IX Escola do CBPF

Curso:

Cosmologia: Teoria e Observação

Professores: Sandro Dias Pinto Vitenti

e Mariana Penna Lima

Instituição: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 16 - 27 de julho de 2012.

Introdução

Neste curso faremos uma breve revisão dos modelos de Friedmann [1–11]. Nesses modelos impomos homogeneidade e isotropia nas hipersuperfícies espacias. Essa imposição simplifica grandemente a métrica do espaço-tempo, reduzindo a um o número de funções a serem determinadas. Usualmente escreve-se a métrica em um sistema de coordenadas adaptado às simetrias do problema e obtém-se todos os resultados diretamente nesse sistema. Porém, esse tratamento possui duas desvantagens. Primeiramente, é difícil estendê-lo pois seria necessário partir de um sistema de coordenadas diferente, que não é óbvio, a priori. Em segundo lugar, a utilização de um sistema de coordenadas complica os resultados, já que isso gera uma mistura entre as características do próprio sistema de coordenadas e as características geométricas do problema tratado.

Portanto, faremos esse estudo de forma covariante e evitando utilizar coordenadas. Construiremos os modelos de Friedmann utilizando ferramentas geométricas independentes de sistema de coordenadas. Na primeira seção fixamos as notações utilizadas durante o curso e definimos os conceitos básicos utilizados (para mais detalhes veja [12–14]). Na Sec. 2 discutiremos a foliação do espaço e como o tensor de Riemann pode ser escrito em termos das curvaturas extrínseca e intrínseca. Faremos uma breve discussão sobre simetrias em variedades, na Sec. 3, e como elas podem ser usadas para descrever a geometria da variedade. No fim desta seção nos restringiremos as seções homogêneas e isotrópicas. Essas seções são baseadas na tese [15] e nos livros [12, 14], a discussão das simetrias nas seções espaciais é detalhada em [16–18].

1 Definições Gerais

O espaço-tempo é descrito por uma variedade M onde, em cada ponto p, define-se o conjunto de todos os vetores tangentes a esse ponto como um espaço vetorial V_p. A união de todos os espaços vetoriais V_p definidos em cada ponto p da variedade M é chamado fibrado tangente TM. Analogamente, para cada espaço V_p, define-se o espaço de todos os funcionais lineares em V_p como V_p^*, de forma que sua união fornece o espaço cotangente T^*M. O produto tensorial arbitrário desses espaços forma o espaço dos tensores em M o qual denotamos como (n, m), onde n é o número de espaços tangentes e m de espaços cotangentes presentes no produto. Chamamos de índices contravariantes os que referem-

se aos vetores e covariantes os referidos aos covetores. Na variedade M definimos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de assinatura $(-1,1,1,1)$, formando assim uma variedade de Lorentz ou pseudo-riemanniana.

Partindo de um sistema de coordenadas em um subconjunto aberto da variedade, $x^\mu : U \subset M \to \mathbb{R}^n$, denotamos $\vec{u} \equiv u^\mu \partial_\mu$ o vetor cujas componentes na base $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ são dadas por u^μ, e $\mathbf{w} \equiv w_\mu \mathrm{d}x^\mu$ a um-forma com componentes w_μ na base $\mathrm{d}x^\mu$. Os vetores possuem um produto natural associado chamado comutador, *i.e.,*

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu\right) \partial_\nu \equiv [\vec{u}, \vec{v}]^\nu \partial_\nu, \tag{1}$$

do tipo $[,] : TM \times TM \to TM$. Utilizaremos também o símbolo $[A, B] = AB - BA$ para quaisquer operadores diferenciais A e B. Note que no caso geral o comutador não forma necessariamente uma álgebra.

Dado um grupo de difeomorfismos com um parâmetro $\phi_\lambda : \mathbb{R} \times M \to M$, temos que, para cada valor fixo do parâmetro λ, ϕ_λ é um difeomorfismo, $\phi_{\lambda_1} \circ \phi_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1 + \lambda_2}$, e ϕ_0 é a operação identidade. Partindo de um ponto fixo $p \in M$, temos que $\phi_\lambda(p)$ define uma curva na variedade M e, portanto, podemos utilizar esse grupo de difeomorfismos para definir um campo vetorial v^μ que coincide com a tangente das curvas definidas por ϕ_λ em cada ponto. A partir desse difeomorfismo, definimos a operação *empurrar* um vetor, ou seja, dado um vetor $v^\mu|_p$ em um ponto $p \in M$ arbitrário, obtemos um vetor $\phi^*_\lambda v^\mu|_{\phi_\lambda(p)}$ no ponto $\phi_\lambda(p)$.

Dessa forma, definimos a derivada de Lie de um campo vetorial u^μ por um grupo de difeomorfismos, com o campo v^μ associado, como sendo a diferença do campo calculado em $\phi_\lambda(p)$ e empurrado de volta ao ponto p menos o campo calculado no ponto p, *i.e.,*

$$\pounds_v u^\mu \equiv \lim_{\lambda \to 0} \frac{\phi^*_{-\lambda}\left(u^\mu|_{\phi_\lambda(p)}\right) - u^\mu|_p}{\lambda} = [\vec{v}, \vec{u}]^\mu. \tag{2}$$

Estendendo essa definição para os campos duais, temos que a deriva de Lie pode ser escrita como

$$\pounds_v w_\mu = v^\nu \partial_\nu w_\mu + w_\nu \partial_\mu v^\nu. \tag{3}$$

Vale ressaltar que essas definições são independentes do operador de derivada utilizado. Existe ainda outra propriedade útil das derivadas de Lie quando atuando em campos (co)vetoriais ou funções, a saber,

$$[\pounds_v, \pounds_u] = \pounds_{[v,u]}. \tag{4}$$

Como o tensor métrico é não degenerado, ele fornece um mapa natural entre o espaço tangente e cotangente de forma que, dado um vetor u^μ, definimos um covetor $u_\nu \equiv u^\mu g_{\mu\nu}$ com o mesmo símbolo u. Dessa forma utilizamos a métrica $g_{\mu\nu}$ e sua inversa $g^{\mu\nu}$ para "subir" e "descer" índices no sentido da definição acima. Na nossa convenção de assinatura da métrica, dizemos que vetor tipo tempo é aquele cuja norma satisfaz $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} < 0$, tipo espaço $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} > 0$ e tipo luz (ou nulo) $v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = 0$. Dado um campo tensorial arbitrário $T_{\mu\nu}$, definimos os símbolos de simetria e anti-simetria como

$$T_{(\mu\nu)} \equiv \frac{T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}}{2}, \qquad T_{[\mu\nu]} \equiv \frac{T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}}{2},$$

respectivamente, com a extensão natural para tensores de mais alta ordem, onde o fator numérico é dado pelo número de permutações dos índices, *i.e.,* para uma (anti-)simetria de n índices o fator será $1/n!$.

Dada uma métrica, existe somente uma derivada covariante compatível,[1] *i.e.,* $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, que chamaremos de conexão métrica (ou de Levi-Civita). Com isso, definimos também a derivada direcional $\nabla_v = v^\mu \nabla_\mu$ e o tensor de Riemann

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, v_\mu = R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu v_\nu, \qquad R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha, \qquad R = R_\mu{}^\mu. \tag{5}$$

As suas contrações são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente. O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ é definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R. \tag{6}$$

O tensor curvatura dado na Eq. (5) tem as seguintes propriedades,

$$R_{(\alpha\beta)\mu}{}^\nu = 0, \qquad R_{[\alpha\beta\mu]}{}^\nu = 0, \qquad R_{\alpha\beta(\mu\nu)} = 0, \qquad \nabla_{[\gamma} R_{\alpha\beta]\mu}{}^\nu = 0. \tag{7}$$

A última identidade pode ser escrita na forma

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \tag{8}$$

onde foram contraídos dois pares de índices. Definimos o tensor de Weyl como

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \left(g_{\mu[\alpha} R_{\beta]\nu} - g_{\nu[\alpha} R_{\beta]\mu}\right) + \frac{1}{3}\left(R g_{\mu[\alpha} g_{\beta]\nu}\right), \tag{9}$$

que tem a característica de ser invariante sob transformações conformes e representa a parte sem traço do tensor de Riemann, já que seu traço em relação a qualquer par de índices é zero.

[1] Estamos utilizando sempre conexões com torção nula. Veja [12], por exemplo, para mais detalhes.

2 Seções Espaciais

Suponha que escolhemos uma certa seção espacial $\Sigma_0 \in M$, *i.e.,* uma hipersuperfície espacial Σ_0 onde todos os vetores tangentes às curvas contidas nela são tipo espaço em M.[2] Portanto, uma vez escolhido Σ_0, temos que existe um campo vetorial n^μ que é ortogonal a qualquer vetor definido em Σ_0 e com norma $n_\mu n^\mu = -1$. Esse é chamado vetor normal à hipersuperfície Σ_0. Definimos um conjunto de seções espaciais Σ_t disjuntas ($\Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset$ para $t_1 \neq t_2$) tal que a união de todas as seções forma a variedade, *i.e.,* $\cup_t \Sigma_t = M$. Utilizando esse conjunto de seções espaciais, temos que o vetor normal n^μ é definido em toda a variedade M.

A partir da métrica definida em M, podemos definir uma métrica

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \tag{10}$$

nas seções espaciais Σ_t. O tensor $\gamma_{\mu\nu}$ é um tensor métrico positivo em Σ_t. Quando aplicado a um campo vetorial de M, o tensor $\gamma_{\mu\nu}$ age como um projetor (portanto, ele é idempotente) já que, para um $v^\mu \in TM$, temos que o campo vetorial $\tilde{v}^\mu = \gamma^\mu{}_\nu v^\nu$ é um vetor tangente de uma hipersuperfície espacial Σ_t dado que $\tilde{v}^\mu n_\mu = 0$. De forma geral, definimos a aplicação do projetor $\gamma[\cdot]$ em um tensor arbitrário $T\ (n, m)$ como

$$\gamma\left[T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}\right] = \gamma^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\gamma^{\mu_2}{}_{\alpha_2}\ldots\gamma^{\mu_n}{}_{\alpha_n}\gamma^{\beta_1}{}_{\nu_1}\gamma^{\beta_2}{}_{\nu_2}\ldots\gamma^{\beta_m}{}_{\nu_m}T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}, \tag{11}$$

onde $\gamma[\cdot]$ é também linear e associativo, definimos também a contração de um tensor arbitrário com a direção normal n^μ como

$$T_n \equiv T_\mu n^\mu, \quad T^n \equiv T^\nu n_\nu. \tag{12}$$

Podemos agora definir uma derivada covariante nas hipersuperfícies espaciais Σ_t, a saber,

$$D_\alpha T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = \gamma\left[\nabla_\alpha T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}\right]. \tag{13}$$

Utilizando a definição acima, obtemos que $D_\alpha\gamma_{\mu\nu} = 0$ e que o operador D satisfaz a regra de Leibniz quando aplicado a campos vetoriais de Σ_t e, portanto, ele é o único operador diferencial compatível com $\gamma_{\mu\nu}$. Essa derivada covariante também define um

[2] Estamos supondo que a variedade M é globalmente hiperbólica. Para mais detalhes e definições, veja [12].

tensor de Riemann que corresponderá à curvatura das hipersuperfícies espaciais Σ_t, as quais denotaremos com a letra $\mathcal{R}$, *i.e.,*

$$[D_\mu, D_\nu]v_\alpha = \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}v_\beta. \tag{14}$$

Ao invés de escolher arbitrariamente as seções espaciais, podemos escolher uma primeira seção arbitrária Σ_{t_0} com um campo normal n^μ definido somente nessa hipersuperfície. Então, em cada ponto $p \in \Sigma_{t_0}$, definimos uma geodésica $\gamma(p;t)$ tal que $\gamma(p;t_0) = p$ e cujo vetor tangente $\xi^\mu(t_0)|_p = n^\mu|_p$. Dessa forma temos que[3] $\gamma(\Sigma_{t_0}, t_0) = \Sigma_{t_0}$ e, assim, definimos as demais hipersuperfícies como $\Sigma_t \equiv \gamma(\Sigma_{t_0}, t)$. Como o vetor ξ^μ satisfaz a equação da geodésica, temos que seu módulo é constante ao longo da mesma, *i.e.,* $\nabla_\xi(\xi^\mu\xi_\mu) = 0$. Por construção $\xi_\mu\xi^\mu|_{t_0} = n_\mu n^\mu = -1$ e, portanto, $\xi_\mu\xi^\mu = -1$ para qualquer valor de t. Utilizando coordenadas gaussianas normais, *i.e.,* as coordenadas de cada ponto $\gamma(p;t)$ ao longo de cada geodésica serão dadas pelas coordenadas espaciais de p em Σ_{t_0} mais a coordenada temporal t, e sendo X^μ um vetor coordenado associado com qualquer uma das coordenadas espaciais, temos que

$$\nabla_\xi(\xi^\mu X_\mu) = \xi^\mu\nabla_\xi X_\mu = \xi^\mu\nabla_X\xi_\mu = \frac{1}{2}\nabla_X\left(\xi^\nu\xi_\nu\right) = 0, \tag{15}$$

onde a segunda igualdade vem do fato de que vetores coordenados comutam[4] ($\nabla_\xi X^\mu - \nabla_X\xi^\mu = 0$). Com isso, temos que os vetores tangentes geodésicos permanecem normais às hipersuperfícies Σ_t. Vale lembrar que no caso geral essas coordenadas não valem para toda variedade pois, quando as geodésicas se cruzam, essas deixam de ser bem definidas. Restringindo-nos ao caso do seccionamento geodésico, temos $\nabla_n n^\nu = 0$. Assim definimos a curvatura extrínseca como

$$\Theta_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu. \tag{16}$$

Usando a normalização de n^μ e a equação da geodésica, verificamos que esse tensor é espacial, *i.e.,* $\gamma\left[\Theta_{\mu\nu}\right] = \Theta_{\mu\nu}$ (Exercício 1).

Por definição n^μ é normal à hipersuperfície espacial Σ_t e portanto, pelo teorema de Frobenius, temos que $\Theta_{[\mu\nu]} = 0$, ver Exercício 3. Esse resultado pode ser escrito como $\nabla_{[\mu}n_{\nu]} = 0$, ou seja, a derivada exterior da um-forma é zero $\mathrm{d}\mathbf{n} = 0$. Logo, pelo Lema de

[3]Utilizamos aqui a notação de que a função $f : A \to B$, quando avaliada em um subconjunto $S \subset A$, *i.e.,* $f(S) \equiv \{f(p) \,|\, \forall\, p \in S\}$, significa a imagem da função f quando avaliada em S.

[4]Essa propriedade é devida à comutação das derivadas parciais quando atuando em funções com pelo menos derivadas segundas contínuas.

Poincaré, sabemos que pelo menos localmente (em um subconjunto aberto de M) existe uma função α tal que $n_\mu = \nabla_\mu \alpha$ (para definição de derivada exterior e referências sobre o Lema de Poincaré ver por exemplo [12]).

Calculando a derivada de Lie da métrica induzida $\gamma_{\mu\nu}$, temos

$$\partial_t \gamma_{\mu\nu} \equiv \pounds_n \gamma_{\mu\nu} = \nabla_n \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha}\nabla_\nu n^\alpha + \gamma_{\nu\alpha}\nabla_\mu n^\alpha = 2\Theta_{\mu\nu}, \tag{17}$$

onde utilizamos o símbolo ∂_t, *i.e.,*

$$\partial_t T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} \equiv \dot{T}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} \equiv \gamma\left[\pounds_n T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}\right], \tag{18}$$

para representar a derivada de Lie na direção normal projetada nas seções espaciais. Lembrando que, no sistema de coordenadas onde n^μ coincide com a coordenada temporal, a derivada de Lie nada mais é que a derivada parcial em relação a essa coordenada. Note que também definimos o símbolo $\dot{} \equiv \partial_t$ para representar essa derivada quando for tipograficamente conveniente. Quando houver ambiguidade, por exemplo, quando agindo sobre uma função escalar $\nabla_n \varphi = \partial_t \varphi$ utilizaremos a derivada ∂_t. Por fim, da curvatura extrínseca definimos as quantidades cinemáticas, respectivamente, escalar de expansão e tensor de cisalhamento,

$$\Theta \equiv \Theta_\mu{}^\mu, \qquad \sigma_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} - \frac{\gamma_{\mu\nu}\Theta}{3}. \tag{19}$$

2.1 Relações com a Geometria da Variedade

Para relacionar os tensores de curvatura da variedade M e das hipersuperfícies Σ_t com as curvaturas extrínsecas de cada uma, partimos da Eq. (14) e substituímos as derivadas covariantes tridimensionais por sua definição obtendo

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \gamma\left[R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\right] - \Theta_{\mu\alpha}\Theta_\nu{}^\beta + \Theta_{\nu\alpha}\Theta_\mu{}^\beta, \tag{20}$$

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha} = \gamma\left[R_{\mu\alpha}\right] + \gamma\left[R_{\mu n\alpha}{}^n\right] - \Theta_{\mu\alpha}\Theta + \Theta_{\nu\alpha}\Theta_\mu{}^\nu, \tag{21}$$

lembrando que, como definido na Eq. (12), $R_{\mu n\alpha}{}^n = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta n^\nu n_\beta$. Usando a definição do tensor de Riemann a partir de derivadas covariantes,

$$\gamma\left[R_{\mu\nu\alpha}{}^n\right] = \gamma\left[2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}n_\alpha\right] = \gamma\left[2\nabla_{[\mu}\Theta_{\nu]\alpha}\right] = 2D_{[\mu}\Theta_{\nu]\alpha}, \tag{22}$$

podemos reescrever o segundo termo do lado direito da Eq. (21) como,

$$\gamma\left[R_{\mu n\alpha}{}^n\right] = \gamma\left[n^\nu\left(\nabla_\mu\nabla_\nu n_\alpha - \nabla_\nu\nabla_\mu n_\alpha\right)\right] = -\Theta_\mu{}^\nu\Theta_{\nu\alpha} - \nabla_n\Theta_{\mu\alpha}, \tag{23}$$

e, consequentemente, a Eq. (21) é reescrita como

$$\gamma\left[R_{\mu\alpha}\right] = \mathcal{R}_{\mu\alpha} + \nabla_n \Theta_{\mu\alpha} + \Theta_{\mu\alpha}\Theta. \tag{24}$$

Note que essa equação relaciona a projeção do tensor de Ricci com a curvatura das hipersuperfícies espaciais e a curvatura extrínseca assim como sua derivada na direção normal. Para obter as outras projeções do tensor de Ricci, partimos novamente da sua definição por derivadas covariantes,

$$R_{\mu n} = \nabla_\nu \nabla_\mu n^\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu n^\nu = \nabla_\nu \Theta_\mu{}^\nu - \nabla_\mu \Theta,$$

e as reescrevemos em termos das suas projeções nas hipersuperfícies espaciais usando a relação entre as métricas ($\delta_\mu{}^\nu = \gamma_\mu{}^\nu - n_\mu n^\nu$), ou seja,

$$R_{\mu n} = D_\nu \Theta_\mu{}^\nu - D_\mu \Theta + n_\mu \left(\Theta_{\alpha\beta}\Theta^{\beta\alpha} + \dot{\Theta}\right).$$

Com isso, as projeções do tensor de Ricci nas outras direções são

$$R_{nn} = -\Theta_{\alpha\beta}\Theta^{\beta\alpha} - \dot{\Theta}, \tag{25}$$

$$\gamma\left[R_{\mu n}\right] = D_\nu \Theta_\mu{}^\nu - D_\mu \Theta. \tag{26}$$

Contraindo a Eq. (24), temos que o escalar de curvatura pode ser reescrito como

$$R = \mathcal{R} + 2\dot{\Theta} + \Theta^2 + \Theta_{\alpha\beta}\Theta^{\beta\alpha}. \tag{27}$$

Para relacionar a curvatura extrínseca com o tensor de Riemann das hipersuperfícies espaciais, partimos da Eq. (7d) contraída com n^γ, *i.e.,*

$$\begin{aligned}
&\nabla_n R_{\mu\nu\alpha\beta} + n^\gamma \left(\nabla_\mu R_{\nu\gamma\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\gamma\mu\alpha\beta}\right) = 0, \\
&\nabla_n R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\mu (R_{\nu n\alpha\beta}) + \nabla_\nu (R_{n\mu\alpha\beta}) - \left(\Theta_\mu{}^\gamma R_{\nu\gamma\alpha\beta} + \Theta_\nu{}^\gamma R_{\gamma\mu\alpha\beta}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Para projetar a expressão acima utilizando o operador $\gamma\left[\cdot\right]$, notamos primeiro que

$$\begin{aligned}
n^\gamma R_{\nu\gamma\alpha\beta} &= [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] n_\nu = 2\nabla_{[\alpha}\Theta_{\beta]\nu}, \\
\nabla_\alpha \Theta_{\beta\nu} &= D_\alpha \Theta_{\beta\nu} - n_\alpha \nabla_n \Theta_{\beta\nu} + n_\beta \Theta_\alpha{}^\gamma \Theta_{\gamma\nu} + n_\nu \Theta_\alpha{}^\gamma \Theta_{\beta\gamma}, \\
\gamma\left[\nabla_\mu \nabla_\alpha \Theta_{\beta\nu}\right] &= D_\mu D_\alpha \Theta_{\beta\nu} - \Theta_{\mu\alpha}\nabla_n \Theta_{\beta\nu} + \Theta_{\mu\beta}\Theta_\alpha{}^\gamma \Theta_{\gamma\nu} + \Theta_{\mu\nu}\Theta_\alpha{}^\gamma \Theta_{\beta\gamma}, \\
\gamma\left[\nabla_\mu \nabla_{[\alpha}\Theta_{\beta]\nu}\right] &= D_\mu D_{[\alpha}\Theta_{\beta]\nu} - \Theta_{\mu[\alpha}\nabla_n \Theta_{\beta]\nu} + \Theta_{\mu[\beta}\Theta_{\alpha]}{}^\gamma \Theta_{\gamma\nu},
\end{aligned}$$

então, combinando os resultados acima, temos

$$\nabla_n \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + 2\left(D_\mu D_{[\alpha}\Theta_{\beta]\nu} - D_\nu D_{[\alpha}\Theta_{\beta]\mu} - \Theta^\gamma{}_{[\mu}\mathcal{R}_{\nu]\gamma\alpha\beta}\right) = 0, \tag{28}$$

e contraindo dois índices

$$\nabla_n \mathcal{R}_{\mu\alpha} + D_\mu D_\alpha \Theta - 2D_\nu D_{(\mu}\Theta^\nu{}_{\alpha)} + D_\nu D^\nu \Theta_{\alpha\mu} + 2\mathcal{R}_{\gamma(\alpha}\Theta^\gamma{}_{\mu)} = 0. \tag{29}$$

Vale ressaltar que as duas equações acima são puramente geométricas e relacionam a evolução da curvatura nas hipersuperfícies com a curvatura extrínseca.

