrow \delta G^{0}{}_{j} - \left({}^{(0)}G^{0}{}_{0} - \frac{1}{3}\,{}^{(0)}G^{k}{}_{k}\right)\xi^0_{|j}$$

$$\delta G^{i}{}_{j} \longrightarrow \delta G^{i}{}_{j} - \left({}^{(0)}G^{i}{}_{j}\right)'\xi^0$$

Construímos assim as quantidades invariantes de calibre,

$$\left(\delta G^{\text{inv}}\right)^{0}{}_{0} = \delta G^{0}{}_{0} + \left({}^{(0)}G^{0}{}_{0}\right)'(B - E')$$

$$\left(\delta G^{\text{inv}}\right)^{0}{}_{j} = \delta G^{0}{}_{j} + \left({}^{(0)}G^{0}{}_{0} - \frac{1}{3}\,{}^{(0)}G^{k}{}_{k}\right)(B - E')_{|j}$$

$$\left(\delta G^{\text{inv}}\right)^{i}{}_{j} = \delta G^{i}{}_{j} + \left({}^{(0)}G^{i}{}_{j}\right)'(B - E')$$

Podemos definir, da mesma forma que para o tensor de Einstein $G^{\mu}{}_{\nu}$, a separação para o tensor energia momentum em uma componente associada ao sistema não perturbado e um termo de correção de primeira ordem nas pertubações $T^{\mu}{}_{\nu} ={}^{(0)} T^{\mu}{}_{\nu} + \delta T^{\mu}{}_{\nu}$.

De uma forma geral, considerando que a topologia do espaço-tempo seja $M^3 \otimes \Re$ onde M^3 é uma variedade tri-espacial arbitrária, podemos decompor o tensor energia-momentum em sua forma irredutível, Ref.[10], com o auxílio de uma congruência de vetores tipo tempo V^{μ}

$$T^{\mu\nu} = \rho V^{\mu} V^{\nu} + p\, h^{\mu\nu} + q^{(\mu} V^{\nu)} + \Pi^{\mu\nu},$$

onde definimos o símbolo de simetrização por $A^{(\mu}B^{\nu)} = A^{\mu}B^{\nu} + A^{\nu}B^{\mu}$ e o tensor $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_{\mu}V_{\nu}$ é o projetor sobre a tri-hipersuperfície definida como a superfície normal à congruência V^{μ}. No caso da métrica ser homogênea e isotrópica, os únicos termos não nulos são ρ e p.

Fazendo uma expansão até primeira ordem para o caso homogêneo e isotrópico temos,

$$T^{\mu}{}_{\nu} = {}^{(0)}T^{\mu}{}_{\nu} + \delta T^{\mu}{}_{\nu} \quad ,$$

com

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}T^{\mu}{}_{\nu} &= \rho V^{\mu} V^{\nu} + p\, h^{\mu\nu} \\
\delta T^{\mu}{}_{\nu} &= \delta\rho V^{\mu} V^{\nu} + \delta p\, h^{\mu\nu} + \rho\, \delta V^{(\mu} V^{\nu)} + p\, \delta h^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

As componentes invariantes de calibre para as perturbações do tensor energia-momentum se escrevem

$$\begin{aligned}
\left(\delta T^{\rm inv}\right)^{0}{}_{0} &= \delta T^{0}{}_{0} + \left({}^{(0)}T^{0}{}_{0}\right)' (B - E') \\
\left(\delta T^{\rm inv}\right)^{0}{}_{j} &= \delta T^{0}{}_{j} + \left({}^{(0)}T^{0}{}_{0} - \frac{1}{3}\,{}^{(0)}T^{k}{}_{k}\right) (B - E')_{|j} \\
\left(\delta T^{\rm inv}\right)^{i}{}_{j} &= \delta T^{i}{}_{j} + \left({}^{(0)}T^{i}{}_{j}\right)' (B - E')
\end{aligned}$$

A partir dessas quantidades invariantes de calibre, as equações de Einstein perturbadas tomam a forma

$$-3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}\Phi + \Psi'\right) + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{K}\Psi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} a^2 \left(\delta T^{\rm inv}\right)^{0}{}_{0} \tag{1.6}$$

$$\left(\mathcal{H}\Phi + \Psi'\right)_{|j} = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} a^2 \left(\delta T^{\rm inv}\right)^{0}{}_{j} \tag{1.7}$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{K}\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta^{i}{}_{j} - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{|kj} = -\frac{3\ell_{Pl}^2}{2} a^2 \left(\delta T^{\rm inv}\right)^{i}{}_{j} \tag{1.8}$$

onde temos $D = \Phi - \Psi$. Para concluírmos esta análise, ainda falta descrever como se escreve o lado direito das equações, ou seja, precisamos estabelecer como se escrevem os termos invariantes de calibre para as perturbações do tensor energia-momentum no caso de considerarmos o conteúdo material descrito por um campo escalar.

1.0.3 Perturbações com campo escalar

Para completar a descrição das equações para as perturbações, vamos descrever os termos de perturbação para o tensor energia-momento. Estamos considerando que a matéria é descrita por um campo escalar minimamente acoplado à gravitação que pode eventualmente estar sujeito a um potencial $V(\varphi)$.

A ação do campo escalar se escreve

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi - V(\varphi)\right).$$

Para um Universo homogêneo e isotrópico, o campo escalar também deve ser homogêneo e isotrópico uma vez que as simetrias da métrica impõem sobre o tensor energia-momento da matéria que ele seja diagonal e apenas com densidade de energia (${T^0}_0 = \rho$) e pressão isotrópica (${T^i}_j = -p\,{\delta^i}_j$).

Seguindo a maneira de definirmos a perturbação do campo escalar, podemos escrever $\varphi(\eta, x^i) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\eta, x^i)$, onde φ_0 é o valor do campo para a métrica de fundo. Para o caso do campo escalar no calibre temporal de tempo conforme encontramos,

$$\rho = \frac{1}{2a^2}\varphi_0'^2 + V(\varphi_0) \quad , \tag{1.9}$$

$$p = \frac{1}{2a^2}\varphi_0'^2 - V(\varphi_0) \quad . \tag{1.10}$$

Por cálculo direto, encontramos para os termos do tensor energia-momento perturbado

$$\begin{aligned}
\delta{T^0}_0 &= \frac{1}{a^2}\left(-\varphi_0'^2\phi + \varphi_0'\delta\varphi' + a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi\right) \quad , \\
\delta{T^0}_j &= \frac{1}{a^2}\varphi_0'\delta\varphi_{|j} \quad , \\
\delta{T^i}_j &= \frac{1}{a^2}\left(\varphi_0'^2\phi - \varphi_0'\delta\varphi' + a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi\right){\delta^i}_j \quad .
\end{aligned}$$

