Descrição de Fluidos através de Potencial de Velocidade*

FELIPE TOVAR FALCIANO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro - RJ

* Texto extraído da dissertação de mestrado defendida em Março de 2004.

Descrição de Fluidos através de Potencial de Velocidade

No início da década de 70 Bernard F. Schutz[1,2] desenvolveu um formalismo onde o campo de velocidades de um fluido é escrito em termos de seis potenciais associados a grandezas termodinâmicas. Este formalismo esta fundamentado no teorema de Pfaff que garante ser suficiente apenas quatro potenciais para descrever a quadri-velocidade. Para facilitar a interpretação física dos potenciais costuma-se usar seis potenciais. As componentes covariantes da quadri-velocidade podem ser representadas através de

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}\left(\phi_{,\nu} + \alpha\, \beta_{,\nu} + \theta\, s_{,\nu}\right)$$

onde μ é a entalpia específica ou massa inercial específica, e s a entropia específica. Talvez fosse interessante rever rapidamente alguns conceitos termodinâmicos.

Seja um fluido perfeito de um componente com densidade de partículas n e número total N. Vamos definir densidade de massa inercial (ρ_0) como sendo o produto da massa inercial de uma partícula ($\overline{m}$) pela densidade de partículas. A energia interna específica (Π) é definida como a diferença entre a densidade de energia total e a densidade de massa inercial, de forma a termos $\Pi \doteq \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$, e a entalpia específica ou massa inercial específica (μ) é dada por $\mu \doteq \frac{\rho+p}{\rho_0}$.

De posse dessas definições, usaremos as leis da termodinâmica para expressar a pressão do fluido como função da entropia específica e da entalpia específica.

Primeira Lei: $\delta Q = dE + p\, dV = \rho\, dV + V\, d\rho + p\, dV = V\, d\rho + (\rho + p)\; dV$

Definição da entropia: $\delta Q = T\, dS$

[1]Bernard F. Schutz; Physical Review D, Vol.2 n-12, pag. 2762 (1970)
[2]Bernard F. Schutz; Physical Review D, Vol.4 n-12, pag. 3559 (1971)

Temos também as seguintes relações:

- $V = \frac{N}{n} \Rightarrow dV = -\frac{V}{n} dn$
- $\Pi = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Rightarrow d\rho = (1 + \Pi)\, d\rho_0 + \rho_0 d\Pi$
- $\frac{dn}{n} = \frac{d\rho_0}{\rho_0}$
- $d\mu = d\left(\frac{\rho + p}{\rho_0}\right) = d\Pi + P\, d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) + \frac{1}{\rho_0} dp$

combinando tudo encontramos:

$$T\, dS = \frac{N}{n}\left(d\rho - (\rho + p)\,\frac{dn}{n}\right) = N\overline{m}\left(d\Pi + p\, d\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T\, ds = d\Pi + p\, d\left(\frac{1}{\rho_0}\right)$$

e finalmente,

$$dp = \rho_0\, d\mu - \rho_0 T\, ds$$

Vamos considerar um fluido com equação de estado $p = \lambda\, \rho = (\gamma - 1)\,(1 + \Pi)\, \rho_0$ ($\gamma = 1 + \lambda$ é constante).

Neste caso podemos integrar a primeira lei da termodinâmica,

$$T\, ds = d\Pi + p\, d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = d\,(1 + \Pi) + (\gamma - 1)\,(1 + \Pi)\, \rho_0 d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) =$$
$$(1 + \Pi)\left[d \ln (1 + \Pi) - (\gamma - 1)\, d \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_{0r}}\right)\right]$$

onde ρ_{0r} é uma constante de integração para tornar o ln adimensional.

Note que:

$$\frac{1 + \Pi}{T} = \frac{\rho}{T\, \rho_0} = \frac{\rho\, k\, r}{T\, \rho_0\, k\, r} = \text{constante} = s_0$$

onde k é a constante de Boltzmann e r é característico de cada fluido. Dizemos que este calculo é constante pois para um fluido perfeito $k\, r\, T$ é proporcional a energia.

Temos então após a integração que

$$\exp\left\{\frac{s}{s_0}\right\} = (1 + \Pi)\left(\frac{\rho_0}{\rho_{0r}}\right)^{1-\gamma} \Rightarrow \rho_0 = \rho_{0r} \exp\left(\frac{s}{(1 - \gamma)\, s_0}\right)(1 + \Pi)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

e lembrando que $\rho = \rho_0\,(1 + \Pi)$ e $\mu = \gamma\,(1 + \Pi)$

$$\rho = \rho_{0r} \exp\left(\frac{s}{(1 - \gamma)\, s_0}\right)\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Equações de movimento e tensor energia-momento

Um fluido formado de apenas um tipo de constituinte é completamente definido pela sua equação de estado,$p = p\,(\mu, s)$, e pelo seu tensor energia-momento, $T^{\mu\nu} = p\,g^{\mu\nu} + (p+\rho)\,U^{\mu}U^{\nu} = p\,g^{\mu\nu} + \rho_0\mu\,U^{\mu}U^{\nu}$.