É útil também obter as relações inversas, ou seja, o tensor de curvatura da variedade M em função das suas projeções nas hipersuperfícies. Para tanto, o tensor de Riemann pode ser escrito da seguinte forma,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \gamma\left[R_{\mu\nu\alpha\beta}\right] + 2\left(\gamma\left[R_{\mu\nu n[\alpha}\right]n_{\beta]} + \gamma\left[R_{\alpha\beta n[\mu}\right]n_{\nu]}\right) + 4n_{[\mu}\gamma\left[R_{\nu]nn[\alpha}\right]n_{\beta]}, \tag{30}$$

onde usamos as simetrias do tensor de Riemann para simplificar a projeção acima. Usando as equações (20), (22) e (23) temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} = {} & \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + \Theta_{\mu\alpha}\Theta_{\nu\beta} - \Theta_{\mu\beta}\Theta_{\nu\alpha} - 4\left(D_{[\mu}\Theta_{\nu][\alpha}n_{\beta]} + D_{[\alpha}\Theta_{\beta][\mu}n_{\nu]}\right) \\ & + 4\left(\nabla_n(n_{[\mu}\Theta_{\nu][\alpha}n_{\beta]}) + n_{[\mu}\Theta_{\nu]}{}^\gamma\Theta_{\gamma[\alpha}n_{\beta]}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

com o seguinte tensor de Ricci

$$R_{\mu\alpha} = \mathcal{R}_{\mu\alpha} + (\Theta + \nabla_n)\Theta_{\mu\alpha} + 2\left(D_{(\mu}\Theta n_{\alpha)} - D_\gamma\Theta^\gamma{}_{(\mu}n_{\alpha)}\right) - n_\mu n_\alpha\left(\dot{\Theta} + \Theta_{\gamma\sigma}\Theta^{\gamma\sigma}\right), \tag{32}$$

e o escalar de curvatura dado pela Eq. (27).

2.2 Comutador das Derivadas Espaciais e Temporais

O seccionamento da variedade M induz uma direção temporal definida por n^μ, que por sua vez tem associada a si uma derivada temporal, definida pelo operador ∂_t (Eq. 18), e também uma definição de derivada espacial dada pelo operador D_μ. Portanto será útil calcular o comutador dessas duas derivadas. Contudo, esse comutador dependerá do objeto no qual elas atuam. Quando atuando em um escalar, temos

$$D_\mu\dot{\phi} = \gamma\left[\nabla_\mu\dot{\phi}\right] = \Theta_\mu{}^\gamma D_\gamma\phi + \nabla_n D_\mu\phi = \partial_t D_\mu\phi,$$

ou seja,

$$[D_\mu, \partial_t]\phi = 0. \tag{33}$$

No caso de covetores espaciais $\gamma\left[u_\mu\right] = u_\mu$, temos

$$\begin{aligned} D_\mu \partial_t u_\nu &= D_\mu \left(\nabla_n u_\nu + \Theta_\nu{}^\gamma u_\gamma\right), \\ &= \Theta_\mu{}^\gamma D_\gamma u_\nu + \nabla_n D_\mu u_\nu + \gamma\left[R_{\nu\gamma\mu}{}^n\right] u^\gamma + D_\mu\left(\Theta_\nu{}^\gamma u_\gamma\right), \\ &= \partial_t D_\mu u_\nu + (D_\mu \Theta_\nu{}^\gamma + D_\nu \Theta_\mu{}^\gamma - D^\gamma \Theta_{\mu\nu}) u_\gamma, \\ &= \partial_t D_\mu u_\nu + S_{\mu\nu}{}^\gamma u_\gamma, \end{aligned}$$

onde definimos o tensor de curvatura

$$S_{\mu\nu}{}^\gamma \equiv D_\mu \Theta_\nu{}^\gamma + D_\nu \Theta_\mu{}^\gamma - D^\gamma \Theta_{\mu\nu}, \tag{34}$$

que satisfaz $S_{[\mu\nu]}{}^\gamma = 0$. Definimos também a contração

$$S^\gamma \equiv \gamma^{\mu\nu} S_{\mu\nu}{}^\gamma = 2 D_\mu \Theta^{\mu\gamma} - D^\gamma \Theta, \tag{35}$$

e temos que $S_{\mu\gamma}{}^\gamma = D_\mu \Theta$ e $S_{\mu[\nu\gamma]} = 2\nabla_{[\nu}\Theta_{\gamma]\mu}$. Com isso, o comutador agindo sobre covetores é dado por

$$[D_\mu, \partial_t] u_\nu = S_{\mu\nu}{}^\gamma u_\gamma. \tag{36}$$

Para campos vetoriais temos

$$[D_\mu, \partial_t] u^\nu = -S_{\mu\gamma}{}^\nu u^\gamma. \tag{37}$$

Estendendo esse cálculo, é simples mostrar que

$$[D_\mu, \partial_t] T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} = \sum_{i=1}^{m} S_{\mu\nu_i}{}^\gamma T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{i-1}\gamma\nu_{i+1}\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} - \sum_{i=1}^{l} S_{\mu\gamma}{}^{\nu_i} T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{i-1}\gamma\mu_{i+1}\mu_l},$$

onde (m, l) definem a ordem do tensor. É bom enfatizar que o comutador com a derivada espacial D^μ não é o mesmo que com a derivada D_μ. Como a derivada de Lie do projetor $\gamma^{\mu\nu}$ não é nula, vemos que

$$[D^\mu, \partial_t] = [\gamma^{\mu\gamma} D_\gamma, \partial_t] = \gamma^{\mu\gamma}[D_\gamma, \partial_t] + 2\Theta^{\mu\gamma} D_\gamma. \tag{38}$$

Outra quantidade útil é o comutador das derivadas espaciais e o operador D^2 que, quando atuando em escalares, é

$$D_\mu D^2 \phi = D_\mu D_\alpha D^\alpha \phi = -\mathcal{R}_\mu{}^\gamma D_\gamma \phi + D^2 D_\mu \phi,$$

ou seja, o comutador é dado por

$$[D_\mu, D^2]\phi = -\mathcal{R}_\mu{}^\gamma D_\gamma \phi. \tag{39}$$

O mesmo cálculo pode ser feito para um campo covetorial,

$$\begin{aligned} D_\mu D^2 u_\nu &= -\mathcal{R}^{\mu\gamma} D_\gamma u_\nu + \mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^{\gamma} D^\alpha u_\gamma + D_\alpha \left(\mathcal{R}_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\gamma u_\gamma + D^\alpha D_\mu u_\nu \right), \\ &= -\mathcal{R}^{\mu\gamma} D_\gamma u_\nu + 2\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^{\gamma} D^\alpha u_\gamma + D_\alpha \mathcal{R}_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\gamma u_\gamma + D^2 D_\mu u_\nu, \end{aligned}$$

com isso, o comutador pode ser escrito como

$$[D_\mu, D^2] u_\nu = -\mathcal{R}_\mu{}^\gamma D_\gamma u_\nu + 2\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}{}^{\gamma} D^\alpha u_\gamma + D_\alpha \mathcal{R}_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\gamma u_\gamma. \tag{40}$$

2.3 Lista de Exercícios

* **Exercício 1** — Mostre que para um campo vetorial normal, o tensor de curvatura extrínseca é naturalmente espacial, *i.e.,* $\gamma\left[\Theta_{\mu\nu}\right] = \Theta_{\mu\nu}$.

* **Exercício 2** — O teorema de Frobenius garante que se v_μ é ortogonal a uma hipersuperfície global, então ele satisfaz $v_{[\mu}\nabla_\nu v_{\alpha]} = 0$. Mostre que a um forma $u_\mu = \alpha v_\mu$ também satisfaz a mesma equação e com isso sempre podemos considerar u_μ normalizado.

** **Exercício 3** — Dado o campo u_μ do exercício anterior, normalizado, mostre que o teorema de Frobenius implica em $\nabla_{[\mu} u_{\nu]} = a_{[\mu} u_{\nu]}$, onde $a_\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u_\mu$ é a aceleração do campo. Portanto, se u_μ for geodésico então $a_\mu = 0$ e $\nabla_{[\mu} u_{\nu]} = 0$.

**** **Exercício 4** — Obtenha as Eqs. (20) e (21) da definição Eq. (14). Usando as projeções Eqs. (22)–(25) obtenhas as Eqs. (27), (31) e (32).

3 Homogeneidade e Isotropia

Dada uma variedade de Lorentz, dizemos que um difeomorfismo[5] ϕ_λ é uma isometria quando a métrica é invariante pela operação de *empurrar*, *i.e.,* $\phi^*_\lambda(g_{\mu\nu}|_p) = g_{\mu\nu}|_{\phi_\lambda(p)}$, a métrica no sentido descrito na Sec. 1. No limite $\lambda \to 0$ essa invariância traduz-se em,

$$\pounds_v g_{\mu\nu} = 0,$$

onde v^μ é o campo vetorial associado ao difeomorfismo. Podemos reescrever as equações acima como as chamadas equações de Killing,

$$g_{\alpha\nu}\nabla_\mu v^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu v^\alpha = 0, \tag{41}$$

[5]Nesse caso estamos interpretando os difeomorfismos no sentido ativo, *i.e.,* os difeomorfismos movem os pontos da variedade. Note a diferença em relação a interpretação passiva onde o difeomorfismo é encarado como uma mudança no sistema de coordenadas e, portanto, representa uma mudança na descrição do espaço-tempo.

onde o campo v^μ que satisfaz tais equações é conhecido como campo de Killing.

Se v^μ e ξ^μ são campos de Killing, então, a combinação linear com coeficientes constantes dos dois campos é também um campo de Killing. Podemos ver também que o comutador de dois campos de Killing também é um campo de Killing, *i.e.,*

$$\pounds_{[\vec{v},\vec{\xi}]} g_{\mu\nu} = 0. \tag{42}$$

Dessa forma, como o comutador satisfaz a identidade de Jacobi

$$[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}] + [[\vec{c},\vec{a}],\vec{b}] + [[\vec{b},\vec{c}],\vec{a}] = 0, \tag{43}$$

temos que o conjunto dos campos de Killing formam uma álgebra de Lie.

O conjunto de todas as isometrias é representado por um grupo de Lie agindo na variedade, ou seja, dado um grupo de Lie G, define-se uma operação ação do grupo $\theta : \mathrm{G} \times M \to M$ que para cada elemento de $g \in \mathrm{G}$ o mapeamento $\theta(g,\cdot) : M \to M$ é uma isometria. Por exemplo, o grupo de Lie associado ao grupo de difeomorfismo com um parâmetro (como definido na Sec. 1) é o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ com a operação adição.

Um resultado importante da teoria dos grupos de Lie é que o grupo pode ser descrito pela álgebra de Lie associada,[6] a menos de questões globais da topologia do grupo. Quando consideramos a ação do grupo em uma variedade, temos que os campos vetoriais associados à álgebra de Lie do grupo são exatamente os campos de Killing e que a álgebra dos comutadores desses campos é um homomorfismo da álgebra de Lie do grupo.

3.1 Espaços Homogêneos

Dado um grupo de Lie G com uma ação θ, definimos $\mathrm{G}p \equiv \{\theta(g,p) \,|\, \forall\ g \in \mathrm{G}\}$ como a órbita do ponto p pela ação do grupo G. Quando as órbitas $\mathrm{G}p$ são hipersuperfícies espaciais que formam um seccionamento da variedade M, dizemos que o espaço-tempo é espacialmente homogêneo. Definimos uma curva $\gamma(t)$ tal que se $t_1 \neq t_2$ então $\mathrm{G}\gamma(t_1) \neq \mathrm{G}\gamma(t_2)$ e, dessa forma, temos as hipersuperfícies dadas por $\Sigma_t \equiv \mathrm{G}\gamma(t)$. Portanto, dada uma hipersuperfície Σ_t arbitrária, temos que a ação do grupo quando restrita a essa seção é transitiva, ou seja, qualquer ponto $p \in \Sigma_t$ da seção pode ser levado a qualquer outro $q \in \Sigma_t$ da mesma seção via ação do grupo G ($\exists\ g \in \mathrm{G}$ tal que $\theta(g,p) = q$). Para cada

[6] Existe um mapeamento sobrejetor entre os elementos do espaço tangente em torno do elemento identidade do grupo e os elementos do grupo chamado mapa exponencial.

ponto p da hipersuperfície, temos que o subgrupo $\mathrm{U}_p \subset \mathrm{G}$ que deixa o ponto imóvel ($\mathrm{U}_p p = \{p\}$) é conhecido como grupo de isotropia do ponto p.

Quando restringimos a atuação dos grupos de Lie em variedades tridimensionais, temos que quase todos os grupos de isometria têm um subgrupo $\mathrm{G}_T \subset \mathrm{G}$ que age de forma simplesmente transitiva,[7] *i.e.,* todos os grupos de isotropia desse subgrupo são triviais $\mathrm{U}_p = \{e\}$, onde e representa o elemento identidade. Note que o subgrupo G_T tem as mesmas órbitas do grupo de simetrias e, além disso, os vetores de sua álgebra de Lie são linearmente independentes e a dimensão desse subgrupo é igual a dimensão da variedade onde ele age. Portanto, esse subgrupo representa as simetrias de translação na variedade.

Dado o conjunto dos campos de Killing, $\vec{\xi_a}$ para $a = 1, 2, 3$, associados à álgebra do grupo G_T, temos naturalmente uma definição de vetor normal às hipersuperfícies, tal que, $n_\mu \xi_a{}^\mu = 0$. Podemos mostrar que se o campo n^μ é geodésico e normal a uma seção espacial, então é normal a todas, *i.e.,* $\nabla_n(n^\mu \xi_{a\mu}) = n^\mu n^\nu \nabla_\nu \xi_{a\mu} = 0$, onde a última igualdade vem da anti-simetria de $\nabla_\mu \xi_{a\nu}$, já que este é um campo de Killing. Por outro lado, notamos que um campo normal a todas as seções é um campo geodésico, o que pode ser visto provando que a aceleração $a^\mu = \nabla_n n^\mu$ é zero. Para tanto, usamos a normalização do campo, $n^\mu n_\mu = -1$, para mostrar que

$$a^\mu n_\mu = \nabla_n n^\mu n_\mu = \nabla_n (n^\mu n_\mu)/2 = 0.$$

Adicionalmente temos que

$$a^\mu \xi_{a\mu} = (\nabla_n n^\mu)\xi_{a\mu} = \nabla_n(\xi_{an}) - n^\mu n^\nu \nabla_\nu \xi_{a\mu} = 0.$$

Logo, como $(n^\mu, \xi_a{}^\mu)$ são linearmente independentes, então $a^\mu = 0$ e n^μ é geodésico. Outra propriedade de n^μ é que ele é invariante pela ação do grupo, *i.e.,*

$$\pounds_{\xi_a} n_\mu = \nabla_{\xi_a} n_\mu + n_\nu \nabla_\mu \xi_a{}^\nu = \nabla_{\xi_a} n_\mu - \xi_a{}^\nu \nabla_\mu n_\nu = 0, \tag{44}$$

onde na última igualdade usamos a simetria de $\nabla_\mu n_\nu$ mostrada no Exercício 3.

Vemos então que uma variedade espacialmente homogênea possui um seccionamento natural formado pelas órbitas do grupo de isometrias. Podemos utilizar esse fato para escrever a métrica de forma simplificada. Definimos uma base de um-formas $\mathbf{e}^a$, com $a = 1, 2, 3$, linearmente independente e tangente às hipersuperfícies que seja invariante pela

[7] Existe uma única exceção onde isso não acontece, são os chamados modelos de Kantowski-Sachs [17].

ação do subgrupo G_T, $\pounds_{\xi_a{}^\mu} e^b{}_\nu = 0$ para todos $a, b = 1, 2, 3$. Essa base pode ser construída escolhendo $\mathbf{e}^a|_p$ linearmente independente e espacial ($e^a{}_n|_p = 0$) em um ponto p e aplicando a operação *empurrar* para defini-la nos outros pontos. Como $\xi_c{}^\alpha$ é uma isometria e n^μ invariante $\pounds_{\xi_c}(e^a{}_\mu e^b{}_\nu g^{\mu\nu}) = 0$ e $\pounds_{\xi_c}(e^a{}_n) = 0$. Com isso, as formas permanecerão linearmente independentes e espaciais em todos os outros pontos.

Por construção temos que a base é espacial e, com isso, podemos utilizar esses campos para reescrever a métrica nas seções espaciais na forma

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \tag{45}$$

onde γ_{ab} são as componentes da métrica das seções espaciais na base $e^a{}_\mu$. Usando o fato de que os campos de Killing são espaciais, podemos mostrar que $\xi_a{}^\mu$ também são isometrias da métrica induzida $\gamma_{\mu\nu}$, *i.e.,* $\pounds_{\xi_a{}^\alpha}\gamma_{\mu\nu} = 0$. Dessa forma, temos que $\pounds_{\xi_c{}^\alpha}\gamma_{ab} = \xi_c{}^\alpha \partial_\alpha \gamma_{ab} = 0$ e, portanto, γ_{ab} é constante nas hipersuperfícies, já que $\xi_c{}^\alpha$ são linearmente independentes.

Podemos definir essa base arbitrariamente em cada seção espacial, porém é conveniente defini-la em uma hipersuperfície inicial e definir a base nas outras seções impondo uma equação que descreva a sua evolução temporal, *i.e.,*

$$\dot{e}^a{}_\mu = \Omega_b{}^a e^b{}_\mu, \tag{46}$$

onde $\Omega_b{}^a$ é uma matriz arbitrária e constante nas hipersuperfícies (Exercício 6). Partindo dessa equação podemos ver que a base $e^a{}_\mu$ mantém todas as propriedades impostas na seção inicial. Primeiro vemos que a base permanecerá ortogonal a n^μ, ou seja,

$$\partial_t(e^a{}_n) = n^\mu \dot{e}^a{}_\mu = n^\mu \Omega_b{}^a e^b{}_\mu = 0.$$

Segundo, da forma que construímos o campo normal n^μ, temos que ele comuta com os campos de Killing (Exercício 5), dessa forma temos,

$$[\partial_t, \pounds_{\xi_a}] e^b{}_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \left(\pounds_{\xi_a} e^b{}_\mu\right) = 0.$$

Deste modo como a base é invariante ($\pounds_{\xi_a} e^b{}_\mu|_p = 0$) na hipersuperfície inicial será invariante em todas.

Com a construção acima, obtivemos uma base invariante definida em toda variedade, que satisfaz a equação de movimento dada na Eq. (46). Contudo, podemos escolher a evolução (ou seja $\Omega_b{}^a$) de que a base seja ortonormal em toda variedade. Primeiro note

que o comutador $[\partial_t, \pounds_{\xi_a}] = 0$, implica $\pounds_{\xi_a}\Theta_{\mu\nu} = 0$. Como $\Theta_{\mu\nu}$ é espacial, podemos escrevê-lo na base ${e^a}_\mu$, ou seja,

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{ab}{e^a}_\mu {e^b}_\nu,$$

onde Θ_{ab} é constante nas hipersuperfícies (Exercício 7). Reescrevendo a Eq. (17) em termos de γ_{ab} e Θ_{ab} temos

$$\dot{\gamma}_{ab} + 2\Omega_{(ab)} = 2\Theta_{ab},$$

onde "descemos" o índice da matriz ${\Omega_a}^b$ usando γ_{ab} e usaremos sempre essa matriz para "subir" e "descer" os índices da base. A matriz Ω_{ab} é arbitrária e podemos escolhê-la de forma conveniente. Para nosso estudo fazemos a escolha $\Omega_{ab} = \Theta_{ab}$,[8] de forma que $\dot{\gamma}_{ab} = 0$. Assim, como γ_{ab} é constante em toda a variedade, podemos escolher $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$ onde $\delta_{ab} = \mathrm{diag}(1,1,1)$, ou seja, escolhemos inicialmente ${e_a}^\mu {e_a}^\nu \gamma_{\mu\nu}|_p = \delta_{ab}$. Note também que essa construção é conveniente pois define uma base ortonormal em toda a variedade, *i.e.,*

$$n_\mu n^\mu = -1, \qquad {e^a}_\mu n^\mu = 0, \qquad {e_a}^\mu {e_b}^\nu \gamma_{\mu\nu} = \delta_{ab}.$$

3.2 Espaços Homogêneos e Isotrópicos

Quando o grupo de isometrias é tal que em cada ponto o grupo de isotropia é isomórfico ao grupo de rotações tridimensional $\mathrm{G}_p \cong \mathrm{SO}(3)$, temos que as seções espaciais são isotrópicas em cada ponto. Dessa forma, temos um conjunto de três campos vetoriais de Killing ${r_a}^\mu$ que se anulam no ponto p. Como ${r_a}^\mu$ são campos de Killing e espaciais temos que, similarmente a Eq. (44), $\pounds_{r_a} n^\mu = 0$.

Para estudar a ação na base precisamos calcular a seguinte derivada $\pounds_{r_a}{e^c}_\mu$. Primeiro, note que $(\pounds_{r_a}{e^c}_\mu)n^\mu = 0$, e portanto como essa quantidade é espacial, podemos escrever essa expressão como

$$\pounds_{r_a}{e^c}_\mu = {r_a}^\nu \nabla_\nu {e^c}_\mu + {e^c}_\nu \nabla_\mu {r_a}^\nu = {\epsilon_{ab}}^c {e^b}_\mu.$$

Da expressão acima, note primeiro que o tensor ${\epsilon_{ab}}^c$ não pode ser nulo. No ponto p o campo ${r_a}^\mu$ é nulo, logo

$$\pounds_{r_a}{e^c}_\mu|_p = {e^c}_\nu \nabla_\mu {r_a}^\nu|_p \,.$$

[8] Note que poderíamos escolher $\Omega_{(ab)} = \Theta_{ab}$ de forma que a parte anti-simétrica ainda seria arbitrária.

Se a derivada fosse nula, *i.e.*, $\nabla_\mu r_a{}^\nu|_p = 0$, então no ponto p o campo $r_a{}^\mu$ e suas derivadas seriam nulas e como esse é um campo de Killing então ele seria nulo em toda variedade (ver [12, Apêndice C]). Calculando a derivada de Lie de δ^{bc} na direção $r_a{}^\mu$, obtemos

$$\epsilon_{a(bc)} = 0, \tag{47}$$

ou seja, para cada valor de $a = 1, 2, 3$, ϵ_{abc} é uma matriz anti-simétrica em bc. Dessa forma, como as matrizes anti-simétricas 3×3 formam um espaço linear de três dimensões, podemos escolher convenientemente a base $e^a{}_\mu$ de forma que ϵ_{abc} seja completamente anti-simétrico com $\epsilon_{123} = 1$.

Finalmente, como $\pounds_{r_a} n^\mu = 0$, temos que $\pounds_{r_a} \Theta_{\mu\nu} = 0$. Como Θ_{ab} é constante nas hipersuperfícies, então $\pounds_{r_a} \Theta_{ab} = 0$. Dessa forma $\pounds_{r_a} n^\mu = 0$ implica

$$\epsilon_{abc}\Theta^b{}_d + \epsilon_{abd}\Theta^b{}_c = 0. \tag{48}$$

Consequentemente, temos que $\Theta_{ab} \propto \delta_{ab}$, ou seja,

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\Theta}{3}\gamma_{\mu\nu}, \qquad D_\mu \Theta = 0, \qquad \sigma_{\mu\nu} = 0. \tag{49}$$

O resultado acima mostra que universos com seções espaciais homogêneas e isotrópicas têm cisalhamento nulo, esse resultado mais as equações obtidas na Sec. 2.1 são suficiente para obter as equações de Friedmann e todas as equações para as perturbações como veremos a seguir.

