CPT-ODD GAUGE SECTOR OF THE STANDARD MODEL EXTENSION

Manoel M. Ferreira Jr, Rodolfo Casana
[a] *Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus Universitário do Bacanga, São Luís - MA, 65085-580, Brazil. and*
[b] *Departamento de Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), 65025-001, São Luís, Maranhão, Brazil*

The CPT-odd gauge sector of the Standard Model Extension is composed of four components comprised in the tensor $(K_{AF})^{\mu}$. These components induce parity-violation and yield birefringence. In this note, we examine the Maxwell electrodynamics supplemented by this terms, analysing the new properties. The wave equations are achieved and dispersion relation carried out, used to explain birrefringence. In the sequel we evaluate the Feynman propagator for the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics in the presence of the Proca mass term. We finalize discussing the consistency of this theory (stability, causality, unitarity).

PACS numbers: 11.30.Cp, 12.60.-i, 11.55.Fv

I. INTRODUCTION

Lorentz symmetry violation has been an issue of permanent interest in the latest years, with many investigations in the context of the Standard Model Extension (SME) [1], [2]. The SME incorporates terms of Lorentz invariance violation (LIV) in all sectors of interaction and has been studied in many respects [3]. These terms are expectation values in vacuum of tensor quantities defined in the context a higher energy theory. The investigations in the context of the SME concern mainly the fermion sector [4], the gauge sector [5]-[13], and extensions involving gravity [6].

The gauge sector of the SME is composed of a CPT-odd and a CPT-even term. The CPT-odd term is represented by the Carroll-Field-Jackiw (CFJ) electrodynamics [5], and has its properties largely examined in literature. After its proposal, this term was addressed in the context of the Maxwell electrodynamics, concerning the evaluation of the Feynman propagator, with the analysis of consistency aspects (stability, causality, unitarity) [7]. This issue was also investigated in Ref. [8] in the presence of the Higgs sector. Modifications induced in QED by the CFJ term [7, 9], the dimensional reduction of the Maxwell-Carroll-Field electrodynamics [10], and the supersymmetric version of this model [11], are issues addressed in the literature. Many contributions have discussed controversies discussing the radiative generation of the CFJ term [12], while others have demonstrated the vacuum emission of Cherenkov radiation [13], the electromagnetic propagation in waveguides [14], and modifications on the Casimir effect [15].

In this class, we present the CPT-even gauge sector of the SME, discussing its properties and structure. In the sequel we present the equations of motion, obtaining the modified wave equations. This allows to obtain the dispersion relation of this theory, which is important to give information about the way the electromagnetic waves propagate. We discuss about birefringence yielded by the CFJ background. We evaluate the Feynman propagator for the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics supplemented with the Proca term. We read the dispersion relation from the poles of the propagator and analyze the consistency (stability and causality) of the theory.

II. CPT-ODD GAUGE SECTOR OF THE SME

The Lagrangian of the CPT-odd electrodynamics of SME is

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^{\mu}A^{\nu}F^{\alpha\beta}, \tag{1}$$

where $F_{\alpha\nu}$ is the electromagnetic field tensor, $V^{\mu} = (V_0, V^i)$ is a fixed background responsible for the Lorentz violation that does not transform as a four-vector. This electrodynamics was first analyzed by Carroll-Field-Jackiw [5]. So, the tensor $(K_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$ has 19 independent components, from which nine do not yield birefringence.

This Lagrangian can be written in an explicit form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}\right) - \frac{1}{4}\left[\epsilon_{0ilm}V^0A^iF^{lm} + \epsilon_{i0lm}V^iA^0F^{lm} + 2\epsilon_{il0m}V^iA^lF^{0m}\right]. \tag{2}$$

We know that

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i A_0 = E^i, \tag{3}$$
$$F_{lm} = \epsilon_{lmk}B_{k,} \tag{4}$$

so that

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(-2E^iE^i + \epsilon_{ijp}\epsilon^{ijq}B^pB^q\right) - \frac{1}{4}\left[\epsilon_{ilm}V^0A^i\epsilon_{lmk}B_k - \epsilon_{0ilm}V^iA^0\epsilon_{lmk}B_k - 2\epsilon_{0ilm}V^iA^lE^m\right], \tag{5}$$
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(-2E^iE^i + 2\delta_p{}^q B^pB^q\right) - \frac{1}{4}\left[\epsilon_{ilm}\epsilon_{lmk}V^0A^iB_k - \epsilon_{ilm}\epsilon_{lmk}V^iA^0B_k - 2\epsilon_{ilm}V^iA^lE^m\right]. \tag{6}$$

$$\epsilon_{ilm}\epsilon_{lmk}V^0A^iB_k = \epsilon_{lmi}\epsilon_{lmk}V^0A^iB_k = (\delta_{mm}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{im}) = (3\delta_{ik} - \delta_{ik}) = 2\delta_{ik} \tag{7}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right) - \frac{1}{4}\left[2\delta_{ik}V^0A^iB_k - 2\delta_{ik}V^iA^0B_k - 2\epsilon_{ilm}V^iA^lE^m\right], \tag{8}$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right) - \frac{1}{4}\left[2V^0A^kB_k - 2V^kA^0B_k - 2\epsilon_{ilm}V^iA^lE^m\right], \tag{9}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right) + \frac{1}{2}\left[V^0A^kB^k - A^0V^kB^k - \epsilon_{ilm}V^iA^lE^m\right], \tag{10}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right) + \frac{1}{2}\left[V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right) - A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right) - \mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right)\right]. \tag{11}$$

This is the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics.

III. DISCRETE SYMMETRIES: CPT OPERATOR

Under the CPT operator, we know that the electromagnetic fields and potential transform as

$$\begin{array}{llll} A_0 \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -A_0, & \mathbf{A} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -\mathbf{A}, \\ A_\mu \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -A_\mu, & \partial_\mu \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -\partial_\mu, \\ F_{\mu\nu} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} F_{\mu\nu}, & \\ \mathbf{E} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathbf{E}, & \mathbf{B} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathbf{B}. \end{array}$$

So, the terms of Lagrangian (11) transform as

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right)}_{+\left(\mathbf{E}^2-\mathbf{B^2}\right)} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)}_{-V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)} - \underbrace{A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right)}_{-A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right)} + \underbrace{\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right)}_{-\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right)}\right]. \tag{12}$$

Note that the background (V_0, V^i) is supposed unaffected by the CPT operator. All the terms stemming from the Carroll-Field-Jackiw term change the signal. This means these terms are CPT-odd.