Estamos assumindo que o campo de velocidades é normalizado ($U^{\mu}U_{\mu} = -1$).[3] Num sistema de coordenada comóvel o tensor é diagonal, com $T^{\mu\nu} =$ diag(ρ,p,p,p), já que o fluido não apresenta viscosidade e nem condução de calor.

A condição de conservação do número de partículas pode ser expressa

$$(\rho_0\,U^{\alpha})\,;\alpha = 0$$

e as equações de movimento são dadas pela imposição do tensor energia-momento ter divergência nula. De fato, impondo $T^{\alpha\beta};\beta = 0$ e projetando perpendicular e sobre a hipersuperfície encontramos:

$$U_{\alpha}T^{\alpha\beta}_{;\beta} = U^{\alpha}\,(p_{,\alpha} - \rho_0\,\mu_{,\alpha}) = -U^{\alpha}\,(\rho_0\,T\,s_{,\alpha}) = 0 \;\Rightarrow\; U^{\alpha}s_{,\alpha} = 0$$
$$h_{\alpha\sigma}T^{\sigma\beta}_{;\beta} = h^{\sigma}_{\alpha}\left(p_{,\sigma} + \rho_0\mu\,U_{\sigma\,;\beta}U^{\beta}\right) = 0 \;\Rightarrow\; h^{\sigma}_{\alpha}p_{,\sigma} = \rho_0\,\mu\,U_{\alpha\,;\beta}U^{\beta}$$

A primeira equação nos mostra que para um fluido perfeito a entropia se conserva ao longo das linhas de universo do elemento de fluido, o que esta de pleno acordo com o fato de não haver fluxo de calor(T ds=δq).

A segunda equação nada mais é do que a conhecida lei de força para um fluido relativístico. Se tomarmos $U^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{0}$ encontramos,

$$-\vec{\nabla}p = \rho_0\mu\,\frac{d\vec{v}}{d\tau} = (\rho + p)\,\frac{d\vec{v}}{d\tau}$$

onde $\vec{v}$ é a tri-velocidade e τ o tempo próprio.[4].

[3]Isto implica que $U^{\mu}U_{\mu;\nu} = 0$

[4]Esta equação está de acordo com a interpretação da entalpia específica ($\mu = \frac{\rho+p}{\rho_0}$) como massa inercial específica

Seja o campo de velocidade,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}\left(\phi_{,\nu} + \theta\, s_{,\nu}\right)$$

onde s e μ são respectivamente a entropia e a energia interna específicas. As funções ϕ e θ serão esclarecidas mais adiante.

Em geral também se introduz um termo $\alpha \cdot \beta_{,\nu}$, no entanto este termo esta associado ao rotacional do campo, que para o nosso caso é zero.

Vamos impor que este campo seja normalizado, ou seja, para qualquer ponto temos

$$g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -1 \Rightarrow \mu^2 = -g^{\alpha\beta}\left(\phi_{,\alpha} + \theta\, s_{,\alpha}\right)\left(\phi_{,\beta} + \theta\, s_{,\beta}\right)$$

Conseguimos então escrever a entropia específica como função da métrica e das três funções ϕ, θ, e s.

A proposta é mostrar que com este campo de velocidades e a lagrangiana $L = \int d^3x\sqrt{-g}\,(R + 16\pi\, p)$, recuperamos todas as equações conhecidas para um fluido perfeito. Para tanto temos que variar a ação com relação a métrica e as funções ϕ, θ e s.

Seja a ação $S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(R + 16\pi\, p)$, as suas variações com relação aos campos nos fornecem,

- $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\, R\right) = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\sqrt{-g}$
- $\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}\left(\sqrt{-g}\, p\right) = -\frac{1}{2} p\, g_{\alpha\beta}\sqrt{-g} + \frac{\delta p}{\delta \mu}\frac{\delta \mu}{\delta g^{\alpha\beta}}\sqrt{-g}$

Da primeira equação da termodinâmica temos que $\frac{\delta p}{\delta \mu} = \rho_0$, e da normalização do campo de velocidades $\frac{\delta \mu}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{\mu}{2} U_\alpha U_\beta$.