Novamente, estes termos não são invariantes de calibre. Precisamos então redefinir as perturbações para os campos, $\delta\varphi^{\mathrm{inv}} \doteq \delta\varphi + \varphi_0'(B - E')$, para que as equações dinâmicas relacionem apenas quantidades invariantes de calibre. Em termos dessas variáveis invariantes de calibre, temos

$$
\begin{aligned}
\left(\delta T^{\text{inv}}\right)^{0}{}_{0} &= \frac{1}{a^2}\left(-\varphi_0'^2\Phi + \varphi_0'(\delta\varphi^{inv})' + a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi^{\text{inv}}\right) \quad , \\
\left(\delta T^{\text{inv}}\right)^{0}{}_{j} &= \frac{1}{a^2}\varphi_0'(\delta\varphi^{\text{inv}})_{|j} \quad , \\
\left(\delta T^{\text{inv}}\right)^{i}{}_{j} &= \frac{1}{a^2}\left(\varphi_0'^2\Phi - \varphi_0'(\delta\varphi^{inv})' + a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi^{\text{inv}}\right)\delta^{i}{}_{j} \quad .
\end{aligned}
$$

Note que a parte espacial do tensor energia-momento perturbado é diagonal, $\delta T^{i}{}_{j} \propto \delta^{i}{}_{j}$. Se tomarmos $i \neq j$ na equação (1.8), temos imediatamente que $D = 0 \Longrightarrow \Phi = \Psi$. Para todo tensor energia-momento que não apresente pressão anisotrópica, $\Pi^{\mu\nu} = 0$, ou seja, que a condição $\delta T^{i}{}_{j} \propto \delta^{i}{}_{j}$ seja satisfeita, as perturbações da métrica apresenta apenas um grau de liberdade. Neste caso a métrica perturbada assume a forma,

$$
\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left\{(1+2\Phi)\,\mathrm{d}\eta^2 - (1-2\Phi)\,\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right\}.
$$

Podemos agora estabelecer as equações dinâmicas se levarmos os termos encontrados para o tensor energia-momento perturbado nas equações (1.6)-(1.8). Como trataremos apenas de variáveis invariantes de calibre, por simplicidade notacional, iremos abandonar o índice “inv” nos termos $\delta\varphi^{\text{inv}}$. Para simplificarmos as expressões iremos usar a equação de fundo $\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 - \mathcal{K} = -\frac{3\ell_{Pl}^2}{2}\varphi_0'^2$. O sistema que estabelece a evolução para as perturbações escalares num Universo permeado por um campo escalar com um potencial de auto-interação $V(\varphi)$ é

$$
\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{K}\Phi - \left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\right)\Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2}\left(\varphi_0'\delta\varphi' + a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi\right) \quad , \tag{1.11}
$$

$$
\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2}\varphi_0'\delta\varphi \quad , \tag{1.12}
$$

$$
\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + \left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\right)\Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2}\left(\varphi_0'\delta\varphi' - a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi\right) \quad . \tag{1.13}
$$

Este sistema deve ser completado pela equação de Klein-Gordon perturbada, $\Box\varphi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = 0$. Se usarmos a equação de Klein-Gordon não perturbada para simplificá-la temos então,

$$
\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \nabla^2\delta\varphi + a^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}\delta\varphi - 4\varphi_0'\Phi' + 2a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\Phi = 0 \quad .
$$

Nesta equação, o termo ∇^2 é um objeto geométrico definido com a métrica de fundo. As equações (1.11)-(1.13) podem ser combinadas para gerarmos um equação que só dependa do potencial de Bardeen Φ e de funções do sistema não perturbado. Para isto, basta subtraírmos a eq.(1.13) de eq.(1.11), usarmos a equação de vínculo eq.(1.12) e a equação de Klein-Gordon não perturbada. Esta separação pode ser feita pois a equação de vínculo eq.(1.12) relaciona o potencial de Bardeen Φ e a perturbação do campo escalar $\delta\varphi$, $\delta\varphi = \frac{2}{3\ell_{Pl}^2}\frac{\Phi'+\mathcal{H}\Phi}{\varphi_0'}$, nos mostrando que este sistema possui apenas um grau de liberdade que podemos escolher descrevê-lo através do potencial de Bardeen. Depois destas simplificações, a equação final para a evolução das perturbações assume a forma

$$\Phi'' + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\Phi' - \nabla^2\Phi + 2\left(-2\mathcal{K} + \mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\Phi = 0 \quad . \tag{1.14}$$

É importante notar que para derivarmos esta equação assumimos categoricamente que $\varphi_0' \neq 0$. Caso queiramos estudar sistemas onde, por exemplo, o campo escalar oscile no mínimo de um potencial, como é o caso da fase de pré-aquecimento depois da inflação, não poderemos usar esta equação.

Se aplicarmos uma transformada de Fourier para o espaço dos comprimentos de onda $\vec{k}$, podemos substituir $\nabla^2\Phi$ por $k^2\Phi$, entendido agora que $\Phi = \Phi(\eta, k)$. A equação (1.14) pode ser simplificada por uma mudança de variável Ref.'s [11, 13] definida por

$$u \doteq \frac{2}{3\ell_{Pl}^2(\rho+p)^{1/2}}\Phi = \frac{2}{3\ell_{Pl}}\frac{a^2\theta}{\mathcal{H}}\Phi \quad , \tag{1.15}$$

$$\theta \doteq \frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho+p}\right)\left(1 - \frac{\mathcal{K}}{\ell_{Pl}^2\rho a^2}\right)} \quad . \tag{1.16}$$

Com relação a esta nova variável, a equação para o potencial de Bardeen se escreve como

$$u'' + \left(k^2 - V_u\right)u = 0 \quad , \tag{1.17}$$

onde definimos o potencial V_u e o termo associado à velocidade do som no meio, c_s, por

$$V_u \equiv \frac{\theta''}{\theta} + 3\mathcal{K}(1 - c_s^2) \quad , \tag{1.18}$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = -\frac{1}{3}\left(1 + 2\frac{\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'}\right) \quad . \tag{1.19}$$

A equação (1.17) possui dois limites interessantes. No limite de pequenos comprimentos de onda, $k^2 \gg V_u$, a variável u se comporta como uma onda plana

$$u \propto e^{ik\eta} \quad .$$

No outro limite de longos comprimentos de onda, $k^2 \ll V_u$, temos que o termo do potencial domina. Se neste limite o termo de curvatura puder ser desprezado, ou seja, considerando agora apenas o caso onde podemos fazer $\mathcal{K}=0$, a solução formal para a variável u se escreve Ref.'s [11]-[13]

$$u \approx C_1\,\theta + C_2\,\theta \int \frac{\mathrm{d}\eta}{\theta^2} = \frac{\mathcal{C}\,(k)}{\varphi_0'}\left(\frac{1}{a}\int \mathrm{d}\eta\, a^2\right)' \quad .$$

Neste limite o potencial de Bardeen é escrito como a soma de dois termos,

$$\Phi \approx \frac{\mathcal{C}\,(k)}{a}\left(\frac{1}{a}\int d\eta\, a^2\right)' = \mathcal{C}\,(k)\left(1 - \frac{H}{a}\int \mathrm{d}t\, a(t)\right) \quad . \tag{1.20}$$