Under parity, we have:

$$\mathbf{B} \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} +\mathbf{B}, \quad \mathbf{S} \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} -\mathbf{S}, \quad \mathbf{J} \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} -\mathbf{J}. \tag{13}$$

$$A_\mu \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} A^\mu, \quad J_\mu \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} J^\mu, \quad \partial_\mu \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \partial^\mu. \tag{14}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right)}_{+(\mathbf{E}^2-\mathbf{B^2})} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)}_{-V^0(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})} - \underbrace{A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right)}_{A^0(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right)}_{\mathbf{V}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{E})}\right]. \tag{15}$$

Thus, we see that the coefficient is V^0 parity-odd, while $\mathbf{V}$ is parity-even.

Under time reversion,

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\mathbf{B}; \quad \mathbf{E} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathbf{E}; \\ &A_0 \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} A_0, \quad \mathbf{A} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\mathbf{A}, \\ &A_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} A^\mu, \quad J_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} J^\mu, \end{aligned}$$

the behaves as

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B^2}\right)}_{+(\mathbf{E}^2-\mathbf{B^2})} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)}_{V^0(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})} - \underbrace{A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right)}_{-A^0(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B})} + \underbrace{\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right)}_{-\mathbf{V}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{E})}\right]. \tag{16}$$

Thus, we see that the coefficient is V^0 T-even, while $\mathbf{V}$ is T-odd.

Under operation PT,

$$\begin{aligned} V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right) &\overset{PT}{\rightarrow} -V^0\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right), \\ A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right) &\overset{PT}{\rightarrow} -A^0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\right), \\ \mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right) &\overset{PT}{\rightarrow} -\mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{E}\right). \end{aligned}$$

We notice that the CFJ term is $PT-odd$ and $C-even$, implying a CPT-odd term.

IV. EQUATIONS OF MOTION, WAVE EQUATIONS, AND BIREFRINGENCE

The equations of motion of the electrodynamics represented by Lagrangian (1) come from the Euler-Lagrange equation,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A_\lambda\right)} = 0. \tag{17}$$

We first carry out the two terms of Eq.(17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \frac{\partial\left(-J_\alpha A^\alpha\right)}{\partial A_\lambda} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial\left(V^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}\right)}{\partial A_\lambda} = -J^\lambda - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^\mu F^{\alpha\beta}g^{\nu\lambda}, \\ &= -J^\lambda + \frac{1}{4}\epsilon^\lambda{}_{\mu\alpha\beta}V^\mu F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A_\lambda\right)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\sigma A_\lambda\right)} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^\mu A^\nu\frac{\partial\left(F^{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\sigma A_\lambda\right)}, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A_\lambda\right)} &= -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^\mu A^\nu\left(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\lambda} - g^{\beta\lambda}g^{\alpha\sigma}\right), \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A_\lambda\right)} &= -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4}2\epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda}V^\mu A^\nu = -F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda}V^\mu A^\nu. \end{aligned}$$

Replacing these results in Eq.(17):

$$
\begin{aligned}
-J^{\lambda}+\frac{1}{4}\epsilon^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}V^{\mu}F^{\alpha\beta}+\partial_{\sigma}F^{\sigma\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda}V^{\mu}\partial_{\sigma}A^{\nu}&=0,\\
-J^{\lambda}+\frac{1}{4}\epsilon^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}V^{\mu}F^{\alpha\beta}+\partial_{\sigma}F^{\sigma\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma}{}^{\lambda}V^{\mu}\partial^{\sigma}A^{\nu}&=0,\\
\partial_{\sigma}F^{\sigma}{}_{\lambda}+\underbrace{\frac{1}{4}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^{\mu}F^{\alpha\beta}}_{\frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^{\mu}\partial^{\alpha}A^{\beta}}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}V^{\mu}\partial^{\sigma}A^{\nu}&=J_{\lambda},\\
\partial_{\sigma}F^{\sigma}{}_{\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^{\mu}\partial^{\alpha}A^{\beta}+\frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\sigma\nu}V^{\mu}\partial^{\sigma}A^{\nu}&=J_{\lambda},
\end{aligned}
$$

$$
\partial_{\sigma}F^{\sigma}{}_{\lambda}+\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^{\mu}\partial^{\alpha}A^{\beta}=J_{\lambda}\qquad\text{ou}\qquad\partial_{\sigma}F^{\sigma}{}_{\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^{\mu}F^{\alpha\beta}=J_{\lambda},\tag{18}
$$

$$
\partial_{\sigma}F^{\sigma\lambda}+\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}V_{\mu}\partial_{\alpha}A_{\beta}=J^{\lambda}\qquad\text{ou}\qquad\partial_{\sigma}F^{\sigma\lambda}+\frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}V_{\mu}F_{\alpha\beta}=J^{\lambda},\tag{19}
$$

$$
\partial_{\nu}F^{\nu\alpha}+V_{\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta}=J^{\alpha}.\tag{20}
$$

The other Maxwell equation comes from the Bianchi identity,

$$
\partial_{\nu}F_{\alpha\beta}+\partial_{\alpha}F_{\beta\nu}+\partial_{\beta}F_{\nu\alpha}=0,\tag{21}
$$

yielding the homogeneous Maxwell equation - the Gauss´s law for the magnetic field ($\partial_i B_i=0$) and the Faraday´s law, that is,

$$
\partial_{t}B_{a}+\epsilon_{abc}\partial_{b}E_{c}=0.\tag{22}
$$

The details of this calculation are below:

$$
\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}=2\frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}F^{\alpha\beta}=2\left(\delta_{\alpha}^{\nu}\delta_{\beta}^{\mu}-\delta_{\beta}^{\nu}\delta_{\alpha}^{\mu}\right)F^{\alpha\beta}=2\left(F^{\nu\mu}-F^{\mu\nu}\right)=4F^{\nu\mu},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(F^{\alpha\beta})}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}F^{\rho\varphi}&=\frac{\partial(\partial^{\alpha}A^{\beta}-\partial^{\beta}A^{\alpha})}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}F^{\rho\varphi}=\left(g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}-g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}\right)F^{\rho\varphi},\\
F^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(F^{\rho\varphi}\right)}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}&=F^{\alpha\beta}\frac{\partial(\partial^{\rho}A^{\varphi}-\partial^{\varphi}A^{\rho})}{\partial\left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}=F^{\alpha\beta}\left(g^{\rho\nu}g^{\varphi\mu}-g^{\varphi\nu}g^{\rho\mu}\right).
\end{aligned}
$$