3.3 Lista de Exercícios

* **Exercício 5** — Mostre que a Eq. (44) implica $\pounds_n \xi_a{}^\mu = 0$.

** **Exercício 6** — Mostre que a matriz $\Omega_a{}^b$ é constante nas hipersuperfícies, ou seja, $D_\mu \Omega_a{}^b = 0$.

* **Exercício 7** — Mostre que $\pounds_{\xi_a} \Theta_{\mu\nu} = 0$, e que consequentemente $D_\mu \Theta_{ab} = 0$.

**** **Exercício 8** — Obtenha a Eq. (48) e mostre que ela implica $\Theta_{ab} \propto \delta_{ab}$.

** **Exercício 9** — Dada a Eq. (24) e o fato de que como $r_a{}^\mu$ é um campo de Killing e portanto $\pounds_{r_a} R_{\mu\alpha} = 0$. Mostre que $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ também é proporcional a $\gamma_{\mu\nu}$.

4 Equações de Friedmann

Para estudarmos a evolução temporal da métrica usamos a RG, na qual toda informação do conteúdo material e das energias de interação são descritas por um Tensor Energia Momento (TEM) $T_{\mu\nu}$. Dessa forma, temos que as equações de movimento (equações de Einstein) são dadas por

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{50}$$

onde Λ é uma constante, $\kappa = 8\pi G/c^4$, G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz no vácuo e o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ está definido na Eq. (6). O parâmetro Λ é chamado constante cosmológica. A constante cosmológica também pode ser entendida como uma adição de um componente material cujo TEM é dado por $T_{(\Lambda)\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}/\kappa$. Nesse caso as equações de Einstein seriam

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{51}$$

onde o TEM que aparece do lado direito inclui também o da constante cosmológica.

Na seção anterior fizemos a construção do seccionamento da variedade. Dizemos primeiro que existe um grupo de simetrias e posteriormente definimos as seções como sendo órbitas desse grupo. Nessa construção mostramos que o campo normal n_μ tem norma igual a menos um, é geodésico e satisfaz $\nabla_{[\mu} n_{\nu]} = 0$. Podemos construir agora a função tempo α, de forma a ser constante nas hipersuperfícies e que coincida com o tempo próprio das geodésicas $\gamma(t)$ com tangente n^μ, *i.e.,* $D_\mu \alpha = 0$ e $\alpha(\gamma(t)) = ct$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e t o tempo próprio de cada geodésica (tempo cósmico). Da primeira equação obtemos $\nabla_\mu \alpha = -n_\mu \nabla_n \alpha$ e diferenciando a segunda $n^\mu \nabla_\mu \alpha = 1$. Substituindo a primeira na última mostramos que

$$n_\mu = -\nabla_\mu \alpha, \tag{52}$$

o que define nossa função tempo a menos da adição de uma constante. Dessa forma, construímos o campo geodésico n^μ e a função tempo α que representam o conjunto de trajetórias seguidas pelos observadores isotrópicos e o tempo próprio medido por eles.

Ao impor as simetrias nas hipersuperfícies espaciais, como discutido na Sec. 3, reduzimos o número de componentes a serem determinadas e, utilizando a Relatividade Geral (RG), procedemos de forma a obter as equações de movimento para os graus de liberdade não fixados. Notamos primeiro que, como a curvatura extrínseca é proporcional a métrica

nas hipersuperfícies (Eq. 49), podemos dividir a métrica em uma função de α vezes uma métrica constante $\gamma_{\mu\nu} = a^2\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$ onde impomos $\partial_t\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ e portanto

$$\dot{\gamma}_{\mu\nu} = 2\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\mu\nu} = \frac{2\Theta}{3}\gamma_{\mu\nu}, \quad \Rightarrow \quad \Theta_{\mu\nu} = \frac{\Theta}{3}\gamma_{\mu\nu} = \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\mu\nu} = \frac{H}{c}\gamma_{\mu\nu}, \tag{53}$$

onde definimos a função de Hubble,[9] *i.e.,* $H = c\dot{a}/a$. Nesse caso a curvatura extrínseca satisfaz $D_\mu\Theta_{\alpha\beta} = 0$.

Como vimos no Exercício 24 o tensor de Ricci nas seções espaciais também é proporcional a métrica delas, dessa forma definimos

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv 2K\gamma_{\mu\nu}. \tag{54}$$

Com essa definição e usando a identidade de Bianchi projetada (Eq. 29) obtemos a relação entre a curvatura espacial K a o fator de escala a,

$$\dot{K} + \frac{2K\Theta}{3} = 0, \quad \Rightarrow \quad K = K_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^2, \tag{55}$$

onde usamos as quantidades com o subscrito $_0$ para representar as mesmas calculadas no instante t_0, *i.e.,* para uma função qualquer do tempo $f(t)$, $f_0 \equiv f(t_0)$, e o instante t_0 representa a época atual.

Para seções espaciais não planas ($K_0 \neq 0$), é comum associar o fator de escala ao raio de curvatura hoje $R_0 \equiv \sqrt{1/|K_0|}$. Se escolhemos o fator de escala com unidade de comprimento, podemos escolher esse fator hoje como sendo exatamente igual ao raio de curvatura $R_0 = a_0$ e, dessa forma, $|K_0a_0^2| = 1$. No caso onde trabalhamos com o fator de escala adimensional, precisamos escolher arbitrariamente a unidade, por exemplo, fazendo $R_0 = a_0$ Mpc, obtemos $|K_0a_0^2| = 1$ Mpc^{-2}. Em ambos os casos normalmente define-se uma variável $\widetilde{K} = K_0a_0^2$ que é igual a $-1, 0, 1$ para o caso hiperbólico, plano e esférico, respectivamente, enfatizando que $\widetilde{K}$ tem unidade de inverso de comprimento quadrado quando a é adimensional. Com as definições acima, temos que a curvatura quando o fator de escala é igual a unidade é $K(a = 1) = K_0a_0^2 = \widetilde{K}$, ou seja, o raio de curvatura é igual a unidade na hipersuperfície conforme.

É conveniente calcular o tensor de Riemann e todos os tensores derivados dele para

[9] O operador $\dot{} \equiv \partial_t$ está definido na Eq. (18).

essas geometrias. Usando as Eqs. (27) e (32) em conjunto com a Eq. (53) temos

$$R_{\mu\alpha} = \left(2K + \frac{\dot{\Theta} + \Theta^2}{3}\right)\gamma_{\mu\alpha} - \left(\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3}\right)n_\mu n_\alpha, \tag{56}$$

$$R = 6K + 2\dot{\Theta} + \frac{4\Theta^2}{3}, \tag{57}$$

$$G_{\mu\alpha} = -\left(K + \frac{2\dot{\Theta}}{3} + \frac{\Theta^2}{3}\right)\gamma_{\mu\alpha} + \left(3K + \frac{\Theta^2}{3}\right)n_\mu n_\nu. \tag{58}$$

Podemos verificar que as simetrias das seções espaciais impõem uma restrição no TEM. Partindo das equações de Einstein (Eq. 51) e projetando-as nas diferentes direções, temos

$$\kappa\gamma\left[T_{\mu\nu}\right] = \gamma\left[G_{\mu\nu}\right] = -\left(K + \frac{2\dot{H}}{c} + \frac{3H^2}{c^2}\right)\gamma_{\mu\nu}, \tag{59}$$

$$\kappa\gamma\left[T_{\mu n}\right] = \gamma\left[G_{\mu n}\right] = 0, \tag{60}$$

$$\kappa T_{nn} = G_{nn} = 3K + \frac{3H^2}{c^2}, \tag{61}$$

onde o subscrito $_n$ representa a contração do índice com o campo normal, como definido na Eq. (12). Partindo das equações acima obtemos $\gamma\left[T_{\mu\nu}\right] \propto \gamma_{\mu\nu}$ e $\gamma\left[T_{\mu n}\right] = 0$. Essas duas condições restringem a forma do TEM à de um fluido perfeito, *i.e.,*

$$T_{\mu\nu} = \rho n_\mu n_\nu + p\gamma_{\mu\nu}, \tag{62}$$

$$T = -\rho + 3p, \tag{63}$$

onde $\rho \equiv \rho(t)$ é a densidade de energia e $p \equiv p(t)$ a pressão isotrópica observadas no referencial definido por n^μ. Com isso, temos que a equação projetada na direção $n^\mu n^\nu$ e o traço fornecem,

$$H^2 = \kappa^*\rho - \frac{c^2\widetilde{K}}{a^2}, \tag{64}$$

$$c\dot{H} + H^2 = c^2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^*}{2}\left(\rho + 3p\right), \tag{65}$$

onde definimos uma nova constante $\kappa^* \equiv c^2\kappa/3$. As equações acima são chamadas equações de Friedmann. A primeira equação funciona como um vínculo para as condições iniciais do sistema, no entanto, nos regimes onde a função de Hubble não muda de sinal, ela pode ser usada para calcular a evolução temporal do fator de escala. É conveniente obter essas equações em função de Θ, *i.e.,*

$$\frac{\Theta^2}{3} = \kappa\rho - 3K, \tag{66}$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{3\kappa}{2}(\rho + p) + 3K. \tag{67}$$

Usando a identidade de Bianchi contraída (Eq. 8) e as equações de Einstein, temos que o TEM deve satisfazer

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{68}$$

Aplicando essa condição ao TEM definido acima, temos

$$\nabla_\mu(\rho n^\mu n^\nu + p\gamma^{\mu\nu}) = (\dot{\rho} + \Theta(\rho + p))n^\nu = 0,$$

e, lembrando que $c\Theta = 3H$,

$$c\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{69}$$

Vale ressaltar que essa equação pode ser obtida diretamente das Eqs. (64–65) e, portanto, não representa uma equação de movimento independente.

4.1 Lista de Exercícios

** **Exercício 10** — Obtenha a Eq. (69) partindo das Eqs. 66 e (67) ou das Eqs. (64) e (65).

5 Descrição Conforme

Como discutimos acima, a métrica das hipersuperfícies espaciais $\gamma_{\mu\nu}$ pode ser decomposta no quadrado do fator de escala a^2 vezes uma métrica conforme $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$ igual em todas as seções. Definimos a seção espacial conforme $\widetilde{\Sigma}$ e usamos o adjetivo conforme para nos referirmos às quantidades calculadas nessa seção espacial.

A inversa da métrica conforme $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$ é dada por $\breve{\gamma}^{\mu\nu} \equiv a^2\gamma^{\mu\nu}$ (e não simplesmente levantando os índices de $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$) e, com isso, $\tilde{\gamma}_{\mu\alpha}\breve{\gamma}^{\alpha\nu} = \gamma_\mu{}^\nu$. Podemos verificar facilmente que a inversa também é constante nas seções espaciais, *i.e.*,

$$\dot{\breve{\gamma}}^{\mu\nu} = \partial_t(a^2\gamma^{\mu\nu}) = \frac{2\dot{a}}{a}\breve{\gamma}^{\mu\nu} - 2a^2\Theta^{\mu\nu} = 0. \tag{70}$$

Podemos estender essa ideia e encontrar um conjunto de campos (co)vetoriais a fim de decompor a métrica em M, $g_{\mu\nu} = a^2\tilde{g}_{\mu\nu}$. Para tanto definimos o campo vetorial $\breve{n}^\mu = an^\mu$ e o campo de covetores $\tilde{n}_\mu = a^{-1}n_\mu$ de forma que $\breve{n}^\mu\tilde{n}_\mu = -1$. Usando esses campos, escrevemos a métrica e sua inversa,

$$g_{\mu\nu} = a^2(\tilde{\gamma}_{\mu\nu} - \tilde{n}_\mu\tilde{n}_\nu) \equiv a^2\tilde{g}_{\mu\nu}, \tag{71}$$

$$g^{\mu\nu} = a^{-2}(\breve{\gamma}^{\mu\nu} - \breve{n}^\mu\breve{n}^\nu) \equiv a^{-2}\breve{g}^{\mu\nu}. \tag{72}$$

Como mostramos acima, $\dot{\breve{\gamma}}^{\mu\nu} = 0 = \dot{\tilde{\gamma}}_{\mu\nu}$, e é fácil verificar que o fluxo gerado por $\breve{n}^\mu$ também deixa as métricas conformes em Σ invariantes, *i.e.,* $\pounds_{\breve{n}}\breve{\gamma}^{\mu\nu} = 0 = \pounds_{\breve{n}}\tilde{\gamma}_{\mu\nu}$. Além disso, temos que $\pounds_{\breve{n}}\breve{n}^\mu = 0 = \pounds_{\breve{n}}\tilde{n}_\mu$ e dessa forma as métricas conformes em M são constantes em relação ao fluxo $\breve{n}^\mu$, ou seja,

$$\pounds_{\breve{n}}\tilde{g}_{\mu\nu} = 0 = \pounds_{\breve{n}}\breve{g}^{\mu\nu}. \tag{73}$$

Existe ainda uma outra vantagem associada à existência do campo vetorial $\breve{n}^\mu$: a derivada de Lie da métrica é proporcional à mesma,

$$\pounds_{\breve{n}}g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\breve{n}_{\nu)} = 2(-\dot{a}n_\mu n_\nu + a\Theta_{\mu\nu}) = 2\dot{a}g_{\mu\nu}.$$

Portanto, o campo $\breve{n}^\mu$ é um campo de Killing conforme (ver [12]) e, dessa forma, produz uma quantidade conservada ao longo de cada geodésica nula,[10] *i.e.,* dada uma geodésica nula com tangente w^μ, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_w(w^\mu\breve{n}_\mu) &= w^\mu w^\alpha\nabla_\alpha\breve{n}_\mu = w^\mu w^\alpha(-\nabla_\mu\breve{n}_\alpha + 2\dot{a}g_{\mu\alpha}),\\ \nabla_w(w^\mu\breve{n}_\mu) &= \dot{a}\, w^\mu w^\alpha g_{\mu\alpha} = 0.\end{aligned} \tag{74}$$

A coordenada α associada ao campo vetorial via Eq. (52) é simplesmente o tempo próprio medido pelos observadores isotrópicos descritos por n^μ. Da mesma forma, definimos o tempo conforme $\eta \equiv \eta(t)$ associado ao campo covetorial $\tilde{n}_\mu = -\nabla_\mu\eta = \dot{\eta}n_\mu$.[11] Portanto, a coordenada η é dada por $\dot{\eta} = 1/a$ e, com isso,

$$\eta - \eta_0 = c\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{a}. \tag{75}$$

A derivada de Lie na direção $\breve{n}^\mu$, em um sistema de coordenadas no qual usamos o tempo conforme, representa a derivada parcial em relação a essa coordenada. Nesse trabalho usaremos o símbolo $' \equiv \pounds_{\breve{n}}$ para representá-la e definimos também a função de Hubble conforme como,

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}, \tag{76}$$

onde

$$\mathcal{H}^2 = a^2\frac{\kappa}{3}\rho - \widetilde{K}, \quad \Theta = \frac{3\mathcal{H}}{a}. \tag{77}$$

[10] Chamamos de geodésica nula a curva geodésica cujo vetor tangente w^μ é do tipo nulo.

[11] O sinal de menos na relação entre η e $\tilde{n}_\mu$ vem da escolha de assinatura, ver Eq. (52).

6 Desvio para o Vermelho e Distâncias Cosmológicas

Como vimos na Sec. 4, a métrica evolui temporalmente a partir de um fator de escala. Uma forma direta de observar tal modificação é através da alteração do comprimento de onda dos fótons. Suponha que uma galáxia emite um fóton no instante t_e e com quadrimomento nulo dado por p^μ,[12] de forma que quando medido por um observador isotrópico em um instante t_0 tem número de onda $k(t_0) = p^\parallel/(\mathsf{h}c)$, onde $p^\parallel \equiv -n^\mu p_\mu$ e h é a constante de Planck.

Como os fótons seguem geodésicas nulas, a quantidade

$$p_\mu \breve{n}^\mu = -p^\parallel(t_e)a(t_e)$$

é constante ao longo da trajetória (ver Eq. 74) e, portanto, o comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ medido por um observador na Terra em um instante t_0 é dado por

$$\lambda(t_0) = \lambda(t_e)x(t_e),$$

onde, por conveniência, definimos a variável $x(t_e) = a_0/a(t_e)$. Se conhecermos o espectro emitido pela galáxia, observaremos o mesmo modificado por um desvio

$$\frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} = x(t_e) - 1 \equiv z. \quad (78)$$

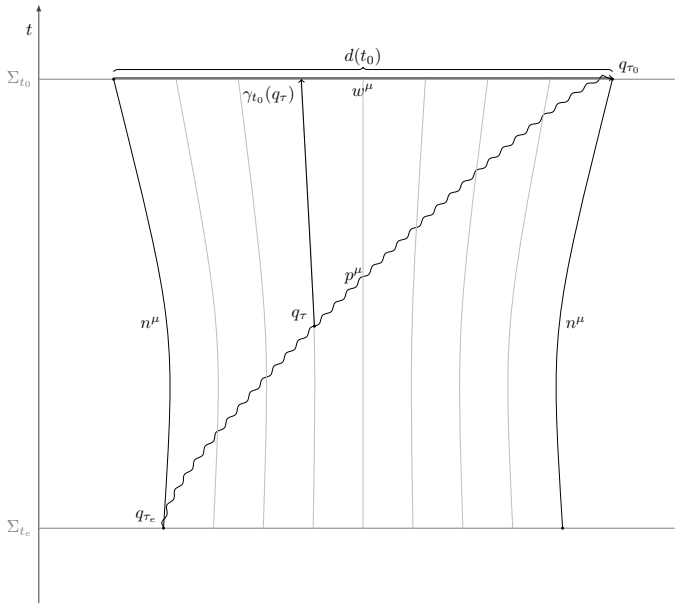


Figura 1 – *Trajetória $q(\tau)$ de um fóton emitido em $q(\tau_e)$ no instante $t_e = t(\tau_e)$ e observado em $q(\tau_0)$ no instante $t_0 = t(\tau_0)$. Projetando essa trajetória na seção Σ_{t_0}, temos que $d(t_0)$ representa a distância entre o emissor e o observador medida nessa hipersuperfície. As linhas cinzas verticais representam as trajetórias $\gamma_t(q_\tau)$ dos observadores isotrópicos e o campo w^μ a tangente à trajetória projetada em Σ_{t_0}.*

No caso de um universo em expansão, temos que $a(t_e) < a_0$ e portanto $z > 0$, o qual chamamos de Desvio para o Vermelho (DV) já que os comprimentos de onda são aumentados.

Podemos determinar a distância instantânea entre a galáxia emissora e a Terra, *i.e.,* dado um instante t_0 calculamos o comprimento da geodésica que liga a posição da galáxia e da Terra na mesma seção espacial Σ_{t_0} como mostrado na Fig. 1.

[12] Estamos desprezando qualquer velocidade peculiar que a galáxia ou a Terra possa ter em relação aos observadores isotrópicos.

Para isso, decompomos o quadrimomento nas componentes paralelas e perpendiculares a n^μ,

$$p^\mu = (\gamma^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu)p^\nu = p^\parallel n^\mu + p^{\perp\mu},$$

onde $p^{\perp\mu} \equiv \gamma\,[p^\mu]$. Como o quadrimomento é nulo, temos que

$$p^\mu p_\mu = -p^{\parallel 2} + p^{\perp 2} = 0,$$

onde $p^{\perp 2} = p^{\perp\mu}p^\perp{}_\mu$. Note que $p^\parallel = -p^\mu n_\mu = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\tau$, onde τ é o parâmetro da trajetória q_τ do fóton. Para calcular a distância percorrida na hipersuperfície Σ_{t_0} precisamos projetar a trajetória q_τ do fóton como mostrado na Fig. 1. Para tanto, note que $p^{\perp\mu}$ representa o deslocamento espacial do fóton a cada instante de sua trajetória e, portanto, é necessário arrastar esse vetor ao longo das trajetórias dos observadores isotrópicos γ até a seção Σ_{t_0}, *i.e.,* dado um ponto inicial q_τ sobre a trajetória do fóton, $\gamma_{t_0}(q(t))$ representa o ponto em Σ_{t_0} da curva do observador isotrópico que no instante $t(\tau)$ estava no ponto q_τ.

A trajetória dos observadores isotrópicos $\gamma_{t_0}(q_\tau)$ define uma operação *empurrar* (como definido na Sec. 1) que utilizamos para definir $p^{\perp\mu}$ ao longo das trajetórias dos observadores isotrópicos, *i.e.,* $\gamma^*_{t_0}p^{\perp\mu}|_{q_\tau} = w^\mu|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)}$. Como o campo vetorial w^μ é definido via operação *empurrar*, ele satisfaz a equação $\dot{w}^\mu = 0$, cuja condição inicial é dada por $w^\mu|_{q_\tau} = p^{\perp\mu}|_{q_\tau}$. Por conseguinte,

$$\nabla_n w^\mu = \nabla_w n^\mu = w^\nu \Theta_\nu{}^\mu, \qquad \partial_t w^{\perp 2} = 2\partial_t \ln(a) w^{\perp 2}, \qquad w^{\perp 2}(t)a_0^2 = w^{\perp 2}(t_0)a(t)^2,$$

onde $w^{\perp\mu} \equiv \gamma\,[w^\mu]$ e $w^{\perp 2} \equiv w^{\perp\mu}w^\perp{}_\mu$. Aplicando a condição inicial temos

$$w^\mu w_\mu|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)} = w^{\perp 2}|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)} = \frac{a_0^2}{a^2(t)}p^{\perp 2}(\lambda).$$

Logo, o comprimento dessa curva é dado por

$$d(t_0) = \int_{\tau_e}^{\tau_0} \mathrm{d}\tau\, \sqrt{w^\mu w_\mu|_{\gamma_{t_0}(q_\tau)}} = \int_{\tau_e}^{\tau_0} \mathrm{d}\tau\, \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2(t)}p^{\perp 2}(\lambda)} = ca_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}. \tag{79}$$

Da mesma forma poderíamos ter calculado a distância em qualquer outra seção espacial Σ_{t_1} obtendo

$$d(t_1) = ca(t_1) \int_{t_e}^{t_1} \frac{\mathrm{d}t}{a} \equiv a(t_1)\tilde{d}, \tag{80}$$

onde definimos a distância conforme como $\tilde{d} = d(t)/a$. Note também que essa distância é dada pela diferença da coordenada conforme definida na Eq. (75), *i.e.,* $\tilde{d} = \eta - \eta_0$. Para

uma galáxia suficientemente próxima, *i.e.*, $t_e \lesssim t_0$, expandimos o fator de escala em série de Taylor em torno de t_0,

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) \approx \frac{H_0}{c} d(t_0) = \frac{\tilde{d}}{\tilde{R}_H}, \tag{81}$$

onde o valor da função de Hubble na época atual H_0 é chamado constante de Hubble e $\tilde{R}_H \equiv c/(a_0 H_0)$ define o raio de Hubble conforme. Essa relação foi primeiramente medida por [19] e medidas atuais [20] indicam que $H_0 = 72 \pm 8\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Como é convencional na literatura, definimos também a quantidade $h = H_0/(100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1})$ que chamamos de constante de Hubble adimensional. Em função desse parâmetro temos o raio de Hubble hoje é aproximadamente $R_H \equiv a_0 \tilde{R}_H \approx 3000 \text{ Mpc } h^{-1}$.