Para concluirmos esta seção vamos mencionar que, analisando a equação (1.14), é possível construir uma quantidade conservada para o limite de longos comprimentos de onda Ref.'s [14]-[17] para qualquer um dos casos $\mathcal{K}=\pm 1, 0$. Definindo a variável,

$$\zeta_{BST} \doteq \frac{2}{3}\frac{\mathcal{H}^2\rho}{(\rho+p)\,(\mathcal{H}^2+\mathcal{K})} \times \left\{\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \left[1 - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\right]\Phi\right\} + \Phi \tag{1.21}$$

temos que a sua derivada temporal, usando a equação (1.14) e a equação de Klein-Gordon não perturbada, pode ser escrita como

$$\zeta_{BST}' = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{H}^3\rho}{(\rho+p)\,(\mathcal{H}^2+\mathcal{K})}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\left(\frac{\Phi'}{\mathcal{H}}+\Phi\right) + \frac{3\ell_{Pl}^2}{2}\frac{a^2\tau\delta S}{\mathcal{H}^2}\right] \quad .$$

O termo δS representa a perturbação de entropia. Para um fluido, a pressão é em geral função de duas variáveis termodinâmicas, por exemplo, da densidade de energia e da entropia $p = p\,(\rho, S)$. Se calcularmos a sua encontramos $\delta p = \tau\delta S + c_s^2\,\delta\rho$ onde $\tau \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta S}\right)_\rho$ e $c_S^2 \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta \rho}\right)_S$. Pela definição a partir do tensor energia-momento para um campo escalar, podemos calcular $\delta\rho$ e δp diretamente de suas definições eq.(1.9)-(1.10)

$$\delta\rho = \frac{1}{a^2}\varphi'\delta\varphi' + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi \qquad , \qquad \delta p = \frac{1}{a^2}\varphi'\delta\varphi' - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\delta\varphi \quad .$$

A partir destas expressões, e usando as equações (1.11) e (1.12), podemos calcular a perturbação não-adiabática

$$\tau\delta S = \delta p - c_S^2\delta\rho = \left(1 - c_S^2\right)\left(3\mathcal{K} - k^2\right)\Phi$$

No limite de longos comprimentos de onda, i.e. escalas muito maiores do que o raio de Hubble $\left(\frac{k}{\mathcal{H}} \longrightarrow 0\right)$, e para perturbações adiabáticas $\tau\delta S \longrightarrow 0$, a quantidade ζ_{BST}, definida em (1.21), não varia no tempo. Esta quantidade fornece uma medida da perturbação da métrica de forma independente do folheamento das hipersuperfícies Ref.[18] e é útil para estudarmos o comportamento das perturbações, por exemplo, durante a fase de re-aquecimento onde, baseando-se apenas nesta quantidade conservada, não precisamos nos deter nos detalhes do mecanismo de re-aquecimento. Em termos da perturbação de curvatura, ζ_{BST}, temos que a dependência em k do espectro Ref. [11, 27] é dada por

$$\mathcal{P}_\zeta = k^3 \|\zeta_{BST}\|^2 \tag{1.22}$$

Esta é a definição para calcularmos o espetro de potência do modelo em questão e analisarmos a sua compatibilidade com os dados observacionais advindos da radiação cósmica de fundo.

Capítulo 2

Inflação

"Everything should be made
as simple as possible,
but not simpler."

Atribuída à **Albert Einstein**

2.1 *Motivações*

O início da cosmologia moderna se deu com a publicação do artigo do Einstein em 1917 Ref. [19]. Depois da era mecanicista regida pela Mecânica Newtoniana, a formulação da Teoria da Relatividade Geral permitiu novamente à comunidade científica formular um modelo cosmológico Ref.'s [20, 21]. Até o final da década de 20, devido à escassez de dados observacionais, a cosmologia se baseava principalmente em princípios e preferências filosóficas como o princípio cosmológico que propõe que não haja nenhuma região priveligiada no Universo. A conseqüência imediata deste princípio é a imposição que a métrica que descreve o Universo seja homogênea e isotrópica.

Com a evolução dos instrumentos e técnicas observacionais, em meados do século passado se estabeleceu as propriedades básicas do nosso Universo num cenário aonde a proposta de homogeneidade e isotropia se confirmou observacionalmente juntamente com a estimativa da idade do Universo, através da medição da constante de Hubble e o fato da seção espacial ser muito próxima de plana Ref.'s [22, 23].

A obervação da radiação cósmica de fundo feita por Penzias e Wilson em 1965 mostrou que o Universo deveria de fato ter passado por um período de altas temperaturas e densidades. A evolução dos debates científicos forneceu o que ficou conhecido como o modelo do "Big Bang". Num Universo homogêneo e isotrópico em expansão a métrica pode ser escrita num sistema de coordenadas adequado na forma

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\mathrm{d}t^2 + \frac{a(t)^2}{(1+\mathcal{K}\,r^2/4)^2}[\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2)] \quad ,$$

onde $\mathcal{K} = \pm 1\,, 0$ e a única variável a determinar é o fator de escala $a(t)$, o qual é apenas função do tempo.

Estas simetrias da métrica, quando levadas às equações de Einstein, nos mostram que o conteúdo material do Universo também deve apresentar estas mesmas simetrias, ou seja, ele deve ser descrito por um fluido perfeito. Em linhas gerias, o modelo do "Big Bang" pode ser descrito como um Universo homogêneo e isotrópico em expansão permeado por dois fluidos perfeitos não interagentes. Durante a sua fase inicial a evolução é dominada pelo fluido de radiação seguida por uma fase dominada por poeira (fluido sem pressão).

Este modelo foi extremamente frutífero, conseguindo descrever a evolução em larga escala do Universo. Neste contexto foi possível explicar a concentração de elementos químicos leves, como o hidrogêneo e o hélio através dos processos de nucleossíntese, assim como descrever a formação de estrutura do Universo Ref.'s [24, 25]. É evidente que se o Universo fosse estritamente homogêneo e isotrópico ele não apresentaria nenhuma estrutura como galáxias nem aglomerado de galáxias. Para descrever de forma mais realista o Universo devemos considerar pequenas flutuações com relação a métrica de fundo. Dadas determinadas condições iniciais, o modelo do "Big Bang" é capaz de prever corretamente a evolução dessas perturbações de forma compatível com os dados observacionais. Porém, a questão de como estabelecer as condições iniciais ainda não é bem estabelecida até este ponto. Somando-se ao problema das condições iniciais para as perturbações cosmológicas o modelo do "Big Bang" ainda apresenta algumas questões fundamentais.