Taking $\mu=0$ in Eq. (19), we obtain the Gauss's law,

$$
\begin{aligned}
\partial_{i}F^{i0}+\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}V_{i}F_{jk}=J^{0}\quad&\rightarrow\quad\partial_{i}F^{i0}-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}V_{i}F_{jk}=J^{0},\\
\partial_{i}E^{i}-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}V_{i}\epsilon_{jkm}B_{m}=J^{0}\quad&\rightarrow\quad\partial_{i}E^{i}+\frac{1}{2}\epsilon_{jki}\epsilon_{jkm}V_{i}B_{m}=J^{0},\\
\partial_{i}E^{i}-\frac{1}{2}2\delta_{mi}V_{i}B_{m}=J^{0}\quad&\rightarrow\quad\partial_{i}E^{i}-V_{m}B_{m}=J^{0},
\end{aligned}
$$

$$
\partial_{i}E^{i}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}=\rho\qquad\text{ou}\qquad\nabla\cdot\mathbf{E}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}=\rho.\tag{23}
$$

Note that we are using $\epsilon_{0123}=1=-\epsilon^{0123}$.

Taking $\mu = i$ in Eq. (19), we obtain the Ampère's law,

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \frac{1}{2}\epsilon^{i0lm} V_0 F_{lm} + \frac{1}{2} 2\epsilon^{ik0m} V_k F_{0m} = J^i, \tag{24}$$

$$-\partial_t E^i + \epsilon_{jik}\partial_j B_k - \frac{1}{2}\epsilon^{ilm} V_0 \epsilon_{lmp} B_p + \frac{1}{2} 2\epsilon^{ikm} V_k E^m = J^i, \tag{25}$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk}\partial_j B_k + \frac{1}{2}\epsilon_{ilm}\epsilon_{lmp} V_0 B_p + \epsilon^{ikm} V_k E^m = J^i, \tag{26}$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk}\partial_j B_k + \frac{1}{2} 2\delta_{ip} V_0 B_p - \epsilon^{ikm} V^k E^m = J^i, \tag{27}$$

$$-\partial_t E^i - \epsilon_{ijk}\partial_j B_k + V_0 B_i + \epsilon_{ikm} V^k E^m = J^i, \tag{28}$$

$$-\partial_t E^i + \epsilon_{ijk}\partial_j B^k - V_0 B^i + (\mathbf{V}\times\mathbf{E})^i = J^i. \tag{29}$$

Thus, the Ampère's law is

$$-\partial_t E^i + (\nabla\times\mathbf{B})^i - V_0 B^i + (\mathbf{V}\times\mathbf{E})^i = J^i, \tag{30}$$

$$-\partial_t \mathbf{E} + \nabla\times\mathbf{B} - V_0\mathbf{B} + \mathbf{v}\times\mathbf{E} = \mathbf{j}\ , \tag{31}$$

V. WAVE EQUATIONS AND DISPERSION RELATIONS

Manipulating these relations, wave equations for field strengths are readily attained:

$$\Box\mathbf{B} + \mathbf{v}_0\left(\nabla\times\mathbf{B}\right) = \nabla\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right) - \nabla\times\mathbf{j}, \tag{32}$$

$$\Box\mathbf{E} + \partial_t\left(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right) = \nabla\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\right) + \mathbf{v}_0\partial_t\mathbf{B} + \nabla\rho + \partial_t\mathbf{j}. \tag{33}$$

Starting from the Maxwell equation,

$$\partial^\sigma\ F_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \tag{34}$$

and replacing the definition of the field strength tensor,

$$\partial^\sigma\ \left(\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma\right) + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \tag{35}$$

$$\partial^\sigma\ \partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda\partial^\sigma\ A_\sigma + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \tag{36}$$

$$\Box A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} V^\mu F^{\alpha\beta} = J_\lambda, \tag{37}$$

where we have used the Lorentz condition, $\partial^\sigma\ A_\sigma = 0$. We thus have for the scalar and vector potentials:

$$\Box A_0 + \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk} V^i F^{jk} = \rho \quad \rightarrow \quad \Box A_0 + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} V^i \epsilon_{jkp} B_p = \rho \quad \rightarrow \quad \Box A_0 + V^i B_i = \rho,$$

$$\Box A_0 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{B} = \rho. \tag{38}$$

For the vector potential,

$$\Box A_i + \frac{1}{2}\epsilon_{i0jk} V^0 F^{jk} + \frac{1}{2} 2\epsilon_{ij0k} V^j F^{0k} = J_i \quad \rightarrow \quad \Box A_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} V^0 F^{jk} + \frac{1}{2} 2\epsilon_{ijk} V^j F^{0k} = J_i,$$

$$\Box A_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkp} V^0 B_p + \epsilon_{ijk} V^j\left(-E^k\right) = J_i \quad \rightarrow \quad \Box A_i - V^0 B_i - \epsilon_{ijk} V^j E^k = J_i,$$

$$-\Box A^i + V^0 B^i - \epsilon_{ijk} V^j E^k = -J^i \quad \rightarrow \quad \Box A^i - V^0 B^i + (\mathbf{V}\times\mathbf{E})^i = J^i.$$

$$\Box\mathbf{A} - V^0\mathbf{B} + (\mathbf{V}\times\mathbf{E}) = \mathbf{J}. \tag{39}$$

