

Hamiltoniana da Relatividade Geral*

FELIPE TOVAR FALCIANO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RUA DR. XAVIER SIGAUD 150, RIO DE JANEIRO - RJ

* Texto extraído da Tese de doutorado defendida em Março de 2008.

Sumário

1	Fundamentação Teórica	3
1.1	<i>Sistemas Hamiltonianos Vinculados</i>	3
1.1.1	Número finito de graus de liberdade	3
1.1.2	Extensão para campos clássicos	7
1.1.3	Quantização de sistemas vinculados	13
1.2	<i>Formulação Hamiltoniana da TRG</i>	16
1.2.1	Folheamento da variedade com hipersuperfícies tipo espaço	16
1.2.2	Formalismo ADM da Relatividade Geral	20
1.2.3	Hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral	23
1.3	<i>Teoria Linear de Perturbações Cosmológicas</i>	28
1.3.1	Formalismo	28
1.3.2	Perturbações escalares	31
1.3.3	Perturbações com campo escalar	35
	Bibliografia	40

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

*“O Universo (que outros chamam a Biblioteca)
compõe-se de um número indefinido, e talvez infinito,
de galerias hexagonais...”*
- A Biblioteca de Babel -
Jorge Luis Borges

1.1 *Sistemas Hamiltonianos Vinculados*

1.1.1 Número finito de graus de liberdade

Na tentativa de construir uma formulação hamiltoniana para a Teoria da Relatividade Geral, devido ao fato de ser uma teoria invariante por reparametrizações arbitrárias de coordenadas, surgem naturalmente vínculos entre as variáveis canônicas. Desta maneira, se faz necessário estudar o método desenvolvido por P.A.M Dirac Ref. [1], no início da década de 50, para tratar sistemas hamiltonianos vinculados.

Apesar do formalismo hamiltoniano ser completo, no sentido de ser equivalente e independente do formalismo lagrangiano, é comum construí-lo a partir de uma lagrangiana. Seguiremos este mesmo caminho.

Estamos interessados em casos onde os momenta não são todos funções independentes das velocidades generalizadas. Desta forma surgem naturalmente vínculos que são traduzidos em

equações relacionando as coordenadas e os momenta

$$\phi_m(q, p) = 0. \quad (1.1)$$

Estas equações são chamadas de vínculos primários¹ (terminologia usada pelo próprio Dirac), ou seja, os vínculos oriundos da própria definição dos momenta ($p \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$). Daqui a pouco definiremos precisamente a diferença entre vínculos primários e secundários.

Devido aos vínculos (1.1) a hamiltoniana definida por

$$H(q, p) \doteq [p\dot{q} - L(q, \dot{q})]_{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$$

deve ser acrescida das equações de vínculos para garantirmos a validade dos mesmos. De fato, é necessário modificar a hamiltoniana para

$$H^* = H + C_m \phi_m,$$

onde em geral os coeficientes C_m podem ser funções arbitrárias dos q 's e dos p 's. Eles nada mais são do que os multiplicadores de lagrange associados a cada vínculo. Impondo que a variação da ação com relação a esses coeficientes se anule, garantimos a validade das equações de vínculo.

As equações de movimento para o sistema hamiltoniano precisam ser generalizadas, Ref. [1], para:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (1.2)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}, \quad (1.3)$$

onde os u_m 's são desconhecidos.

Uma função arbitrária $g(q, p)$ tem a sua evolução temporal descrita em termos dos parênteses de poisson dada por

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n = \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\}.$$

Esta expressão pode ser condensada, definindo-se a hamiltoniana total $H_T = H + u_m \phi_m$,

$$\dot{g} = \{g, H_T\}.$$

¹Hoje em dia já existem refinamentos a esta terminologia, porém não são relevantes para esta exposição Ref.'s [2, 3].

É necessário ressaltar que os vínculos só podem ser substituídos após o cálculo dos parênteses de poisson. De fato, se pensarmos geometricamente os vínculos $\phi_m(q, p)$ são interpretados como superfícies no espaço de fase onde a dinâmica deve ocorrer na região de superposição, enquanto que os parênteses de Poisson, ao utilizarem derivadas parciais, estão calculando variações na direção normal às superfícies. Para lembrar este fato escrevemos

$$\phi_m(q, p) \approx 0.$$

Por consistência do formalismo temos que garantir que os vínculos sejam preservados para todos os instantes:

$$\dot{\phi}_k = \{\phi_k, H_T\} = \{\phi_k, H\} + u_m \{\phi_k, \phi_m\} \approx 0 \quad (k=1, \dots, m).$$

Estas m equações podem trazer 4 situações distintas.

1. é trivialmente satisfeita
2. revela uma inconsistência
3. resulta em uma nova equação de vínculo independente dos u_m 's
4. gera equações que os u_m 's devem satisfazer

Se nos depararmos com a situação 2, o formalismo não pode ser aplicado para este sistema específico e fim da linha.

No caso 3, novas equações de vínculo serão criadas quando impusermos preservação dos vínculos primários. Estes novos vínculos são chamados de vínculos secundários por razões óbvias. Porém, estes vínculos também devem ser preservados, o que nos leva às quatro situações possíveis novamente. Qualquer equação de vínculo que venha a surgir deste processo é chamada de secundária.

Este procedimento continua até que todos os casos recaiam em 1, em 2, ou em 4 que pode ser entendido como equações para as variáveis u_m 's,

$$\{\phi_j, H\} + u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (1.4)$$

Iremos supor que estas equações podem ser satisfeitas, caso contrário o formalismo é inconsistente. A equação (1.4) pode ser entendida como uma equação matricial do tipo $A.u_m = B$.

Se a matriz $\{\phi_j, \phi_m\}$ não puder ser invertida, a solução não será unívoca pois podemos somar à sua solução qualquer combinação linear de funções $V_m(q, p)$ tal que

$$V_m \{\phi_j, \phi_m\} = 0. \quad (1.5)$$

Assim, concluímos que a solução mais geral para a equação (1.4) é dada por

$$u_m = U_m(q, p) + v_a V_{am}(q, p),$$

onde os coeficientes v_a 's são completamente arbitrários podendo ser quaisquer funções do tempo, enquanto $V_{am}(q, p)$ são funções linearmente independentes que satisfazem (1.5) e os coeficientes U_m 's são as soluções particulares das equações (1.4).

Da álgebra linear, sabemos que a impossibilidade de inversão de uma matriz está associada a duas ou mais de suas linhas ou colunas serem linearmente dependentes, ou seja, temos excesso de informação. Neste caso, é natural pensarmos que estamos lidando com um sistema com liberdades de calibre. Como veremos mais adiante, a liberdade de calibre está intimamente ligada à existência de vínculos de primeira classe. Chamamos de vínculo de primeira classe todos os vínculos que possuam parênteses de poisson fracamente igual a zero com qualquer outro vínculo e de vínculo de segunda classe todos os outros. Caso só exista vínculos de segunda classe, a equação (1.4) poderá ser invertida e nos fornecerá a única solução possível.

É interessante reescrevermos a hamiltoniana total na forma:

$$H_T = H + U_m \phi_m + v_a \phi_a, \quad (\phi_a \doteq V_{am} \phi_m) .$$

A presença de funções arbitrárias (v_a 's) manifesta a existência de liberdades adicionais dentro do formalismo. Estas liberdades estão ligadas à escolhas de calibre, ou seja, este formalismo abrange teorias como o eletromagnetismo e a gravitação.

Seguindo a nomenclatura usada por Dirac, vamos definir variáveis dinâmicas de primeira classe como funções das variáveis q 's e p 's que possuam parênteses de poisson zero com qualquer outro vínculo (primário ou secundário). Caso contrário a variável é dita de segunda classe.

Um parênteses de poisson de uma variável de primeira classe Q com um vínculo ϕ_j pode ser expandido em combinações lineares dos próprios vínculos de modo que $\{Q, \phi_j\} = a_{jk} \phi_k$. Uma propriedade interessante que resulta da identidade de Jacobi é que o parênteses de poisson de duas variáveis de primeira classe também é de primeira classe, e é fácil ver que a hamiltoniana total é de primeira classe.

O número de funções arbitrárias é igual ao número de coeficientes v_a 's, os quais são tantos quanto o número de vínculos primários de primeira classe. Pode-se mostrar, Ref. [1], que os vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações de contato infinitesimal que não alteram o estado físico do sistema.

De fato, um estado físico está bem definido quando fornecemos como condição inicial todos os q 's e p 's. A arbitrariedade das funções v_a 's implica que existe mais de um conjunto de q 's e p 's associados a um mesmo estado físico. Dirac conjecturou que qualquer vínculo de primeira classe, sendo primário ou secundário, deve ser um gerador de uma dada transformação de contato, no entanto ainda não existe provas conclusivas nem a favor e nem contra este fato.

1.1.2 Extensão para campos clássicos

A extensão deste formalismo para campos clássicos é praticamente imediata. No entanto, devemos tomar cuidado com a definição dos momenta generalizados onde a derivada da lagrangiana com respeito às velocidades tem que ser substituída por variações funcionais. Formalmente, definimos os momenta generalizados como sendo o coeficiente na integral quando fazemos uma variação funcional na lagrangiana com respeito às velocidades generalizadas.

$$\delta L = \int p \delta \dot{q} \quad (1.6)$$

Como exemplo de aplicação deste formalismo, tomemos um sistema clássico Newtoniano invariante por reparametrização temporal.

A ação Newtoniana de um sistema com n graus de liberdade com uma lagrangiana $L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right)$ pode ser reparametrizada de modo a escrevermos,

$$S = \int d\tau \bar{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t})$$

onde o ponto indica derivada com relação ao parâmetro τ e $\bar{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t}) = \dot{t} \cdot L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, t\right)$

Definamos os momenta por

$$\pi^i \doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} \quad i=1, \dots, N$$

como $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\dot{q}}{t}$,

$$\begin{aligned}\pi^i &= p^i \quad i = 1, \dots, N \\ \pi^0 &\doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{t}} = L \left(q, \frac{\dot{q}}{t}, t \right) + t \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt} \right)} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dq_i}{dt} \right)}{\partial \dot{t}} = \\ &= L - \sum_i p^i \cdot \frac{\dot{q}_i}{t} = L - \sum_i p^i \cdot \frac{dq_i}{dt} = -H(q_i, p^i, t)\end{aligned}$$

Assim temos o vínculo

$$\phi_0(q_\mu, p^\mu) = \pi^0 + H(q_i, \pi^i, t) = 0.$$

Note que a hamiltoniana do sistema reparametrizado é zero, de fato

$$\begin{aligned}\bar{H}(q_\mu, p^\mu) &= \pi^\mu \cdot \dot{q}_\mu - \bar{L}(q_\mu, \dot{q}_\mu) = \pi^0 \dot{t} + \sum_i \pi^i \dot{q}_i - \sum_i t L = \\ &= t \left[\pi^0 + \sum_i p^i \frac{dq_i}{dt} - L \right] = t(\pi^0 + H) = 0 \quad .\end{aligned}$$

No entanto, a evolução do sistema é dada pela hamiltoniana total:

$$H_T = \bar{H} + u_0 \phi_0 = u_0 [\pi^0 + H(q_i, \pi^i, t)]$$

É trivial mostrar que este vínculo se conserva no tempo

$$(\dot{\phi}_0 = [\phi_0, u_0 \phi_0] \approx 0).$$

As equações de movimento são :

$$\begin{aligned} \dot{t} = \{t, H_T\} &= u_0 & \implies & u_0 = \frac{dt}{d\tau} \\ \dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_T\} &= -u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial t} & \implies & \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \\ \dot{q}_i = \{q_i, H_T\} &= u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial p^i} & \implies & \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \\ \dot{p}^i = \{p^i, H_T\} &= -u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} & \implies & \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como já era esperado, recaímos nas equações dinâmicas convencionais para um sistema hamiltoniano de $2N$ graus de liberdade (q_i, p^i) .