Logo,

$$\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}\left(\sqrt{-g}\, p\right) = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\left[p\, g_{\alpha\beta} + (\rho + p)\, U_\alpha U_\beta\right]$$

Da variação da ação com relação a métrica chegamos então a conhecida equação de Einstein para um fluido perfeito:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \;\Rightarrow\; R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g_{\alpha\beta} = 8\pi \left(p g_{\alpha\beta} + (\rho + p)\, U_\alpha U_\beta\right)$$

Por procedimento análogo encontramos para a variação com relação aos outros campos.

- $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow \left(\rho_0 U^\beta\right)_{;\beta} = 0$ conservação do número de partículas
- $\frac{\delta S}{\delta \theta} = 0 \Rightarrow s_{,\alpha} U^\alpha = 0$ entropia por partícula é conservada
- $\frac{\delta S}{\delta s} = 0 \Rightarrow T = \theta_{,\alpha} U^\alpha$ definição da temperatura a partir do campo θ

Hamiltoniana associada

Anteriormente estabelecemos que a lagrangiana $L = \int d^3x \sqrt{-g}\,(R + 16\pi\, p)$, conjuntamente ao campo de velocidade $U_\nu = \frac{1}{\mu}\,(\phi, \nu + \theta\, s, \nu)$ define as equações de movimento para um fluido perfeito. Para a construção da Hamiltoniana precisamos dos momenta canonicamente conjugados as variáveis ϕ, θ, e s, para a matéria e a $g_{\alpha\beta}$ para a gravitação.

Por cálculo direto encontramos,

- $P_\phi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = -\sqrt{-g}\rho_0 U^0$
- $P_s \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{s}} = -\sqrt{-g}\rho_0 U^0\, \theta = \theta\, P_\phi$
- $P_\theta \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = 0$

A densidade Hamiltoniana, $H \equiv \sum_i P_i \dot{q}_i - L$, pode ser calculada e encontramos $H = \mu\, U_0 P_\phi - \sqrt{-g}p = -\sqrt{-g}\left[p + (\rho + p)\, U_0 U^0\right] = \sqrt{-g} T^{\ 0}_{\ \ 0}$, como deveria ser.

Para espaços-tempo que são do tipo $R \otimes M^3$, onde M^3 é uma superfície espacial arbitrária, a forma da métrica no elemento de linha se escreve,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right)$$

onde N é a chamada função lapso e N^i são as funções deslocamento, todas podendo depender tanto de t quanto de x^i.

Quando nos restringimos a métricas homogêneas e isotrópicas, a métrica assume uma forma mais simples onde $N^i = 0$ e suas componentes só dependem do tempo cosmológico.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + a^2(t)\, w_{ij} dx^i dx^j \\ w_{ij} dx^i dx^j &= \frac{dr^2}{1 - k\, r^2} + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2(\theta)\, d\phi^2 \right) \end{aligned}$$

Ao estudar a gravitação através do princípio variacional, propagamos a métrica da hipersuperfície espacial e impomos que a sua variação seja nula nos extremos, ou seja, entre dois tempos fixos arbitrários. O espaço formado por todas as métricas possíveis é chamado de superespaço. O superespaço, embora seja de fato o objeto de estudo, muitas vezes não é tratável, e como primeira aproximação podemos impor certas simetrias fisicamente aceitáveis. Um subconjunto do superespaço, chamado de minisuperespaço, é formado por métricas homogêneas e isotrópicas. Os graus de liberdade no caso de minisuperespaços caem de $3 \times \infty^3$ (três graus de liberdade para cada ponto do espaço) para apenas 3 já que o espaço é homogêneo e isotrópico.

Em geral, impor certas simetrias e depois calcular as equações dinâmicas através do princípio variacional é <u>diferente</u> de calcularmos as equações de movimento e depois impormos as mesmas simetrias. No entanto, para o caso de métricas cuja parte espacial é homogênea e isotrópica, com elemento de linha $ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t)\, w_{ij} dx^i dx^j$, e um fluido perfeito, a variação comuta com a imposição de simetrias desde que <u>não</u> fixemos o calibre temporal (função lapso). Isto se deve ao fato de não perdermos informação nenhuma ao impormos as simetrias antes da variação.