Antes de descrever o paradigma inflacionário, vamos listar algumas das questões que fogem do poder explicativo / preditivo do modelo do "Big Bang" no intuito de motivarmos a sua modificação e mostrar que a inflação é capaz de resolver ou minimamente suavizar algumas dessas questões Ref.'s [26, 27]. Vamos então enumerá-las:

1. **Condições iniciais para as perturbações cosmológicas**.

   Como já mencionado anteriormente, se utilizarmos o espectro da radiação cósmica de fundo (CMB) para estabelecermos as flutuações na densidade de matéria no Universo, o modelo do "Big Bang" é capaz de reproduzir a evolução da formação de estrutura em largar escala. É natural supormos que este espectro da CMB tenha advindo de processos físicos e assim podemos nos questionar qual deva ter sido essa evolução e a partir de quais outras condições iniciais.

   É notório que a inflação suaviza este problema em pelo menos dois sentidos. Primeiramente, o período inflacionário amplifica o comprimento de onda físico das perturbações tornando possível que perturbações locais antes da fase inflacionária sejam responsáveis pelas perturbações na escala de galáxias e aglomerados de galáxias. Além disso, a origem dessas perturbações é geralmente dada por flutuações de um campo quântico que tem como condição inicial o seu estado de vácuo.

   O problema do estabelecimento das condições iniciais para o Universo só será definitivamente resolvido se conseguirmos construir uma teoria de condições iniciais que nos permita derivar essas condições a partir de princípios fundamentais. Porém, em geral, certas condições iniciais são consideradas mais ou menos naturais de forma que acredita-se que há de fato um ganho ao conseguirmos explicar a evolução de um dado sistema tendo como condição inicial, por exemplo, a condição de vácuo para um campo físico.

2. **Problema do Horizonte de partícula**.

   As geodésicas radiais para fótons num Universo com $\mathcal{K} = 0$ são dadas simplesmente por $c\,\mathrm{d}t = a(t)\mathrm{d}r$. Podemos nos perguntar qual será a distância coordenada percorrida por um fóton entre dois intervalos de tempo t_0 e t_1, ou seja,

   $$\Delta r = \int_{t_0}^{t_1} \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)}$$

   No modelo do "Big Bang", a extrapolação para o passado nos leva a uma singularidade que pode ser feita coincidir com a origem temporal. Assim podemos nos perguntar se a integral acima converge ou diverge quando a extrapolamos para $t_0 = 0$. Caso ela convirja temos então um modelo de Universo com horizonte de partículas.

A presença de um horizonte de partículas nos diz que existem regiões do Universo que ainda não entraram em contato causal, e o valor numérico calculado pela definição acima nos fornece uma estimativa de qual é o raio máximo das regiões causalmente conectadas. Se o Universo for permeado por radiação e poeira, como é o caso do modelo do "Big Bang", na época anterior a nucleossíntese é a radiação que domina, ou seja, $a(t) \sim t^{1/2}$ e vemos assim que a integral acima de fato converge.

O problema do horizonte pode ser entendido da seguinte forma: a distância física percorrida por um pulso luminoso no intervalo de zero a t_{des}, onde t_{des} é o momento do desacoplamento, é dada por

$$l(t) = a(t).\Delta r = a(t_{\text{des}}).\int_0^{t_{\text{des}}} \frac{c\,\mathrm{d}t'}{a(t')} = \frac{a(t_{\text{des}})}{a_0}.\int_0^{t_{\text{des}}} \frac{c\,\mathrm{d}t'}{t'^{1/2}} = 2\,ct_{\text{des}}.$$

Se calcularmos qual era o volume do Universo observado hoje no instante do desacoplamento, ou seja, se propagarmos para o passado o volume do Universo observado hoje encontramos um valor maior do que o calculado acima. Isto nos diz que no momento do desacoplamento o Universo observado hoje ainda não tinha tido tempo suficiente para entrar em contato causal e desta forma a homogeneidade e isotropia encontrada na CMB não pode ser explicada por nenhum mecanismo físico.

3. **Problema da Planeza**.

As seções espaciais são extremamente próximas de serem planas, porém a condição $\Omega = 1$ é instável, onde Ω é o parâmetro de densidade definido por $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ onde ρ_c é a densidade crítica hoje. Num Universo de FLRW, a equação de Friedmann nos fornece

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Omega - 1\| = -2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3} \quad .$$

Para um Universo em expansão desacelerada temos que este termo acima é sempre positivo, ou seja, o parâmetro de densidade sempre se afasta do valor 1. Hoje em dia o Universo é observado muito próximo do plano ($\Omega = 1$), o que implica que na época de Planck, quando esperamos começar a encontrar desvios do modelo padrão, este parâmetro deveria ser extremamente próximo do plano, tão próximo quanto 1 parte em 10^{56}! É evidente que o caso plano ($\mathcal{K} = 0$) satisfaz esta condição mas de qualquer forma teríamos que explicar porque dentre todos os valores possíveis temos como condição uma classe de medida nula como o caso plano.

4. **Origem da expansão**.

   O modelo padrão descreve o Universo em expansão porém não nos fornece nenhum tipo de explicação possível. Note que esta divergência das linhas de congruência são contrárias ao efeito atrativo da gravitação. O melhor que pode ser dito é que o Universo está se expandindo pois assim o fez no passado Ref. [28].

   Para elucidarmos a fraqueza de tal argumento podemos compará-lo, por exemplo, com a trajetória de uma bala de canhão. Ao observá-la em movimento pelo ar, poderíamos afirmar que ela se movimenta pois já possuía velocidade anteriormente, porém nenhuma informação relevante é extraída a menos que consigamos explicar o mecanismo causador do movimento inicial (no caso da bala de canhão o mecanismo é obviamente a explosão da pólvora).

5. **Problema da homogeneidade**.

   O Universo observado hoje é, em larga escala, homogêneo e isotrópico. Se olharmos para o espaço de todas as soluções possíveis das equações de Einstein percebemos que as soluções homogêneas[1] formam um sub-conjunto de medida nula, ou seja, se não houver nenhum princípio ou regra de seleção para privilegiarmos classes de soluções, as soluções homogêneas têm probabilidade zero de acontecer!

   Na realidade, a homogeneidade surgiu na literatura baseada no princípio cosmológico que propõe uma equivalência entre todas as regiões do Universo, ou seja, o Universo é homogêneo por princípio. No entanto, enunciar um princípio não modifica em nada o fato do Universo apresentar esta simetria tão particular.

   Para resolver esta questão, precisaríamos de uma nova teoria que explicasse essa preferência uma vez que a Relatividade Geral não distingue, ou melhor, não privilegia nenhuma de suas soluções. Uma outra possibilidade é explicarmos a homogeneidade por algum processo físico, como por exemplo a homogeneização de um gás numa caixa isolada pelo aumento de sua entropia. De fato, propor uma métrica específica sem nenhuma teoria de base vai contra as próprias idéias de que uma teoria espaço-temporal não deva apresentar objetos absolutos como havia proprosto Einstein Ref.[29].