The wave equation (37) can be written as

$$\Box A_\lambda + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^\mu\left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right) = J_\lambda, \tag{40}$$

$$\Box A_\lambda + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^\mu\partial^\alpha A^\beta = J_\lambda, \tag{41}$$

$$\Box g_{\lambda\beta}A^\beta + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^\mu\partial^\alpha A^\beta = J_\lambda, \tag{42}$$

$$\left[\Box g_{\lambda\beta} + \epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^\mu\partial^\alpha\right]A^\beta = J_\lambda, \tag{43}$$

This equation can be written as

$$M_{\lambda\beta}A^\beta = J_\lambda, \tag{44}$$

where

$$M_{\lambda\beta} = \Box g_{\lambda\beta} + \epsilon_{\lambda\beta\mu\alpha}V^\mu\partial^\alpha. \tag{45}$$

Now, we work in the Fourier space, where we write:

$$A^\beta = \tilde{A}^\beta\exp(-ip\cdot x) \quad \rightarrow \quad A^\beta = \tilde{A}^\beta e^{-(ip_0t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}.$$

$$\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu,$$

$$\partial_\mu\partial^\mu \rightarrow -ip_\mu\left(-ip^\mu\right) = -p_\mu p^\mu = -p^2.$$

In the momentum space,

$$M_{\lambda\beta}(p) = -p^2 g_{\lambda\beta} - i\epsilon_{\lambda\beta\mu\alpha}V^\mu p^\alpha, \tag{46}$$

This is a 4×4 matrix, which is explicitily read as

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -p^2 & -iV_2p_3 + iV_3p_2 & iV_1p_3 - iV_3p_1 & -iV_1p_2 + iV_2p_1 \\ iV_2p_3 - iV_3p_2 & p^2 & iV_0p_3 - iV_3p_0 & -iV_0p_2 + iV_2p_0 \\ -iV_1p_3 + iV_3p_1 & -iV_0p_3 + iV_3p_0 & p^2 & iV_0p_1 - iV_1p_0 \\ iV_1p_2 - iV_2p_1 & iV_0p_2 - iV_2p_0 & -iV_0p_1 + iV_1p_0 & p^2 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Evaluating the determinant (in Maple plataform), we obtain:

$$\begin{aligned}\det\mathbb{M} = p^4[&-p^4 + \mathbf{V}^2p_0^2 - 2V_0p_0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right) + V_0^2\mathbf{p}^2 + 2V_1p_3V_3p_1 + 2V_2p_3V_3p_2 + 2V_1p_1V_2p_2 \\ &- V_3^2p_1^2 - V_2^2p_3^2 - V_2^2p_1^2 - V_3^2p_2^2 - V_1^2p_2^2 - V_1^2p_3^2],\end{aligned} \tag{48}$$

Permorming simplifications and algebraic manipulations,

$$\begin{aligned}\det\mathbb{M} &= p^4[-p^4 + \mathbf{V}^2p_0^2 - 2V_0p_0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right) + V_0^2\mathbf{p}^2 - \left(V_1p_3 - V_3p_1\right)^2 - \left(V_2p_3 - V_3p_2\right)^2 - \left(V_1p_1 - V_2p_2\right)^2], \\ \det\mathbb{M} &= p^4[-p^4 + \mathbf{V}^2p_0^2 - 2V_0p_0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right) + V_0^2\mathbf{p}^2 - \left(\mathbf{V}\times\mathbf{p}\right)^2], \\ \det\mathbb{M} &= p^4[-p^4 + \mathbf{V}^2p_0^2 - 2V_0p_0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right) + V_0^2\mathbf{p}^2 - \left(\mathbf{V}^2\mathbf{p}^2 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right)^2\right)], \\ \det\mathbb{M} &= p^4[-p^4 + \mathbf{V}^2p_0^2\underbrace{-2V_0p_0\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right) + \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right)^2}_{(V_0p_0-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}))^2-(V_0p_0)^2} + \left(V_0^2 - \mathbf{V}^2\right)\mathbf{p}^2],\end{aligned}$$

we obtain:

$$\det \mathbb{M}=p^4[-p^4+\mathbf{V}^2p_0^2+(V_0p_0-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}))^2-(V_0p_0)^2+V^2\mathbf{p}^2],$$
$$\det \mathbb{M}=p^4[-p^4+\mathbf{V}^2p_0^2+(V\cdot p)^2-(V_0p_0)^2+V^2\mathbf{p}^2=-p^4+\mathbf{V}^2p_0^2-(V_0p_0)^2+(V\cdot p)^2+V^2\mathbf{p}^2],$$
$$\det \mathbb{M}=p^4[-p^4-p_0^2\left(V_0^2-\mathbf{V}^2\right)+(V\cdot p)^2+V^2\mathbf{p}^2=-p^4-p_0^2V^2+(V\cdot p)^2+V^2\mathbf{p}^2],$$

$$\det \mathbb{M}=p^4[-p^4-p^2V^2+(V\cdot p)^2]. \tag{49}$$

The dispersion relation is given by $\det \mathbb{M}=0$, that is:

$$p^4+p^2V^2-(V\cdot p)^2=0. \tag{50}$$

It will be interesting to verify that this exact dispersion relation can be attained from the poles of the Feynman propagator, as well. Note that we have used:

$$V^2=\left(V_0^2-\mathbf{V}^2\right),\quad p^2=\left(p_0^2-\mathbf{p}^2\right),\quad V\cdot p=V_0p_0-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}). \tag{51}$$

A. Análise de relação de dispersão e birrefringência

Como vemos na seção anterior, a relação de dispersão geral da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw é dada por:

$$p^4+V^2p^2-(V\cdot p)^2=0, \tag{52}$$

onde $p=(\omega,p)$ é o 4-vetor de onda. Esta equação equivale a:

$$\left(\omega^2-\mathbf{p}^2\right)^2+\left(V_0^2-\mathbf{V}^2\right)^2\left(\omega^2-\mathbf{p}^2\right)-(V_0\omega-\mathbf{V}\cdot\mathbf{p})^2=0. \tag{53}$$