7 Modelo Padrão

Para estudarmos as possíveis soluções das Eqs. (64–65), aproximamos o conteúdo material do universo usando um fluido perfeito. Nem todo fluido perfeito representa estados em equilíbrio termodinâmico, pode haver dissipação via pressão dissipativa. No entanto existem pelo menos dois tipos de fluidos que entram em equilíbrio termodinâmico em modelos de FLRW. Esses são caracterizados pela relação entre densidade de energia e pressão, além da evolução da temperatura. Chamamos radiação os fluidos que têm a relação $p = \rho/3$ cujas temperaturas evoluem com $T = T_0 x$,[13] e poeira aqueles com pressão $p \approx 0$ e temperatura $T = T_0 x^2$. Em geral descrevemos fluidos barotrópicos (pressão depende somente da densidade de energia), onde a equação de estado $w = p/\rho$ é constante. Note porém que a aproximação de poeira vale enquanto $mc^2 \gg k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann. De forma geral obtemos, usando a Eq. (69), que a densidade de energia evolui como

$$\rho = \rho_0 x^{3(1+w)}. \tag{82}$$

Podemos usar o valor de $H^2(t)$ para definir uma densidade crítica no instante t, $\rho_c = H^2/\kappa^*$, de forma a termos necessariamente $\widetilde{K} = 0$ se a densidade de energia do universo for igual à crítica. Definimos as densidades adimensionais $\Omega = \rho/\rho_{c0}$,[14] e analogamente

[13] No que isso vale tanto para partículas de massa nula, quanto para partículas cuja massa é muito menor que a temperatura, *i.e.*, $mc^2 \ll k_B T$.

[14] Note que na literatura alguns autores definem uma função $\Omega(t) = \rho/\rho_c$ para ρ_c também como função do tempo, enquanto aqui usamos Ω para representar a densidade em um instante arbitrário dividida pela densidade crítica hoje.

$\Omega_k = -R_H^2 K$ e

$$\Omega_{k0} = -R_H^2 K_0 = -\tilde{R}_H^2 \widetilde{K}. \tag{83}$$

Como vimos na Eq. (50), a constante cosmológica pode ser descrita como um fluido com TEM

$$T_{(\Lambda)\mu\nu} = -\frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa} = \frac{c^2\Lambda}{3\kappa^*} n_\mu n_\nu - \frac{c^2\Lambda}{3\kappa^*}\gamma_{\mu\nu},$$

ou seja, um fluido com $\rho = c^2\Lambda/3\kappa^*$ e $p = -\rho$ e, portanto, $w = -1$. Usando essa equação de estado na Eq. (82) vemos que ρ é constante como esperávamos e, de forma similar ao que fizemos para os fluidos, definimos a densidade $\Omega_{\Lambda 0} = R_H^2\Lambda/3$.

No modelo padrão, o universo é descrito como contendo uma densidade Ω_{r0} de radiação, a qual leva em conta fótons Ω_{γ_0} e neutrinos $\Omega_{\nu 0}$ de forma que a densidade total de radiação é dada por $\Omega_{r0} = \Omega_{\gamma_0} + \Omega_{\nu 0}$. A temperatura da RFC medida hoje pelo satélite COBE [21] é $T_{\gamma,0} = 2.714 \pm 0.022$ K. Portanto, temos que a temperatura da radiação é dada por $T_\gamma = T_{\gamma,0}x$. Dado que em algum momento no passado os neutrinos estavam em equilíbrio térmico com a radiação e devido sua pequena massa, podemos considerar que $T_\nu \approx T_\gamma = T_{\gamma,0}x$.[15] Note que essa igualdade vale enquanto a temperatura for muito maior que a massa dos neutrinos e que, após esse instante, a temperatura dos neutrinos passa a evoluir com x^2.

Além da radiação, descrevemos o universo como contendo uma densidade de partículas frias Ω_{m0} ($mc^2 \gg k_B T$), ou seja, descrita por um fluido do tipo poeira. Essa categoria consiste na densidade de bárions[16] Ω_{b0}, que representa a matéria visível do universo, e também numa densidade de matéria escura fria Ω_{c0}. Vale ressaltar que a aproximação de poeira é valida enquanto $m_e c^2/(T_p k_B) \propto 10^9\ \mathrm{K}/T_p \gg 1$, onde m_e representa a massa do elétron. Levando em conta que a matéria estava em equilíbrio térmico com a radiação até a recombinação em $x_d \approx 1000$, temos que desse ponto ao passado[17] $T_p \approx T_\gamma$ e, portanto, a inequação fica da forma $x^2 \ll x_d 10^9\ \mathrm{K}/T_{\gamma,0}$ (teríamos um limiar ainda maior se considerássemos a massa do próton). Como no momento em que esse limiar é atingido a densidade de energia total é dominada pela radiação ($\Omega_{r0}x^4 \gg \Omega_{m0}x^3$), a aproximação tipo poeira é suficiente. Outras modelagens incluem também matéria escura quente, mas aparentemente os modelos com matéria escura fria ajustam melhor os dados (para

[15] A menos de fatores numéricos ligados à estatística e Fermi–Dirac ou Bose-Einstein e *spin*.

[16] Mesmo chamada de bariônica essa densidade inclui também os léptons.

[17] Estamos ignorando fatores numéricos de ordem um, como no caso dos neutrinos.

uma discussão mais completa ver [22]). Assim a densidade total de poeira é dada por $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$.

Evidências observacionais, como a relação distância por DV das supernovas tipo Ia [23], indicam que o universo está em uma fase de expansão acelerada. Isso pode ser explicado por uma constante cosmológica Λ positiva diferente de zero.[18] Finalmente reescrevemos a densidade total como

$$\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = \Omega_{r0}x^4 + \Omega_{m0}x^3 + \Omega_{\Lambda 0}, \tag{84}$$

e a Eq. (64) como

$$E^2 \equiv \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega + \Omega_k = \Omega_{r0}x^4 + \Omega_{m0}x^3 + \Omega_{k0}x^2 + \Omega_{\Lambda 0}, \tag{85}$$

onde definimos a função de Hubble normalizada E que satisfaz $E(t_0) = 1$. Com essa definição o escalar de expansão é dado por

$$\Theta = \frac{3E}{R_H}. \tag{86}$$

O modelo representado pelas equações acima é conhecido como modelo Λ e matéria escura fria – Λ *Cold Dark Matter* (ΛCDM). A função de Hubble conforme, quando utilizamos as definições acima, é dada por

$$\tilde{R}_H^2\mathcal{H}^2 = \frac{E^2}{x^2} = \Omega_{r0}x^2 + \Omega_{m0}x + \Omega_{\Lambda 0}x^{-2} + \Omega_{k0}, \tag{87}$$

onde na última igualdade usamos o mesmo conteúdo descrito nessa seção.

7.1 Evolução Para um Único Fluido

Como visto na Eq. (82), a densidade de energia de um fluido com w constante tem um comportamento de lei de potência no DV (fator de escala), o que permite simplificarmos a análise da evolução desses modelos. Como a potência no DV de fluidos diferentes é também diferente, em geral haverá valores de x nos quais somente um fluido dominará. No caso descrito pela Eq. (85), por exemplo, quando $x \ll (\Omega_{\Lambda 0}/\Omega_{m0})^{1/3}$ a função de Hubble será dada aproximadamente por aquela de um único fluido com $w = -1$, *i.e.,* $E^2 \approx \Omega_{\Lambda 0}$.

[18] Esse é atualmente um dos grandes desafios da cosmologia, identificar se essa expansão acelerada é simplesmente devido à presença de uma constante cosmológica ou de um fluido com equação de estado $p/\rho < -1/3$ ou ainda uma indicação de uma teoria de gravitação diferente da RG.

Similarmente, há domínio de poeira $w = 0$ no intervalo $\Omega_{m0}/\Omega_{r0} \gg x \gg (\Omega_{\Lambda 0}/\Omega_{m0})^{1/3}$ e de radiação $w = 1/3$ quando $x \gg \Omega_{m0}/\Omega_{r0}$.

Desta forma, podemos encontrar a evolução do fator de escala analiticamente em cada um desses intervalos em x. Usando a solução do fluido (Eq. 82) na Eq. (87), temos a seguinte evolução do fator de escala em termos da variável x e do tempo conforme,

$$x(\eta) = \left(\frac{\beta \tilde{R}_H}{\sqrt{\Omega_{w0}}|\eta|}\right)^{\beta} = \left(\frac{\eta_0}{|\eta|}\right)^{\beta}, \tag{88}$$

onde $\beta \equiv 2/(1+3w)$, Ω_{w0} é a densidade adimensional do fluido em questão e a constante $\eta_0 \equiv \tilde{R}_H \beta/\sqrt{\Omega_{w0}}$ representa o tempo conforme no qual o fator de escala é igual a a_0 ($x = 1$). Escolhemos a constante de integração de forma que $a(0) = 0$ para $w > -1/3$ e $a(0) = \infty$ para $w < -1/3$. Durante essa fase a função de Hubble conforme é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\sqrt{\Omega_{w0}}\eta_0}{\tilde{R}_H \eta} = \frac{\sqrt{\Omega_{w0}}\eta}{\tilde{R}_H|\eta|} x^{1/\beta}, \tag{89}$$

onde o termo $\eta/|\eta|$ representa o sinal da coordenada temporal, que da forma que escolhemos descreve a fase de contração quando $\eta < 0$ e expansão quando $\eta > 0$.

8 Perturbações Cosmológicas

Na modelagem de um sistema físico, de forma implícita ou explícita, existe uma escala na qual a descrição é feita. Por exemplo, na mecânica dos fluidos estamos interessados em descrever as propriedades macroscópicas de sistemas compostos por um infinidade de partículas. Portanto, nela utilizamos a noção de elemento de fluido que corresponde ao comportamento médio de um conjunto de partículas que o compõe. No processo de média usado para definir os elementos, o comportamento microscópico e suas propriedades são condensadas nos elementos da sua evolução, como viscosidade, pressão, entre outros. De forma similar, ao criar modelos cosmológicos, esperamos descrever o universo nas maiores escalas observáveis. Nesse sentido supomos que os modelos de Friedmann–Lamaître–Robertson–Walker (FLRW) descrevam o universo em uma escala grande o suficiente para que este possa ser tratado como homogêneo e isotrópico. Essa suposição, que é usada a priori, mostra-se compatível com as observações, através da Radiação Cósmica de Fundo (RFC) e estruturas em grandes escalas.

Para tratar escalas menores, o modelo não pode mais ser homogêneo e isotrópico. No entanto, podemos supor que o novo modelo, mesmo não sendo mais de FLRW, seja tal

que a diferença entre ele e um modelo de FLRW seja pequena. O que normalmente se faz em outras áreas da física é, por algum processo de média, determinar o valor de fundo e definir as perturbações como sendo a diferença entre a quantidade e sua média. Dessa forma temos uma maneira de determinar o valor de fundo e o seu significado físico. Na cosmologia o processo de média é uma questão em aberto (ver [24–27] e suas referências), portanto nesse trabalho tomaremos outro caminho. Ao invés de definir um processo de média para determinar o modelo de fundo, vamos partir da suposição de que o modelo de fundo é FLRW, e que a diferença entre ele e o modelo real (também chamado de modelo perturbado) é pequena. O que acontece nesse caso, como citamos no começo desse capítulo, é que a definição de perturbação é ambígua, já que a definição de modelo de fundo é arbitrária.

Suponha que o modelo perturbado é descrito por uma métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ em uma variedade M. Essa é a métrica que descreverá nosso sistema físico. De forma arbitrária, adicionamos ao problema uma segunda métrica $g_{\mu\nu}$ do tipo FLRW e fazemos a suposição fundamental de que sua diferença é pequena, *i.e.,* definindo a diferença como

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}.$$

Vamos desprezar todos os termos quadráticos ou de potência superior em $\delta g_{\mu\nu}$. A questão é: de que formas diferentes podemos definir a métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ na variedade M tal que $\delta g_{\mu\nu}$ seja pequeno.

Para lidar com essa questão, definimos uma variedade M° com uma métrica de FLRW $g^\circ_{\mu\nu}$. Dado um difeomorfismo $\Upsilon : M^\circ \to M$ e um grupo de difeomorfismos $\vartheta_\lambda : M \to M$, como os definidos na Sec. 1, temos que $\Upsilon_\lambda(\cdot) \equiv \vartheta_\lambda(\Upsilon(\cdot))$ provê um conjunto de difeomorfismos de M° em M. Podemos utilizar a inversa de tais difeomorfismos para definir uma operação *puxar*,[19] que leva covetores de M° em covetores M, *i.e.,* ${g^{(\lambda)}}_{\mu\nu} = \Upsilon_\lambda^{-1*} g^\circ_{\mu\nu} = \vartheta_\lambda^{-1*} g_{\mu\nu}$, onde definimos a métrica $g_{\mu\nu} \equiv \Upsilon^{-1*} g^\circ_{\mu\nu}$ na variedade M.

Suponha agora que a diferença $\delta g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ seja pequena. Para um valor pequeno do parâmetro λ, temos que

$${g^{(\lambda)}}_{\mu\nu} = \vartheta_\lambda^{-1*} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \pounds_u g_{\mu\nu},$$

onde o campo vetorial u^μ é o campo tangente as curvas $p(\lambda) \equiv \vartheta_\lambda(p)$ em M. Portanto a

[19] Analogamente à operação *empurrar* definida na Sec. 1, para mais detalhes sobre ambas operações ver *push forward* e *pull back* em [12] ou [13]

diferença entre as métricas será dada por

$$\delta g^{(\lambda)}{}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} + \pounds_u g_{\mu\nu}) = \delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} u_{\nu)},$$

lembrando que a derivada de Lie é independente da derivada covariante que utilizamos. Portanto, nesse caso, escolhemos aquela compatível com $g_{\mu\nu}$, *i.e.,* $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Note que isso mostra que uma condição suficiente para que a diferença mantenha-se pequena é a de que $\nabla_\mu u_\nu$ seja pequeno. Mas ela não é necessária: se escolhêssemos os difeomorfismos ϑ_λ de forma que u^μ fosse um campo de Killing de $g_{\mu\nu}$, teríamos $\delta g^{(\lambda)}{}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ para qualquer valor de λ. Definimos como mudança de calibre, qualquer outra escolha de difeomorfismo tal que $\delta g^{(\lambda)}{}_{\mu\nu}$ continue pequeno. Note que essa liberdade de calibre é parametrizada por campos vetoriais u^μ que definem uma mudança pequena nos difeomorfismos.

Vale ressaltar a diferença entre o procedimento descrito acima e uma mudança de coordenadas em M. Dada as duas métricas, $\hat{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$, se fizermos uma mudança de coordenadas pequena gerada por um campo vetorial b^μ, teremos

$$\begin{aligned}
&\hat{g}_{\mu\nu} \to \hat{g}_{\mu\nu} + \pounds_b \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + \pounds_b g_{\mu\nu}, \\
&g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \pounds_b g_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

onde consideramos b^μ da mesma ordem que $\delta g_{\mu\nu}$. Com isso, temos que a diferença entre elas se transformará como $\delta g_{\mu\nu} \to (\hat{g}_{\mu\nu} + \pounds_b g_{\mu\nu}) - (g_{\mu\nu} + \pounds_b g_{\mu\nu}) = \delta g_{\mu\nu}$, ou seja, a perturbação na métrica é invariante sob transformações de coordenadas de mesma ordem.

Ao fazer uma mudança de calibre, todos os objetos trazidos da variedade M° são modificados, *i.e.,* se $T^\circ{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$ é um tensor arbitrário definido em M° e $T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} \equiv \Upsilon^{-1*} T^\circ{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$ sua versão em M, então, sob uma transformação de calibre, esse tensor se modifica da seguinte forma

$$T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} \to T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} + \pounds_u T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}.$$

Contudo, se fizermos uma mudança de coordenadas em M gerada por $-u^\mu$, esse tensor será novamente dado por $T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$. E, com isso, todas as quantidades definidas originalmente em M sofrerão a mudança

$$\widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} \to \widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} - \pounds_u \widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}.$$

É nesse sentido que alguns livros texto ou artigos de revisão referem-se à mudança de calibre como sendo uma mudança de coordenadas onde as quantidades de fundo são

mantidas "fixas". Nesse trabalho, todas as mudanças de calibre serão seguidas por uma mudança de coordenadas de forma que os tensores definidos na variedade de fundo M° ficam invariantes.

Dadas duas métricas $\hat{g}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ as quais chamaremos de perturbada e de fundo, respectivamente, definimos sua diferença como $\delta g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ de forma que ela seja pequena, *i.e.,* desprezaremos todos os termos quadráticos em $\delta g_{\mu\nu}$. Posteriormente, de posse de alguns resultados, discutiremos em que sentido estamos requerendo $\delta g_{\mu\nu}$ pequeno. Neste apêndice iremos utilizar uma métrica $g_{\mu\nu}$ definida utilizando seções espaciais cujas normais n^μ sejam geodésicas, como discutido na Sec. 2. De forma geral usaremos a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ e sua inversa para subir e descer índice dos objetos perturbados que denotaremos com o símbolo $\hat{}$, e as diferenças entre as quantidade perturbadas e de fundo serão representadas com o prefixo δ.

Dada a contração da métrica $\hat{g}^{\mu\alpha}$ com a sua inversa $\hat{g}_{\alpha\nu}$,

$$\hat{g}^{\mu\alpha}\hat{g}_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + g^{\mu\alpha}\delta g_{\alpha\nu} + \delta g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu},$$

temos que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \tag{90}$$

de forma que o tensor $\delta g^{\mu\nu}$ não é obtido simplesmente subindo os índices de $\delta g_{\mu\nu}$. Assim sendo, definimos o tensor $\xi_{\mu\nu} \equiv \delta g_{\mu\nu}$, no qual aplicaremos a métrica $g_{\mu\nu}$ para subir e descer índices. Note que com essa definição $\xi^{\mu\nu} \neq \delta g^{\mu\nu}$ e, em primeira ordem, $\delta g^{\mu\nu} = -\xi^{\mu\nu}$.

Primeiramente definimos as projeções de $\xi_{\mu\nu}$ nas direções normais e perpendiculares como,

$$\xi_{nn} = 2\phi, \tag{91}$$

$$\gamma\left[\xi_{n\nu}\right] = -B_\nu, \tag{92}$$

$$\gamma\left[\xi_{\mu\nu}\right] = 2C_{\mu\nu}, \tag{93}$$

e assim temos

$$\xi_{\mu\nu} = 2\phi n_\mu n_\nu + 2B_{(\mu} n_{\nu)} + 2C_{\mu\nu}. \tag{94}$$

8.1 Quantidades Perturbadas

Seja $\widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$ um tensor definido em M, tal que sua construção não dependa de objetos *puxados* de M°, e um objeto construído da mesma forma em M°. Definimos a

perturbação em $\widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$ como

$$\delta T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} \equiv \widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} - T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}.$$

Estamos interessados em quantidades tais que suas perturbações sejam da mesma ordem de $\delta g_{\mu\nu}$. Para esses objetos, uma mudança de calibre tem o seguinte efeito,

$$\widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} \to \widehat{T}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} - \pounds_u T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}, \tag{95}$$

onde desprezamos o termo de segunda ordem $\pounds_u \delta T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$. Ao fazer uma mudança de calibre, a perturbação nesse objeto transforma-se como

$$\delta T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} \to \delta T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} - \pounds_u T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}. \tag{96}$$

Se não nos restringirmos a campos u^μ especiais,[20] essa mudança só será identidade para qualquer campo u^μ se $\pounds_u T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} = 0$. Esse resultado é o lema do artigo [28, 29] em que os autores mostram que as perturbações são invariantes de calibre se e somente se $\pounds_u T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} = 0$ e que isso acontece se e somente se o tensor for uma constante ou combinações de constantes e deltas de Kronecker. Chamaremos de perturbações simples as quantidades perturbadas construídas da forma descrita acima.

Porém, existem objetos geométricos que não são construídos da forma descrita acima. Quando se define a métrica perturbada como

$$\hat{g}_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} -1+2\phi & -B_i \\ -B_i & \gamma_{ij}+2C_{ij} \end{pmatrix},$$

e a métrica do fundo

$$g_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

estamos implicitamente usando coordenadas gaussianas normais para a métrica de fundo, como discutido na Sec. 2. Isso é o mesmo que escolher um conjunto de hipersuperfícies, de forma que a normal a elas é geodésica, e uma função tempo, tal que o campo covetorial normal é dado por $n_\mu = -\partial_\mu \alpha$, o campo vetorial associado a essa coordenada é simplesmente n^μ, *i.e.,* $n^\mu \partial_\mu \alpha = -n^\mu n_\mu = 1$, e, por fim, um conjunto de vetores coordenados $e_i{}^\mu$ com $i = 1, 2, 3$ nas hipersuperfícies de forma que $n_\mu e_i{}^\mu = 0$ e $\dot{e}_i{}^\mu = 0$. Além de adicionar vários ingredientes relacionados com a escolha de coordenadas, a definição

[20] Poderíamos nos restringir as possíveis isometrias de $T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$.

de métrica acima é equivalente às projeções feitas nas Eqs. (91–93). A métrica de fundo nessa decomposição fica,

$$g_{nn} = -1, \qquad g_{n\nu}\gamma^{\nu}{}_{\alpha}e_i{}^{\alpha} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}e_i{}^{\alpha}e_j{}^{\beta} = \gamma_{ij},$$

enquanto a perturbada é dada por

$$\hat{g}_{nn} = -1 + 2\phi, \qquad \hat{g}_{n\nu}\gamma^{\nu}{}_{\alpha}e_i{}^{\alpha} = -B_i, \qquad \hat{g}_{\mu\nu}\gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}e_i{}^{\alpha}e_j{}^{\beta} = \gamma_{ij} + 2C_{ij},$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ é o projetor definido na Sec. 2, o subscrito $_n$ representa a contração com o campo n, como definido na Eq. (12), e $\gamma_{ij} \equiv \gamma_{\alpha\beta}e_i{}^{\alpha}e_j{}^{\beta}$, $B_i \equiv B_{\alpha}e_i{}^{\alpha}$, $C_{ij} \equiv C_{\alpha\beta}e_i{}^{\alpha}e_j{}^{\beta}$. Então, nesse caso, temos que a perturbação na métrica ϕ é dada por $\phi = (\hat{g}_{nn} - g_{nn})/2$. Note que essa perturbação não se encaixa na forma descrita no começo da seção. A quantidade $\hat{g}_{nn} = n^{\mu}n^{\nu}\hat{g}_{\mu\nu}$ envolve termos de ambas as variedades, mais especificamente, a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ e os vetores normais às seções espaciais definidas em M°. As perturbações que envolvem objetos construídos utilizando termos de ambas as variedades serão chamados de perturbações mistas. Em geral, as partes escalares, vetoriais e tensoriais (nas hipersuperfícies e não na variedade M) da perturbação da métrica são definidas como projeções onde se usa um sistema de coordenadas atrelado à variedade de fundo. Vale ressaltar que como essas quantidades não são perturbações simples, não vale o lema da invariância de calibre, *e.g.* a quantidade $g_{nn} = -1$ é claramente constante e tem derivada de Lie nula, porém ϕ não é invariante de calibre.