Só nos resta examinar a que tipo de transformação este vínculo ϕ_0 está associado. Em notação de parênteses de poisson, as transformações podem ser escritas Ref. [4]

$$\delta v = \epsilon \{v, G\} \quad \begin{array}{l} \epsilon - \text{parâmetro infinitesimal} \\ G - \text{função geratriz} \end{array}$$

Queremos então considerar o efeito de tomarmos como função geratriz o vínculo primário ϕ_0

- $\delta t = \epsilon \{t, \phi_0\} = \epsilon \{t, \pi^0\} = \epsilon$
- $\delta \pi^0 = \epsilon \{\pi^0, \phi_0\} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial t} = \epsilon \frac{d\pi^0}{dt}$ (usando 1.7)
- $\delta q_i = \epsilon \{q_i, \phi_0\} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial p^i} = \epsilon \frac{dq_i}{dt}$ (usando 1.7)
- $\delta p^i = \epsilon \{p^i, \phi_0\} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \epsilon \frac{dp^i}{dt}$ (usando 1.7)
- $\delta H = \epsilon \{H, \phi_0\} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$ (usando 1.7)

A partir destas transformações, vemos que este vínculo primário gera transformações infinitesimais no tempo físico t . Estas transformações não alteram o “estado físico” do sistema já que agora a evolução é dada pelo parâmetro τ e o tempo t funciona meramente como uma coordenada canônica. De fato, neste contexto, uma trajetória completa no tempo t deve ser interpretada como um único estado físico do sistema.

Para esclarecermos melhor este ponto, talvez seja interessante analisarmos outro exemplo já bem conhecido na literatura que foi utilizado pelo próprio Dirac – o campo eletromagnético.

Seja a ação do campo eletromagnético para o espaço-tempo de Minkowski² sem fontes ($\vec{J} = \vec{0}; \rho = 0$)

$$S = \frac{1}{4} \cdot \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad \text{com} \quad F_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu A_\nu(x^\alpha) - \partial_\nu A_\mu(x^\alpha) \quad .$$

Formalmente, a única diferença com relação ao exemplo anterior é que agora as variáveis são campos e por isso temos que tomar cuidado no cálculo dos momenta e nos parênteses de Poisson.

² $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

Para calcular os momenta precisamos variar a lagrangiana com respeito aos campos $A_\mu(x^\alpha)$,

$$\delta L = \frac{1}{2} \int d^3x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \int d^3x F^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta A_\nu).$$

Comparando com a equação (1.6) os momenta Π^μ são dados por

$$\Pi^\mu(x^\alpha) = F^{0\mu}(x^\alpha) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} \Pi^0(x^\alpha) = 0 \\ \Pi^i(x^\alpha) = E^i \end{cases}$$

Temos, então, novamente um único vínculo primário do tipo $\phi(A_\mu, \Pi^\mu) = 0$ que neste caso é simplesmente $\Pi^0(x^\alpha) \approx 0$. Assim, a hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \int d^3x \left(F^{i0} \dot{A}_i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} \right) = \\ &= \int d^3x \left(-\frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + F^{0i} \partial_i A_0 \right) = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - \Pi^i{}_{,i} A_0 \right) = \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \Pi^i{}_{,i} A_0 \right), \end{aligned}$$

onde foi feita uma integração por partes no último termo e desprezamos termos de superfície.

O passo seguinte é examinar a variação temporal do vínculo. Como só existe um único vínculo primário,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^0 &= \{ \Pi^0(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} \doteq \int d^3z \left(\frac{\delta \Pi^0(\vec{x})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^0(\vec{x})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \right) = \\ &= - \int d^3z \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \cdot \delta_\mu^0 = \\ &= \Pi^i{}_{,i}(\vec{y}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{y}) \approx 0 \quad . \end{aligned}$$

Este é um novo vínculo secundário. A sua variação no tempo nos fornece:

$$\begin{aligned} (\Pi^i{}_{,i}) \dot{} &= \{ \Pi^i{}_{,i}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} \doteq \int d^3z \left(\frac{\delta \Pi^i{}_{,i}(\vec{x})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^i{}_{,i}(\vec{x})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \right) = \\ &= - \int d^3z \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta_\mu^i \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int d^3z F^{kl}(\vec{y}) \frac{\delta F_{kl}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta_\mu^i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int d^3z F^{kl}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} (\delta_l^\mu \cdot \delta(\vec{y} - \vec{z})) \cdot \delta_\mu^i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int d^3z F^{ki}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} (\delta(\vec{y} - \vec{z})) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ki}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \quad (\text{F é antisimétrica}) \end{aligned}$$

Com isso garantimos que os vínculos são conservados no tempo. Note que ambos são vínculos de primeira classe. De fato,

$$\{\Pi^0(\vec{x}), \Pi^i{}_{,i}(\vec{y})\} = \frac{\partial}{\partial y^i} [\delta(\vec{x} - \vec{y})] \delta^{0i} = 0.$$

Antes de estabelecermos a hamiltoniana total, vamos verificar que o vínculo secundário de primeira classe gera transformações que não alteram o estado físico do sistema. Por completeza, calculemos as transformações geradas pelo vínculo primário de primeira classe $\phi_1 \doteq \Pi^0 \approx 0$.

- $\delta_1 A_\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_1(z^\alpha) \{A_\mu(x^\alpha), \Pi^0(z^\alpha)\} = \delta_\mu^0 \epsilon_1(x^\alpha);$
- $\delta_1 A_0(x^\alpha) = \epsilon_1(x^\alpha); \quad \delta_1 A_i(x^\alpha) = 0;$
- $\delta_1 \Pi^\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_1(z^\alpha) \{\Pi^\mu(x^\alpha), \Pi^0(z^\alpha)\} = 0 \quad \forall \mu$

este vínculo gera transformações apenas na variável $A_0(x^\alpha)$.

O vínculo $\phi_2 \doteq \Pi^i{}_{,i} \approx 0$, gera transformações nas variáveis $A_i(x^\alpha)$ e não altera a variável $A_0(x^\alpha)$. De fato,

- $\delta_2 A_\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \{A_\mu(x^\alpha), \Pi^i{}_{,i}(z^\alpha)\} =$
 $= \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \frac{\partial}{\partial z^i} (\delta_\mu^i \cdot \delta(x^\alpha - z^\alpha)) = -\delta_\mu^i \frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_2(x^\alpha)$
- $\delta_2 A_0(x^\alpha) = 0; \quad \delta_2 A_i(x^\alpha) = -\frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_2(x^\alpha);$
- $\delta_2 \Pi^\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \{\Pi^\mu(x^\alpha), \Pi^i{}_{,i}(z^\alpha)\} = 0 \quad \forall \mu$

O significado destas transformações fica claro quando analisamos as conhecidas transformações de calibre dos potenciais eletromagneticos A_μ :

$$\delta A_\mu(x^\alpha) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(x^\alpha)$$

Reconhecemos então que as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe são casos particulares das transformações de calibre do eletromagnetismo.

Ainda seguindo a nomenclatura de Dirac, vamos chamar de hamiltoniana estendida a hamiltoniana total acrescida de todos os geradores que não alteram o estado físico do sistema. Para este nosso exemplo, a hamiltoniana estendida (H_E) então se escreve:

$$H_E = H_T + \int d^3x u_1(x^\alpha) \Pi^i{}_{,i}(x^\alpha) =$$

$$H_E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (E^2 + B^2) + u_0 \Pi^0 + u_1 \Pi^i{}_{,i} \right)$$

onde absorvemos a variável A_0 dentro de u_1 .

Chegando a hamiltoniana estendida o trabalho está completo. No entanto, um leitor atento notaria que as coordenadas conjugadas A_0 e Π^0 possuem liberdades de calibre de forma que podemos fixá-las sem perda alguma de graus de liberdade (escolha de calibre). Note que $\dot{A}_0 = u_0$ é completamente arbitrário e que $\dot{\Pi}_0 = \Pi^i{}_{,i} \approx 0$ juntamente com o vínculo $\Pi^0 \approx 0$ fixa $\Pi^0 = 0$.

1.1.3 Quantização de sistemas vinculados

Uma vez bem estabelecido o formalismo hamiltoniano para sistemas clássicos com vínculos, é de interesse construirmos um formalismo quântico para este sistema.

O caso mais simples para a quantização é adotar um sistema clássico apenas com vínculos de primeira classe.

A equação dinâmica é a equação de Schrödinger onde tomamos a hamiltoniana como sendo a hamiltoniana de primeira classe mais geral possível:

$$i\hbar \cdot \frac{d}{dt}\psi = \hat{H} \psi$$

No processo de quantização, associamos a cada variável dinâmica clássica um operador quântico definido no espaço de Hilbert. Além disso, requeremos que as relações entre as variáveis clássicas através dos parênteses de Poisson sejam levadas em relações de comutação entre os operadores

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Como as relações de comutação já estão fixadas, não podemos interpretar as equações de vínculo $\phi_j(\hat{q}, \hat{p})$ como novas relações entre operadores. Com efeito, seja um vínculo $\phi_j(q, p)$ e uma função $F(q, p)$ qualquer das coordenadas e momenta generalizados tal que $\{\phi_j(q, p), F(q, p)\} \neq 0$. Ao quantizarmos esta equação teremos $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), F(\hat{q}, \hat{p})] \neq 0$. Porém, se fizermos $\phi_j(\hat{q}, \hat{p}) = 0$, teríamos $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), F(\hat{q}, \hat{p})] = 0$ pois o comutador de um operador identicamente nulo é zero com qualquer outra função de operadores e, claramente, isto é uma inconsistência.

Para tornarmos este procedimento consistente, devemos requerer que cada equação de vínculo seja uma restrição sobre a função de onda que é solução da equação de Schrödinger

$$\phi_j(\hat{q}, \hat{p}) \psi(\vec{x}, t) = 0.$$

O formalismo construído desta forma deve satisfazer a alguns requisitos para garantirmos a sua coerência.

Se a aplicação de um determinado vínculo $\phi_j(\hat{q}, \hat{p})$ anula a função de onda, então, a aplicação sucessiva de dois vínculos sobre a função de onda também tem que resultar em

zero ($\phi_k \phi_j \psi = 0$). Se invertermos a ordem de aplicação o resultado ainda deve ser zero, de forma que, o comutador de quaisquer dois vínculos aplicado à função de onda deve anulá-la. Esta equação não gera nenhum vínculo novo, e por isso a única possibilidade é que o comutador entre os vínculos de primeira classe seja uma combinação linear entre todos os possíveis vínculos,

$$[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), \phi_k(\hat{q}, \hat{p})] = C_{jk}^m \phi_m(\hat{q}, \hat{p}),$$

o que é consistente com $\{\phi_j, \phi_k\} = C_{jk}^m \phi_m$, a menos de problemas de ordenamento.