Fazendo referência as equações de Einstein, temos

1. $G^0_{\ 0} = T^0_{\ 0}$

2. $G^0_{\ i} = T^0_{\ i}$

3. $G^i_{\ j} = T^i_{\ j}$

A função lapso é importante para garantir a primeira equação. A segunda é satisfeita trivialmente, pois como o fluido é perfeito $T^0_{\ i}$ é zero (não há fluxo de calor nem de momento), e devido as simetrias $G^0_{\ i}$ também é zero. Isto não ocorre por exemplo num espaço-tempo não-homogêneo onde esta equação acaba por impor vínculos na métrica já que $T^0_{\ i} = 0$ mas $G^0_{\ i}$ não é necessariamente zero.

Para a métrica em questão, os termos relacionados aos potenciais se escrevem:

- $\mu^2 = -g^{\alpha\beta}\left(\phi_{,\alpha} + \theta\, s_{,\alpha}\right)\left(\phi_{,\beta} + \theta\, s_{,\beta}\right) = -g^{00}\left(\dot{\phi} + \theta\,\dot{s}\right)^2 =$
  $= \frac{1}{N^2}\left(\dot{\phi} + \theta\,\dot{s}\right)^2 \Rightarrow \mu\, N = \left(\dot{\phi} + \theta\,\dot{s}\right) \Rightarrow U_0 = N \Rightarrow U^0 = -\frac{1}{N}$
- $\sqrt{-g} = N\, a^3\sqrt{w}$ w é o determinante de w_{ij}

lembrando que

$$\frac{\mu}{\gamma} = \rho_0^{(\gamma-1)}\rho_{0r}^{(1-\gamma)}\exp^{\left(\frac{S}{S_0}\right)} = \left(\frac{P_\phi\, N}{\sqrt{-g}}\right)^{\gamma-1}\rho_{0r}^{(1-\gamma)}\exp^{\left(\frac{S}{S_0}\right)}$$

temos então para a densidade hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_{mat} &= -\sqrt{-g}\left(p + (\rho + p)\, U_0 U^0\right) = \sqrt{-g}\rho = N\frac{\mu}{\gamma}P_\phi \\ &= N\, a^{-3(\gamma-1)}\rho_{0r}^{(1-\gamma)}\exp^{\frac{S}{S_0}} P_\phi^\gamma w^{\frac{(1-\gamma)}{2}} \end{aligned}$$

Como o único termo que depende de posição é o w (determinante da parte espacial), podemos normalizar a integral em todo espaço de forma a absorver este termo. Assim temos para a hamiltoniana[5]

$$H_{mat} = N\, a^{-3(\gamma-1)}\rho_{0r}^{(1-\gamma)}\exp^{\frac{S}{S_0}} P_\phi^\gamma$$

[5]Note que P_s não aparece na hamiltoniana, o que implica que s é constante e assim $\dot{P}_s$ também é constante.

Vamos fazer uma transformação canônica para simplificar a forma da hamiltoniana. Definamos,

- $T \equiv -P_s \exp^{-\frac{S}{S_0}} \rho_{0r}^{(\gamma-1)} s_0 P_\phi^{-\gamma}$
- $\xi \equiv \left(\phi + \frac{\gamma\, s_0\, P_s}{P_\phi}\right)$
- $P_T \equiv \exp^{\frac{S}{S_0}} \rho_{0r}^{(1-\gamma)} P_\phi^{\gamma}$
- $P_\xi \equiv P_\phi$

Nestas novas variáveis a hamiltoniana da matéria se escreve:

$$H_{mat} = N\, P_T\, a^{-3(\gamma-1)}$$

Note que a variável T é proporcional ao tempo, já que P_ϕ, s, e $\dot{P}_s$ são constantes, ou seja P_s é linear com o tempo. Desta forma a variável T pode ser tomada naturalmente como o tempo. A hamiltoniana é linear no momento canonicamente conjugado ao tempo. Este é um bom critério para estabelecer qual variável será tratada como tempo, lembre-se que na equação de Schrődinger a derivada com relação ao tempo é de primeira ordem e as demais de segunda ordem. O problema da equação de Wheeler–DeWitt, equação encontrada através da quantização canônica, é justamente não aparecer nenhum momento canônico linear na densidade hamiltoniana. Esta equação que deveria ser a equação dinâmica da teoria aparentemente não evolui.

Tendo analisado a densidade hamiltoniana da matéria, vamos agora considerar a parte associada a gravitação para este modelo de minisuperespaço.