A Eq. (52) pode ser inicialmente resolvida para p^2, fornecendo:

$$p^2=\frac{-V^2\pm\sqrt{V^4+4\left(V\cdot p\right)^2}}{2},$$

que pode ser aproximada quando desprezamos o termo de ordem mais alta, V^4, obtendo:

$$p^2=\frac{-V^2}{2}\pm\left(V\cdot p\right). \tag{54}$$

Sabendo que $p^2=\left(\omega^2-\mathbf{p}^2\right)$, temos:

$$\left(\omega^2-\mathbf{p}^2\right)=\frac{-V^2}{2}\pm\left(V_0\omega-\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\right), \tag{55}$$

$$\omega^2\mp V_0\omega-\mathbf{p}^2+\frac{V^2}{2}\pm\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{0},$$
$$\omega^2-V_0\omega-\mathbf{p}^2+\frac{V^2}{2}+\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{0},$$

Buscando um resultado em primeira ordem no background violador, fazemos

$$\omega^2\mp V_0\omega-\mathbf{p}^2\pm\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}\simeq\mathbf{0},$$

e resolvemos para ω, obtendo:

$$\omega = \frac{V_0 \pm 2\sqrt{\mathbf{p}^2 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{p}}}{2} = \frac{V_0}{2} \pm |\mathbf{p}| \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}},$$
$$\omega =\simeq \frac{V_0}{2} \pm |\mathbf{p}| \left[1 - \frac{|\mathbf{V}|\,|\mathbf{p}|\cos\theta}{2\,|\mathbf{p}|^2}\right],$$
$$\omega \simeq \frac{V_0}{2} \pm |\mathbf{p}| - \frac{|\mathbf{V}|}{2}\cos\theta,$$

$$\omega \simeq \pm|\mathbf{p}| + \frac{1}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right) \rightarrow \omega \simeq \pm\left[|\mathbf{p}| \pm \frac{1}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right)\right],$$

que equivale a

$$\omega \simeq \left[|\mathbf{p}| \pm \frac{1}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right)\right], \tag{56}$$

$$|\mathbf{p}| \simeq \omega \pm \frac{1}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right). \tag{57}$$

VI. BIRREFRINGÊNCIA NA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-CARROLL-FIELD-JACKIW

Birrefringência é usualmente a decomposição da luz propagando-se em um meio anisotrópico em duas diferentes componentes (raios ordinário e extraordinário). Birrefringência é também descrita como a propagação de diferentes modos de polarização com diferentes velocidades. Tal diferença de velocidade causa uma rotação no plano de polarização. A birrefringência possui similaridade com o efeito Faraday, em que a rotação do plano de polarização é causado por um campo magnético ao longo da direção de propagação. O efeito Faraday é uma ferramenta bastante utilizada por astrofísicos em busca de campos intergalácticos.

No caso das eletrodinâmicas com violação da simetria de Lorentz, é comum ter birrefringência no vácuo determinada pelo background violador, tal como pode ser verificado na teoria de Carroll-Field-Jackiw. Como veremos, devido aos dados de rotação de polarização da luz advinda de muito galáxias distantes, os testes de birrefringência acabam sendo os que levam aos limites mais restritivos na magnitude dos parâmetros de violação. A seguir ilustraremos como isto pode ser realizado dentro do contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw.

Como já dito, ocorre birrefringência quando modos de polarização diferentes propagam-se como velocidades (de fase) diferentes, determinando uma rotação no plano de polarização à medida que a onda se propaga. Para verificar se a teoria em questão é birrefringente ou não, é necessário tomar os dois modos de polarização (right e left) propagando-se no mesmo sentido, de modo a constituir uma única frente de onda. Por convenção, o modo right propaga-se para a direita (sentido positivo do eixo-x) enquanto o modo left propaga-se para a esquerda (sentido negativo do eixo-x). A mudança na fase φ da onda circularmente polarizada, resultante da junção dos dois modos, é proporcional à distância L percorrida pela luz, ou seja,

$$\varphi = |\mathbf{p}|\, L. \tag{58}$$

Tomando-se a diferença entre os dois modos (right e left), representados por $|\mathbf{p}_+|$ e $|\mathbf{p}_-|$, respectivamente, temos:

$$\Delta\varphi = (|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|)L = (\Delta\,|\mathbf{p}|)\, L. \tag{59}$$

O ângulo de rotação do plano de polarização é metade da diferença de fase , ou seja:

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = (\Delta\,|\mathbf{p}|)\,\frac{L}{2}. \tag{60}$$

Tomemos então o modo right no seu sentido usual, descrito por

$$\omega_+(+\mathbf{p}) \simeq \left[|\mathbf{p}| + \frac{1}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right)\right]. \tag{61}$$

Tomemos agora o modo left propagando também para a direita (sentido oposto ao seu convencional), ou seja,

$$\omega_-(-\mathbf{p}) \simeq \left[|\mathbf{p}| - \frac{1}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right)\right]. \tag{62}$$

Como estas equações envolvem $|\mathbf{p}|$, em vez de p, não há mudança de sinal relativo quando a informação da reversão de sentido, $p\rightarrow -p$, é implementada. Como consequência, temos velocidades de fase correspondentes diferentes para estes dois modos propagantes no mesmo sentido, isto é,

$$u_{ph+} \simeq \left[1 + \frac{1}{2\,|\mathbf{p}|}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right)\right], \tag{63}$$

$$u_{ph-} \simeq \left[1 - \frac{1}{2\,|\mathbf{p}|}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right)\right]. \tag{64}$$

Neste caso, observando (57) verificamos que,

$$\left(|\mathbf{p}_+| - |\mathbf{p}_-|\right) \simeq \left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right), \tag{65}$$

o que leva a seguinte previsão para o ângulo de rotação do plano de polarização

$$\alpha = \frac{L}{2}\left(V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right). \tag{66}$$

Carroll, Field, Jackiw [5] analisaram luz advinda de galáxias muito distantes ($L = 10^{10}$ anos-luz $\rightarrow L = 9.46\times 10^{25}m$) e concluíram que a variação média de fase é menor que $6^o = 0.104$ rad. Isto implica na condição:

$$\frac{L}{2}\left|V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right| < 0.104 \qquad \rightarrow \qquad \left|V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right| < \frac{2\times 0.104}{9.46\times 10^{25}m},$$

$$\left|V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right| < \frac{2\times 0.104}{9.46\times 10^{25}m} \quad \rightarrow \quad \left|V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right| < 2.2\times 10^{-27}m^{-1},$$

Sabendo que

$$1m^{-1} = 1.977\times 10^{-7}eV, \tag{67}$$

obtemos

$$\left|V_0 - |\mathbf{V}|\cos\theta\right| < 4.4\times 10^{-33}eV. \tag{68}$$

Isto representa um "upper bound" muito restritivo sobre a magnitude do parâmetro de violação da simetria de Lorentz.