Não é trivial que esta equação seja satisfeita. Em geral, os operadores do espaço de Hilbert não comutam entre si, e justamente por isso, os coeficientes C_{jk}^m , que podem depender dos operadores \hat{q} 's e \hat{p} 's, precisam ser posicionados à esquerda do lado direito da equação para garantir que a aplicação do comutador $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), \phi_k(\hat{q}, \hat{p})]$ anule a função de onda.

Além disso, as relações de vínculo devem valer para qualquer instante. Utilizando a equação de Schrödinger para um acréscimo infinitesimal de tempo, e impondo que um determinado vínculo $\phi_k(\hat{q}, \hat{p})$ anule a função de onda nos dois instantes t e $t + dt$ temos que

$$\phi_k \psi(t + dt) = \phi_k \psi(t) - \frac{i}{\hbar} \phi_k \hat{H} \psi(t) \Rightarrow \phi_k \hat{H} \psi(t) = 0$$

e naturalmente também temos que a aplicação da hamiltoniana posterior a aplicação de um vínculo deve anular a função de onda

$$\hat{H} \phi_k \psi(t) = 0$$

Concluimos assim que o comutador entre quaisquer vínculos de primeira classe e a hamiltoniana deve anular a função de onda. Como este não é um novo vínculo temos

$$[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), H(\hat{q}, \hat{p})] = D_j^m \phi_m(\hat{q}, \hat{p}) \quad .$$

Todos os comentários feitos anteriormente se repetem.

Nesta exposição só me preocupei em elucidar problemas específicos deste formalismo. Questões relacionadas a qualquer método de quantização como, por exemplo, o problema de ordenamento não são alterados com este tratamento.

Com relação à quantização de sistemas hamiltonianos vinculados onde aparecem vínculos de segunda classe, serei breve e farei apenas alguns comentários. Para maiores esclarecimentos, consultar as referências indicadas Ref.'s [5]-[8].

O fato do sistema apresentar vínculos de segunda classe está relacionado com a existência de variáveis dispensáveis. O primeiro passo é, através de combinações lineares, diminuir ao máximo o número de vínculos de segunda classe (o número mínimo de vínculo de segunda classe é sempre par). Concluída esta etapa, podemos redefinir os parênteses de Poisson pelos chamados parênteses de Dirac, os quais possuem a propriedade de fornecer corretamente as equações de movimento e não alterar as relações de comutação dos vínculos de primeira classe.

Além disso, pode-se mostrar que os parênteses de Dirac entre um vínculo de segunda classe com qualquer função das coordenadas e momenta generalizados $A(q, p)$ é identicamente (ou fortemente) nulo. Isto nos possibilita tomar os vínculos de segunda classe identicamente nulos desde o princípio. Com efeito, se ϕ_j^2 é um vínculo de segunda classe então $\{\phi_j^2, A(q, p)\}^D = 0$ para qualquer função $A(q, p)$ das coordenadas e momenta generalizados. Assim, fixarmos $\phi_j^2(\hat{q}, \hat{p}) = 0$ é consistente pois teremos $\{\phi_j^2, A(q, p)\}^D = 0$ levados em $[\phi_j^2(\hat{q}, \hat{p}), A(\hat{q}, \hat{p})]^D = 0$ identicamente.

Podemos então, ao contrário dos vínculos de primeira classe, interpretar as equações de vínculos de segunda classe como identidades entre operadores.

Certamente neste processo o número de graus de liberdade do sistema é reduzido. Com as novas variáveis e a redefinição dos parênteses de Dirac, recaímos novamente no caso anterior onde só existem vínculos de primeira classe, e tudo segue como antes.

1.2 *Formulação Hamiltoniana da TRG*

1.2.1 Folheamento da variedade com hipersuperfícies tipo espaço

No início do século XX surgiu, dentro da comunidade científica, um ideal com motivações filosóficas para se conseguir a unificação de todas as teorias físicas. Certamente isto é um mero desejo humano, já que a natureza não busca na ciência o seu comportamento, ao contrário, somos nós que observamos a natureza para tentar entendê-la. No entanto, havia motivos para que os cientistas acreditassem que esta unificação fosse possível. No final do século XIX, o trabalho de James Maxwell nos mostrou como duas forças até então consideradas independentes, a saber, as forças elétrica e magnética, eram na verdade manifestações diferentes de um único campo, o campo eletromagnético. Mais tarde, com o advento da mecânica quântica e posteriormente com a sua compatibilização com a mecânica relativística sem gravitação (meados do século XX), se conseguiu incorporar o eletromagnetismo ao mundo quântico, dando origem à eletrodinâmica quântica (QED). Neste contexto a única teoria de interação fundamental da natureza que ainda não fazia parte deste arcabouço matemático era a teoria da gravitação, ou seja, a teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein.

A primeira dificuldade técnico-matemática surge de o caminho natural de quantização canônica requerer uma formulação hamiltoniana. Os primeiros trabalhos nesta direção datam do final da década de 40 e início de 50 do século passado. Para se construir este formalismo foi necessário desenvolver uma teoria para sistemas hamiltonianos vinculados Ref. [7] e Ref.'s [22]-[24], já que a Relatividade Geral é uma teoria invariante por reparametrização de coordenadas. Ao se tentar construir a hamiltoniana da gravitação é necessário singularizar a coordenada temporal gerando assim vínculos entre as variáveis canônicas. Nota-se assim que a formulação hamiltoniana da Relatividade Geral só é possível para espaços cuja topologia é do tipo $R \otimes M^3$ onde M^3 é uma hipersuperfície espacial arbitrária de dimensão 3.

Para chegar na hamiltoniana da gravitação, seguiremos a linha de exposição de R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner Ref. [25], primeiro folheando o espaço-tempo com uma hipersuperfície tipo espaço e depois aplicando o formalismo para sistemas hamiltonianos vinculados às variáveis canônicas em questão.

Todo o desenvolvimento será feito supondo-se seções espaciais fechadas para que não te-

nhamos que nos preocupar com os eventuais termos de superfície que possam vir a surgir. Em casos com seções espaciais abertas o procedimento é analisar caso a caso e, quando houver contribuições não nulas, somam-se termos à hamiltoniana total de forma a cancelarmos as contribuições de superfícies. A orientação nestes casos é conseguir reproduzir as equações de Einstein, o que não é possível com os termos de superfície.

Seja uma variedade com topologia $R \otimes M^3$. Primeiramente preenchamos a variedade com uma congruência de curvas tipo-tempo, ou seja, uma congruência que em cada ponto podemos definir um vetor como a derivada com relação ao parâmetro da curva (τ) e por construção este vetor (η^α) é do tipo-tempo. Num dado ponto existe uma hipersuperfície local cujo vetor normal é o próprio η^α . Devido à topologia da variedade, esta hipersuperfície pode ser estendida de modo a separar a variedade em duas regiões tal que qualquer curva tipo-tempo tem necessariamente que atravessar esta hipersuperfície. Isto é muito importante para podermos defini-la como uma superfície de Cauchy.

O parâmetro τ das curvas da congruência não são necessariamente constantes ao longo desta hipersuperfície. Definimos então um parâmetro t justamente com a exigência de que seja constante sobre cada hipersuperfície.

Naturalmente podemos parametrizar as hipersuperfície usando 3 parâmetros:

$$\chi^\alpha = \chi^\alpha(x^a).$$

Vamos escolher uma base de vetores na hipersuperfície como sendo a derivada com relação a cada parâmetro:

$$\chi_a^\alpha \doteq \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^a}$$

Por praticidade estamos considerando que o vetor normal à hipersuperfície é normalizado de forma que tenhamos,

$$g_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta = -1, \quad g_{\alpha\beta} \eta^\alpha \chi_a^\beta = 0$$

O conjunto de todas as hipersuperfície a t constante preenchem a variedade e assim descrevemos o espaço-tempo a partir das equações paramétricas $\chi^\alpha(t, x^a)$.

Num dado ponto x^i de uma hipersuperfície a t constante existe um vetor normal η^α associado a uma determinada curva da congruência. É possível que este ponto seja levado a uma outra curva da congruência ao passar para próxima hipersuperfície. Para quantificar esta

variação definimos um vetor deformação N^α como sendo o vetor que conecta dois pontos de mesma coordenada espacial x^i em duas hipersuperfícies vizinhas.

$$N^\alpha \doteq \frac{\partial \chi^\alpha(t, x^i)}{\partial t}$$

A decomposição do vetor deformação na base definida sobre a hipersuperfície e paralela ao vetor normal nos fornece:

$$N^\alpha = N\eta^\alpha + N^a\chi_a^\alpha$$

A função N é chamada de função lapso e as N^a são chamadas de função deslocamento. Note que a função lapso mede a taxa de variação entre o parâmetro t e o tempo próprio associado a um observador comóvel com quadri-velocidade η^α . A função deslocamento mede a taxa de variação do ponto com coordenada x^i entre duas hipersuperfícies a t constante.

Para estudar a evolução dinâmica do sistema precisamos projetar as quantidades físicas sobre a hipersuperfície e paralelamente ao vetor deformação, já que este é o vetor tangente às linhas coordenadas do tempo t . Podemos reescrever η^α e a métrica a partir desta decomposição e assim obter:

$$\eta^\alpha = \frac{1}{N}N^\alpha - \frac{N^a}{N}\eta_a^\alpha = \left(\frac{1}{N}, \frac{-N^a}{N} \right),$$

$$g_{ij} \doteq g_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta \doteq h_{ij}$$

$$g_{0i} \doteq g_{\alpha\beta} N^\alpha \chi_i^\beta = N^a h_{ai} = N_i$$

$$g_{00} \doteq g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta = -N^2 + N^a N_a$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}.$$

com inversa $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$ (por construção $h^{ij} h_{ja} = \delta_a^i$),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^j}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Com estes resultados a componente covariante do vetor η^α é

$$\eta_\alpha = g_{\alpha\beta} \eta^\beta = (-N, 0, 0, 0)^t.$$

Como era de se esperar, a variável dinâmica que descreverá a evolução da geometria é a própria métrica da hipersuperfície (h_{ij}). Para tanto, precisamos caracterizá-la integralmente.

Resta-nos então sabermos como esta tri-hipersuperfície espacial está curvada com relação à variedade maior quadridimensional. O estudo de imersão nos mostra que é possível que duas hipersuperfícies distintas $(g_{\mu\nu}; g'_{\alpha\beta})$ possuam a mesma métrica intrínseca à hipersuperfície (h_{ij}) como sub-variedade. Uma maneira natural de prosseguirmos é estudarmos a variação do vetor normal à hipersuperfície, fazendo-o variar ao longo da mesma e projetando-o sobre a hipersuperfície, já que queremos descrever a evolução a partir da hipersuperfície e quantidades físicas definidas sobre ela.