[1] Me concentrei apenas na homogeneidade pois é possível pensarmos em mecanismos dinâmicos para explicarmos a isotropia para Universos em expansão desde que eles sejam homogêneos.

6. **Assimetria entre bárions e anti-bárions**.

O modelo padrão de partículas elementares nos diz que o número de bárions é um número quântico (uma quantidade conservada). Além disso sabemos que para energias superiores à massa do próton, um sistema em equilíbrio deve apresentar uma mesma quantidade de fótons, bárions e anti-bárions. No entanto, a fração do número de bárions e fótons hoje em dia é da ordem de $N_p/N_\gamma \sim 10^{-9}$ enquanto que $N_{\bar{p}} \approx 0$.

O excesso de fótons pode ser explicado pelo aniquilamento entre bárions e anti-bárions, aumentando a quantidade de fótons, porém, não é evidente como deve ter sido gerada esta assimetria entre bárions e anti-bárions.

Esta assimetria entre o número de bárions e anti-bárions requer pelo menos três condições que são conhecidas na literatura como regras de Sakharov Ref.[30, 31]:

(a) Violação de N_p: o número de bárions não ser de fato um número quântico.

(b) O sistema esteja fora do equilíbrio de forma que $N_p \neq N_{\bar{p}}$.

(c) Termos violação das simetrias CP e C ao mesmo tempo.

7. **Singularidade inicial**.

Um evento como a singularidade inicial do modelo do "Big Bang" está claramente fora do escopo de qualquer teoria física desenvolvida até o momento. Esta aberração serve como um limite intransponível para a nossa descrição causal, sendo assim delegada ao filósofos, teólogos ou metafísicos.

Desde os ano 60 vem se mostrando que é uma propriedade da teoria da Relatividade Geral apresentar singularidades em suas soluções, sejam elas soluções cosmológicas, como os modelos de FLRW, ou de sistemas gravitacionais, como os buracos negros Ref.[52, 53]. Ao invés de ser considerada como uma necessidade teórica, como se tentou mostrar com os teoremas de singularidade, a presença da singularidade deve ser encarada como um sinal de que estamos extrapolando a teoria a um regime em que ela não é mais válida.

Qualquer proposta que contorne esta dificuldade deve ser tomada como uma tentativa de criarmos meios coerentes de extrapolarmos o limite imposto pelas singularidades. Num contexto cosmológico, isto se traduz em considerarmos apenas modelos não singulares para a evolução do Universo.

2.2 *Propriedades Gerais*

Os modelos inflacionários surgiram numa tentativa de resolver algumas das questões levantadas na seção anterior. Em especial podemos ressaltar o problema do horizonte e o problema da planeza.

Lembrando a fórmula para calcularmos o horizonte de partículas, percebemos que para que a integral divirja próxima da horigem temporal é necessário que o fator de escala cresça com potencial maior do que 1, ou seja, $a(t) \sim t^\alpha$ com $\alpha > 1$. Em outras palavras, a expansão do Universo deve acontecer "mais rápida" do que a velocidade da luz. Se a evolução do Universo for dominada por um fluido perfeito temos que a equação de estado deste fluido deve ser do tipo $p = w\rho$ com $w < -1/3$.

Esta equação de fluido com pressão negativa, ao contrário do que aparenta, pode ser interpretada fisicamente. Se considerarmos, por exemplo, campos escalares massivos ou auto-interagentes, a presença de um potencial pode fornecer uma pressão negativa, ou de outra forma, dois fluidos interagentes cada um com equação de estado respeitando $p_i > 0$ pode também fornecer uma pressão efetiva negativa.

É interessante observar que esta equação de estado também resolve outro problema enumerado acima. Pelas equações de Einstein vemos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\ell_{Pl}^2}{2}\left(\rho + 3p\right),$$

de forma que se $w < -1/3$ temos que esta fase será caracterizada por uma expansão **acelerada** ($\ddot{a} > 0$). Se esse período for longo o suficiente poderemos explicar o fato das seções espaciais serem tão próximas do plano uma vez que o parâmetro de densidade se aproximará, ao invés de se afastar, de 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Omega - 1\| < 0 \quad .$$

Podemos estimar quanto tempo deverá durar o período de inflação para resolver este problema da planeza. De acordo com os dados do WMAP Ref.[54], a planeza das seções espaciais colocam limites no parâmetro de densidade de forma que $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$, onde o sub-índice se refere ao valor hoje. Se propagarmos esta restrição até o momento da nucleossíntese encontramos que $\|\Omega - 1\|_{\mathrm{nucl}} < 10^{-56}$. Suponha que num momento inicial $\|\Omega - 1\|_i \sim 1$ e que iremos parametrizar o fator de escala num tempo posterior a partir de $a_f = e^N a_i$. Considerando um crescimento exponencial, podemos calcular o quanto o fator de escala deve crescer a partir da razão

$$\frac{\|\Omega - 1\|_i}{\|\Omega - 1\|_f} = \frac{H^2 a_f^2}{H^2 a_i^2} = 10^{56} \longrightarrow N = 28 \times \ln(10) \approx 65 \quad .$$

Vemos assim que o número mínimo de "e-fold"[2] deve ser $N = 65$ para que $\|\Omega - 1\|$ se aproxime tanto de zero de forma a satisfazer os vínculos observacionais atuais.

Uma questão importante a ser analisada é como se processa o término do período de inflação. As duas fases subseqüentes a uma possível fase inflacionária são respectivamente uma fase dominada por radiação e a outra por poeira. Estas duas fases são caracterizadas por uma expansão desacelerada, ou seja, não importa qual seja o mecanismo que gere a aceleração, ela deverá terminar antes mesmo da nucleossíntese. Notamos assim que a constante cosmológica não pode ser a responsável pela aceleração durante o período de inflação pois, caso contrário, não seria possível sair do regime de expansão tipo de Sitter.

Durante a década de 60, quando foram articulados pela primeira vez os problemas do horizonte e da planeza, uma possível solução para estes problemas parecia necessariamente muito artificial. Com o advento da física de altas energias e sobretudo com a descrição de transição de fase ao se passar de regimes de altas para baixas energias, foi possível construir modelos inflacionários cujas condições eram passíveis de transitar de um regime acelerado para um desacelerado conectando-se assim ao modelo do "Big Bang", Ref.'s [32, 33].

Após esta análise geral sobre as propriedades dos modelos inflacionários, vamos analisar alguns casos específicos.

2.3 *Modelos Típicos*

O paradigma inflacionário pode ser considerado como o requerimento de uma fase de expansão acelerada, $\ddot{a} > 0$, suficientemente longa de forma que o fator de escala cresça muitas ordens de grandeza. Para melhor situarmos essas teorias, vamos descrever brevemente alguns

[2]Este termo é utilizado para dizer que a cada "e-fold's" o valor do fator de escala cresce de forma que o seu valor final é igual ao seu valor inicial multiplicado e^1.

modelos capazes de gerar esta fase inflacionária.