VII. CÁLCULO DO PROPAGADOR DE FEYNMAN E ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL- CARROLL-FIELD-JACKIW COM TERMO DE PROCA

A. Introdução

Nesta seção, realizaremos o cálculo do propagador de Feynman $\langle A_\mu A_\nu\rangle$ associado ao campo de gauge A_μ da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw na presença do termo de massa de Proca,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta A_\alpha F_{\rho\varphi} + \frac{1}{2}M_A^2 A_\alpha A^\alpha. \tag{69}$$

Usamos o método usual baseado na quadratura da ação nos campos e definição de um conjunto de projetores que viabilizam a inversão do operador quadrático da ação. Uma vez calculado o propagador de Feynman, a sua estrutura de pólos é utilizada para obter as relações de dispersão, que fornecem informações sobre os modos de propagação da teoria. Encontrados tais modos, deve-se então verificar quais destes (e em quais condições) satisfazem os pré-requisitos de estabilidade, causalidade e unitariedade. Uma teoria é dita causal quando prevê a propagação de sinais físicos apenas com velocidade menor que c. Portanto, analisar a causalidade de um modelo consiste em calcular a velocidade de propagação de sinais (ondas) associados com os modos da teoria. Uma teoria é dita estável quando a energia quadrática das quantidade dinâmicas é sempre positiva. Finalmente, um dado modelo é denominado unitário quando possui modos de propagação associados à estados (definidos no espaço de Hilbert) que exibem norma quadrática positiva. Apenas a interação mediada por modos estáveis, causais e unitários pode ser corretamente descrita por uma teoria quântica de campo conveniente.

B. Cálculo explícito do Propagador de Feynman

O propagador de Feynman $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ é usualmente definido como o valor esperado do produto T-ordenado dos campos, $A_\mu A_\nu$, ou seja,

$$\langle 0 \left| T(A_\mu(x) A_\nu(y)) \right| 0 \rangle = i\Delta_{\mu\nu}(x-y). \tag{70}$$

O nosso ponto de partida para o cálculo desta quantida é a ação S do Modelo:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta A_\alpha F_{\rho\varphi} + \frac{1}{2}M_A^2 A_\alpha A^\alpha \right). \tag{71}$$

O objetivo é reescrever a Eq.(71) na forma $S = \int d^4x A_\mu \boxplus^{\mu\nu} A_\nu$, na qual $\boxplus^{\mu\nu}$ é um operador diferencial, tradicionalmente denominado *operador de onda*[1]. Este objetivo é alcançado reescrevendo-se, separadamente, os termos constituintes da ação (71):

$$-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}A^\beta \Box \Theta_{\alpha\beta} A^\alpha, \tag{72}$$

$$\frac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha = \frac{1}{2}A^\beta M_A^2 \eta_{\alpha\beta} A^\alpha, \tag{73}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta A_\alpha F_{\rho\varphi} = \frac{1}{2}A^\beta S_{\beta\alpha} A^\alpha, \tag{74}$$

onde $\eta_{\beta\nu}$ =diag$(+---)$ é a métrica de Minkowski. Aqui, foram utilizados os operadores projetores transversal $\Theta_{\alpha\beta}$ e longitudinal $\omega_{\alpha\beta}$, dados a seguir:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}, \tag{75}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\Box}, \tag{76}$$

---

[1] Esta nomenclatura será novamente utilizada adiante. Neste ínterim, deixa-se para aquele momento os esclarecimentos necessários.

$$S^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\beta\alpha\varphi\rho} V_\varphi \partial_\rho. \tag{77}$$

Abaixo, explicitamos algumas das passagens realizadas acima:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma\right)\left(\partial^\sigma A^\lambda - \partial^\lambda A^\sigma\right) = -\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma A_\lambda \partial^\sigma A^\lambda - \partial_\lambda A_\sigma \partial^\sigma A^\lambda\right), \\
&= \frac{1}{2}\left(A_\lambda \partial_\sigma \partial^\sigma A^\lambda - A_\sigma \partial_\lambda \partial^\sigma A^\lambda\right) + \text{div ergência total} = \frac{1}{2}\left(A_\lambda \Box A^\lambda - A_\sigma \partial_\lambda \partial^\sigma A^\lambda\right), \\
&= \frac{1}{2}\left(A_\alpha \Box A^\alpha - A_\sigma \partial_\alpha \partial^\sigma A^\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(A^\beta g_{\beta\alpha}\Box A^\alpha - A^\beta \partial_\alpha \partial_\beta A^\alpha\right), \\
&= \frac{1}{2}A^\beta\left(g_{\beta\alpha}\Box - \partial_\alpha\partial_\beta\right)A^\alpha = \frac{1}{2}A^\beta \Box\left(g_{\beta\alpha} - \frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\right)A^\alpha, \\
&= \frac{1}{2}A^\beta \Box \Theta_{\alpha\beta} A^\alpha
\end{aligned} \tag{78}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta A_\alpha F_{\rho\varphi} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta A_\alpha \partial_\rho A_\varphi = A_\alpha\left[-\frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta\partial_\rho\right]A_\varphi, \tag{79}$$

$$= A^\alpha\left[-\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\alpha\rho\varphi}V^\lambda\partial^\rho\right]A^\varphi = \frac{1}{2}A^\beta\left[-\varepsilon_{\lambda\beta\rho\alpha}V^\lambda\partial^\rho\right]A^\alpha, \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2}A^\beta\left[\varepsilon_{\beta\lambda\rho\alpha}V^\lambda\partial^\rho\right]A^\alpha = \frac{1}{2}A^\beta\left[\varepsilon_{\beta\alpha\lambda\rho}V^\lambda\partial^\rho\right]A^\alpha, \tag{81}$$

$$= \frac{1}{2}A^\beta S_{\beta\alpha}A^\alpha. \tag{82}$$

A Eq.(77) encerra a definição de um operador tipo Chern-Simons, $S^{\beta\alpha}$, em $(1+3)$ dimensões, que contém a informação referente à presença do campo de fundo V_φ. Substituindo as eqs.(72), (73) e (74) na Eq.(71), resulta:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x A^\beta \boxplus_{\beta\alpha} A^\alpha, \tag{83}$$

na qual utilizou-se o seguinte para o operador de onda $\boxplus_{\beta\alpha}$:

$$\boxplus_{\beta\alpha} = \left(\Box + M_A^2\right)\Theta_{\beta\alpha} + M_A^2\omega_{\beta\alpha} + S_{\beta\alpha}. \tag{84}$$