Define-se o tensor de curvatura extrínseca,

$$K_{\mu\nu} \doteq -\frac{1}{2} \perp_{\mu}^{\alpha} \perp_{\nu}^{\beta} \eta_{(\alpha;\beta)} = -\frac{1}{2} \perp_{\mu}^{\alpha} \perp_{\nu}^{\beta} \mathcal{L}_{\eta}(g_{\alpha\beta})$$

onde

$$\begin{aligned} \perp_{\mu}^{\alpha} &\doteq \delta_{\mu}^{\alpha} + \eta^{\alpha} \eta_{\mu} && \text{(projeter sobre a hipersuperfície)} \\ \mathcal{L}_{\vec{\xi}}(g_{\alpha\beta}) &= \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} && \text{(derivada de Lie da métrica ao longo do vetor } \vec{\xi}) \end{aligned}$$

com componentes:

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \eta_{(a;b)} = -N \Gamma_{ab}^0 \quad (1.8)$$

$$K_{0b} = N^a K_{ab} \quad (1.9)$$

$$K_{00} = N^a N^b K_{ab} \quad (1.10)$$

As únicas componentes relevantes são os K_{ab} 's. Com esta decomposição em mãos, vamos reescrever a ação da TRG em termos destas novas variáveis para podermos definir os momenta associados e assim obter a hamiltoniana desejada. Conceitualmente, o princípio de Hamilton deve ser entendido a partir da métrica da hipersuperfície. Dada duas hipersuperfícies $h_{ab}(\vec{x}, t_{final})$ e $h_{ab}(\vec{x}, t_{inicial})$ existe infinitos modos para deformarmos $h_{ab}(\vec{x}, t_{inicial})$ em $h_{ab}(\vec{x}, t_{final})$, no entanto a evolução será dada pela deformação contínua tal que a ação associada a métrica $g_{\mu\nu}$ seja extremal. O espaço composto de todas as configurações possíveis para as métricas foi primeiramente introduzido por Wheeler com o nome de superespaço. Podemos então reafirmar o princípio variacional dizendo que a trajetória descrita pela métrica no superespaço será aquela que torna a ação extremal.

1.2.2 Formalismo ADM da Relatividade Geral

É amplamente sabido que a ação que fornece as equações de Einstein pode ser escrita

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.11)$$

Antes de fornecer o resultado final, é interessante desenvolver algumas relações utilizando as variáveis N , N^a , h_{ij} , K_{ij} . Vamos definir:

$$\begin{aligned} {}^3\Gamma_{bc}^a &\doteq \frac{1}{2} h^{ad} (h_{dc,b} + h_{db,c} - h_{bc,d}) \\ {}^3R_{ab} &\text{ tensor de Ricci formado com as conexões } {}^3\Gamma_{bc}^a \\ K &\doteq h^{ab} K_{ab} \\ h \doteq \det(h_{ab}) &\Rightarrow \delta(\sqrt{h}) = -\frac{\sqrt{h}}{2} h_{ab} \delta h^{ab} = \frac{\sqrt{h}}{2} h^{ab} \delta h_{ab} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{h})' = \sqrt{h} h^{ab} \dot{h}_{ab} = \sqrt{h} (-NK + N^a; a) \end{aligned}$$

Por substituição direta encontramos as seguintes componentes para a conexão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{N}}{N} + \frac{N^a N_{,a}}{N} - \frac{N^a N^b}{N} K_{ab} \\ \Gamma_{0a}^0 &= \frac{N_{,a}}{N} - \frac{N^b}{N} K_{ab} \\ \Gamma_{ab}^0 &= -\frac{K_{ab}}{N} = \frac{1}{2N^2} (\dot{h}_{ab} - N_{(a;b)}) \Rightarrow K_{ab} = -\frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - N_{(a;b)}) \\ \Gamma_{00}^a &= N h^{ab} \left(\frac{N_{,b}}{N} \right)' + \frac{h^{ab}}{2} (N^2 - N^m N_m)_{,b} - \frac{N^a N^b N_{,b}}{N} + \frac{N^a N^b N^m K_{bm}}{N} \\ \Gamma_{0b}^a &= N \left[-K_b^a + \left(\frac{N^a}{N} \right)_{,b} + \frac{N^a N^m}{N^2} K_{bm} \right] \\ \Gamma_{bc}^a &= {}^3\Gamma_{bc}^a + \frac{N^a}{N} K_{bc} \end{aligned}$$

Analogamente chegamos para o tensor de Ricci,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= N\dot{h}^{ij}\dot{K}_{ij} + NN^l_{;k} - 2NN^l_{;k}K_l^k - 2NN^lK_{l;i}^i + NN^lK_{,l} + N^2K^{ij}K_{ij} + \\
&+ N^iN^j{}^3R_{ij} + N^iN^jK_{ij}K - 2N^iN^jK_i{}^lK_{lj} - \frac{N^iN^j}{N}\dot{K}_{ij} - \frac{N^iN^j}{N}N_{,j;i} + \\
&+ 2\frac{N^iN^j}{N}N^l_{;j}K_{il} + \frac{N^iN^jN^l}{N}K_{il;j} \\
R_{0i} &= -\frac{N^m}{N}\dot{K}_{im} - \frac{N^m}{N}N_{,i;m} + \frac{N^l}{N}K_{ml}N^m_{;i} + K_{li}\frac{N^m}{N}N^l_{;m} - 2N^mK_m{}^lK_{li} + \\
&- NK^m{}_{i;m} + NK_{,i} + {}^3R_{mi}N^m + N^mK_{mi}K + \frac{N^mN^l}{N}K_{li;m} \\
R_{ij} &= \frac{1}{N}\left(-\dot{K}_{ij} - N_{,i;j} + N^m{}_{;i}K_{mj} + N^m{}_{;j}K_{mi} + N^mK_{ij;m}\right) - 2K_i{}^mK_{mj} + {}^3R_{ij} + K_{ij}K
\end{aligned}$$

e finalmente podemos escrever o escalar de curvatura usando as variáveis da separação (3+1).

$$R = -\frac{2\dot{K}}{N} - 2\frac{N^l_{;k}}{N} + 2\frac{N^iK_{,i}}{N} + K_{ij}K^{ij} + K^2 + {}^3R$$

A ação (1.11) após simples manipulação matemática, somando e subtraindo $2\left(\sqrt{h}\right) \cdot K$ ao escalar de curvatura, se decompõem em três termos:

$$\begin{aligned}
S &= S_G + S_1 + S_2 \\
S_G &= \int dt d^3x N\sqrt{h} (K^{ij}K_{ij} - K^2 + {}^3R) \\
S_1 &= -2 \int dt d^3x \left(\sqrt{h}K\right) \bullet \\
S_2 &= 2 \int dt d^3x \left(\sqrt{h}KN^i - \sqrt{h}h^{ki}N_{,k}\right)_{,i}
\end{aligned}$$

O termo S_2 não contribui para a equação de movimento por ser uma divergência total. O princípio é aplicado impondo variações onde δh_{ij} , δN_i , δN são zero nos extremos. Porém, o termo S_1 poderia contribuir já que ele depende essencialmente de derivadas de h_{ij} na direção ortogonal às hipersuperfícies a t constante.

Para não ter que lidar com este termo de superfície, é comum definir a ação da teoria da Relatividade Geral como $S_G = S - S_1$. De agora em diante consideraremos apenas o termo S_G como a boa ação; esta escolha será justificada a posteriori encontrando as equações de movimento que descrevem corretamente o sistema.

Façamos então a variação funcional com relação as variáveis em questão:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta N} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{N}}\right)^{\bullet} - \left(\frac{\partial L}{\partial N_{,i}}\right); i = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i}\right)^{\bullet} - \left(\frac{\partial L}{\partial N_{i,j}}\right); j = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial h_{ij}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}}\right)^{\bullet} - \left(\frac{\partial L}{\partial h_{ij;k}}\right); k = 0\end{aligned}$$

L não depende de \dot{N} nem de $N_{,i}$ e só depende de N explicitamente ou através de K_{ij} . Usaremos que:

$$\frac{\partial L}{\partial K_{ab}} = 2\sqrt{h}N \left(h^{ki}h^{jl} - h^{ij}h^{kl}\right) K_{kl} \frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{ab}}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{ab}} = \delta_{ij}^{ab} \doteq \frac{1}{2} \left(\delta_i^a \delta_j^b + \delta_j^a \delta_i^b\right)$$

e,

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N} + \frac{\partial L}{\partial K_{ij}} \frac{\partial K_{ij}}{\partial N} = \sqrt{h} (K^{ij}K_{ij} - K^2 - {}^3R) = 0. \quad (1.13)$$

Para a variação de N_i só temos dependência através de K_{ij} .

$$\frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial N_{i,j}}\right)_{;j} = 0$$

como $\frac{\partial K_{ab}}{\partial N_{i,j}} = \frac{1}{N} \delta_{ab}^{ij}$ e usando o resultado de (1.12) encontramos

$$2\sqrt{h} (K_i{}^j - \delta_i{}^j K)_{;j} = 0 \quad (1.14)$$

Na variação com relação a h_{ij} é importante lembrar que a função 3R depende de h_{ij} , e que K_{ij} depende tanto através de \dot{h}_{ij} quanto de $N_{i,j}$ já que este último possui a conexão ${}^3\Gamma_{ij}^a$.

Num referencial onde a conexão se anula, temos que as relações se seguem:

$$\begin{aligned}\delta^3 R_{ij} &= (\delta^3 \Gamma_{ij}^a)_{;a} - (\delta^3 \Gamma_{ia}^a)_{;j} \\ \delta^3 \Gamma_{ij}^a &= \frac{1}{2} h^{ak} \left((\delta h_{kj})_{;i} + (\delta h_{ki})_{;j} - (\delta h_{ij})_{;k} \right)\end{aligned}$$

e já que, ao contrário da conexão, $\delta^3 \Gamma$ é um verdadeiro tensor, estas relações são tensoriais o que garante suas validades em qualquer referencial.

Encontramos depois de alguns cálculos que

$$\frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0 \Rightarrow \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{K}_{ij} = & -N [{}^3R_{ij} + KK_{ij} - 2K_i^m K_{mj}] + N_{,i;j} - N_{m;i} K_j^m + \\ & -N_{m;j} K_i^m - N^m K_{ij;m} \end{aligned}$$

As equações (1.13)-(1.15) são equivalentes às três possíveis projeções das equações de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu &= 0 \\ G_{\mu\nu} \eta^\mu \perp_\alpha^\nu &= 0 \\ G_{\mu\nu} \perp_\beta^\mu \perp_\alpha^\nu &= 0 \end{aligned}$$

sendo portanto as equações que regem a gravitação quando a separação (3+1) for possível. Dentre as três, a única equação que possui derivada temporal de segunda ordem da variável dinâmica h_{ij} é a (1.15), o que nos leva a concluir que esta é a equação dinâmica enquanto que as outras são apenas equações de vínculo. As equações (1.13) e (1.14) restringem as possíveis configurações das hipersuperfícies a t constante. Ficará mais claro quando tivermos estabelecido os parênteses de Poisson associados aos vínculos da densidade hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral.

1.2.3 Hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral

De posse da densidade lagrangiana podemos prosseguir à formulação hamiltoniana. A partir da densidade lagrangiana encontramos as seguintes densidades de momentum:

$$P \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (1.16)$$

$$P^i \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0 \quad (1.17)$$

$$\Pi^{ij} \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -h^{\frac{1}{2}} (K^{ij} - h^{ij} K) \quad (1.18)$$

(obs: note que o momentum Π^{ij} é uma densidade tensorial do tri-espço de peso 1.)