Além das projeções da perturbação da métrica, existem outros objetos mistos que são úteis na interpretação das perturbações. A variedade de fundo tem um conjunto de seções espaciais bem definido, nas quais temos homogeneidade e isotropia, que definem um campo covetorial $n_{\mu} = -\partial_{\mu}\alpha$. Esse campo é normalizado no contexto da métrica de fundo e, portanto, terá norma diferente de menos um na métrica perturbada. Podemos então calcular a versão normalizada $\hat{n}_{\mu} = -\partial_{\nu}\alpha/\sqrt{-\hat{g}^{\gamma\sigma}\partial_{\gamma}\alpha\partial_{\sigma}\alpha}$, que em primeira ordem é simplesmente $\hat{n}_{\mu} = n_{\mu} - \phi n_{\mu}$. Note que no caso das normais das seções espaciais de fundo, temos simplesmente que $v^{\mu} = 0$. Por exemplo, a aceleração dessas curvas será $\hat{a}_{\mu} = -D_{\mu}\phi$. Imagine um conjunto de observadores em M que seguem trajetórias cujas tangentes são dadas por $\hat{n}^{\mu}$, ou seja, as trajetórias que os observadores isotrópicos seguiriam caso não houvesse perturbações. Esses observadores iriam, portanto, medir uma aceleração $\hat{a}_{\mu} = -D_{\mu}\phi$.

Para evitarmos objetos mistos, podemos criar um seccionamento arbitrário em M de forma que difira das seções de M° somente em primeira ordem. Com isso, definimos a curvatura extrínseca do campo normal das hipersuperfícies perturbadas como $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}$ e das não perturbadas como $\Theta_{\mu\nu}$, e assim a perturbação $\delta\Theta_{\mu\nu} \equiv \widehat{\Theta}_{\mu\nu} - \Theta_{\mu\nu}$. Nesse caso, elas serão perturbações simples e, logo, vale o lema das perturbações. Mais especificamente, para a métrica de fundo temos o cisalhamento, definido na Eq. (19), $\sigma_{\mu\nu} = 0$ (ver Eq. 53) e, com isso, $\delta\sigma_{\mu\nu}$ é invariante de calibre. A desvantagem dessas quantidades é que estamos calculando a diferença entre objetos definidos em seções espaciais diferentes. Suponha que a métrica de fundo tenha curvatura espacial nula, nesse caso $\delta\mathcal{R} = \widehat{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$ é invariante de calibre, porém $\widehat{\mathcal{R}}$ fornece a curvatura espacial de uma certa seção espacial arbitrária definida em M, ou seja, $\delta\mathcal{R}$ é invariante de calibre mas depende da escolha de hipersuperfícies em M.

Em resumo, as perturbações mistas são mais fáceis de interpretar pois podemos usar a mesma noção de hipersuperfícies para definir os objetos a serem comparados, porém as perturbações definidas dessa forma geralmente dependem do calibre usado. Já as perturbações simples, são definidas inteiramente em cada variedade, podem ser invariantes de calibre quando o valor de fundo for nulo, mas sua interpretação é complicada pois estamos comparando objetos definidos em seções espaciais diferentes. Vale notar que no caso de FLRW, a única perturbação simples que podemos definir de forma independente das seções espaciais é o tensor de Weyl, que na métrica que fundo é nulo, e portanto, $\delta C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é invariante de calibre e não depende da escolha de hipersuperfícies, o que simplifica a sua interpretação física. As projeções que fornecem as partes elétrica e magnética desse tensor dependem da escolha de hipersuperfícies. Contudo, em primeira ordem, a projeção

$$\widehat{C}_{\mu\nu\alpha\beta}\hat{m}^\mu\hat{m}^\alpha = \delta C_{\mu\nu\alpha\beta}n^\mu n^\alpha$$

depende somente do valor de fundo de $\hat{m}^\mu$, pois $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é nulo na métrica de fundo. Isso mostra que as projeções elétrica e magnética, em primeira ordem, são independentes da escolha de hipersuperfícies perturbadas.

8.2 Decomposição das Perturbações

Em uma métrica de fundo do tipo FLRW, podemos fazer uma série simplificações no cálculo das perturbações. Nesse caso, a curvatura extrínseca é dada pela Eq. (53) e o escalar

de expansão Θ depende somente do tempo cósmico, *i.e.,* $D_\mu\Theta = 0$ e, consequentemente, $D_\mu\Theta_{\alpha\beta} = 0$. Essas restrições são suficientes para fazer todas as simplificações e, com isso, podemos obter a curvatura nas hipersuperfícies via Eq. (29) obtendo assim as Eqs. (54).

Notamos também que o comutador das derivadas espaciais e a derivada de Lie na direção normal se anulam quando agindo sobre qualquer tensor, *i.e.,* o tensor de curvatura definido na Eq. (34) é nulo. Porém, a derivada de Lie na direção normal não comuta com o operador de Laplace–Beltrami $D^2 \equiv D_\mu D^\mu$, *i.e.,*

$$\begin{aligned}
\partial_t D^2 T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} &= \partial_t \left(\gamma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l}\right), \\
&= -2\Theta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} + \gamma^{\mu\nu}\partial_t D_\mu D_\nu T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l}, \\
&= \left(D^2\partial_t - \frac{2}{3}\Theta D^2\right) T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l},
\end{aligned}$$

ou simplesmente

$$[\partial_t, D^2] T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} = -\frac{2}{3}\Theta D^2 T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l}. \tag{97}$$

Isso acontece porque a derivada de Lie do projetor $\gamma^{\mu\nu}$ não é zero e portanto ela não comuta com $D^\alpha = \gamma^{\alpha\mu} D_\mu$. Pela Eq. (38), temos

$$[D^\mu, \partial_t] = \frac{2}{3}\Theta D^\mu. \tag{98}$$

Outra simplificação acontece no comutador das derivadas espacias e o operador de Laplace–Beltrami. Usando a Eq. (39) e a forma do tensor de Ricci espacial da Eq. (54),

$$[D_\mu, D^2]\varphi = -2K D_\mu \varphi, \tag{99}$$

onde φ é um escalar. Para um vetor, usamos a Eq. (40) e obtemos

$$[D_\mu, D^2] u_\nu = -4K D_{(\mu} u_{\nu)} + 2K\gamma_{\mu\nu} D_\alpha u^\alpha, \tag{100}$$

onde usamos que $D_\mu K = 0$ (ver Eq. 55).

Podemos decompor as perturbações vetoriais B_μ da seguinte forma,

$$B_\mu = D_\mu \mathcal{B} + \mathsf{B}_\mu, \tag{101}$$

onde $\mathcal{B}$ é uma função arbitrária e B_μ um campo vetorial espacial com divergente nulo, *i.e.,* $\gamma\left[\mathsf{B}_\mu\right] = \mathsf{B}_\mu$ e $D_\mu \mathsf{B}^\mu = 0$. Se calcularmos o divergente obtemos $D_\mu B^\mu = D^2\mathcal{B}$. O operador de Laplace–Beltrami para variedades com métrica de assinatura $(+,+,+)$ ou $(-,-,-)$,

que é o caso das hipersuperfícies, tem inversa única se as hipersuperfícies forem compactas ou se as funções consideradas forem rapidamente a zero no infinito.[21] Assim, dado um campo covetorial B_μ, temos uma única função $\mathcal{B}$ que denotaremos como $\mathcal{B} = D^{-2}D_\mu B^\mu$, onde D^{-2} representa a inversa do operador de Laplace–Beltrami. Dessa forma a equação $\mathsf{B}_\mu = B_\mu - D_\mu D^{-2} D_\alpha B^\alpha$ define um campo covetorial de divergência nula único associado a B_μ. Isso mostra, portanto, que a Eq. (101) define uma decomposição única para um campo covetorial B_μ. Essa decomposição pode ser feita para qualquer campo covetorial.

A decomposição das perturbações tensoriais é mais complicada e depende das características da métrica. Considere a seguinte equação para a parte sem traço da perturbação $C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} - C\gamma_{\mu\nu}/3$,

$$C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu} = -\left(D_\mu D_\nu - \frac{\gamma_{\mu\nu}}{3}D^2\right)\mathcal{E} + D_{(\mu}\mathsf{F}_{\nu)} + W_{\mu\nu}, \tag{102}$$

onde $D_\mu \mathsf{F}^\mu = 0$, $D_\mu W^{\mu\nu} = 0 = W_\mu{}^\mu$. Calculando a divergência dupla do tensor acima, obtemos

$$D_\mu D_\nu C^{\mathsf{t}\mu\nu} = -\frac{2}{3}D^4\mathcal{E} - 2KD^2\mathcal{E} + \frac{1}{2}\left(D_\mu D^2 \mathsf{F}^\mu + D_\mu D_\nu D^\mu \mathsf{F}^\nu\right).$$

Usando a Eq. (100), temos que $D_\mu D^2 \mathsf{F}^\mu = 0$ já que $D_\alpha \mathsf{F}^\alpha = 0$. O último termo por sua vez é simplesmente

$$D_\mu D_\nu D^\mu \mathsf{F}^\nu = D_\mu(\mathcal{R}_\nu{}^{\mu\nu}{}_\gamma \mathsf{F}^\gamma + D^\mu D_\nu \mathsf{F}^\nu) = 0.$$

Portanto, a equação da divergência dupla reduz-se a

$$D_\mu D_\nu C^{\mathsf{t}\mu\nu} = -D^2\left(\frac{2}{3}D^2 + 2K\right)\mathcal{E},$$

e, como o operador D^2 tem inversa única e o operador $D^2 + 3K$ também define uma inversa única, a função $\mathcal{E}$ é univocamente determinada por $C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu}$. Calculando agora a divergência da Eq. (102), temos

$$\begin{aligned} D_\mu C^{\mathsf{t}\mu}{}_\nu &= -\left(D^2 D_\nu - \frac{D_\nu}{3}D^2\right)\mathcal{E} + \frac{1}{2}\left(D^2\mathsf{F}_\nu + D_\mu D_\nu \mathsf{F}^\mu\right), \\ &= -\frac{2}{3}D_\nu D^2\mathcal{E} - 2KD_\nu\mathcal{E} + \frac{1}{2}(D^2 + 2K)\mathsf{F}_\nu, \\ &= D_\nu D^{-2} D_\alpha D_\beta C^{\mathsf{t}\alpha\beta} + \frac{1}{2}(D^2 + 2K)\mathsf{F}_\nu, \end{aligned}$$

[21] Para mais detalhes veja [30]. E para uma discussão sobre a decomposição em métricas de fundo de FLRW, ver [29].

onde usamos a regra de comutação da Eq. (99). Como $\mathcal{E}$ foi determinado acima, podemos escrever essa equação como

$$(D^2 + 2K)\mathsf{F}_\nu = 2D_\mu C^{\mathrm{t}\mu}{}_\nu - 2D_\nu D^{-2} D_\alpha D_\beta C^{\mathrm{t}\alpha\beta}.$$

É possível mostrar que o operador $(D^2 + 2K)$ também tem inversa única com restrições similares a de D^2. Com isso, temos que F_ν é univocamente determinado e, portanto, a decomposição feita na Eq. (102) é única. Contudo, é bom ressaltar que essa decomposição só foi possível devido à forma especial da métrica de fundo e, consequentemente, da curvatura das hipersuperfícies. De agora em diante escreveremos o tensor $C_{\mu\nu}$ como

$$C_{\mu\nu} = \psi\gamma_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu \mathcal{E} + D_{(\mu}\mathsf{F}_{\nu)} + W_{\mu\nu}, \tag{103}$$

onde a variável ψ é dada por

$$C = 3\psi - D^2\mathcal{E}, \tag{104}$$

temos ainda que a divergência dupla é escrita como

$$D^\mu D^\nu C_{\mu\nu} = D^2\psi - D^2(D^2 + 2K)\mathcal{E}. \tag{105}$$

Essa decomposição pode ser usada para simplificar as equações diferenciais envolvendo as perturbações ϕ, B_μ e $C_{\mu\nu}$. Dada uma combinação linear desses objetos, os únicos escalares que podemos formar são ϕ, $D_\mu B^\mu$, $D_\mu D_\nu C^{\mu\nu}$ e C. Isso acontece porque, quando o modelo de fundo é FLRW, a curvatura extrínseca e a das seções espaciais são proporcionais à métrica das hipersuperfícies e não há mais nenhuma quantidade espacial de ordem zero não nula que poderia ser usada para formar escalares. Outros termos que poderiam aparecer são do tipo $D_\mu D^2 B^\mu$, mas, usando a regra de comutação dada na Eq. (100), podemos ver que essa quantidade será escrita como $D_\mu D^2 B^\mu = D^2 D_\mu B^\mu + 2K D_\mu B^\mu$ e, portanto, fica em função de $D_\mu B^\mu$. Além disso, como a derivada de Lie na direção normal ∂_t comuta com as derivadas espaciais, o uso dessa derivada não gera novos termos.

Com isso, se tivermos uma equação diferencial escalar, sabemos que ela envolverá somente as perturbações escalares ϕ, $\mathcal{B}$, ψ e $\mathcal{E}$. No caso de uma equação diferencial vetorial linear nos argumentos, *i.e.,* $M^\alpha(\phi, B_\mu, C_{\mu\nu}) = 0$, podemos obter uma equação escalar calculando o divergente $D_\alpha M^\alpha = 0$. Como essa equação envolve somente as perturbações escalares, ela deve ser da forma $D_\alpha M^\alpha = D^2 M^s = 0$, onde $D_\mu M^s$ representa os termos escalares da equação $M^\alpha = 0$. Usando a inversa do operador D^2 temos que

$D^{-2}D^2M^s = M^s = 0$. Isso mostra que em uma equação vetorial, a parte envolvendo os escalares da equação é satisfeita independentemente. A equação $M^\mu - D^\mu M^s = 0$ conterá somente os termos B_μ e F_μ, já que não é possível formar um campo vetorial com $W_{\mu\nu}$.

Concluindo, dada uma equação tensorial do tipo $M_{\mu\nu} = 0$, também linear nas perturbações, temos que o traço fornece uma equação que deve ser satisfeita independentemente, *i.e.,* $M_\mu{}^\mu = 0$. A parte sem traço $M^t{}_{\mu\nu} \equiv M_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}M_\mu{}^\mu/3 = 0$, fornece outra equação escalar ao tirarmos a divergência dupla, ou seja, $D_\mu D_\nu M^{t\mu\nu} = 0$. Por envolver somente perturbações escalares, essa equação pode ser escrita como

$$D_\mu D_\nu M^{t\mu\nu} = D_\mu D_\nu D^\mu D^\nu M^{ts} = D^2(D^2 + 2K)M^{ts} = 0,$$

e pelos mesmos argumentos da decomposição temos que $M^{ts} = 0$. Subtraindo a parte escalar, obtemos a equação $M^{t\mu\nu} - D^\mu D^\nu M^{ts} = 0$ que depende somente das variáveis B_μ, F_μ e $W_{\mu\nu}$. Com a divergência dessa última equação, obtemos outra envolvendo somente a parte vetorial da forma $D_{(\mu}M^{tv}_{\nu)}$ e, finalmente, subtraindo esse termo obtemos $M^{t\mu\nu} - D^\mu D^\nu M^{ts} - D_{(\mu}M^{tv}_{\nu)} = 0$ que conterá somente a perturbação $W_{\mu\nu}$.

Na prática, essa decomposição nos mostra que podemos tratar cada tipo de perturbação separadamente e que, para calcular as equações de movimento de cada tipo, basta colocar os outros termos iguais a zero. Em resumo, as perturbações na métrica são decompostas da seguinte forma,

$$\text{Escalares:} \quad \phi,\, \mathcal{B},\, \psi,\, \mathcal{E}; \tag{106}$$

$$\text{Vetoriais:} \quad \mathsf{B}_\mu,\, \mathsf{F}_\mu; \tag{107}$$

$$\text{Tensoriais:} \quad W_{\mu\nu}. \tag{108}$$

8.3 Cinemática dos Campos Vetoriais

Como discutido na Sec. 1, para cada métrica existe uma única deriva covariante associada tal que $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ e $\widehat{\nabla}_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} = 0$. Pode-se mostrar [12] que a diferença de duas derivadas covariantes é dada por um tensor da seguinte forma,

$$(\widehat{\nabla}_\mu - \nabla_\mu)w_\nu = \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\beta w_\beta. \tag{109}$$

Como ambas as conexões têm torção nula, esse tensor satisfaz $\mathcal{F}_{[\mu\nu]}{}^\beta = 0$. Aplicando a diferença das derivadas covariantes no tensor métrico $\hat{g}_{\mu\nu}$, obtemos

$$-\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} = \mathcal{F}_{\mu\alpha}{}^\gamma \hat{g}_{\gamma\beta} + \mathcal{F}_{\mu\beta}{}^\gamma \hat{g}_{\alpha\gamma}, \tag{110}$$

e, combinando diferentes ordenações de índices, temos

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -\frac{\hat{g}^{\gamma\sigma}}{2}\left(\nabla_\alpha \hat{g}_{\sigma\beta} + \nabla_\beta \hat{g}_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma \hat{g}_{\alpha\beta}\right), \tag{111}$$

$$= -\frac{g^{\gamma\sigma}}{2}\left(\nabla_\alpha \xi_{\sigma\beta} + \nabla_\beta \xi_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma \xi_{\alpha\beta}\right). \tag{112}$$

Usando a expressão acima na definição do tensor de Riemann dada na Eq. (5) para a métrica perturbada temos a seguinte relação entre as curvaturas

$$\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} + 2\mathcal{F}_{\alpha[\nu}{}^{\beta}{}_{;\mu]} + 2\mathcal{F}_{\alpha[\mu}{}^{\gamma}\mathcal{F}_{\nu]\gamma}{}^{\beta}. \tag{113}$$

Em geral não impomos nenhum tipo de simetria ou vínculos a métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$. Portanto, não há, *a priori* nenhum tipo de seccionamento, nem campos vetoriais privilegiados, como há quando a variedade é FLRW (ver Sec. 3). Contudo, como estamos interessados em pequenas perturbações em torno de FLRW, estudaremos a cinemática dos campos vetoriais $\hat{m}^\mu$ impondo somente que a diferença entre ele e o campos normal n^μ seja pequena, ou seja, $\delta m^\mu \equiv \hat{m}^\mu - n^\mu$ será considerado da mesma ordem das perturbações na métrica.

Os observadores descritos pelo campo vetorial $\hat{m}^\mu$ são aqueles que a tangente de sua trajetória coincide com $\hat{m}^\mu$. É simples mostrar que o módulo do campo $\hat{m}^\mu$ está diretamente relacionado com a parametrização da curva dos observadores e que, quando o campo é normalizado, as trajetórias dos observadores estão parametrizadas pelo tempo próprio. Portanto restringimos ao caso normalizado, *i.e.,*

$$\hat{m}_\mu \hat{m}_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = -1 + 2\delta m_\mu n^\mu - 2\phi = -1,$$

o que implica que todos os campos vetoriais normalizados desse tipo satisfazem $\delta m^\mu n_\mu = \phi$. A perturbação pode então ser reescrita como

$$\delta m_\mu = -n_\mu \phi + v_\mu, \tag{114}$$

onde $v_\mu \equiv \gamma\left[\delta m_\mu\right]$ guarda todos os graus de liberdade não fixados de $\hat{m}^\mu$ e da mesma forma que $\xi_{\mu\nu}$ usaremos a métrica de fundo para subir e descer os índices de v_μ. Note que nesse caso

$$\hat{m}^\mu = \hat{m}_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = n^\mu + v^\mu + \phi n^\mu + B^\mu,$$

ou seja, $\delta m^\mu = v^\mu + \phi n^\mu + B^\mu$.

Pelo teorema de Frobenius, sabemos que se $\hat{m}_\mu$ for ortogonal a uma hipersuperfície então $\hat{m}_{[\gamma}\widehat{\nabla}_\mu \hat{m}_{\nu]} = 0$. Calculando a derivada covariante de $\hat{m}_\mu$, obtemos

$$\widehat{\nabla}_\mu \hat{m}_\nu = \Theta_{\mu\nu} - \phi\Theta_{\mu\nu} - \nabla_\mu \phi n_\nu + \nabla_\mu v_\nu + \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\gamma} n_\gamma, \tag{115}$$

e aplicando a condição do teorema na expressão acima temos

$$n_{[\gamma}\nabla_{\mu}v_{\nu]} = 0,$$

onde usamos a simetria de $\Theta_{\mu\nu}$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\gamma}$. Reescrevemos a expressão acima da seguinte forma,

$$n_{[\gamma}\nabla_{\mu}v_{\nu]} = n_{[\gamma}\gamma\left[\nabla_{\mu}v_{\nu]}\right] = n_{[\gamma}D_{\mu}v_{\nu]} = \frac{1}{3}\left(n_{\gamma}D_{[\mu}v_{\nu]} + n_{\nu}D_{[\gamma}v_{\mu]} + n_{\mu}D_{[\nu}v_{\gamma]}\right) = 0,$$

ou seja, temos que $\hat{m}_{\mu}$ é ortogonal às hipersuperfícies se e somente se $D_{[\mu}v_{\nu]} = 0$. Então, pelo menos localmente, temos que $v_{\mu} = D_{\mu}f$ para uma função f arbitrária. Se ao invés de definir arbitrariamente um campo $\hat{m}^{\mu}$ tivéssemos dado uma função tempo arbitrária $\hat{\alpha}$, obteríamos que $v_{\mu} = D_{\mu}(\hat{\alpha} - \alpha)$ satisfazendo automaticamente o teorema de Frobenius.