Como todo operador tensorial, o operador $\boxplus_{\beta\alpha}$ possui uma representação matricial própria. Adianta-se que a matriz $\boxplus_{\beta\alpha}$ exibe $\det\boxplus_{\beta\alpha} \neq 0$, o que assegura a existência da sua inversa. Esta inversa é exatamente o propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$ procurado. Busca-se, então, a matriz $\triangle_{\alpha\nu} = \langle A_\alpha A_\nu\rangle$ que satisfaz:

$$\boxplus_{\beta\alpha}\triangle^{\alpha\nu} = \delta_\beta{}^\nu, \tag{85}$$

$$\boxplus_{\beta\alpha}\triangle^\alpha{}_\nu = \eta_{\beta\nu}, \tag{86}$$

É necessária a construção de uma forma geral para $\triangle^\alpha{}_\nu$. Via Eq.(84), apresenta-se uma proposta inicial composta pelos operadores $[\omega_{\beta\alpha},\, \Theta_{\beta\alpha},\, S_{\beta\alpha}]$, na forma:

$$\triangle^\alpha{}_\nu = a_1\omega^\alpha{}_\nu + b_1\Theta^\alpha{}_\nu + c_1 S^\alpha{}_\nu\ . \tag{87}$$

A qual define, *a priori*, o propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$ em termos dos coeficientes a_1, b_1 e c_1. Para encontrar estes coeficientes, substituimos (87) na Eq. (86):

$$\begin{aligned}
\boxplus_{\beta\alpha}\triangle^\alpha{}_\nu = &\left(\Box + M_A^2\right)\left[a_1\Theta_{\beta\alpha}\omega^\alpha{}_\nu + b_1\Theta_{\beta\alpha}\Theta^\alpha{}_\nu + c_1\Theta_{\beta\alpha}S^\alpha{}_\nu\right] + \\
&+ M_A^2\left[a_1\omega_{\beta\alpha}\omega^\alpha{}_\nu + b_1\omega_{\beta\alpha}\Theta^\alpha{}_\nu + c_1\omega_{\beta\alpha}S^\alpha{}_\nu\right] + \\
&+ a_1 S_{\beta\alpha}\omega^\alpha{}_\nu + b_1 S_{\beta\alpha}\Theta^\alpha{}_\nu + c_1 S_{\beta\alpha}S^\alpha{}_\nu\ .
\end{aligned} \tag{88}$$

Para resolver as contrações tensoriais existentes na expressão acima, é necessário conhecer a álgebra do *set* $[\omega_{\beta\alpha},\, \Theta_{\beta\alpha},\, S_{\beta\alpha}]$. Esta propriedade é exposta na Tabela 1 abaixo:

	$\omega^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Theta^{\alpha}{}_{\nu}$	$S^{\alpha}{}_{\nu}$
$\omega_{\beta\alpha}$	$\omega_{\beta\nu}$	0	0
$\Theta_{\beta\alpha}$	0	$\Theta_{\beta\nu}$	$S_{\beta\nu}$
$S_{\beta\alpha}$	0	$S_{\beta\nu}$	$f_{\beta\nu}$

(89)

Tabela 1. Álgebra dos operadores projetores $[\omega_{\beta\alpha},\, \Theta_{\beta\alpha},\, S_{\beta\alpha}]$.

Nesta, notamos a presença do novo elemento $f_{\beta\nu}$,

$$f_{\beta\nu} = \left(V^2\Box - \lambda^2\right)\Theta_{\beta\nu} - \lambda^2\omega_{\beta\nu} + \lambda\left(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}\right) - \Box\Lambda_{\beta\nu}, \tag{90}$$

$$\Sigma_{\beta\nu} = V_\beta\partial_\nu, \qquad \Lambda_{\beta\nu} = V_\beta V_\nu \qquad \text{e} \qquad \lambda = V_\alpha\partial^\alpha = V\cdot\partial\ . \tag{91}$$

Via a Tabela 1, a Eq.(88) resulta:

$$\begin{aligned}\underbrace{\boxplus_{\beta\alpha}\,\triangle^{\alpha}{}_{\nu}}_{\eta_{\beta\nu}} = &\left[\left(\Box + M_A^2\right)b_1 + c_1\left(V^2\Box - \lambda^2\right)\right]\Theta_{\beta\nu} + \\ &+ \left[a_1 M_A^2 - c_1\lambda^2\right]\omega_{\beta\nu} + \left[c_1 + b_1\right]S_{\beta\nu} + \\ &+ c_1\lambda\left(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}\right) - c_1\Box\Lambda_{\beta\nu}\ .\end{aligned} \tag{92}$$