Logo temos,

$$\begin{aligned} h_{ij}\Pi^{ij} &\doteq \pi = 2\sqrt{h}K \Rightarrow \\ \Rightarrow K^{ij} &= -\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2}\pi \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow \dot{h}_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi \right) + N_{(i;j)} \quad (1.20)$$

As equações (1.16) e (1.17) nos mostram que este sistema possui vínculos. Não é possível escrever as velocidades generalizadas como função dos momenta e das coordenadas.

Precisamos então apelar para o formalismo desenvolvido por Dirac, Bergmann e outros, para construir um formalismo hamiltoniano consistente. Como este formalismo foi descrito na seção anterior, apenas me restringirei a aplicá-lo.

Por definição, a hamiltoniana canônica se escreve:

$$\begin{aligned} H_c &\doteq P\dot{N} + P^i\dot{N}_i + \Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - L = \Pi^{ij} \left[\frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi \right) + N_{(i;j)} \right] + \\ &\quad -N\sqrt{h} \left[\frac{1}{h} \left(\Pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2}\pi \right) \left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi \right) - \frac{\pi^2}{4h} + {}^3R \right] = \\ &= N \left[G_{abcd} \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \sqrt{h} {}^3R \right] + 2\Pi^{ij} N_{i;j} \end{aligned}$$

com $G_{abcd} \doteq \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd})$, e devido aos vínculos (1.16) e (1.17) temos a hamiltoniana total:

$$H_T \doteq \int dt d^3x (N H_0 + N_i H^i + \lambda P + \lambda_i P^i) \quad (1.21)$$

onde,

$$H_0 \doteq G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}} {}^3R \text{ (super-hamiltoniana)}$$

$$H^i \doteq -2\Pi^{ij}_{;j} \text{ (super-momentum).}$$

Para chegar a esta hamiltoniana usamos a condição de seções espaciais fechadas para descartar o termo $(\Pi^{ij}N_j)_{;j}$.

Precisamos garantir que os vínculos primários sejam satisfeitos durante toda a evolução. Para isso, usaremos as relações

$$\begin{aligned} \{N(\vec{x}, t), P(\vec{y}, t)\} &= \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{N_i(\vec{x}, t), P^j(\vec{y}, t)\} &= \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{h_{ij}(\vec{x}, t), \Pi^{kl}(\vec{y}, t)\} &= \delta_{ij}^{kl} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

Imposição sobre os vínculos primários:

$$\begin{aligned}\dot{P}(\vec{x}, t) &\approx 0 = \int d^3z \{P(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \int d^3z \{P(\vec{x}, t), N(\vec{z}, t)\} H_0(\vec{z}, t) = \\ &= - \int d^3z \delta(\vec{x} - \vec{z}) H_0(\vec{z}, t) = -H_0(\vec{x}, t) \Rightarrow H_0(\vec{x}, t) \approx 0\end{aligned}\quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}^i(\vec{x}, t) &\approx 0 = \int d^3z \{P^i(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \int d^3z \{P^i(\vec{x}, t), N_j(\vec{z}, t)\} H_0^j(\vec{z}, t) = \\ &= -H_0^i(\vec{x}, t) \Rightarrow H_0^i(\vec{x}, t) \approx 0\end{aligned}\quad (1.23)$$

estes são novos vínculos que também devem ser preservados. Antes de realizar estes cálculos vamos introduzir a álgebra de Lie associada aos vínculos H_0 e H^i .³

$$\{H_0(\vec{x}, t), H_0(\vec{y}, t)\} = \left(H^i(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} - H^i(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.24)$$

$$\{H_i(\vec{x}, t), H_k(\vec{y}, t)\} = \left(H_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} - H_i(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.25)$$

$$\{H_0(\vec{x}, t), H_i(\vec{y}, t)\} = H_0(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.26)$$

Devido a esta álgebra pode-se verificar que a imposição dos vínculos serem preservados ao longo da evolução é satisfeito trivialmente, ou seja, $\dot{H}_0(\vec{x}, t) \approx 0$ e $\dot{H}_i(\vec{x}, t) \approx 0$, e sendo assim eles não geram novos vínculos. É fácil verificar que todos os parênteses de Poisson entre os vínculos (1.16), (1.17), (1.22) e (1.23) são zero, e então todos os quatro são vínculos de primeira classe. Como a equação (1.21) já inclui todos os vínculos de primeira classe, esta é a hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral.

Vamos verificar se esta hamiltoniana de fato reproduz as equações de Einstein:

$$\dot{N}(\vec{x}, t) = \int d^3z \{N(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \lambda(\vec{x}, t) \quad (1.27)$$

$$\dot{N}_i(\vec{x}, t) = \int d^3z \{N_i(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \lambda_i(\vec{x}, t) \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned}\dot{h}_{ik}(\vec{x}, t) &= \int d^3z \{h_{ik}(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \\ &= \frac{N(\vec{x}, t)}{\sqrt{h}} [2\Pi_{ik}(\vec{x}, t) - h_{ik}(\vec{x}, t) \Pi(\vec{x}, t)] + N_{i;k}(\vec{x}, t) + N_{k;i}(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (1.29)$$

³Estes cálculos embora simples são muito extensos e facilmente encontrados na literatura, por isso não os reproduzirei.

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^{ik}(\vec{x}, t) &= \int d^3z \left\{ \Pi^{ik}(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t) \right\} = \\
&= -N\sqrt{h} \left({}^3R^{ik} - \frac{h^{ik}}{2} {}^3R \right) + \frac{Nh^{ik}}{2\sqrt{h}} \left(\Pi_{lm}\Pi^{lm} - \frac{\Pi^2}{2} \right) - \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{im}\Pi_m^k - \frac{\Pi\Pi^{ik}}{2} \right) \\
&\quad + \sqrt{h} \left(N^{,i;k} - N_{;m}^m h^{ik} \right) + \sqrt{h} \left(\frac{N^m \Pi^{ik}}{\sqrt{h}} \right)_{;m} - 2\Pi^{m(i} N_{;m}^{k)} \quad (1.30)
\end{aligned}$$

As duas primeiras equações nos permitem tratar as variáveis N e N_i como meros multiplicadores de Lagrange para os vínculos (1.22) e (1.23). A equação (1.29) apenas define as relações entre as “velocidades” (\dot{h}_{ij}) e os momenta. A verdadeira e única equação dinâmica é a (1.30). Esta equação é equivalente à única equação dinâmica (1.15) do formalismo lagrangiano, e os vínculos (1.22) e (1.23) são equivalentes respectivamente às equações (1.13) e (1.14). Assim fica mostrado que este sistema hamiltoniano reproduz as equações de Einstein.

Devido ao fato dos vínculos (1.22) e (1.23) satisfazerem a álgebra de Lie (1.24) - (1.26), existem relações e condições impostas sobre a evolução temporal do sistema. A partir desta álgebra pode-se provar os seguintes teoremas:

1. Se os vínculos são satisfeitos em uma dada hipersuperfície, e a evolução temporal é dada pelas equações de Hamilton, então os vínculos serão satisfeitos ao longo de toda a evolução.
2. Se os vínculos são satisfeitos para duas hipersuperfícies arbitrárias, então quantidades canônicas em duas hipersuperfícies quaisquer são necessariamente evoluídas a partir das equações de Hamilton.
3. Se a função principal de Jacobi (S) satisfizer a super-hamiltoniana em um dado ponto (\vec{x}_0) e o super-momentum em toda a hipersuperfície, então ela também satisfará o vínculo da super-hamiltoniana em toda hipersuperfície

$$\left. \begin{aligned} H_0(\vec{x}_0, t)[S] &\approx 0 \\ H_i(\vec{x}, t)[S] &\approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_0(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \quad \forall \vec{x} \text{ e } t \text{ fixo.}$$

4. Se a função principal de Jacobi (S) satisfizer a super-hamiltoniana em qualquer ponto da hipersuperfície, então necessariamente também satisfará o super-momentum em qualquer ponto

$$H_0(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \Rightarrow H_i(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \quad \forall \vec{x} \text{ e } t \text{ fixo.}$$

Os vínculos (1.22) e (1.23), embora secundários, são vínculos de primeira classe. Espera-se então que eles sejam geradores de transformações de calibre.

Para o vínculo H_0 , a única transformação não nula é para a variável h_{ij} :

$$\begin{aligned}\delta h_{ij}(\vec{x}) &= \int d^3z \epsilon(\vec{z}) \{h_{ij}(\vec{x}), H_0(\vec{z})\} = \\ &= \int d^3z \epsilon(\vec{z}) G_{abkl}(\vec{z}) \{h_{ij}(\vec{x}), \Pi^{ab}(\vec{z}) \Pi^{kl}(\vec{z})\} = \\ &= \epsilon(\vec{x}) \frac{2}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij}(\vec{x}) - \frac{h_{ij}(\vec{x})}{2} \Pi(\vec{x}) \right) = \\ &= -2\epsilon(\vec{x}) K_{ij}(\vec{x}) = -2\epsilon(\vec{x}) \mathcal{L}_{\eta^\alpha}(h_{ij})\end{aligned}$$

Esta transformação gera deslocamento na direção do vetor tipo-tempo $\eta^\alpha(\tau)$ perpendicular à tri-hipersuperfície. Enquanto a hamiltoniana total gera deslocamentos no parâmetro t , a super-hamiltoniana gera deslocamentos no parâmetro τ .

Vejam agora o vínculo do super-momentum (H_i):

- $\delta h_{ij}(\vec{x}) = \int d^3z \{h_{ij}(\vec{x}), H_a(\vec{z})\} \chi^a(\vec{z}) =$
 $= -2 \int d^3z \chi_a(\vec{z}) \left\{ h_{ij}(\vec{x}), \left(\Pi_{,b}^{ab} + \Pi^{bc} \Gamma_{bc}^a \right) \right\} =$
 $= -2 \int d^3z \chi_a(\vec{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z^b} \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_{ij}^{ab} + \delta_{ij}^{bc} \Gamma_{bc}^a \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) =$
 $= 2 \frac{\partial}{\partial x^b} \chi_a(\vec{x}) \delta_{ij}^{ab} - 2 \chi_a(\vec{x}) \Gamma_{ij}^a =$
 $= \chi^{(i;j)}(\vec{x}) = \mathcal{L}_{\chi^k}(h_{ij})$
- $\delta \Pi^{ij}(\vec{x}) = \int d^3z \{ \Pi^{ij}(\vec{x}), H_a(\vec{z}) \} \chi^a(\vec{z}) =$
 $= -2 \int d^3z \left\{ \Pi^{ij}(\vec{x}), h_{ak}(\vec{z}) \Pi_{,b}^{kb}(\vec{z}) \right\} \chi^a(\vec{z}) =$
 $= 2 \chi^a(\vec{x}) \Pi_{,b}^{kb}(\vec{x}) \delta_{ak}^{ij} - 2 \int d^3z \chi^a(\vec{z}) h_{ak}(\vec{z}) \Pi^{bc}(\vec{z}) \{ \Pi^{ij}(\vec{x}), \Gamma_{bc}^k(\vec{z}) \} =$
 $= \chi^{(i}(\vec{x}) \Pi_{,b}^{j)b} - \chi^{(i}(\vec{x}) {}^3 \Gamma_{ab}^{j)} \Pi^{ab} - (\chi^{(i}(\vec{x}) \Pi^{j)b})_{,b} + (\chi^m(\vec{x}) \Pi^{ij})_{,m} =$
 $= -\chi_{,b}^{(i}(\vec{x}) \Pi^{j)b} + \chi_{,m}^m(\vec{x}) \Pi^{ij} + \chi^m(\vec{x}) \Pi_{,m}^{ij} = \mathcal{L}_{\chi^k}(\Pi^{ij})$

Estas transformações são transformações gerais das coordenadas na tri-hipersuperfície, ou seja, as transformações de calibre são difeomorfismos da tri-hipersuperfície.