2.3.1 Modelo original

Embora a idéia de uma fase de expansão exponencial, que é a característica fundamental dos modelos inflacionários, já estivesse sendo explorada Ref.'s [41]-[43], o primeiro modelo inflacionário construído a partir das teorias de altas energias foi proposto por Guth em 1981 Ref. [44].

A sua proposta original descreve um campo fundamental que sofre uma transição de fase de primeira ordem passando de um falso vácuo para um vácuo verdadeiro. A diferença de energia entre estes dois vácuos é liberada em forma de calor latente, $V \sim T^4$, elevando a temperatura do meio material do Universo primordial (re-aquecimento).

Este modelo sofre de alguns problemas, como por exemplo a excessiva formação de irregularidades da densidade pelo processo de nucleação, o fato de não haver um mecanismo natural para o término da inflação, além do ajuste fino nas condições iniciais do sistema. O ajuste fino é necessário para mantermos o campo fundamental no falso vácuo mesmo quando o sistema se encontrando a uma temperatura T_{GUT}[3], o que geraria perturbações térmicas sobre o mesmo.

Depois do abandono da proposta de Guth devido as suas dificuldades, as iniciativas de Linde Ref.'s [34, 35] e de Albrecht e Steinhardt Ref. [36] propõem uma modificação neste modelo onde a teoria de campo escalar sofre uma transição de segunda ordem, diferentemente do caso anterior que apresentava uma transição de primeira ordem. O problema com esta proposta, que é conhecida com o nome de nova inflação, é ainda o ajuste fino necessário para gerar uma fase inflacionária suficientemente longa.

Embora a idéia original tenha sido inteiramente baseada na física de partículas e em teorias de grande unificação, a possibilidade de resolver os problemas da planeza e da homogeneidade gerou motivação suficiente para que os cosmólogos persistissem com a idéia fundamental deste modelo, embora procurando outros mecanismos capazes de gerar esta fase inflacionária. Note que qualquer campo escalar, estando no estado de vácuo com densidade de energia diferente de zero, é capaz de gerar inflação.

[3]GUT é um acrônimo em inglês para teoria de grande unificação

2.3.2 Inflação caótica

Ainda motivado pelas características dos modelos inflacionários, Linde sugere uma nova modificação no modelo com o intuito de mostrar que a propriedade de gerar uma fase inflacionária é uma propriedade genérica e de certa forma quase inevitável de qualquer modelo Ref. [45]. A inflação caótica difere principalmente das anteriores pelo fato de não requerer condições iniciais tão restritas para o campo escalar nem para o potencial. Na realidade, a configuração do campo escalar logo após o tempo de Planck, ou seja, assim que o sistema comece a se comportar classicamente, deve apresentar todos os valores possíveis. A única restrição advém justamente da energia não ser alta o suficiente para não termos que tratar o sistema com uma descrição quântica.

Nesta configuração, em pelo menos uma região maior ou da ordem do comprimento associado à escala de auto-reprodução do modelo $\left(m_{gr}^{-1}\right)$, as condições para se gerar inflação são satisfeitas, como por exemplo o valor do campo ser alto o suficiente a ponto de podermos desprezar as suas variações tanto temporais quanto espaciais, $\sqrt{\partial_0\varphi\partial^0\varphi} \sim \nabla\varphi \sim m_{pl}^2 \ll \varphi_0$. Linde argumenta que neste momento o Universo deve apresentar um número infinito destas regiões para uma grande classe de teorias. Uma vez acionada estas condições iniciais, cada uma destas regiões irá se expandir exponencialmente gerando todos os efeitos desejados para explicarmos a homogeneidade e a planeza das seções espaciais. Note, porém, que agora o Universo como um todo não é homogêneo nem isotrópico. A inflação caótica propõe um mecanismo que homogeniza apenas o Universo observável, além do raio de Hubble o Universo deve ser altamente heterogêneo e anisotrópico.

Com relação a este raciocínio, vale a pena fazermos duas ressalvas: mesmo que a distribuição de matéria e energia seja homogênea e isotrópica isto não implica na métrica ser homogênea e isotrópica. Para determinarmos a métrica, além do tensor de Ricci que é determinado pelo tensor energia-momento, precisamos especificar o tensor de Weyl o qual não pode ser determinado pela distribuição da matéria e energia do Universo. A outra objeção relaciona este raciocínio com o princípio antrópico. O argumento de Linde explora o fato de haver um número infinito de regiões com as condições necessárias para gerar uma fase inflacionária, porém, isto não diminui a estranheza de nosso Universo observável ser exatamente uma destas regiões. Note que, embora haja um número infinito, estas regiões não são as mais prováveis. Para que este argumento seja válido, precisamos acrescentar que apenas em Universos homogêneos e isotrópicos é possível encontrarmos as condições necessárias para se criar vida humana.

Voltemos para a análise da inflação caótica. Suponha que tenhamos, por exemplo, um modelo de inflação com potencial $V(\varphi) \sim \varphi^n$. Se as condições acima requeridas, $\left(\dot{\varphi}^2, (\nabla\varphi)^2 \ll V\ ;\ \ddot{\varphi} \ll \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}\right)$, forem satisfeitas, a equação de Klein-Gordon e a de Friedmann para este sistema se escrevem

$$H^2 \approx \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\varphi) \quad ,$$
$$3H\dot{\varphi} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} \approx 0 \quad ,$$

onde desprezamos o termo de curvatura pelo fato de nestas condições o fator de escala crescer exponencialmente. Considerando um potencial em lei de potência e usando estas equações encontramos

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{n^2 m_{pl}^2}{48\pi\varphi^2} V \quad .$$

A condição $\dot{\varphi}^2 \ll V$ implica em $\varphi \gg \frac{n}{4\sqrt{3\pi}} m_{pl}$. Para o caso $V = \frac{\lambda}{4}\varphi^4$ temos, nesta aproximação, $\varphi \approx \varphi_0\, e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_{pl}\, t}$.

O tempo para que o campo escalar varie apreciavelmente é $\Delta t = \frac{1}{m_{pl}}\sqrt{\frac{6\pi}{\lambda}}$. Lembrando que $H \approx \sqrt{\frac{8\pi}{3m_{pl}} V}$, vemos que para que tenhamos um número suficiente de "e-fold's", i.e. $H\Delta t \sim 65$, temos que ter $\lambda \sim 4.10^{-2}$.

No entanto, da mesma forma que para o caso do modelo de Guth, as perturbações de densidade $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$ são muito mais restritivas requerendo que $\lambda \sim 10^{-12}$ (Ref. [47]).

Uma derivação dos modelos caóticos são os chamados modelos estocásticos ("stochastic inflation") Ref.'s [37, 38]. A inflação estocástica pode ser entendida como a implementação de uma dinâmica estocástica quântica a um modelo de inflação caótica. Nestes modelos inflacionários, as condições necessárias para gerar a inflação são continuamente realizadas para alguma região do Universo. Ao contrário dos modelos caóticos, os modelos estocásticos levam em consideração as flutuações de vácuo do campo escalar de forma que, recorrentemente, e não apenas logo depois a era de Planck, novos mini-Universos são continuamente criados.