O próximo passo é definir o projetor das hipersuperfícies definido por $\hat{g}_{\mu\nu}$ como

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + \hat{m}_{\mu}\hat{m}_{\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \delta\gamma_{\mu\nu}, \tag{116}$$

onde

$$\delta\gamma_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} - 2\phi n_{\mu}n_{\nu} + 2v_{(\mu}n_{\nu)} = 2(v_{(\mu}n_{\nu)} + B_{(\mu}n_{\nu)} + C_{\mu\nu}). \tag{117}$$

Note que, quando o campo $\hat{m}_{\mu}$ não for ortogonal às hipersuperfícies ele não definirá seções espaciais e o projetor $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$ não terá o mesmo significado. Contudo, a definição desses objetos será útil para ambos os casos. Subindo um dos índices do projetor temos

$$\delta\gamma_{\mu}{}^{\nu} = n_{\mu}(B^{\nu} + v^{\nu}) + v_{\mu}n^{\nu}. \tag{118}$$

De forma análoga, a inversa do projetor é dada por

$$\hat{\gamma}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} + \hat{m}^{\mu}\hat{m}^{\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \delta\gamma^{\mu\nu}, \tag{119}$$

onde a diferença é dada por

$$\delta\gamma^{\mu\nu} = 2v^{(\mu}n^{\nu)} - 2C^{\mu\nu}. \tag{120}$$

Podemos calcular agora a curvatura extrínseca associada ao campo $\hat{m}_{\mu}$. Como agora esse campo não é necessariamente geodésico, a curvatura extrínseca é dada por $\widehat{\Theta}_{\mu\nu} \equiv \hat{\gamma}\left[\widehat{\nabla}_{\mu}\hat{m}_{\nu}\right]$. Expandindo obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{\Theta}_{\mu\nu} &= \hat{\gamma}\left[\Theta_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\gamma}n_{\gamma} - \nabla_{\mu}\phi n_{\nu} - \phi\Theta_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}v_{\nu}\right], \\ &= \Theta_{\mu\nu} + 2(B^{\gamma} + v^{\gamma})\Theta_{\gamma(\mu}n_{\nu)} + D_{\mu}v_{\nu} + \gamma\left[\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\gamma}n_{\gamma}\right] - \phi\Theta_{\mu\nu},\end{aligned}$$

onde o termo projetado é dado por

$$\begin{aligned}\gamma\left[\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\gamma}n_{\gamma}\right] &= \gamma\left[-\frac{n^{\sigma}}{2}\left(\nabla_{\mu}\xi_{\sigma\nu}+\nabla_{\nu}\xi_{\sigma\mu}-\nabla_{\sigma}\xi_{\mu\nu}\right)\right],\\ &= -\frac{1}{2}\gamma\left[\nabla_{\mu}(\xi_{\sigma\nu}n^{\sigma})+\nabla_{\nu}(\xi_{\sigma\mu}n^{\sigma})-\Theta_{\mu}{}^{\sigma}\xi_{\sigma\nu}-\Theta_{\nu}{}^{\sigma}\xi_{\sigma\mu}-\nabla_{n}\xi_{\mu\nu}\right],\\ &= \frac{1}{2}\left(4\phi\Theta_{\mu\nu}+2D_{(\mu}B_{\nu)}+2\Theta_{\mu}{}^{\sigma}C_{\sigma\nu}+2\Theta_{\nu}{}^{\sigma}C_{\sigma\mu}+2\nabla_{n}C_{\mu\nu}\right),\\ &= 2\phi\Theta_{\mu\nu}+D_{(\mu}B_{\nu)}+\dot{C}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{121}$$

Substituindo esse resultado na curvatura extrínseca, essa fica escrita como

$$\widehat{\Theta}_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}+2(B^{\gamma}+v^{\gamma})\Theta_{\gamma(\mu}n_{\nu)}+D_{\mu}v_{\nu}+D_{(\mu}B_{\nu)}+\phi\Theta_{\mu\nu}+\dot{C}_{\mu\nu}. \tag{122}$$

Usando a métrica perturbada para subir o índice de $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}$ obtemos também a versão com um índice covariante e outro contravariante,

$$\begin{aligned}\widehat{\Theta}_{\mu}{}^{\nu} &= (1+\phi)\Theta_{\mu}{}^{\nu}+\Theta_{\alpha}{}^{\beta}(\gamma_{\mu}{}^{\alpha}v_{\beta}n^{\nu}+\gamma_{\beta}{}^{\nu}(v^{\alpha}+B^{\alpha})n_{\mu})+D_{\mu}v^{\nu}+D_{(\mu}B_{\gamma)}\gamma^{\gamma\nu}\\ &\quad+\dot{C}_{\mu}{}^{\nu}-2\Theta_{\mu}{}^{\gamma}C_{\gamma}{}^{\nu}+2\Theta_{\gamma}{}^{\nu}C_{\mu}{}^{\gamma}, \end{aligned} \tag{123}$$

e contraindo a equação acima, temos o traço, que é conhecido como escalar de expansão perturbado,

$$\widehat{\Theta} \equiv \widehat{\Theta}_{\mu\nu}\hat{\gamma}^{\mu\nu} = \Theta+D_{\alpha}v^{\alpha}+D_{\alpha}B^{\alpha}+\phi\Theta+\dot{C}, \tag{124}$$

onde $C \equiv C_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$. Pela Eq. (122) vemos que a vorticidade é dada por

$$\widehat{\omega}_{\mu\nu} \equiv \widehat{\Theta}_{[\mu\nu]} = D_{[\mu}v_{\nu]}, \tag{125}$$

e como se espera, quando o campo $\hat{m}^{\mu}$ é ortogonal às hipersuperfícies, a vorticidade é zero. Subtraindo o traço obtido acima da parte simétrica, obtemos o cisalhamento perturbado

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{\mu\nu} &\equiv \widehat{\Theta}_{(\mu\nu)}-\frac{\hat{\gamma}_{\mu\nu}\widehat{\Theta}}{3},\\ &= \Theta_{\mu\nu}-\frac{\gamma_{\mu\nu}\Theta}{3}+2(B^{\gamma}+v^{\gamma})\Theta_{\gamma(\mu}n_{\nu)}+D_{(\mu}v_{\nu)}+D_{(\mu}B_{\nu)}+\phi\Theta_{\mu\nu}+\dot{C}_{\mu\nu}\\ &\quad-\frac{\gamma_{\mu\nu}}{3}\left(D_{\alpha}v^{\alpha}+D_{\alpha}B^{\alpha}+\phi\Theta+\dot{C}\right)-\frac{2\Theta}{3}\left(v_{(\mu}n_{\nu)}+B_{(\mu}n_{\nu)}+C_{\mu\nu}\right),\\ &= (1+\phi)\,\sigma_{\mu\nu}+2(v^{\gamma}+B^{\gamma})\sigma_{\gamma(\mu}n_{\nu)}+D^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu}{}^{\gamma}(v_{\gamma}+B_{\gamma})\\ &\quad+\dot{C}^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu}+\frac{2}{3}\left(C\sigma_{\mu\nu}-\Theta C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{126}$$

onde $D^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu}{}^{\gamma} \equiv D_{(\mu}\gamma_{\nu)}{}^{\gamma}-\frac{\gamma_{\mu\nu}}{3}D^{\gamma}$. O tensor $C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu}$ é definido como a parte sem traço de $C_{\mu\nu}$, *i.e.*,

$$C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu} \equiv C_{\mu\nu}-\frac{\gamma_{\mu\nu}}{3}C. \tag{127}$$

Como discutimos acima, $\hat{m}^\mu$ não é necessariamente geodésico, portanto outra quantidade cinemática de interesse é a aceleração das curvas definidas por $\hat{m}^\mu$, ou seja,

$$\hat{a}^\mu \equiv \widehat{\nabla}_{\hat{m}}\hat{m}^\mu = (v^\gamma + B^\gamma)\Theta_\gamma{}^\mu + \dot{\phi}n^\mu + \nabla_n(v^\mu + B^\mu) - \mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^\mu n^\alpha n^\beta.$$

Usando a Eq. (111) projetamos o tensor $\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^\mu$ e, assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha\beta}{}^\mu n^\alpha n^\beta &= -\frac{g^{\mu\sigma}}{2}\left(\nabla_n(\xi_{\sigma\beta}n^\beta) + \nabla_n(\xi_{\sigma\alpha}n^\alpha) - \nabla_\sigma(\xi_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta) + \xi_{\alpha\beta}\nabla_\sigma(n^\alpha n^\beta)\right), \\ &= 2\dot{\phi}n^\mu + \nabla_n B^\mu + \nabla^\mu\phi + \Theta^\mu{}_\alpha B^\alpha, \\ &= 2\dot{\phi}n^\mu + g^{\mu\nu}\dot{B}_\nu + \nabla^\mu\phi. \end{aligned} \tag{128}$$

Substituindo esse resultado na aceleração obtemos

$$\hat{a}^\mu = -D^\mu\phi + \gamma^{\gamma\mu}\dot{v}_\gamma. \tag{129}$$

Como a aceleração é de primeira ordem, o seu covetor é dado por $\hat{a}_\mu = \hat{a}^\nu\hat{g}_{\nu\mu} = -D_\nu\phi + \dot{v}_\nu$. Se o campo $\hat{m}^\mu$ for geodésico então $\dot{v}_\nu = D_\nu\phi$.

8.4 Curvatura das Hipersuperfícies

Na Sec. 8.3 mostramos que um campo vetorial arbitrário $\hat{m}^\mu$ define uma série de variáveis cinemáticas associadas a ele. Quando esse campo é também ortogonal às hipersuperfícies, ele define também seções espaciais. Dessa forma podemos então calcular a curvatura associada a essas seções espaciais. Vamos repetir o cálculo feito na Sec. 2.1 porém, como agora $\hat{m}^\mu$ não é necessariamente geodésico, temos que

$$\widehat{\nabla}_\mu\hat{m}_\nu = \widehat{\Theta}_{\mu\nu} - \hat{m}_\mu\hat{a}_\nu, \tag{130}$$

onde $\hat{a}_\mu \equiv \widehat{\nabla}_{\hat{m}}\hat{m}_\mu$. Além disso $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}$ não é necessariamente simétrico. De forma análoga a Eq. (13), definimos a derivada covariante $\widehat{D}_\mu$. Note que estamos fazendo o cálculo no qual $\hat{m}_\mu$ não é necessariamente ortogonal às seções espaciais, portanto essa derivada e os tensores que iremos calcular só terão significado de derivada covariante e curvatura quando $\hat{m}^\mu$ for ortogonal às hipersuperfícies.

Partimos do comutador da derivada $\widehat{D}_\mu$ segunda de um campo u_μ que satisfaz $\hat{\gamma}\left[u_\mu\right] = u_\mu$, *i.e.*,

$$\begin{aligned}\widehat{D}_\mu\widehat{D}_\nu u_\alpha &= \hat{\gamma}\left[\widehat{\nabla}_\mu\left(\hat{\gamma}_\nu{}^\gamma\hat{\gamma}_\alpha{}^\sigma\widehat{\nabla}_\gamma u_\sigma\right)\right], \\ &= \widehat{\Theta}_{\mu\nu}\hat{\gamma}\left[\widehat{\nabla}_{\hat{m}}u_\alpha\right] - \widehat{\Theta}_{\mu\alpha}\widehat{\Theta}_\nu{}^\sigma u_\sigma + \hat{\gamma}\left[\widehat{\nabla}_\mu\widehat{\nabla}_\nu u_\alpha\right].\end{aligned}$$

Com isso, o comutador é escrito como

$$[\widehat{D}_\mu, \widehat{D}_\nu]u_\alpha = 2\widehat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\gamma}\left[\widehat{\nabla}_{\hat{m}}u_\alpha\right] + (\widehat{\Theta}_{\nu\alpha}\widehat{\Theta}_\mu{}^\sigma - \widehat{\Theta}_{\mu\alpha}\widehat{\Theta}_\nu{}^\sigma)u_\sigma + \hat{\gamma}\left[\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\sigma\right]u_\sigma. \tag{131}$$

Quando a vorticidade é nula temos

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \widehat{\Theta}_{\nu\alpha}\widehat{\Theta}_\mu{}^\beta - \widehat{\Theta}_{\mu\alpha}\widehat{\Theta}_\nu{}^\beta + \hat{\gamma}\left[\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\right]. \tag{132}$$

Usaremos a expressão acima mesmo quando $\hat{m}^\mu$ não for ortogonal às seções espaciais. Nesse caso vale notar que o tensor $\widehat{\mathcal{R}}_{\mu\nu\alpha\beta}$ não tem as mesmas simetrias que um tensor de Riemann (ver Eqs. 7).

Desta forma, em primeira ordem temos

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = 2\delta\Theta_{[\mu}{}^\beta\Theta_{\nu]\alpha} + 2\Theta_{[\mu}{}^\beta\delta\Theta_{\nu]\alpha} + \delta\gamma\left[R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\right] + \gamma\left[\delta R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\right].$$

Usando a Eq. (113) em primeira ordem, podemos expressar o último termo como

$$\frac{1}{2}\gamma\left[\delta R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\right] = \gamma\left[\mathcal{F}_{\alpha[\nu}{}^\beta{}_{;\mu]}\right] = \gamma\left[\mathcal{F}_{\alpha[\nu}{}^\beta\right]_{\|\mu]} - \gamma\left[\mathcal{F}_{n[\nu}{}^\beta\right]\Theta_{\mu]\alpha} - \Theta_{[\mu}{}^\beta\gamma\left[\mathcal{F}_{\nu]\alpha}{}^n\right].$$

Na expressão acima usando a notação de $T_{;\mu} \equiv \nabla_\mu T$ e $T_{\|\mu} \equiv D_\mu T$. Essa notação vale para o resto da seção.

Usando a Eq. (121) escrevemos o tensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\beta$ em termos da curvatura extrínseca. Desta forma, as projeções envolvendo o temos são

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{n\nu\alpha}{}^\beta &= -(v^\sigma + B^\sigma)\mathcal{R}_{\sigma\nu\alpha}{}^\beta,\\
\delta\mathcal{R}_{\mu n\alpha}{}^\beta &= -(v^\sigma + B^\sigma)\mathcal{R}_{\mu\sigma\alpha}{}^\beta,\\
\delta\mathcal{R}_{\mu\nu n}{}^\beta &= -(v^\sigma + B^\sigma)\mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}{}^\beta,\\
\delta\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^n &= -v_\sigma\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\sigma,
\end{aligned} \tag{133}$$

enquanto as espaciais são dadas por

$$\gamma\left[\delta\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\right] = 4\left[v_{[\nu}\Theta_{\mu][\sigma\|\alpha]} + \left(v_{[\sigma}\Theta_{\alpha][\nu}\right)_{\|\mu]}\right]\gamma^{\sigma\beta} + 2\left(B^\beta\Theta_{\alpha[\nu}\right)_{\|\mu]} + 2\gamma\left[\mathcal{F}_{\alpha[\nu}{}^\beta\right]_{\|\mu]}. \tag{134}$$

Em adição, projetando a Eq. (112) temos

$$\gamma\left[\mathcal{F}_{\alpha\nu}{}^\beta\right] = \Upsilon_{\alpha\nu}{}^\beta - B^\beta\Theta_{\alpha\nu}, \tag{135}$$

onde definimos o seguinte tensor

$$\Upsilon_{\alpha\nu}{}^\beta \equiv -\gamma^{\sigma\beta}\left[C_{\alpha\sigma\|\nu} + C_{\sigma\nu\|\alpha} - C_{\alpha\nu\|\sigma}\right], \tag{136}$$

e suas contrações

$$\Upsilon_{a\alpha} \equiv \Upsilon_{\alpha\nu}{}^{\nu} = -C_{\|\alpha}, \tag{137}$$

$$\Upsilon_{b}{}^{\beta} \equiv \Upsilon_{\alpha\nu}{}^{\beta}\gamma^{\alpha\nu} = -2C_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\|\sigma} + C_{\|\mu}. \tag{138}$$

Em termos do tensor acima $\Upsilon_{\alpha\nu}{}^{\beta}$, a projeção espacial se torna

$$\gamma\left[\delta\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}\right] = 4\left[v_{[\nu}\Theta_{\mu][\sigma\|\alpha]} + \left(v_{[\sigma}\Theta_{\alpha][\nu}\right)_{\|\mu]}\right]\gamma^{\sigma\beta} + 2\Upsilon_{\alpha[\nu}{}^{\beta}{}_{\|\mu]}. \tag{139}$$

Alternativamente, podemos expressão essa perturbação diretamente em termos das perturbações da métrica, *i.e.,*

$$\begin{aligned}\gamma\left[\delta\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}\right] = {} & 4\left[v_{[\nu}\Theta_{\mu][\sigma\|\alpha]} + \left(v_{[\sigma}\Theta_{\alpha][\nu}\right)_{\|\mu]}\right]\gamma^{\sigma\beta} + 2\left(C_{\nu[\alpha\|\sigma]\mu} - C_{\mu[\alpha\|\sigma]\nu}\right)\gamma^{\sigma\beta} \\ & - \left(\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\lambda}C_{\sigma\lambda} + \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}{}^{\lambda}C_{\lambda\alpha}\right)\gamma^{\sigma\beta}.\end{aligned} \tag{140}$$

8.4.1 Tensor de Ricci Espacial

Nós podemos obter a projeção normal das perturbações no tensor de Ricci contraindo os índices ν e β nas Eqs. (133) e Eq. (139), o que resulta em

$$\delta\mathcal{R}_{n\alpha} = -(v^{\sigma} + B^{\sigma})\mathcal{R}_{\sigma\alpha}. \tag{141}$$

Similarmente, a projeção espacial se torna

$$\begin{aligned}\gamma\left[\delta\mathcal{R}_{\mu\alpha}\right] = {} & 2\left(v^{\nu}\Theta_{\nu(\mu\|\alpha)} + v_{(\mu}\Theta_{\alpha)}{}^{\nu}{}_{\|\nu} - v_{(\mu}\Theta_{\|\alpha)} + v^{\nu}\Theta_{\mu\alpha\|\nu} + v_{\nu\|(\mu}\Theta^{\nu}{}_{\alpha)}\right) - v^{\nu}{}_{\|\nu}\Theta_{\mu\alpha} \\ & - v_{\alpha\|\mu}\Theta + \Upsilon_{a\alpha\|\mu} - \Upsilon_{\alpha\mu}{}^{\nu}{}_{\|\nu}.\end{aligned} \tag{142}$$

Em termos das perturbações na métrica (Eq. 140), temos

$$\begin{aligned}\gamma\left[\delta\mathcal{R}_{\mu\alpha}\right] = {} & 2\left(v^{\nu}\Theta_{\nu(\mu\|\alpha)} + v_{(\mu}\Theta_{\alpha)}{}^{\nu}{}_{\|\nu} - v_{(\mu}\Theta_{\|\alpha)} + v^{\nu}\Theta_{\mu\alpha\|\nu} + v_{\nu\|(\mu}\Theta^{\nu}{}_{\alpha)}\right) \\ & - v^{\nu}{}_{\|\nu}\Theta_{\mu\alpha} - v_{\alpha\|\mu}\Theta + 2C^{\nu}{}_{(\alpha\|\mu)\nu} - C_{\|\alpha\mu} - C_{\alpha\mu\|\nu}{}^{\|\nu}.\end{aligned} \tag{143}$$

8.4.2 Escalar de Curvatura Espacial

O escalar de curvatura espacial é dado por $\widehat{\mathcal{R}} = \widehat{\mathcal{R}}_{\mu\alpha}g^{\mu\alpha}$. Portanto, sua perturbação é $\delta\mathcal{R} = \delta\mathcal{R}_{\mu\alpha}g^{\mu\alpha} - \mathcal{R}_{\mu\alpha}\xi^{\mu\alpha}$. Usando Eq. (142) encontramos a seguinte expressão

$$\delta\mathcal{R} = 4v^{\nu}\Theta_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\|\alpha} + 2v_{\nu\|\mu}\Theta^{\nu\mu} - 2v^{\nu}{}_{\|\nu}\Theta + \Upsilon_{a}{}^{\mu}{}_{\|\mu} - \Upsilon_{b}{}^{\mu}{}_{\|\mu} - 2\mathcal{R}_{\mu\nu}C^{\mu\nu}. \tag{144}$$

Em termos das perturbações na métrica

$$\delta\mathcal{R} = 4v^{\nu}\Theta_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\|\alpha} + 2v_{\nu\|\mu}\Theta^{\nu\mu} - 2v^{\nu}{}_{\|\nu}\Theta + 2C^{\mu\nu}{}_{\|\mu\nu} - 2C_{\|\nu}{}^{\|\nu} - 2\mathcal{R}_{\mu\nu}C^{\mu\nu}. \tag{145}$$

8.5 Variáveis Invariantes de Calibre

8.5.1 Métrica

Como vimos não Sec. 8, ao fazer uma mudança de calibre a perturbação na métrica se transforma da seguinte forma,

$$\delta g^{(\lambda)}{}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu}u_{\nu)}. \tag{146}$$

Para entender como isso afeta cada variável da decomposição, escrevemos o campo vetorial u_μ como

$$u_\mu = u^{\parallel} n_\mu + u^{\perp}{}_\mu + D_\mu u^{\perp},$$

onde $u^{\parallel} \equiv -u^n$ e usamos a decomposição de vetores espaciais descrita na Sec. 8.2 para decompor $\gamma\left[u_\mu\right]$ na parte escalar $u^{\perp}$ e vetorial com divergência nula $u^{\perp}{}_\mu$. Usando as projeções dadas nas Eqs. (91–93), obtemos as seguintes regras de transformação

$$\begin{aligned}
\delta g_{nn} &\to n^\mu n^\nu(\delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu}u_{\nu)}) = 2\phi + 2\dot{u^{\parallel}},\\
\delta g_{n\nu}\gamma^{\nu\alpha} &\to n^\mu\gamma^{\nu\alpha}(\delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu}u_{\nu)}) = -B^\alpha - \partial_t(D^\alpha u^{\perp} + u^{\perp\alpha}) + D^\alpha u^{\parallel},\\
\gamma\left[\delta g_{\mu\nu}\right] &\to \gamma\left[\delta g_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu}u_{\nu)}\right] = 2C_{\mu\nu} - 2u^{\parallel}\Theta_{\mu\nu} - 2D_{(\mu}(D_{\nu)}u^{\perp} + u^{\perp}{}_{\nu)}),
\end{aligned}$$

que reescrevemos como

$$\begin{aligned}
\phi &\to \phi + \dot{u^{\parallel}},\\
B^\alpha &\to B^\alpha + \partial_t(D^\alpha u^{\perp} + u^{\perp\alpha}) - D^\alpha u^{\parallel},\\
C_{\mu\nu} &\to C_{\mu\nu} - u^{\parallel}\Theta_{\mu\nu} - D_{(\mu}(D_{\nu)}u^{\perp} + u^{\perp}{}_{\nu)}).
\end{aligned}$$

Coletando as partes escalares, temos as regras

$$\phi \to \phi + \dot{u^{\parallel}}, \tag{147}$$

$$\mathcal{B} \to \mathcal{B} + \dot{u^{\perp}} - \frac{2}{3}\Theta u^{\perp} - u^{\parallel}, \tag{148}$$

$$\psi \to \psi - u^{\parallel}\frac{\Theta}{3}, \tag{149}$$

$$\mathcal{E} \to \mathcal{E} + u^{\perp}, \tag{150}$$

onde usamos o comutador da derivada de Lie com derivada espacial D^α dado na Eq. (98). Substituindo as transformações escalares nas regras, obtemos

$$\mathsf{B}^\alpha \to \mathsf{B}^\alpha + \dot{u^{\perp}}^\alpha, \tag{151}$$

$$\mathsf{F}^\alpha \to \mathsf{F}^\alpha - u^{\perp\alpha}. \tag{152}$$

E então, as perturbações tensoriais

$$W_{\mu\nu} \to W_{\mu\nu}, \tag{153}$$

que portanto são invariantes sob transformações de calibre em primeira ordem.