Concluimos assim o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano para a Teoria da Relatividade Geral.

1.3 *Teoria Linear de Perturbações Cosmológicas*

Nos capítulos anteriores, estudamos o formalismo hamiltoniano para a TRG e vimos que seria necessário usarmos métodos para lidarmos com sistemas vinculados devido às liberdades de calibre da teoria. No presente capítulo, vamos desenvolver a teoria linear de perturbações cosmológicas nos preocupando apenas com o formalismo que será usado no desenvolvimento dos resultados seguintes e, por isso, nos limitaremos apenas em lidar com o essencial necessário deste formalismo.

Primeiramente, vamos mostrar como podemos, de uma maneira consistente, definir uma teoria de perturbações cosmológicas e quais devem ser as variáveis dinâmicas desta descrição. Tendo estabelecido a linguagem conveniente, vamos derivar as equações dinâmicas para perturbações escalares a partir das equações da TRG. Em seguida, nos focalizando apenas no caso de um Universo permeado por um campo escalar clássico, encontraremos finalmente as equações básicas para a descrição da evolução de perturbações lineares num Universo homogêneo e isotrópico.

1.3.1 **Formalismo**

As observações cosmológicas nos mostram que o Universo é, em larga escala, homogêneo e isotrópico. As estruturas encontradas, por exemplo em aglomerados de galáxias, podem ser explicadas a partir da evolução de um pequeno desvio da homogeneidade observada. Devido à natureza atrativa da gravitação, qualquer desvio da homogeneidade gera uma instabilidade gravitacional a qual tenderia a crescer exponencialmente. Porém, devido à expansão do Universo, o crescimento das perturbações, em geral, segue uma lei de potência.

Para explicarmos completamente a formação de estrutura do Universo precisamos levar em conta efeitos gravitacionais não lineares Ref.[44, 45]. No entanto, antes mesmo de estudarmos a evolução dessas perturbações temos que estabelecer quais são as adequadas condições iniciais, ou seja, qual é o perfil de distribuição da densidade de matéria, o qual sabemos que está, através das equações de Einstein, associado às perturbações da métrica.

A teoria linear das perturbações da métrica nos possibilita descrever a evolução dessas perturbações num regime anterior à formação de estrutura, gerando assim as condições iniciais para esta teoria.

Com o desenvolvimento do paradigma inflacionário, que será discutido no capítulo seguinte, a teoria de perturbações⁴ se mostrou um formalismo fundamental nas previsões cosmológicas. A partir do seu desenvolvimento pode-se explicar, por exemplo, as flutuações da radiação cósmica de fundo, tornando-se assim indispensável para qualquer análise e teste de modelos teóricos para o Universo primordial.

A TRG foi construída para ser uma teoria invariante por transformações arbitrárias de coordenadas. Esta invariância está associada à idéia de que os sistemas de coordenadas são completamente arbitrários e por isso não contém nenhum significado físico. Esta liberdade de calibre nos cria uma dificuldade técnica na construção de uma teoria de perturbações lineares pois, uma vez que é permitido fazer qualquer transformação de coordenadas, temos que garantir que as quantidades que descreverão as perturbações de uma dada métrica são de fato perturbações físicas e não meras componentes artificiais criadas por uma mudança de coordenadas.

Existem alguns métodos possíveis para tratar este problema. Uma possibilidade seria, por exemplo, descrevermos a gravitação no formalismo de equações quase-maxwellianas e descrevermos as perturbações em termos das componentes do tensor de Weyl Ref.'s [26]-[31]. Uma vez que as métricas conformalmente planas possuem tensor de Weyl igual a zero, qualquer componente não nula do tensor de Weyl para a métrica de FLRW representará necessariamente uma verdadeira perturbação.

Por conveniência, optamos por trabalhar com as variáveis invariantes de calibre em primeira ordem desenvolvidas primeiramente por Bardeen [33, 34]. Neste formalismo, as variáveis das perturbações são identificadas com componentes da métrica perturbada. De maneira análoga, poderíamos ter escolhido trabalhar num dado calibre, como o calibre síncronon e, tomando cuidado para identificarmos corretamente aos graus de liberdade físicos das perturbações, evoluirmos o sistema mesmo que as variáveis não sejam invariantes de calibre. No entanto, neste procedimento, não é fácil o acompanhamento dos graus de liberdade físicos o

⁴Vamos usar o termo teoria de perturbações como uma abreviação para teoria linear de perturbações gravitacionais, sendo sempre sub-entendido que estamos considerando a descrição do Universo através da métrica FLRW.

que torna a análise dos resultados menos clara e mais difícil de interpretar.

Formalmente podemos definir transformações de calibre de perturbações com relação a uma determinada métrica de fundo de duas maneiras: transformações passivas ou ativas. Suponha que tenhamos uma variedade \mathcal{M} que represente o espaço-tempo físico onde definimos uma estrutura de fundo e associamos a toda e qualquer variável \mathcal{Q} ⁵ em \mathcal{M} uma função específica $\mathcal{Q}^{(0)}(x^\alpha(p))$ de forma que a dependência funcional de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em x^α seja fixa para todo ponto $p \in \mathcal{M}$. Tendo definido esta estrutura de fundo podemos então definir as perturbações simplesmente como

$$\delta\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(x^\alpha(p)) - \mathcal{Q}^{(0)}(x^\alpha(p)).$$

Para um outro sistema de coordenadas \tilde{x}^α teremos naturalmente para o mesmo ponto p

$$\delta\tilde{\mathcal{Q}}(p) = \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{x}^\alpha(p)) - \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{x}^\alpha(p)).$$

Da mesma forma que antes, a dependência funcional de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em \tilde{x}^α é a mesma que de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em x^α . A transformação $\delta\mathcal{Q} \rightarrow \delta\tilde{\mathcal{Q}}$ é a definição da transformação de calibre (passiva) associada à transformação de coordenada $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$.

A outra maneira de definirmos transformações de calibre é utilizarmos uma outra variedade e definirmos um difeomorfismo entre esta variedade de fundo \mathcal{N} e a variedade espaço-temporal física \mathcal{M} . Se a variedade de fundo possuir um sistema de coordenada rígido x_r , um dado difeomorfismo $\mathcal{D} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ induz um sistema de coordenadas em \mathcal{M} pela associação $\mathcal{D} : x_r^\alpha \rightarrow x^\alpha$. Se utilizarmos um outro difeomorfismo $\tilde{\mathcal{D}}$, teremos a indução de um novo sistema de coordenadas $\tilde{\mathcal{D}} : x_r^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$. Para cada um destes difeomorfismos, podemos definir nossas variáveis perturbadas respectivamente como $\delta\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(p) - \mathcal{Q}^{(0)}(\mathcal{D}^{-1}(p))$ e $\delta\tilde{\mathcal{Q}}(p) = \tilde{\mathcal{Q}}(p) - \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p))$. Novamente definimos uma transformação de calibre como a passagem de $\delta\mathcal{Q} \rightarrow \delta\tilde{\mathcal{Q}}$. Estas duas abordagens são equivalentes, sendo que a primeira mostra mais claramente a dependência da transformação de calibre na escolha do sistema de coordenadas enquanto que a segunda salienta a dependência na relação entre a variedade de fundo e a variedade física espaço-temporal.

No caso de considerarmos transformações infinitesimais

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha,$$

⁵Estamos omitindo os possíveis índices de \mathcal{Q} mas esta variável pode ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

a transformação de calibre é caracterizada pela derivada de Lie na direção do vetor ξ ,

$$\delta\tilde{\mathcal{Q}} - \delta\mathcal{Q} = \mathcal{L}_\xi\mathcal{Q}. \quad (1.31)$$

O estudo de perturbações será feito num Universo descrito pela métrica de FLRW de forma que podemos definir a métrica a partir do intervalo de acordo com a separação $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$ onde assumimos que a métrica de fundo é dada por

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\nu dx^\mu = N^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{\kappa}{4} r^2)^2} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2)].$$

A parte perturbada da métrica pode ser dividida em três setores, os quais evoluem de forma independente: escalar, vetorial e tensorial. Essa separação das componentes da perturbação é baseada em suas propriedades frente a transformações de coordenadas tri-espaciais em cada hipersuperfície que define o folheamento da variedade associada à métrica de fundo.

As perturbações vetoriais e tensoriais não geram nenhuma instabilidade gravitacional de forma que para o estudo da formação de estrutura basta analisarmos o setor escalar Ref.[32]. De fato, para um Universo em expansão, as perturbações vetoriais decaem inversamente proporcionais ao fator de escala, enquanto que as perturbações tensoriais geram ondas gravitacionais que não influenciam na evolução dos desvios da homogeneidade da densidade de matéria.

1.3.2 Perturbações escalares

A parte da métrica associada às perturbações escalares pode ser escrita como

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2N^2\phi & -Na(t)B_{|i} \\ -Na(t)B_{|i} & 2a^2(t)(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix}.$$

No calibre temporal conforme, o intervalo se escreve

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ (1 + 2\phi) d\eta^2 - 2B_{|i} dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}] dx^i dx^j \}. \quad (1.32)$$

Uma transformação infinitesimal de coordenada é inteiramente definida por um vetor $\xi = (\xi^0, \xi^i)$, onde o tri-vetor pode ser decomposto em um tri-vetor com divergência nula e uma função escalar, ou seja, $\xi^i = \xi_T^i + \gamma^{ij}\xi_{|j}$ com $\xi_{T|j}^j = 0$. Como estamos interessados apenas nas

perturbações escalares, a transformação infinitesimal mais geral pode ser caracterizada pelas duas funções escalares ξ^0 e ξ . Dada esta transformação infinitesimal, a métrica irá sofrer um transformação $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \Delta g_{\mu\nu}$. Podemos calcular a variação para cada uma das componentes da métrica perturbada definida em (1.32)

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{a'}{a}\xi^0 - \xi^{0'}, \quad \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad \tilde{E} = E - \xi,$$

onde ' significa derivada com relação ao tempo conforme.

Claramente, estas variáveis não são invariantes por esta transformação infinitesimal de coordenada. A partir de uma combinação apropriada, podemos construir duas variáveis invariantes

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a} [(B - E')a]' \quad \Psi = \psi - \frac{a'}{a}(B - E').$$

Estas duas variáveis foram introduzidas na literatura pela primeira vez por Bardeen [34]. Além dessa possível escolha, poderíamos ter tomado qualquer combinação linear destas ou definir quaisquer outras duas variáveis invariantes de calibre para representar o espaço bidimensional das funções escalares invariantes de calibre que definem a perturbação escalar da métrica. A escolha por estas duas variáveis se dá pela simplificação das equações dinâmicas e pela fácil associação da variável Φ , chamada de potencial de Bardeen, com o potencial Newtoniano.