Fazendo alusão a seção anterior, podemos calcular as quantidades relevantes utilizando a métrica deste minisuperespaço.

$$h_{ij} = a^2\, w_{ij} \;\Rightarrow\; \dot{h}_{ij} = 2\, a\, \dot{a}\, w_{ij}$$
$$N_i = 0$$
$$K_{ij} = -\frac{1}{2\,N}\dot{h}_{ij} = -\frac{a\,\dot{a}}{N} w_{ij}$$
$$\sqrt{-g} = N\,\sqrt{h} = N\,a^3\,\sqrt{w}$$

Note que,

$$\sqrt{h}\dot{k} = \left(\sqrt{h}\,k\right)^{\cdot} + N\,\sqrt{h}k^2$$
$$\sqrt{h}h^{ab}N_{,ab} = \left(\sqrt{h}h^{ab}N_{,a}\right)_{,b}$$

Desta forma temos,

$$\sqrt{-g}\,R = N\,\sqrt{h}\left(k_{lm}k^{lm} - k^2 +^3 R\right)$$

Para chegar a este resultado os termos de superfície foram descartados.[6]

Como a parte espacial é maximalmente simétrica o escalar de curvatura é constante ${}^3R \equiv h^{ij}R_{ij} = \frac{w^{ij}}{a^2}R_{ij} = 6\,a^{-2}\epsilon$, onde ϵ pode assumir os valores 0, ± 1.

Então segue que

$$\sqrt{-g}\,R = 6\sqrt{w}\left(-\frac{a\dot{a}^2}{N} + N\,a\,\epsilon\right).$$

Da mesma forma que fizemos com a lagrangiana da matéria, vamos normalizar e integrar no espaço para encontrar a lagrangiana

$$L_g \equiv \int d^3x\,L = 3N\left(a\epsilon - \frac{a\dot{a}^2}{N^2}\right) \;\Rightarrow\; P_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 6\frac{a\dot{a}}{N}$$

e finalmente encontramos a hamiltoniana da gravitação

$$H_g = -N\left(\frac{P_a^2}{12\,a} + 3a\,\epsilon\right).$$

As variáveis dinâmicas desse formalismo são N, a, e T. Note que como T não aparece na hamiltoniana, T é uma variável cíclica, ou seja $\dot{P}_T$ é zero. Outro fato importante é não termos a variável canonicamente associada a N. A origem desta questão tem que ser esclarecida através da própria lagrangiana. A lagrangiana não depende de $\dot{N}$, o que torna o momento $P_N \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0$. Esta equação nos mostra um vínculo primário. Devemos

[6]Existe também um termo de derivada temporal que a princípio poderia dar contribuição não nula, mas como discutido anteriormente não levamos este termo em consideração assumindo que a "boa" ação não possui este termo.

então acrescer um termo λP_N na hamiltoniana (λ é um multiplicador de lagrange).

$$H_T = N\,H + \lambda\,P_N \qquad , \text{sendo } H = -\frac{P_a^2}{12a} - 3\,a\,\epsilon + P_T a^{-3(\gamma-1)}.$$

Por consistência, o vínculo deve valer para todos os instantes

$$\dot{P}_N = 0 \;\Rightarrow\; H = 0$$

Este é um novo vínculo que é satisfeito trivialmente.

A evolução dinâmica será dada por:

- $\dot{a} = \{a, H_T\} = -\frac{NP_a}{6a}$
- $\dot{N} = \lambda$
- $\dot{T} = Na^{-3(\gamma-1)}$
- $\dot{P}_a = \frac{NP_a^2}{12a^2} - 3N\epsilon - 3\,(\gamma-1)\,P_T N\,a^{-3\gamma+4}$
- $\dot{P}_N = H = 0$
- $\dot{P}_T = 0$

Obs: O vínculo $H = 0$ implica na equação de Friedmann:

$$H = 0 \Rightarrow \frac{P_a^2}{12a} = \frac{P_T}{a^{3(\gamma-1)}} - 3a\epsilon \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} = \frac{P_T}{3}a^{-3\gamma} - \frac{\epsilon}{a^2}$$

Em cosmologia costuma-se usar o calibre onde o termo $g_{00} = -1$, que é equivalente a fazer N=1. Neste calibre, a equação de Friedmann se escreve:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = K\,\rho - \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{K}{a^{3\gamma}} - \frac{\epsilon}{a^2}$$

onde ρ é a densidade do fluido perfeito, e K é constante. Assim vemos que classicamente a variável P_T é proporcional a quantidade de matéria total do fluido.

Por outro lado a variável T funciona como um tempo. Se escolhermos um outro calibre onde $N = a^{3(\gamma-1)}$ encontraremos que

$$\dot{T} = Na^{-3(\gamma-1)} = 1 \Rightarrow T = t + \mathrm{const}$$

Esta escolha é perfeitamente cabível inclusive pela variável N funcionar como um multiplicador de Lagrange. De fato, $\dot{N} = \lambda$ que é arbitrário.