Podemos formar objetos usando as perturbações escalares de forma que essa combinação seja invariante de calibre, e podemos fazer o mesmo para as perturbações vetoriais. A desvantagem nesse procedimento é que a combinação obtida não tem significado físico obvio.

8.5.2 Escalares

Combinando as perturbações escalares, obtemos duas variáveis

$$\Phi = \phi + \partial_t \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{E} \right), \tag{154}$$

$$\Psi = \psi - \frac{\Theta}{3} \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{E} \right), \tag{155}$$

invariantes de calibre. Essas variáveis, a menos de um sinal, foram introduzidas no contexto cosmológico por Bardeen [31],[22] as expressões acima são iguais às definidas no trabalho de revisão [33]. Claramente qualquer combinação linear com coeficientes definidos na variedade de fundo ou derivadas temporais, fornecem novas variáveis invariantes de calibre, o que traz nova complicação à interpretação dessas variáveis.

Para simplificar a interpretação dessas variáveis, podemos escrevê-las em função de variáveis cujo significado físico é direto. Para tanto usaremos as perturbações mistas discutidas na Sec. 8.1. Como foi dito, se estudarmos o conjunto de trajetórias definidas pelos observadores comóveis da métrica de fundo, o campo normal será dado por $\hat{n}_\mu = n_\mu - \phi n_\mu$ e, portanto, podemos usar as fórmulas desenvolvidas na Sec. 8.3 e na Sec. 8.4 para obter as variáveis cinemáticas e a curvatura das hipersuperfícies definidas por $\hat{n}_\mu$. A perturbação no cisalhamento (Eq. 126), usando a métrica de fundo de FLRW, fica escrita como

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = D_{(\mu}B_{\nu)} - \frac{\gamma_{\mu\nu}}{3}D_\alpha B^\alpha + \dot{C}^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\Theta C^{\mathsf{t}}{}_{\mu\nu},$$

e em termos das decomposições,

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = \left(D_{(\mu}D_{\nu)} - \frac{\gamma_{\mu\nu}D^2}{3} \right) \delta\sigma^{(\mathrm{s})} + D_{(\mu}\mathsf{B}_{\nu)} + \left(\partial_t - \frac{2}{3}\Theta \right) (D_{(\mu}\mathsf{F}_{\nu)} + W_{\mu\nu}), \tag{156}$$

[22] A noção de perturbações da métrica invariantes de calibre foi introduzido originalmente por Gerlach [32] no estudo do colapso gravitacional.

onde definimos

$$\delta\sigma^{(\mathrm{s})} \equiv \left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{E}\right). \tag{157}$$

A função $\delta\sigma^{(\mathrm{s})}$ age como potencial para o tensor de cisalhamento medido pelos observadores isotrópicos. Note também que

$$D^\mu D^\nu \delta\sigma_{\mu\nu} = \frac{2}{3}D^2(D^2 + 3K)\delta\sigma^{(\mathrm{s})}.$$

Além disso, como citado anteriormente, a aceleração das trajetórias dos observadores de fundo é dada por

$$\hat{a}_\mu = -D_\mu\phi.$$

Os observadores isotrópicos perceberão uma perturbação no escalar de expansão dada por (ver Eq. 124)

$$\begin{aligned}
\delta\Theta &= \dot{C} + D^2\mathcal{B} + \phi\Theta, &(158)\\
&= D^2\left(\mathcal{B} - \dot{\mathcal{E}} + \frac{2}{3}\Theta\mathcal{E}\right) + \Theta\phi + 3\dot{\psi},\\
&= D^2\delta\sigma^{(\mathrm{s})} + \Theta\phi + 3\dot{\psi}. &(159)
\end{aligned}$$

Escrevendo a perturbação na curvatura das seções espaciais (Eq. 145), obtemos o escalar de curvatura do tensor de Riemann das hipersuperfícies

$$\delta\mathcal{R} = 2(D^\mu D^\nu C_{\mu\nu} - D^2 C - \mathcal{R}^{\mu\nu}C_{\mu\nu}) = -4(D^2 + 3K)\psi, \tag{160}$$

ou seja, a variável ψ atua como potencial da perturbação na curvatura das hipersuperfícies da métrica de fundo. O tensor de Ricci dessas seções espaciais é dado pelas Eqs. (141) e (143). Em termos das perturbações decompostas, temos

$$\begin{aligned}
\gamma\left[\delta\mathcal{R}_\mu{}^n\right] &= 0,\\
\gamma\left[\delta\mathcal{R}_n{}^\nu\right] &= -2K(D^\nu\mathcal{B} + \mathsf{B}^\nu),\\
\gamma\left[\delta\mathcal{R}_\mu{}^\nu\right] &= D_\gamma D_\mu C^{\gamma\nu} + D_\gamma D^\nu C_\mu{}^\gamma - D_\mu D^\nu C - D^2 C_\mu{}^\nu - 2\mathcal{R}_\mu{}^\gamma C_\gamma{}^\nu,\\
&= -D_\mu D^\nu\psi - \gamma_\mu{}^\nu(D^2 + 4K)\psi - (D^2 - 2K)W_\mu{}^\nu. &(161)
\end{aligned}$$

É interessante notar que a perturbação no tensor de Ricci depende somente da perturbação $C_\mu{}^\nu$ e sua parte escalar depende somente de ψ pois todos os termos com $\mathcal{E}$ se cancelam. Os termos vetoriais de $C_\mu{}^\nu$ também se cancelam, com isso, a perturbação na projeção espacial da curvatura das hipersuperfícies de fundo depende somente de ψ e $W_\mu{}^\nu$.

A presença de projeções cruzadas diferentes de zero pode ser explicada da seguinte forma: a perturbação no projetor é dada por $\delta\gamma_\mu{}^\nu = n_\mu B^\nu$ (ver Eq. 118) e, de forma geral, podemos ver que esse projetor é nulo se e somente se $B_\mu = 0$. Como escolhemos as mesmas hipersuperfícies para descrever as variáveis cinemáticas da métrica de fundo e perturbada, os covetores $\hat{n}_\mu$ e n_μ são normais ($\hat{\gamma}_\nu{}^\mu n_\mu = 0$ e $\gamma_\nu{}^\mu \hat{n}_\mu = 0$) com respeito às duas métricas. No entanto, o vetor $\hat{g}^{\mu\nu}n_\nu$ é o mapeamento do covetor normal usando a métrica perturbada e, neste caso, $\hat{g}^{\mu\nu}n_\nu\gamma_\mu{}^\alpha = -B^\alpha$. Se tivéssemos usado a métrica de fundo teríamos $g^{\mu\nu}n_\nu\gamma_\mu{}^\alpha = 0$, ou seja, B^α mede a componente espacial adquirida por qualquer covetor temporal quando mapeado em um vetor usando a métrica perturbada. Analogamente, um vetor espacial u^μ com respeito à métrica de fundo ($\gamma\left[u^\mu\right] = u^\mu$) é também espacial com respeito à métrica perturbada, *i.e.*, $\hat{\gamma}\left[u^\mu\right] = \gamma\left[u^\mu\right] + \delta\gamma_\nu{}^\mu u^\nu = u^\mu$. Contudo, quando mapeamos para um covetor usando a métrica perturbada $u^\mu\hat{g}_{\mu\nu}$, ele adquire uma componente temporal $u^\mu\hat{g}_{\mu\nu}n^\nu = -u^\mu B_\mu$, onde novamente teríamos $u^\mu g_{\mu\nu}n^\nu = 0$ se tivéssemos usado a métrica de fundo. Com isso, a presença de B_μ faz com que tensores perturbados, que na sua versão de fundo são espaciais, adquiram componentes temporais e *vice–versa*.

As perturbações cinemáticas acima se transformam de acordo com as seguintes regras

$$\delta\sigma^{(\mathrm{s})} \to \delta\sigma^{(\mathrm{s})} - u^{\parallel}, \tag{162}$$

$$\delta\Theta \to \delta\Theta - (D^2 + \dot{\Theta})u^{\parallel}. \tag{163}$$

Essas transformações mostram que essas perturbações estão ligadas às transformações de coordenadas que envolvem $u^{\parallel}$. Podemos interpretar as transformações que envolvem $u^{\perp}$ da seguinte forma. Dados dois vetores x^μ e y^μ espaciais e ortogonais na métrica de fundo, *i.e.*, $x^\mu n_\mu = y^\mu n_\mu = 0$ e $x^\mu y^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0$. Quando medimos o ângulo entre eles em uma hipersuperfície do modelo perturbado, usamos a métrica espacial dada na Eq. (116), e obtemos, em primeira ordem, o ângulo

$$\delta\theta = \frac{\hat{\gamma}_{\mu\nu}x^\mu y^\nu}{\sqrt{\hat{\gamma}_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}\sqrt{\hat{\gamma}_{\mu\nu}y^\mu y^\nu}} = \frac{2x^\mu y^\nu}{|x||y|}C_{\mu\nu} = \frac{2x^\mu y^\nu}{|x||y|}\left(-D_\mu D_\nu\mathcal{E} + D_{(\mu}\mathsf{F}_{\nu)} + W_{\mu\nu}\right).$$

Dessa forma, vemos que a presença de $\mathcal{E}$ faz com que os vetores ortogonais na métrica de fundo não o sejam na métrica perturbada. Ressaltamos também que esse resultado é independente da escolha de hipersuperfícies perturbadas, ou seja, é independente do campo v^μ que aparece na métrica da Eq. (116).

Podemos usar as variáveis cinemáticas obtidas acima para reescrever as variáveis in-

variantes de calibre como

$$\Phi = \phi + \dot{\delta\sigma^{(\mathrm{s})}}, \tag{164}$$

$$\Psi = \psi - \frac{\Theta}{3}\delta\sigma^{(\mathrm{s})}, \tag{165}$$

$$\begin{aligned}\Xi \equiv 3\dot{\Psi} + \Theta\Phi &= \left(\delta\Theta - \dot{\Theta}\delta\sigma^{(\mathrm{s})} - D^2\delta\sigma^{(\mathrm{s})}\right), \\ &= \left(3\dot{\psi} + \Theta\phi - \dot{\Theta}\delta\sigma^{(\mathrm{s})}\right),\end{aligned} \tag{166}$$

onde introduzimos uma nova variável invariante de calibre Ξ, a qual tem a vantagem de não depender de nenhuma derivada temporal das variáveis cinemáticas, e portanto seu valor depende somente das perturbações em um instante específico.

As variáveis invariantes de calibre são combinações de quantidades perturbadas e portanto não têm interpretação física invariante de calibre. Qualquer combinação linear com os coeficientes definidos na variedade de fundo também será invariante de calibre. Essa arbitrariedade mostra que não podemos concluir sobre a validade da série perturbativa se avaliarmos somente essas variáveis.

Por exemplo, suponha que a variável Ψ se torna muito grande em um certo instante t_1. Como essa variável é definida da forma $\Psi = \psi - \Theta\delta\sigma^{(\mathrm{s})}/3$, $|\Psi(t_1)| \gg 1$ implica necessariamente que $|\psi(t_1)| \gg 1$ e/ou $|\Theta\delta\sigma^{(\mathrm{s})}(t_1)| \gg 1$. Entretanto, existe a possibilidade que $|\psi(t_1)| \ll 1$ e $|\delta\sigma^{(\mathrm{s})}| \ll 1$ mas $|\Theta\delta\sigma^{(\mathrm{s})}| \gg 1$, ou seja, a quantidade de fundo Θ pode ser grande o suficiente para que o produto envolvido na definição de Ψ contribua com valores maiores que um. Note que nesse exemplo o aparente problema é identificado ao avaliarmos a variável Ψ. Ela é definida de forma que se reduz à perturbação ψ em qualquer calibre onde $\delta\sigma^{(\mathrm{s})} = 0$, e nesse sentido o seu significado está atrelado a variável ψ. Se estivéssemos usando a variável invariante de calibre $-3\Psi/\Theta$ que em um calibre com $\psi = 0$ é igual a $\delta\sigma^{(\mathrm{s})}$, teríamos que no caso discutido no exemplo acima, $|-3\Psi/\Theta| \ll 1$, e nenhum problema seria identificado.

8.5.3 Vetoriais

Claramente a quantidade $\mathsf{B}^\alpha - \dot{\mathsf{F}}^\alpha$ é invariante de calibre, dada as transformações nas Eqs. (151) e (152). Notamos também que a Eq. (156) para a perturbação no cisalhamento pode ser escrita como

$$\delta\sigma_{\mu\nu} = \left(D_{(\mu}D_{\nu)} - \frac{\gamma_{\mu\nu}D^2}{3}\right)\delta\sigma^{(\mathrm{s})} + D_{(\mu}\delta\sigma^{(\mathrm{v})}{}_{\nu)} + \left(\partial_t - \frac{2}{3}\Theta\right)W_{\mu\nu}, \tag{167}$$

onde definimos

$$\delta\sigma^{(\mathrm{v})}{}_{\alpha} \equiv \mathsf{B}_{\alpha} + \dot{\mathsf{F}}_{\alpha} - \frac{2}{3}\Theta\mathsf{F}_{\alpha}. \tag{168}$$

Subindo o índice dessa equação temos

$$\delta\sigma^{(\mathrm{v})\alpha} = \mathsf{B}^{\alpha} + \dot{\mathsf{F}}^{\alpha}, \tag{169}$$

ou seja, a variável $\delta\sigma^{(\mathrm{v})\alpha}$, que é invariante de calibre, funciona como um potencial de cisalhamento assim como a variável $\delta\sigma^{(\mathrm{s})}$ para as perturbações escalares.

8.5.4 Tensoriais

Como observado na Eq. (153) a variável $W_{\mu\nu}$ já é invariante de calibre.

8.6 Lista de Exercícios

*** **Exercício 11** — Obtenha os comutadores dados nas Eqs. (97–100) usando os comutadores para o caso geral obtidos na Sec. 2.2.

*** **Exercício 12** — Usando a expressão para $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\gamma}$ obtida na Eq. (110) obtenha a sua expressão em termos da métrica da Eq. (111) e da perturbação Eq. (112).

** **Exercício 13** — Com a decomposição das perturbações descrita na Sec. 8.2 e a forma geral da perturbação no cisalhamento dada na Eq. (126). Deduza a expressão da Eq. (156). Lembre-se que nesse caso estamos considerando $v_{\mu} = 0$.

**** **Exercício 14** — De forma análoga ao exercício anterior obtenha as expressões das Eqs. (159–161).

** **Exercício 15** — Mostre que as perturbações no cisalhamento e no fator de expansão se transformam da forma expressada nas Eqs. (162) e (163) quando fazemos uma mudança de calibre. Note que as perturbações na métrica se transformam como mostrado nas Eqs. (147–150).

9 Cosmologia Observacional

Na segunda parte do curso estudaremos algumas ferramentas de estatística que são utilizadas, por exemplo, para restringir parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais como as supernovas do tipo Ia e a abundância de aglomerados de galáxias.

Nas seções 11 e 12, apresentamos os métodos da Máxima Verossimilhança e dos Mínimos Quadrados, respectivamente, a partir do qual obtemos os estimadores dos parâmetros cosmológicos. Já na seção 13, tratamos do Teste da Razão de Verossimilhança que possibilita avaliar o nível de concordância entre uma modelagem teórica e dados observacionais. Nas seções 14 e 15, apresentamos os métodos Perfil da Verossimilhança e Matriz de Fisher que são usados para calcular as regiões de confiança.

Os tópicos citados acima estão descritos sucintamente nessas notas de aula. Veja as referências [34–36], por exemplo, para um estudo mais amplo e detalhado.

10 Conceitos Fundamentais

A função densidade de probabilidade (pdf) $f(x)$ é definida como a probabilidade de obter a variável aleatória x no intervalo $[x, x+dx]$,

$$Pr(x \in x, x+dx) = f(x)dx. \tag{170}$$

A pdf $f(x)$ é normalizada tal que a probabilidade total é 1,

$$Pr(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = 1, \tag{171}$$

onde a e b podem ser números reais finitos ou $[a, b] = (-\infty, \infty)$.

O valor esperado de x, ou a média de x, é definido como

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \mu. \tag{172}$$

De forma similar, o valor esperado de x^n, ou o n-ésimo momento de x, é

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx. \tag{173}$$

e o n-ésimo momento central é

$$\langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x)dx. \tag{174}$$

Em particular, a variância de x é

$$V(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2(x), \tag{175}$$

onde $\sigma(x)$ é o desvio padrão.

A covariância de duas variáveis aleatórias x e y é definida como

$$\begin{aligned} Cov(x,y) &= \langle (x-\mu_x)(y-\mu_y)\rangle \\ &= \langle xy\rangle - \langle x\rangle\mu_y - \mu_x\langle y\rangle + \mu_x\mu_y \\ &= \langle xy\rangle - \mu_x\mu_y. \end{aligned} \tag{176}$$

Em alguns casos é mais conveniente ter uma medida adimensional da relação entre as variáveis x e y. Para tanto define-se o coeficiente de correlação,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} \\ &= \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\sigma_x\sigma_y}, \end{aligned} \tag{177}$$

onde ρ é um número entre $[-1,1]$. Se $\rho = 0$, então x e y são não correlacionados.

Exemplo: Calcule o valor esperado $\langle r\rangle$ e a variância $V(r)$ de uma distribuição de Poisson $P(r;\lambda)$.

A probabilidade de obter r eventos dado que o valor esperado da média é λ é

$$P(r;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}. \tag{178}$$

Primeiramente, notamos que essa distribuição é normalizada,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} P(r;\lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

O valor esperado da média é

$$\begin{aligned} \langle r\rangle &= \sum_{r=0}^{\infty} r\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{r=1}^{\infty} r\frac{\lambda^r}{r!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\lambda^{(r-1)}}{(r-1)!}. \end{aligned}$$

Fazendo $r' = r-1$, temos

$$\begin{aligned} \langle r\rangle &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{\lambda^{r'}}{r'!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ \langle r\rangle &= \lambda. \end{aligned} \tag{179}$$

Usando a definição dada na Eq. (175), a variância é

$$\begin{aligned} V(r) &= \langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle r^2 - 2\langle r \rangle r + \langle r \rangle^2 \rangle \\ &= \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2. \end{aligned} \tag{180}$$

Por simplicidade, calculamos o primeiro termo do lado direito partindo de

$$\begin{aligned} \langle r(r-1) \rangle &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) \frac{\lambda^{(r-2)}}{r!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\lambda^{(r-2)}}{(r-2)!}. \end{aligned}$$

Fazendo $r' = r - 2$, temos

$$\begin{aligned} \langle r(r-1) \rangle &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{r'}}{r'!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} \\ &= \lambda^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle r(r-1) \rangle &= \langle r^2 - r \rangle \\ &= \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle \\ \lambda^2 &= \langle r^2 \rangle - \lambda \\ \langle r^2 \rangle &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned} \tag{181}$$

Substituindo a Eq. (181) na Eq. (180), temos que

$$\begin{aligned} V(r) &= \lambda^2 + \lambda - \langle r \rangle^2 \\ V(r) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ V(r) &= \lambda. \end{aligned} \tag{182}$$

10.1 Estimadores

Considere um conjunto de dados x_i de uma variável aleatória x. Se alguma(s) propriedade(s) da função densidade de probabilidade $f(x)$ não for conhecida (ou se a própria pdf não for conhecida), podemos estimar propriedades de $f(x)$ a partir do conjunto de dados.

Um estimador muito usado para calcular a média de uma pdf é a média aritmética,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{x}. \tag{183}$$

Calculando o valor esperado de $\hat{\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle\hat{\mu}\rangle &= \left\langle \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \right\rangle \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle x_i\rangle \\ &= \frac{N\langle x\rangle}{N} \\ &= \mu. \end{aligned} \tag{184}$$

Não existe uma maneira única de definir a forma de um estimador. No entanto, podemos requisitar certas propriedades para definirmos um *bom* estimador. Essas propriedades são consistência, viés e eficiência.

- Um estimador é *consistente* se ele tende ao valor verdadeiro quando o número de dados tende a infinito,

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\theta} = \theta^0. \tag{185}$$

- Um estimador é dito *sem viés* se o seu valor esperado for igual ao valor verdadeiro,

$$\langle\hat{\theta}\rangle = \theta^0. \tag{186}$$

- Ele é *eficiente* se a sua variância é a menor possível[23].

Vejamos dois exemplos de estimadores para a variância. No primeiro caso, vamos supor que a média da pdf da variável aleatória x, μ, é conhecida. Um estimador para a variância é

$$\widehat{V(x)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2. \tag{187}$$

Esse estimador não tem viés, já que

$$\langle\widehat{V(x)}\rangle = \frac{N\langle(x-\mu)^2\rangle}{N} = V(x). \tag{188}$$

[23]Essa característica será dicutida na seção 15.

Se a média da pdf não for conhecida, podemos usar a média aritmética como um estimador de μ, i.e., $\hat{\mu} = \bar{x}$ e, com isso,

$$\widehat{V(x)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \bar{x}^2). \tag{189}$$

Ao calcular o valor esperado desse estimador, obtemos

$$\begin{aligned}\langle\widehat{V(x)}\rangle &= \frac{N\langle x^2 - \bar{x}^2\rangle}{N} \\ &= \langle x^2\rangle - \langle\bar{x}^2\rangle.\end{aligned} \tag{190}$$

Como vimos, $\langle x\rangle = \langle\bar{x}\rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}\langle\widehat{V(x)}\rangle &= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 - \langle\bar{x}^2\rangle + \langle\bar{x}\rangle^2 \\ &= V(x) - V(\bar{x}).\end{aligned} \tag{191}$$

O termo $\langle\bar{x}^2\rangle$ de $V(\bar{x})$ pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}\langle\bar{x}^2\rangle &= \left\langle\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2\right\rangle \\ &= \frac{1}{N^2}\left\langle\sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j}x_i x_j\right\rangle.\end{aligned} \tag{192}$$

Supondo que $Cov(x_i, x_j) = 0$ e usando $V(x)$, temos

$$\begin{aligned}\langle\bar{x}^2\rangle &= \frac{1}{N^2}\left[\left\langle\sum_i x_i^2\right\rangle + 2\frac{N(N-1)}{2}\langle x\rangle^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2}\left[N(V(x) - \langle x\rangle^2) + N(N-1)\langle x\rangle^2\right] \\ &= \frac{1}{N}(V(x) + N\langle x\rangle^2).\end{aligned} \tag{193}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}V(x) &= N(\langle\bar{x}^2\rangle - \langle x\rangle^2) \\ &= N(\langle\bar{x}^2\rangle - \langle\bar{x}\rangle^2) \qquad (194) \\ &= NV(\bar{x}). \qquad (195)\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na Eq. (191), temos que

$$\begin{aligned}\left\langle\widehat{V(x)}\right\rangle &= V(x) - \frac{V(x)}{N} \\ &= \frac{N-1}{N}V(x) \neq V(x).\end{aligned} \tag{196}$$

Portanto, invés de usar a Eq.(189), usaremos

$$\widehat{V(x)} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \bar{x}^2) \tag{197}$$

como um estimador para a variância já que ele não possui viés.