Em geral, a perturbação de um campo escalar $\delta\varphi(\eta, x^i) = \varphi(\eta, x^i) - \varphi_0(\eta)$, onde $\varphi_0(\eta)$ é o seu valor no espaço-tempo de fundo, também não é invariante de calibre. Frente as transformações infinitesimais, esta perturbação se transforma $\delta\varphi(\eta, x^i) \rightarrow \delta\tilde{\varphi}(\eta, x^i) = \delta\varphi(\eta, x^i) - \varphi_0'(\eta)\xi^0$. Da mesma forma que para as variáveis da métrica, podemos definir uma perturbação invariante de calibre

$$\delta\varphi^{\text{inv}} = \delta\varphi + \varphi_0'(B - E').$$

Tendo as quantidades invariantes de calibre definidas acima, vamos agora derivar, a partir das equações de Einstein, as equações de evolução das perturbações.

As equações para as perturbações são calculadas a partir das equações de Einstein utilizando a definição para a métrica perturbada $g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Ao inserirmos esta métrica no lado esquerdo das equações de Einstein encontramos

$$G^\mu{}_\nu = {}^{(0)}G^\mu{}_\nu + \delta G^\mu{}_\nu$$

onde ${}^{(0)}G^\mu{}_\nu$ condensa todos os termos que encontraríamos caso a métrica fosse apenas a métrica de fundo ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$.

Utilizando a métrica no calibre de tempo conforme, eq. (1.32), encontramos para o tensor de Einstein perturbado as seguintes equações

$$\delta G^0{}_0 = \frac{2}{a^2} \left\{ -3\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi + \psi') + \nabla^2 [\psi - \mathcal{H}(B - E')] + 3\mathcal{K}\psi \right\} \quad (1.33)$$

$$\delta G^0{}_j = \frac{2}{a^2} [\mathcal{H}\phi + \psi' - \mathcal{K}(B - E')]_{|j} \quad (1.34)$$

$$\delta G^i{}_j = -\frac{2}{a^2} \left\{ \left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}\phi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' - \mathcal{K}\psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta^i{}_j - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{|kj} \right\} \quad (1.35)$$

onde definimos $D \doteq (\phi - \psi) + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E)'$.

Esses termos de perturbação para o tensor de Einstein não são invariantes de calibre para uma transformação infinitesimal do sistema de coordenadas. Se utilizarmos a definição (1.31), encontramos

$$\begin{aligned} \delta G^0{}_0 &\longrightarrow \delta G^0{}_0 - \left({}^{(0)}G^0{}_0 \right)' \xi^0 \\ \delta G^0{}_j &\longrightarrow \delta G^0{}_j - \left({}^{(0)}G^0{}_0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}G^k{}_k \right) \xi^0_{|j} \\ \delta G^i{}_j &\longrightarrow \delta G^i{}_j - \left({}^{(0)}G^i{}_j \right)' \xi^0 \end{aligned}$$

Construímos assim as quantidades invariantes de calibre,

$$\begin{aligned} (\delta G^{\text{inv}})^0{}_0 &= \delta G^0{}_0 + \left({}^{(0)}G^0{}_0 \right)' (B - E') \\ (\delta G^{\text{inv}})^0{}_j &= \delta G^0{}_j + \left({}^{(0)}G^0{}_0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}G^k{}_k \right) (B - E')_{|j} \\ (\delta G^{\text{inv}})^i{}_j &= \delta G^i{}_j + \left({}^{(0)}G^i{}_j \right)' (B - E') \end{aligned}$$

Podemos definir, da mesma forma que para o tensor de Einstein $G^\mu{}_\nu$, a separação para o tensor energia momentum em uma componente associada ao sistema não perturbado e um termo de correção de primeira ordem nas perturbações $T^\mu{}_\nu = {}^{(0)}T^\mu{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu$.

De uma forma geral, considerando que a topologia do espaço-tempo seja $M^3 \otimes \mathfrak{R}$ onde M^3 é uma variedade tri-espacial arbitrária, podemos decompor o tensor energia-momentum em sua forma irreduzível, Ref.[35], com o auxílio de uma congruência de vetores tipo tempo V^μ

$$T^{\mu\nu} = \rho V^\mu V^\nu + p h^{\mu\nu} + q^{(\mu} V^{\nu)} + \Pi^{\mu\nu},$$

onde definimos o símbolo de simetrização por $A^{(\mu}B^{\nu)} = A^\mu B^\nu + A^\nu B^\mu$ e o tensor $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$ é o projetor sobre a tri-hipersuperfície definida como a superfície normal à congruência V^μ . No caso da métrica ser homogênea e isotrópica, os únicos termos não nulos são ρ e p .

Fazendo uma expansão até primeira ordem para o caso homogêneo e isotrópico temos,

$$T^\mu{}_\nu = {}^{(0)}T^\mu{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu \quad ,$$

com

$$\begin{aligned} {}^{(0)}T^\mu{}_\nu &= \rho V^\mu V_\nu + p h^{\mu\nu} \\ \delta T^\mu{}_\nu &= \delta\rho V^\mu V_\nu + \delta p h^{\mu\nu} + \rho \delta V^{(\mu} V^{\nu)} + p \delta h^{\mu\nu} \end{aligned}$$

As componentes invariantes de calibre para as perturbações do tensor energia-momentum se escrevem

$$\begin{aligned} (\delta T^{\text{inv}})^0{}_0 &= \delta T^0{}_0 + \left({}^{(0)}T^0{}_0 \right)' (B - E') \\ (\delta T^{\text{inv}})^0{}_j &= \delta T^0{}_j + \left({}^{(0)}T^0{}_0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}T^k{}_k \right) (B - E')|_j \\ (\delta T^{\text{inv}})^i{}_j &= \delta T^i{}_j + \left({}^{(0)}T^i{}_j \right)' (B - E') \end{aligned}$$

A partir dessas quantidades invariantes de calibre, as equações de Einstein perturbadas tomam a forma

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{K}\Psi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2}a^2 (\delta T^{\text{inv}})^0{}_0 \quad (1.36)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')|_j = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2}a^2 (\delta T^{\text{inv}})^0{}_j \quad (1.37)$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{K}\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta^i{}_j - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D|_{kj} = -\frac{3\ell_{Pl}^2}{2}a^2 (\delta T^{\text{inv}})^i{}_j \quad (1.38)$$

onde temos $D = \Phi - \Psi$. Para concluirmos esta análise, ainda falta descrever como se escreve o lado direito das equações, ou seja, precisamos estabelecer como se escrevem os termos invariantes de calibre para as perturbações do tensor energia-momentum no caso de considerarmos o conteúdo material descrito por um campo escalar.

1.3.3 Perturbações com campo escalar

Para completar a descrição das equações para as perturbações, vamos descrever os termos de perturbação para o tensor energia-momento. Estamos considerando que a matéria é descrita por um campo escalar minimamente acoplado à gravitação que pode eventualmente estar sujeito a um potencial $V(\varphi)$.

A ação do campo escalar se escreve

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right).$$

Para um Universo homogêneo e isotrópico, o campo escalar também deve ser homogêneo e isotrópico uma vez que as simetrias da métrica impõem sobre o tensor energia-momento da matéria que ele seja diagonal e apenas com densidade de energia ($T^0_0 = \rho$) e pressão isotrópica ($T^i_j = -p \delta^i_j$).

Seguindo a maneira de definirmos a perturbação do campo escalar, podemos escrever $\varphi(\eta, x^i) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\eta, x^i)$, onde φ_0 é o valor do campo para a métrica de fundo. Para o caso do campo escalar no calibre temporal de tempo conforme encontramos,

$$\rho = \frac{1}{2a^2} \dot{\varphi}_0^2 + V(\varphi_0) \quad , \quad (1.39)$$

$$p = \frac{1}{2a^2} \dot{\varphi}_0^2 - V(\varphi_0) \quad . \quad (1.40)$$

Por cálculo direto, encontramos para os termos do tensor energia-momento perturbado

$$\begin{aligned} \delta T^0_0 &= \frac{1}{a^2} \left(-\dot{\varphi}_0^2 \phi + \dot{\varphi}_0 \delta\varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta\varphi \right) \quad , \\ \delta T^0_j &= \frac{1}{a^2} \dot{\varphi}_0 \delta\varphi_{|j} \quad , \\ \delta T^i_j &= \frac{1}{a^2} \left(\dot{\varphi}_0^2 \phi - \dot{\varphi}_0 \delta\varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta\varphi \right) \delta^i_j \quad . \end{aligned}$$

Novamente, estes termos não são invariantes de calibre. Precisamos então redefinir as perturbações para os campos, $\delta\varphi^{\text{inv}} \doteq \delta\varphi + \varphi'_0(B - E')$, para que as equações dinâmicas relacionem apenas quantidades invariantes de calibre. Em termos dessas variáveis invariantes

de calibre, temos

$$\begin{aligned} (\delta T^{\text{inv}})^0_0 &= \frac{1}{a^2} \left(-\varphi_0'^2 \Phi + \varphi_0' (\delta \varphi^{\text{inv}})' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi^{\text{inv}} \right) , \\ (\delta T^{\text{inv}})^0_j &= \frac{1}{a^2} \varphi_0' (\delta \varphi^{\text{inv}})_{|j} , \\ (\delta T^{\text{inv}})^i_j &= \frac{1}{a^2} \left(\varphi_0'^2 \Phi - \varphi_0' (\delta \varphi^{\text{inv}})' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi^{\text{inv}} \right) \delta^i_j . \end{aligned}$$

Note que a parte espacial do tensor energia-momento perturbado é diagonal, $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$. Se tomarmos $i \neq j$ na equação (1.38), temos imediatamente que $D = 0 \implies \Phi = \Psi$. Para todo tensor energia-momento que não apresente pressão anisotrópica, $\Pi^{\mu\nu} = 0$, ou seja, que a condição $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$ seja satisfeita, as perturbações da métrica apresenta apenas um grau de liberdade. Neste caso a métrica perturbada assume a forma,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right\} .$$

Podemos agora estabelecer as equações dinâmicas se levarmos os termos encontrados para o tensor energia-momento perturbado nas equações (1.36)-(1.38). Como trataremos apenas de variáveis invariantes de calibre, por simplicidade notacional, iremos abandonar o índice “inv” nos termos $\delta \varphi^{\text{inv}}$. Para simplificarmos as expressões iremos usar a equação de fundo $\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 - \mathcal{K} = -\frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \varphi_0'^2$. O sistema que estabelece a evolução para as perturbações escalares num Universo permeado por um campo escalar com um potencial de auto-interação $V(\varphi)$ é

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{K}\Phi - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \left(\varphi_0' \delta \varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) , \quad (1.41)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \varphi_0' \delta \varphi , \quad (1.42)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \left(\varphi_0' \delta \varphi' - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) . \quad (1.43)$$

Este sistema deve ser completado pela equação de Klein-Gordon perturbada, $\square \varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0$. Se usarmos a equação de Klein-Gordon não perturbada para simplificá-la temos então,

$$\delta \varphi'' + 2\mathcal{H}\delta \varphi' - \nabla^2 \delta \varphi + a^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \delta \varphi - 4\varphi_0' \Phi' + 2a^2 \frac{dV}{d\varphi} \Phi = 0 .$$

Nesta equação, o termo ∇^2 é um objeto geométrico definido com a métrica de fundo. As equações (1.41)-(1.43) podem ser combinadas para gerarmos um equação que só dependa do potencial de Bardeen Φ e de funções do sistema não perturbado. Para isto, basta subtraírmos

a eq.(1.43) de eq.(1.41), usarmos a equação de vínculo eq.(1.42) e a equação de Klein-Gordon não perturbada. Esta separação pode ser feita pois a equação de vínculo eq.(1.42) relaciona o potencial de Bardeen Φ e a perturbação do campo escalar $\delta\varphi$, $\delta\varphi = \frac{2}{3\ell_{Pl}^2} \frac{\Phi' + \mathcal{H}\Phi}{\varphi_0'}$, nos mostrando que este sistema possui apenas um grau de liberdade que podemos escolher descrevê-lo através do potencial de Bardeen. Depois destas simplificações, a equação final para a evolução das perturbações assume a forma

$$\Phi'' + 2 \left(\mathcal{H} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} \right) \Phi' - \nabla^2 \Phi + 2 \left(-2\mathcal{K} + \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} \right) \Phi = 0 \quad . \quad (1.44)$$

É importante notar que para derivarmos esta equação assumimos categoricamente que $\varphi_0' \neq 0$. Caso queiramos estudar sistemas onde, por exemplo, o campo escalar oscile no mínimo de um potencial, como é o caso da fase de pré-aquecimento depois da inflação, não poderemos usar esta equação.