Este processo não cessa, ou seja, o modelo é do tipo estado estacionário ("steady-state") onde regiões homogêneas e isotrópicas são continuamente desenvolvidas.

2.4 *Espectro de Potência*

Apesar dos diferentes tipos de modelos inflacionários que podemos encontrar na literatura, uma característica geralmente compartilhada por todos esses modelos é a expansão exponencial do fator de escala. É comum supor que, durante esta fase, o campo escalar e seu potencial satisfaçam algumas propriedades de forma a garantir o crescimento quase-exponencial do fator de escala. De uma maneira geral, é preciso que o campo escalar possua uma equação de estado efetiva de forma que $p \approx -\rho$. Esta condição é atingida caso possamos desprezar tanto as variações espaciais quanto as temporais do campo escalar frente ao valor do potencial $V(\varphi)$. Como uma medida deste regime, costuma-se definir os chamados parâmetros de deslizamento lento ("slow-row parameters"), que medem justamente o quão pequeno é o desvio desta condição. Definimos então os parâmetros

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta \equiv -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} \quad , \tag{2.1}$$

Em termos destes parâmetros, a equação de evolução para a variável associada à perturbação v, nesta aproximação, se escreve Ref. [39],

$$v'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2}\left(2 + 6\epsilon - 3\delta\right)\right] v = 0 \quad ,$$

onde o prima significa derivada com relação ao tempo conforme que é definido por $\eta = \int a^{-1} \mathrm{d}t \approx -\left(1+\varepsilon\right)\left(Ha\right)^{-1}$. Esta equação admite como solução as funções de Bessel

$$v\left(\eta, k\right) = \sqrt{k\eta}\left[D_1\left(k\right) J_{\nu}\left(k\eta\right) + D_2\left(k\right) J_{-\nu}\left(k\eta\right)\right] \quad ,$$

onde $\nu = -\frac{3}{2} - 2\varepsilon + \delta$.

Em geral, os modelos de inflação tomam como condição inicial para o campo escalar um estado de vácuo. Isto só é possível pois neste momento o potencial para as perturbações se torna desprezível. Quando o fator de escalar tende a zero, caso o fator de Hubble não divirja, o tempo conforme $\eta \approx -(aH)^{-1}$ diverge, i.e. $V_v \to 0$ e $k^2 \gg V_v$. Isto é equivalente a afirmar que a escala de comprimento das perturbações é muito menor do que a escala de curvatura dada pelo inverso da raiz quadrada do escalar de Ricci. A curvatura não sendo relevante, tudo se passa como se estivéssemos no espaço-tempo de Minkowski. Nestas condições a solução para v se escreve

$$v = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-ik(\eta - \eta_{\text{ini}})} \qquad .$$

O campo escalar é tratado quanticamente enquanto que o fator de escalar se comporta classicamente. Este tratamento semi-clássico considera o tensor energia-momento como um valor esperado do campo quântico e por isso o fator de normalização $\sqrt{k}$.

Para conectarmos essas duas soluções precisamos utilizar o comportamento assintótico das funções de Bessel Ref.[46]

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad x \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right] \quad x \longrightarrow -\infty \quad .$$

O limite $k^2 \gg V_v$ equivale a tomarmos o limite $k\eta \longrightarrow -\infty$. Neste limite, igualando as funções de Bessel com a solução de vácuo, temos

$$\frac{D_1}{D_2} = -e^{i\pi\nu} \qquad , \qquad D_1 = \frac{2i\pi}{\sqrt{k}} \frac{exp\left(ik\eta_{\text{ini}} + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin[\pi\nu]} \qquad .$$

No limite outro $k^2 \ll V_v$ $(k\eta \longrightarrow 0)$ a solução de v se escreve

$$v = D_1(k) \left[\frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{k\eta}{2}\right)^{\nu+1/2} + \frac{e^{i\pi\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{k\eta}{2}\right)^{-\nu+1/2}\right] \qquad .$$

Como o índice da função de Bessel é negativo, $\nu < 0$, e $\eta \approx H^{-1}e^{-Ht}$, podemos desprezar o segundo termo. Levando em conta a expressão de ν e que $D_1 \propto k^{-1/2}$ temos que

$$v \propto k^{-3/2-2\epsilon+\delta} \qquad .$$

Neste regime, quando o potencial de Bardeen é constante, eq.(1.20), a dependência em k de $v(k)$, $\Phi(k)$ e de $\zeta(k)$ é a mesma, ou seja, $\zeta \propto k^{-3/2-2\epsilon+\delta}$. Vemos assim que, para grandes comprimentos de onda e se as perturbações de entropia puderem ser desprezadas de forma que ζ seja uma quantidade conservada durante o processo de re-aquecimento, o espectro de potência para as perturbações deve ser quase invariante de escala, ou seja,

$$\mathcal{P}_\zeta \propto k^3 \|\zeta\|^2 \propto k^{n_S-1} \propto k^{-4\epsilon+2\delta} \quad ,$$

onde definimos o índice espectral escalar,

$$n_S \equiv 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \ln\ k} \ln\left(\mathcal{P}_\zeta\right) = 1 + 2\delta - 4\epsilon \quad .$$

2.5 *Problemas do Paradigma Inflacinonário*

Para concluir esta seção sobre algumas das propriedades gerais do paradigma inflacionário, vamos salientar algumas das dificuldades principais que esses modelos geraram ou não conseguiram resolver Ref.'s [47]-[49].

1. **Amplitude das flutuações de densidade**.

   Os modelos de inflação baseados em potenciais para campos escalares geralmente prevêem uma amplitude para as flutuações de matéria na época do desacoplamento muito elevada Ref. [50]. Os dados medidos da anisotropia da CMB e os valores atuais para as densidades do desvio da homogeneidade nas escalas de aglomerados de galáxias nos fornecem um limite para as flutuações de massa, para uma dada escala caracterizada por um comprimento de onda k no momento em que ela cruza o raio de Hubble, da ordem de 10^{-5}. Para satisfazer este vínculo é necessário que os parâmetros que definem o potencial de auto-interação do campo escalar sejam muito pequenos. Se por exemplo a inflação fosse acionada por um único campo escalar com um potencial do tipo $\lambda\varphi^4$, teríamos que ter $\lambda < 10^{-12}$. Até o momento ainda não há nenhuma base teórica que nos permita explicar um valor tão específico.

2. **Problema Trans-Planckiano**.