11 Método da Máxima Verossimilhança

Seja x uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x, \vec{\theta})$ dependente de um vetor de parâmetros $\vec{\theta}$. Dada a amostra de dados independentes $\{x_i\}$, temos que a densidade de probabilidade conjunta de se obter $\{x_i\}$ dado $\vec{\theta}$ é

$$L(\vec{\theta}; x_i) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i; \vec{\theta}), \tag{198}$$

onde $L(\vec{\theta}; x_i)$, vista como uma função dos parâmetros não conhecidos $\vec{\theta}$ dadas as medidas $\{x_i\}$, é chamada de verossimilhança.

O método da Máxima Verossimilhança é uma técnica para estimar os valores dos parâmetros $\vec{\theta}$ dado o conjunto de dados finito x_i. Os estimadores $\{\hat{\theta}_j\}$ são aqueles que maximizam o valor da verossimilhança,

$$\hat{\vec{\theta}}(x_i) = arg\, max[L(\vec{\theta}; x_i)]. \tag{199}$$

Supondo que $L(\vec{\theta}; x_i)$ é uma função diferenciável dos parâmetros $\{\theta_j\}$ e que o seu máximo não esteja nos limites dos domínios desses parâmetros, temos que $\hat{\theta}_j$'s são dados pelas soluções das equações

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{200}$$

Uma vantagem de se usar os estimadores $\hat{\theta}_j$'s é dada pelo teorema que diz que se existe um estimador eficiente e sem viés para um dado problema, então esse estimador coincidirá com o estimador de máxima verossilhança (veja a referência [37]). Outra vantagem é que, sob condições muito gerais, ele é consistente, isto é, ele tende ao seu valor verdadeiro quando o número de dados é suficientemente grande.

Exemplo: Calcule os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ de uma distribuição Gaussiana dado o conjunto de N medidas $\{x_i\}$, onde $\sigma_i = \sigma$.

A distribuição Gaussiana é

$$P(x_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \tag{201}$$

e, com isso, a verossimilhança é

$$L = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}. \tag{202}$$

Calculando $\ln L$,

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] - \sum_{i=1}^{N} \ln(\sqrt{2\pi}\sigma). \tag{203}$$

Para obter o estimador $\hat{\mu}$, calculamos o máximo da função em relação a μ, i.e.,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{2(x_i-\hat{\mu})(-1)}{2\sigma^2} \right] &= 0 \\
\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i}{\sigma^2} \right] - \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} \right] &= 0 \\
N\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} x_i \\
\hat{\mu} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i.
\end{aligned}$$

De forma similar, obtemos o estimador para o desvio padrão $\hat{\sigma}$, calculando o máximo de $\ln L$ em relação a σ. Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{(-2)(x_i-\mu)^2}{2\hat{\sigma}^3} \right] - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\hat{\sigma}} &= 0 \\
\frac{1}{\hat{\sigma^3}} \sum_{i=1}^{N} (x_i-\mu)^2 - \frac{N}{\hat{\sigma}} &= 0 \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i-\mu)^2.
\end{aligned}$$

12 Métodos dos Mínimos Quadrados

No caso em que a pdf da variável aleatória y é a distribuição Gaussiana e dado o conjunto de medidas $\{y_i^{\text{obs}}\}$, temos que

$$L(\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(y_i^{\text{obs}} - y_i(\vec{\theta}))^2}{2\sigma_i^2} \right). \tag{204}$$

Ao invés de utilizar $L(\vec{\theta}; x_i)$, muitas vezes é mais conveniente utilizar a função log- verossimilhança. Como o logarítimo é uma função monotonicamente crescente, os valores dos parâmetros que maximizam a verossimilhança também maximizam $\log L(\vec{\theta}; x_i)$. Dessa forma, a equação (204) é dada por

$$\ln L(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{-(y_i^{\text{obs}} - y_i(\vec{\theta}))^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N} \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_i). \tag{205}$$

Considerando que σ_i não depende dos parâmetros $\{\theta_j\}$, a equação (205) é maximizada encontrando os valores de $\{\theta_j\}$ que minimizam a função

$$-2\ln L(\vec{\theta}) = \chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i^{\text{obs}} - y_i(\vec{\theta}))^2}{\sigma_i^2}. \tag{206}$$

Neste caso, o método da máxima verossimilhança coincide com o *método dos mínimos quadrados*.

Exemplo:

$$f(x; m, c) = mx + c$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i; m, c))^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - mx_i - c)^2}{\sigma^2}.$$

Para obter o estimador $\hat{m}$, minimizamos a função χ^2 em relação a m,

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = \sum_{i=1}^{N} \frac{2(y_i - \hat{m}x_i - \hat{c})(-x_i)}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{m}x_i - \hat{c})(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} \hat{m}(x_i)^2 - \hat{c}\sum_{i=1}^{N}(x_i) = 0 \quad (\times \frac{1}{N})$$

$$\overline{xy} - \hat{m}\overline{x^2} - \hat{c}\bar{x} = 0. \tag{207}$$

Analogamente, obtemos o estimador $\hat{c}$ minimizando χ^2 em relação ao parâmetro c,

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c} = \sum_{i=1}^{N} \frac{2(y_i - \hat{m}x_i - \hat{c})(-1)}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{m}x_i - \hat{c}) = 0$$

$$\bar{y} - \hat{m}\bar{x} - \hat{c} = 0. \tag{208}$$

Eliminando $\hat{c}$ das Eqs. (207) e (208), obtemos

$$\overline{xy} - \hat{m}\overline{x^2} - (\bar{y} - \hat{m}\bar{x})\bar{x} = 0$$

$$(\overline{x^2} - \bar{x}^2)\hat{m} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

$$\hat{m} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}.$$

Substituindo o resultado acima na Eq. (208), temos

$$\bar{x}\hat{c} = \overline{xy} - \left(\frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\right)\overline{x^2}$$

$$= \frac{\overline{xy}\,\overline{x^2} - \overline{xy}\bar{x}^2 - \overline{xy}\,\overline{x^2} + \bar{x}\bar{y}\,\overline{x^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\hat{c} = \frac{\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

13 Teste da Razão de Verossimilhança

Considere os modelos H_0 e H_1 no qual o último está *aninhado* em relação ao primeiro, isto é, H_1 é um subconjunto de H_0 ou pode ser considerado como um caso especial de H_0. Portanto, o número de parâmetros θ' de H_1, m', tem que ser menor que o número de parâmetros θ de H_0, m. Dado os estimadores da máxima verossimilhança $\hat{\theta}'$ e $\hat{\theta}$ e um conjunto de dados $\{y_i\}$, o modelo H_1 é testado frente a H_0, calculando-se a razão das verossimilhanças,

$$\Lambda = \frac{L_1(\hat{\theta}', \{y_i\})}{L_0(\hat{\theta}, \{y_i\})}, \tag{209}$$

onde $0 < \Lambda \leq 1$. Como a densidade de probabilidade $L_0(\hat{\theta}, \{y_i\})$ é máxima, se o valor dessa razão for próximo de 0, isso indica que H_1 não é aceito comparado a H_0. Caso Λ seja próximo de 1, significa que o modelo H_1 é quase tão provável quanto H_0 [38, 39]. Esse é o chamado *teste da razão de verossimilhança* (*likelihood ratio test*).

Para avaliar quão bem ajustado aos dados observacionais é um dado modelo, nós usamos o *teste da razão de verossimilhança* em conjunto com um teorema que diz que, sob certas condições regulares[24], a variável aleatória $-2\ln(L_1(\theta')/L_0(\theta))$ tem uma distribuição que se aproxima da distribuição χ^2 quando $N \to \infty$, com seus graus de liberdade iguais à diferença no número de parâmetros dos dois modelos [38, 39]. Vejamos o exemplo abaixo.

Considere que foram medidos n aglomerados de galáxias em um intervalo de desvio para o vermelho. Dividindo esse intervalo em i bins, nós diremos que n_i é uma variável de Poisson com média λ_i, ou seja,

$$P(n_i;\lambda_i) = \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!}e^{-\lambda_i}. \tag{210}$$

Com isso, para quantificar se um certo modelo para $\lambda_i(\theta)$ está de acordo com os dados n_i, nós calculamos

$$\chi^2_\nu = -2\ln\left(\frac{L_1(\{\lambda_i(\theta)\},\{n_i\})}{L_0(\{n_i\},\{n_i\})}\right), \tag{211}$$

onde $L_0(\{n_i\},\{n_i\})$ é a verossimilhança construída considerando que os valores das médias λ_i são dadas pelas medidas n_i, em $L_1(\{\lambda_i\},\{n_i\})$ consideramos $\lambda_i = \lambda_i(\theta)$ com valores de θ fixos e o número de graus de liberdade ν igual ao número de bins, $\nu = N$. Usando a equação (210), obtemos

$$\chi^2_\nu = 2\sum_{i=1}^{N}\left[\lambda_i - n_i - n_i\ln\left(\frac{\lambda_i}{n_i}\right)\right]. \tag{212}$$

Vale ressaltar que a hipótese de n_i ser variável de Poisson não está sendo testada.

Com o valor χ^2_ν obtido com a Eq. (211), nós podemos calcular a probabilidade de obter os dados observacionais dado o modelo. Para isso calculamos o nível de significância (*P-value*) [35],

$$\int_{\chi^2_\nu}^{\infty} dx\,\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}x^{\nu/2-1}e^{-x/2} = p, \tag{213}$$

onde o integrando é a distribuição $\chi^2(x,\nu)$.

14 Perfil da Verossimilhança

Dado um modelo para uma quantidade $y(\{\theta_j\})$, onde $j = 1,...,m$, e um conjunto de dados $\{y_i\}$, onde $i = 1,...,N$, temos que os valores dos parâmetros θ_j, nos quais obtemos

[24] A diferenciabilidade da função $L(\vec{\theta})$ e o fato de não possuir o seu máximo nos limites do domínio dos parâmetros $\{\theta_j\}$ são duas condições das chamadas *condições regulares*.

a maior probabilidade de, dado o modelo, obter os dados $\{y_i\}$, são aqueles que maximizam a verossimilhança $L_0(\{\hat{\theta}_j\}, \{y_i\})$, onde $\{\hat{\theta}_j\}$ é o ponto de melhor ajuste.

Para obter a região no espaço paramétrico onde a probabilidade de obter os dados $\{y_i\}$ é maior ou igual a $1-p$, ou seja, para obter a região de confiança nós utilizamos o método *Perfil da Verossimilhança* (*Profile Likelihood*). Esse método, muito utilizado em física de partículas [40], consiste em fazer o teste da razão de verossimilhança no contexto descrito abaixo.

No caso em que queremos obter a região de confiança no subespaço (θ_1, θ_2), por exemplo, a hipótese H_1 consistirá em manter fixos esses parâmetros. Com isso, temos que a função $-2\ln\Lambda$ (equação 209) seguirá uma distribuição χ^2_ν de 2 graus de liberdade,

$$\chi^2_{\nu=2} = -2\ln\left(\frac{L_1(\theta_1, \theta_2, \{\hat{\theta}'_i\}, \{y_i\})}{L_0(\{\hat{\theta}_j\}, \{y_i\})}\right), \tag{214}$$

onde $i = 3, ..., m$ e $\{\hat{\theta}'_i\}$ será o melhor ajuste para o ponto (θ_1, θ_2). Dado o nível de confiança $1-p$ da região, calculamos o valor de $\chi^2_{\nu=2}$ a partir da equação (213) e, dessa forma, podemos obter os valores de θ_1 e θ_2 que satisfazem a equação (214). Esses pontos definem o contorno da região de confiança. Ususalmente, são calculadas as regiões em que $1-p = 68.27\%, 95.45\%$ e 99.73% (esses valores correpondem às regiões de 1, 2 e 3σ para a distribuição Gaussiana).

Como não é feita nenhuma suposição sobre os parâmetros θ'_i, dizemos que eles são *livres*. O procedimento descrito acima, chamaremos de *perfilização*, pode ser relacionado (mas vale ressaltar que não é equivalente) ao processo de marginalização na análise Bayesiana.

A região de confiança também pode ser obtida mantendo fixos alguns parâmetros θ_i, onde $i \neq 1, 2$. Essa análise é equivalente a supor que esses parâmetros são conhecidos com nenhuma incerteza.

15 Matriz de Fisher

O gasto computacional para calcular as regiões de confiança com o método de perfil da verossimilhança pode ser muito alto, principalmente quando estimam-se muitos parâmetros simultaneamente. Um método muito utilizado na literatura, por ser de baixo custo computacional, é o da *Matriz de Fisher*. No entanto, a matriz de Fisher fornece apenas

uma aproximação da matriz covariância dos parâmetros $\{\theta_j\}$, como veremos nesta seção, e por isso, o seu uso é limitado.

A matriz de Fisher é definida como o valor esperado da matriz Hessiana,

$$F_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i \partial\theta_j}|_{\vec{\theta}^0} \right\rangle, \tag{215}$$

onde $\vec{\theta}^0$ são os valores verdadeiros dos estimadores, e está relacionada com a variância dos estimadores $\hat{\theta}_i$ como dado pelos teoremas (veja a referência [41]) que dizem que

$$\left\langle \frac{\partial \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i}|_{\vec{\theta}^0} \right\rangle = 0, \tag{216}$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i \partial\theta_j}|_{\vec{\theta}^0} \right\rangle = -C\left(\frac{\partial \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i}|_{\vec{\theta}^0}, \frac{\partial \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_j}|_{\vec{\theta}^0} \right), \tag{217}$$

e que, se $\hat{\theta}$ não tiver viés, então

$$C(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) \geq \left[-\left\langle \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i \partial\theta_j}|_{\vec{\theta}^0} \right\rangle \right]^{-1}, \tag{218}$$

onde $C(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)$ são os elementos da matriz covariância, no sentido que a diferença dessas duas matrizes é positiva semi-definida (o lado direito da inequação é chamado de *limite inferior de Cramer-Rao*). Caso o estimador $\hat{\theta}$ seja eficiente, a inequação (218) reduz-se à igualdade.

Na prática, a equação (215) não é calculada, já que o cálculo do valor esperado corresponde a uma integração (a não ser que haja solução analítica). Dessa forma, supõe-se que o conjunto de dados é suficientemente grande e calcula-se a derivada segunda de $\ln L(\vec{\theta})$ no melhor ajuste $\hat{\theta}$,

$$C(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = -\left(\frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i \partial\theta_j}|_{\hat{\vec{\theta}}} \right)^{-1}. \tag{219}$$

Essa é uma aplicação de um teorema que diz que, no limite assintótico, o inverso da equação (219) é um estimador da matriz Fisher [41],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial\theta_i \partial\theta_j}|_{\hat{\vec{\theta}}} = F_{ij}. \tag{220}$$

Portanto, para obter a região de confiança[25] dos parâmetros θ_1 e θ_2, por exemplo, mantendo todos os outros fixos, basta calcular a equação paramétrica da elipse (veja a

[25] A região de confiança obtida com matriz de Fisher se aproxima assintoticamente da região de confiança do perfil da verossimilhança, da mesma forma que a distribuição dos estimadores é assintoticamente Gaussiana.

referência [42])

$$\theta_1(t) = \hat{\theta}_1 + q[a\cos(\alpha)\cos(t) - b\sin(\alpha)\sin(t)] \tag{221}$$

e

$$\theta_2(t) = \hat{\theta}_2 + q[a\sin(\alpha)\cos(t) + b\cos(\alpha)\sin(t)], \tag{222}$$

onde,

$$a^2 = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(C_{11} - C_{22})^2}{4} + C_{12}^2}, \tag{223}$$

$$b^2 = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(C_{11} - C_{22})^2}{4} + C_{12}^2}, \tag{224}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2C_{12}}{C_{11} - C_{22}}, \tag{225}$$

e

$$C(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) \equiv C_{ij} \doteq - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1^2}\big|_{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2} & \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\big|_{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2} \\ \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\big|_{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2} & \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_2^2}\big|_{\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

O parâmetro q indica o nível de confiança da região. No caso de 1σ, temos que $q = 1.52$ e para 2 e 3σ temos $q = 2.48$ e $q = 3.44$, respectivamente.

No caso em que os parâmetros θ_i, onde $i \neq 1, 2$, estão livres, a região de confiança é obtida a partir da matriz inversa

$$C(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) \equiv C_{ij} \doteq - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1^2}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} & \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1 \partial \theta_m}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} \\ \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} & \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_2^2}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_1 \partial \theta_m}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_m^2}\big|_{\hat{\vec{\theta}}} \end{pmatrix}^{-1},$$

onde os coeficientes das equações (221) e (222) são calculados a partir da submatriz 2×2 da matriz C dada pelos elementos C_{11}, C_{12} e C_{22}. Com esse procedimento, os parâmetros θ_i são marginalizados.

Exemplo: Cálculo analítico da matriz de Fisher para uma distribuição de Poisson.

$$L = \prod_{l=1}^{N} \frac{e^{-\lambda_l(\vec{\theta})}\lambda_l(\vec{\theta})^{n_l}}{n_l!}$$

$$\ln L = \sum_{l=1}^{N}(-\lambda_l(\vec{\theta}) + n_l \ln \lambda_l(\vec{\theta}) - \ln n_l!)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = \sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_j} + \frac{n_l}{\lambda_l}\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{l=1}^{N}\left(-\frac{\partial^2 \lambda_l}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{n_l}{\lambda_l^2}\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_i}\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_j} + \frac{n_l}{\lambda_l}\frac{\partial^2 \lambda_l}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)$$

Utilizando a Eq.(215), temos que

$$F_{ij} = \sum_{l=1}^{N}\left(\left\langle -\frac{\partial^2 \lambda_l}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right\rangle - \left\langle \frac{n_l}{\lambda_l^2}\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_i}\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_j}\right\rangle + \left\langle \frac{n_l}{\lambda_l}\frac{\partial^2 \lambda_l}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right\rangle\right)$$

$$F_{ij} = -\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{\lambda_l}\left(\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_i}\frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_j}\right).$$

16 Lista de Exercícios

* **Exercício 16** — Calcule a normalização da distribuição Gaussiana $P(x;\mu,\sigma)$ de média μ e desvio padrão σ,

$$P(x;\mu,\sigma) = Ne^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

** **Exercício 17** — Calcule o valor esperado $\langle x\rangle$, a variância $V(x)$ e o skew γ da distribuição Gaussiana $P(x;\mu,\sigma)$, onde

$$\gamma = \left\langle \left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^3 \right\rangle.$$

** **Exercício 18** — Seja o conjunto de medidas $\{x_i\}$, onde cada medida segue uma distribuição Gaussiana de média μ e desvio padrão σ_i. Calcule o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\mu}$.

** **Exercício 19** — Suponha que você está estudando o decaimento de um estado com tempo de vida desconhecido τ, tal que esse estado decaia como $(1/\tau)e^{-t_i/\tau}$. Dado o conjunto de N observações do tempo de vida $\{t_i\}$, obtenha o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\tau}$ e a sua variância $V(\hat{\tau})$.

Referências

[1] A. Friedman, Zeitschrift fur Physik **10**, 377 (1922).

[2] A. Friedmann, Zeitschrift fur Physik **21**, 326 (1924).

[3] A. Friedman, Gen. Relativ. Gravitation **31**, 1991 (1999).

[4] A. G. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **A 47**, 49 (1927).

[5] A. G. Lemaître, Mon. Not. R. Astron. Soc. **91**, 483 (1931).

[6] A. G. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **A 53**, 51 (1933).

[7] A. G. Lemaître, Gen. Relativ. Gravitation **29**, 641 (1997).

[8] H. P. Robertson, Astrophys. J. **82**, 284 (1935).

[9] H. P. Robertson, Astrophys. J. **83**, 187 (1936).

[10] H. P. Robertson, Astrophys. J. **83**, 257 (1936).

[11] A. G. Walker, Proceedings of the London Mathematical Society **42**, 90 (1937).

[12] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[13] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry For Physicists* (World Scientific Publishing Company, 1999).

[14] O. Gron and S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology* (Springer, 2007).

[15] S. D. P. Vitenti, Ph.D. thesis, ICRA – CBPF (2011).

[16] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum, Commun. Math. Phys. **12**, 108 (1969).

[17] M. P. Ryan and L. C. Spatilly, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, 1975).

[18] B. F. Auer, Master's thesis, Utrecht University (2008).

[19] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15**, 168 (1929).

[20] W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, L. Ferrarese, D. D. Kelson, S. Sakai, J. R. Mould, R. C. Kennicutt, R. C. Jr., H. C. Ford, et al. (HST), Astrophys. J. **553**, 47 (2001), astro-ph/0012376.

[21] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, D. A. Cottingham, R. E. Eplee, Jr., R. B. Isaacman, J. C. Mather, S. S. Meyer, P. D. Noerdlinger, R. A. Shafer, R. Weiss, et al., Astrophys. J. **420**, 445 (1994).

[22] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe* (Allan M. Wylde, 1990).

[23] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiattia, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al. (Supernova Search Team), Astron. J. **116**, 1009 (1998), astro-ph/9805201.

[24] T. Buchert, Gen. Relativ. Gravitation **32**, 105 (2000), gr-qc/9906015.

[25] G. F. R. Ellis and T. Buchert, Phys. Lett. A **347**, 38 (2005), gr-qc/0506106.

[26] D. L. Wiltshire, Phys. Rev. Lett. **99**, 251101 (2007), 0709.0732.

[27] T. Buchert (2010), 1012.3084.

[28] J. M. Stewart and M. Walker, Royal Society of London Proceedings Series A **341**, 49 (1974).

[29] J. M. Stewart, Classical Quant. Grav. **7**, 1169 (1990).

[30] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry* (Academic Press, 1984).

[31] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).

[32] U. H. Gerlach and U. K. Sengupta, Phys. Rev. D **18**, 1789 (1978).

[33] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1992).

[34] R. Lupton, *Statistics in Theory and Practice* (Princeton Univ. Press, 1993).

[35] G. Cowan, *Statistical Data Analysis* (Oxford University Press, 1998).

[36] R. J. Barlow, *Statistics: A guide to the use of statistical methods in the physical sciences*, The Manchester Physics Series (John Wiley & Sons, 1999).

[37] A. van den Bos, *Parameter Estimation for Scientists and Engineers* (John Wiley & Sons, 2007).

[38] G. Rodríguez, *Generalized linear models*, URL `http://data.princeton.edu/wws509/notes/a1s2.html`.

[39] P. G. Hoel, *Introduction to Mathematical Statistics* (John Wiley & Sons, 1966).

[40] CERN, *Root – a data analysis framework*, URL `http://root.cern.ch/root/html/RooStats__LikelihoodInterval.html`.

[41] H. J. Bierens, *Introduction to the Mathematical and Statistical Foundations of Econometrics* (Cambridge University Press, 2005).

[42] D. Coe, eprint arXiv:0906.4123 (2009).