Se aplicarmos uma transformada de Fourier para o espaço dos comprimentos de onda \vec{k} , podemos substituir $\nabla^2 \Phi$ por $k^2 \Phi$, entendido agora que $\Phi = \Phi(\eta, k)$. A equação (1.44) pode ser simplificada por uma mudança de variável Ref.'s [36, 38] definida por

$$u \doteq \frac{2}{3\ell_{Pl}^2 (\rho + p)^{1/2}} \Phi = \frac{2}{3\ell_{Pl}} \frac{a^2 \theta}{\mathcal{H}} \Phi \quad , \quad (1.45)$$

$$\theta \doteq \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho + p} \right) \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{\ell_{Pl}^2 \rho a^2} \right)} \quad . \quad (1.46)$$

Com relação a esta nova variável, a equação para o potencial de Bardeen se escreve como

$$u'' + (k^2 - V_u) u = 0 \quad , \quad (1.47)$$

onde definimos o potencial V_u e o termo associado à velocidade do som no meio, c_s , por

$$V_u \equiv \frac{\theta''}{\theta} + 3\mathcal{K}(1 - c_s^2) \quad , \quad (1.48)$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = -\frac{1}{3} \left(1 + 2 \frac{\varphi_0''}{\mathcal{H}\varphi_0'} \right) \quad . \quad (1.49)$$

A equação (1.47) possui dois limites interessantes. No limite de pequenos comprimentos de onda, $k^2 \gg V_u$, a variável u se comporta como uma onda plana

$$u \propto e^{ik\eta} \quad .$$

No outro limite de longos comprimentos de onda, $k^2 \ll V_u$, temos que o termo do potencial domina. Se neste limite o termo de curvatura puder ser desprezado, ou seja, considerando

agora apenas o caso onde podemos fazer $\mathcal{K} = 0$, a solução formal para a variável u se escreve Ref.'s [36]-[38]

$$u \approx C_1 \theta + C_2 \theta \int \frac{d\eta}{\theta^2} = \frac{\mathcal{C}(k)}{\varphi'_0} \left(\frac{1}{a} \int d\eta a^2 \right)' .$$

Neste limite o potencial de Bardeen é escrito como a soma de dois termos,

$$\Phi \approx \frac{\mathcal{C}(k)}{a} \left(\frac{1}{a} \int d\eta a^2 \right)' = \mathcal{C}(k) \left(1 - \frac{H}{a} \int dt a(t) \right) . \quad (1.50)$$

Para concluirmos esta seção vamos mencionar que, analisando a equação (1.44), é possível construir uma quantidade conservada para o limite de longos comprimentos de onda Ref.'s [39]-[42] para qualquer um dos casos $\mathcal{K} = \pm 1, 0$. Definindo a variável,

$$\zeta_{BST} \doteq \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^2 \rho}{(\rho + p)(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})} \times \left\{ \frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \left[1 - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \Phi \right\} + \Phi \quad (1.51)$$

temos que a sua derivada temporal, usando a equação (1.44) e a equação de Klein-Gordon não perturbada, pode ser escrita como

$$\zeta'_{BST} = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^3 \rho}{(\rho + p)(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \left(\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \Phi \right) + \frac{3\ell_{Pl}^2 a^2 \tau \delta S}{2 \mathcal{H}^2} \right] .$$

O termo δS representa a perturbação de entropia. Para um fluido, a pressão é em geral função de duas variáveis termodinâmicas, por exemplo, da densidade de energia e da entropia $p = p(\rho, S)$. Se calcularmos a sua encontramos $\delta p = \tau \delta S + c_s^2 \delta \rho$ onde $\tau \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta S} \right)_\rho$ e $c_s^2 \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_S$. Pela definição a partir do tensor energia-momento para um campo escalar, podemos calcular $\delta \rho$ e δp diretamente de suas definições eq.(1.39)-(1.40)

$$\delta \rho = \frac{1}{a^2} \varphi' \delta \varphi' + \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \quad , \quad \delta p = \frac{1}{a^2} \varphi' \delta \varphi' - \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \quad .$$

A partir destas expressões, e usando as equações (1.41) e (1.42), podemos calcular a perturbação não-adiabática

$$\tau \delta S = \delta p - c_s^2 \delta \rho = (1 - c_s^2) (3\mathcal{K} - k^2) \Phi$$

No limite de longos comprimentos de onda, i.e. escalas muito maiores do que o raio de Hubble ($\frac{k}{\mathcal{H}} \rightarrow 0$), e para perturbações adiabáticas $\tau \delta S \rightarrow 0$, a quantidade ζ_{BST} , definida em (1.51), não varia no tempo. Esta quantidade fornece uma medida da perturbação da métrica de forma independente do folheamento das hipersuperfícies Ref.[43] e é útil para estudarmos

o comportamento das perturbações, por exemplo, durante a fase de re-aquecimento onde, baseando-se apenas nesta quantidade conservada, não precisamos nos deter nos detalhes do mecanismo de re-aquecimento. Em termos da perturbação de curvatura, ζ_{BST} , temos que a dependência em k do espectro Ref. [36, 45] é dada por

$$\mathcal{P}_\zeta = k^3 \|\zeta_{BST}\|^2 \quad (1.52)$$

Esta definição é usada para calcularmos o espectro de potência do modelo em questão e analisarmos a sua compatibilidade com os dados observacionais advindos da radiação cósmica de fundo.

Referências Bibliográficas

- [1] P.A.M Dirac, “*Lectures on Quantum Mechanics*”, ed. Dover (2001).
- [2] Di Stefano; Physical Review D 27, 1752 (1983).
- [3] Alejandro Cabo; Physical Review D 42, 2726 (1990).
- [4] Goldstein; “*Classical Mechanics*” 3rd ed. Addison Wesley, cap.9 (2002).
- [5] P.G. Bergmann; Physical Review 98,531 (1955).
- [6] J. Anderson, P.G. Bergmann; Physical Review 83,1018 (1951).
- [7] P.A.M Dirac; Canadian Journal of Mathematics 2,129 (1950).
- [8] K. Sundermeyer; “*Constrained Dynamics with Application to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String*”, Lecture notes in physics 168 ed. springer-Verlag,Berlim (1982).
- [9] D.Bohm; Physical Review 85, 166 (1952).
- [10] L. de Broglie; Compt. Rend. 184, 447 (1926).
- [11] L. de Broglie; Compt. Rend. 184, 273 (1927).
- [12] L. de Broglie; Compt. Rend. 185, 380(1927).
- [13] H. Everett; Reviews of Modern Physics 29-3, 454 (1957).
- [14] N. Pinto- Neto; VIII BSCG, 299 (1995).
- [15] D. Bohm; Physics Reports 144- 6, 323 (1987).
- [16] C. Philippidis, C. Dewdney, B. J. Hiley; Nuovo Cimento B52, 15 (1979).
- [17] J. Bell; Physics World, pág. 33 (August 1990).
- [18] D. Bohm, B. Hiley; Foundation of Physics-Vol. 14- n 3, 255 (1984).
- [19] P. Holland; “*The Quantum Theory of Motion*”, ed. Cambrigde (2000).
- [20] D. Bohm, B. Hiley, P. N. Kaloyerou, Physics Reports 144- n.6, 349 (1987).
- [21] D. Bohm, Physical Review 85, 180 (1952).
- [22] P.G. Bergmann; Physical Review 75, 680 (1949).
- [23] P.A.M. Dirac; Canadian Journal of Mathematics 3, 1 (1951).
- [24] P.G. Bergmann; Helv. Phys. Acta. Suppl. IV, 79 (1956).
- [25] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner; “*Gravitation: An Introduction to Current Research*”, L. Witten, ed. Wiley- NY (1962).
- [26] S. W. Hawking, The Astrophysical Journal **145**, 544 (1966).

- [27] G. F. Ellis e M. Bruni; Physical Review **D40**, 1804 (1989).
- [28] G. F. Ellis, J. Hwang, e M. Bruni; Physical Review **D40**, 1819 (1989).
- [29] J. M. Salim; tese de doutorado “*Equações quase-maxwellianas da gravitação*”, CBPF (1982).
- [30] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, e R. Klippert; Physical Review **D51**, 450 (1995).
- [31] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, e R. Klippert; Physical Review **D52**, 730 (1995).
- [32] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger, Physics Reports **215**, 203 (1992).
- [33] J. Bardeen, Bull. Am. Astron. Soc. **73** (1968).
- [34] J. Bardeen, Physical Review D **22**,1882 (1980).
- [35] M. Novello; “**Cosmologia Relativística**”, II BSCG vol.1, 203 (1979) - disponível no endereço [http : //www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/ind_cosmologia_classica.html](http://www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/ind_cosmologia_classica.html)
- [36] P. Peter e J. P. Uzan; “*Cosmologie primordiale*”, ed. Belin (2005).
- [37] J. Martin, P. Peter; Physical Review **D68**, 103517 (2003).
- [38] V. Mukhanov; “*Physical Foundations of Cosmology*”, ed. Cambridge University Press (2005).
- [39] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 679 (1983).
- [40] J. A. Frieman and M. S. Turner, Phys. Rev. D **30**, 265 (1984).
- [41] R. Brandenberger and R. Kahn, Phys. Rev. D **29**, 2172 (1984).
- [42] D. H. Lyth, Phys. Rev. D **31**, 1792 (1985).
- [43] J. Martin e D. J. Schwarz; Physical Review **D57-6**, 3302 (1998).
- [44] T. Padmanabhan; “*Structure Formation in the Universe*”, ed. Cambridge University Press (1993).
- [45] J. A. Peacock; “*Cosmological physics*”, ed. Cambridge University Press (1999).