   Um dos efeitos de todos os modelos inflacionários é a amplificação das perturbações de escalas microscópicas para escalas cosmológicas. No entanto, muitos modelos duram tanto tempo no período de expansão acelerada que se olharmos retroativamente, a contração dos comprimentos de onda físicos atualmente observados é tão intensa que eles seriam menores do que o comprimento de Planck. O paradigma inflacionário se vale de um tratamento semi-clássico, com a gravitação sendo descrita essencialmente pela Relatividade Geral (teoria clássica), o que lança sérias dúvidas sobre a válidade de sua aplicação Ref. [51]. Para comprimentos de onda menores do que o comprimento de Planck, precisamos de uma teoria quântica da gravitação para podermos consistentemente estabelecer as condições iniciais neste regime.

3. **Problema da Singularidade**.

   Nos modelos convencionais, a singularidade inicial não é eliminada pela fase inflacionária. Apesar do fluido apresentar equação de estado que viole as condições de validade dos teoremas de singularidade desenvolvidos por Penrose e Hawking Ref. [52], pode-se mostrar que a singularidade ainda persiste Ref. [55]. Da mesma forma, mesmo num regime semi-clássico aonde a função de onda do Universo é descrita por um pacote em torno de uma solução WKB, não se consegue tampouco eliminar a singularidade. Neste caso, o valor esperado do fator de escala apresenta variações da evolução clássica, porém segue inevitavelmente para a singularidade desde que a aproximação seja válida até o final.

   No entanto, a singularidade não é inevitável, e, de fato, como mostraremos nesta tese, é possível construirmos modelos não singulares.

Concluímos assim esta breve revisão sobre as características gerais dos modelos inflacionários. As questões aqui levantadas servem como motivação e cautela para a análise subsequente.

Referências Bibliográficas

[1] S. W. Hawking, The Astrophysical Journal **145**, 544 (1966).

[2] G. F. Ellis e M. Bruni; Physical Review **D40**, 1804 (1989).

[3] G. F. Ellis, J. Hwang, e M. Bruni; Physical Review **D40**, 1819 (1989).

[4] J. M. Salim; tese de doutorado *"Equações quase-maxwellianas da gravitação"*, CBPF (1982).

[5] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, e R. Klippert; Physical Review **D51**, 450 (1995).

[6] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, e R. Klippert; Physical Review **D52**, 730 (1995).

[7] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger, Physics Reports **215**, 203 (1992).

[8] J. Bardeen, Bull. Am. Astron. Soc. **73** (1968).

[9] J. Bardeen, Physical Review D **22**,1882 (1980).

[10] M. Novello; **"Cosmologia Relativística"**, II BSCG vol.1, 203 (1979) - disponível no endereço $http://www.cbpf.br/\%7Ecosmogra/Escolas/ind\_cosmologia\_classica.html$

[11] P. Peter e J. P. Uzan; *"Cosmologie primordiale"*, ed. Belin (2005).

[12] J. Martin, P. Peter; Physical Review **D68**, 103517 (2003).

[13] V. Mukhanov; *"Physical Foundations of Cosmology"*, ed. Cambridge University Press (2005).

[14] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 679 (1983).

[15] J. A. Frieman and M. S. Turner, Phys. Rev. D **30**, 265 (1984).

[16] R. Brandenberger and R. Kahn, Phys. Rev. D **29**, 2172 (1984).

[17] D. H. Lyth, Phys. Rev. D **31**, 1792 (1985).

[18] J. Martin e D. J. Schwarz; Physical Review **D57**-6, 3302 (1998).

[19] A. Einstein; artigo:"Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie" em *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Weissenschaften* (1917).

[20] J. Merleau-Ponty; *"La science de l'univers a l'âge du positivisme"*, ed. Vrin (1983).

[21] A. Koyré; *"Du monde clos à l' univers infini"*, ed.Gallimard (1973).

[22] S. Dodelson; *"Modern cosmology"*, ed. Academic Press (2003).

[23] P. J. E. Peebles; *"Physical cosmology"*, ed. Princeton University Press (1971).

[24] T. Padmanabhan; *"Structure Formation in the Universe"*, ed. Cambridge University Press (1993).

[25] E. W. Kolb e M. S. Turner; *"The early universe"* / Edward W. Kolb, ed. Addison-Wesley Publishing Company (1993).

[26] P. Coles, F. Lucchin, *"Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure"*, ed. John Wiley & Sons (2002).

[27] J. A. Peacock; *"Cosmological physics"*, ed. Cambridge University Press (1999).

[28] J. Leslie; **"Modern Cosmology & Philosophy"**, ed. Prometheus Books (1999).

[29] J. L. Anderson; *"Principles of Relativity Physics"*, ed. Academiei Republicii Socialiste Romania (1967).

[30] M. Dine, Review of Modern Physcis **76**, 1 (2004).

[31] A. D. Sakharov, JETP Lett. **6**, 24 (1967).

[32] B. A. Basset, S. Tsujikawa e D. Wands; Review of Modern Physics **78**, 537 (2006).

[33] Andrei D. Linde; *"Inflationary and quantum cosmology"*, ed. Academiei Republicii Socialiste Romania (1990).

[34] A. D. Linde; Physics Letters **B108**, 389 (1982).

[35] A. D. Linde; Physics Letters **B116**, 335 (1982).

[36] A. Albrecht and P. J. Steinhardt Physical Review Letters **48** 1220 (1982).

[37] D. S. Salopek, J. R. Bond; J. M. Bardeen Physical Review **D40**, 1753 (1989).

[38] D. S. Salopek, J. R. Bond; Physical Review **D43**, 1005 (1991).

[39] J. Martin, D. J. Schwarz Physical Review **D62**, 103520 (2000).

[40] D. J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, and A. A. García, Physics Letters **B517**, 241 (2001).

[41] A. A. Starobinsky; JETP Letters **30**, 682 (1979).

[42] A. A. Starobinsky; Physics Letters **91B**, 99 (1980).

[43] V. Mukhanov e G. Chibisov; JETP Letters **33**, 532 (1981).

[44] Alan H. Guth; Physical Review **D23** n-2, pag. 347 (1981).

[45] A. D. Linde; Physics Letters **B129**, 177 (1983).

[46] M. Abramowitz e I. A. Stegun; *"Handbook of Mathematical Functions"*, ed. National Bureau of Standarts (1964).

[47] R. H. Brandenberger arXiv: **hep-ph/ 0101119** (2001).

[48] R. Wald; General Relativity and Gravitation **34** 2043 (2002).

[49] R. H. Brandenberger; arXiv: **astro-ph/0208103** (2002).

[50] F. Adams, K. Freese and A. Guth; Physical Review **D43**, 965 (1991).

[51] J. Martin, R. H. Brandenberger, Physical Review **D63**, 123501 (2001).

[52] S. W. Hawking e F. R. George Ellis; *"Large Scale Structure of Space-Time"*, ed. Cambridge University Press (1984).

[53] M. Bojowald; arXiv: **gr-qc/0702144** (2007).

[54] D. N. Spergel et al.; The Astrophysical Journal Supplement Series **170**, 377 (2007).

[55] A. Borde and A. Vilenkin; Physical Review Letters 72, 3305 (1993).