Substituindo a Eq.(92) na Eq.(85), obtemos:

$$\begin{aligned}\Theta_{\beta\nu} + \omega_{\beta\nu} = &\left[\left(\Box + M_A^2\right)b_1 + c_1\left(V^2\Box - \lambda^2\right)\right]\Theta_{\beta\nu} + \\ &+ \left[a_1 M_A^2 - c_1\lambda^2\right]\omega_{\beta\nu} + \left[c_1 + b_1\right]S_{\beta\nu} + \\ &+ c_1\lambda\left(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}\right) - c_1\Box\Lambda_{\beta\nu}\ ,\end{aligned} \tag{93}$$

na qual usamos $\eta_{\beta\nu} = \Theta_{\beta\nu} + \omega_{\beta\nu}$. Emerge o seguinte sistema:

$$\left(\Box + M_A^2\right)b_1 + \left(V^2\Box - \lambda^2\right)c_1 = 1, \tag{94}$$

$$a_1 M_A^2 - c_1\lambda^2 = 1, \tag{95}$$

$$c_1 + b_1 = 0, \tag{96}$$

$$c_1\lambda = 0 \qquad \text{e} \qquad c_1 = 0\ . \tag{97}$$

Este sistema deve ser solucionado para os coeficientes a_1, b_1 e c_1. O valor deste último é $c_1 = 0$ [vide Eq.(97)]. A partir deste, emerge $b_1 = 0$ [Eq.(96)]. Todavia, estas soluções são incompatíveis com a Eq.(94). Conclui-se que o sistema resultante das eqs.(84), (85) e (87) é incapaz de definir os coeficientes a_1, b_1 e c_1, e, por conseguinte, o propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$. Isto é uma consequência da álgebra do *set* $[\omega_{\beta\alpha},\, \Theta_{\beta\alpha},\, S_{\beta\alpha}]$ ser incompleta[2] (*non-closed algebra*).

É necessário, portanto, a construção de um *set* de operadores cuja álgebra seja completa (*closed algebra*). Definimos este novo conjunto sendo formado pelos projetores

$$[\omega_{\beta\alpha}, \Theta_{\beta\alpha}, S_{\beta\alpha}, \Sigma_{\beta\alpha}, \Lambda_{\beta\alpha}]\,, \tag{98}$$

e propomos a forma geral para a matriz $\triangle^{\alpha}{}_{\nu}$:

$$\triangle^{\alpha}{}_{\nu} = a\omega^{\alpha}{}_{\nu} + b\Theta^{\alpha}{}_{\nu} + cS^{\alpha}{}_{\nu} + d\Sigma^{\alpha}{}_{\nu} + e\Sigma_{\nu}{}^{\alpha} + g\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\ . \tag{99}$$

Neste ínterim, apresentamos a Tabela 2, contendo a álgebra destes operadores:

---

[2] Esta conclusão pode ser previamente extraída da Tabela 1, quando, via o resultado de $S_{\beta\alpha}S^{\alpha}{}_{\nu} = f_{\beta\nu}$, surge a necessidade de definir os novos operadores $\Sigma_{\beta\nu}$ e $\Lambda_{\beta\nu}$.

	$\omega^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Theta^{\alpha}{}_{\nu}$	$S^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Sigma^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Sigma_{\nu}{}^{\alpha}$	$\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}$
$\omega_{\beta\alpha}$	$\omega_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\omega_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\nu\beta}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\beta}$
$\Theta_{\beta\alpha}$	0	$\Theta_{\beta\nu}$	$S_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\beta\nu}-\lambda\omega_{\beta\nu}$	0	$\Lambda_{\beta\nu}-\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\beta}$
$S_{\beta\alpha}$	0	$S_{\beta\nu}$	$f_{\beta\nu}$	0	0	0
$\Sigma_{\beta\alpha}$	$\Sigma_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\Sigma_{\beta\nu}$	$\Box\Lambda_{\beta\nu}$	$\lambda\Lambda_{\beta\nu}$
$\Sigma_{\alpha\beta}$	$\lambda\omega_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\nu\beta}-\lambda\omega_{\beta\nu}$	0	$V^2\Box\omega_{\beta\nu}$	$\lambda\Sigma_{\nu\beta}$	$V^2\Sigma_{\nu\beta}$
$\Lambda_{\beta\alpha}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\beta\nu}$	$\Lambda_{\beta\nu}-\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\beta\nu}$	0	$V^2\Sigma_{\beta\nu}$	$\lambda\Lambda_{\beta\nu}$	$V^2\Lambda_{\beta\nu}$

TABLE I: Tabela 2 *(agora fechada, uma vez que não aparecem novos termos)*

Nesta, verificamos que a álgebra está fechada, uma vez que não aparecem novos termos além dos inicialmente propostos. Para encontrar os coeficientes a, b, c, d, e e g, substituímos o operador Eq.(94) na na Eq. (85).

Disto, resulta o seguinte sistema de equações[3]:

$$\left(\Box+M_A^2\right)b+\left(V^2\Box-\lambda^2\right)c=1, \qquad M_A^2a-\Box\lambda d-\lambda^2c=1, \tag{100}$$

$$b+\left(\Box+M_A^2\right)c=0, \qquad \lambda c+\left(\Box+M_A^2\right)d=0, \tag{101}$$

$$M_A^2e-\lambda g+\lambda c=0 \qquad \text{e} \qquad \left(\Box+M_A^2\right)g-\Box c=0. \tag{102}$$

Resolvendo-as, encontramos:

$$a=-\frac{1}{D}\left[\frac{D}{M_A^2}+\frac{\lambda^2}{(\Box+M_A^2)}\right], \qquad b=\frac{\left(\Box+M_A^2\right)}{D}, \tag{103}$$

$$c=-\frac{1}{D}, \qquad d=\frac{\lambda}{D\left(\Box+M_A^2\right)}, \tag{104}$$

$$e=\frac{\lambda}{D\left(\Box+M_A^2\right)}, \qquad g=-\frac{\Box}{D\left(\Box+M_A^2\right)}, \tag{105}$$

$$D=\left(\Box+M_A^2\right)^2-\left(V^2\Box-\lambda^2\right). \tag{106}$$

Substituindo estes resultados na Eq.(99), temos o propagador do campo de gauge da eletrodinâmica de MCFJP [8]:

$$\langle A_\alpha A_\nu\rangle=\frac{i}{D}\left\{C\omega_{\alpha\nu}+\left(\Box+M_A^2\right)\Theta_{\alpha\nu}-S_{\alpha\nu}+\frac{\lambda}{\left(\Box+M_A^2\right)}\left(\Sigma_{\alpha\nu}+\Sigma_{\nu\alpha}\right)-\frac{\Box}{\left(\Box+M_A^2\right)}\Lambda_{\alpha\nu}\right\}, \tag{107}$$

na qual valem:

$$C=\frac{D}{M_A^2}-\frac{\lambda^2}{(\Box+M_A^2)}, \tag{108}$$

$$D=\left(\Box+M_A^2\right)^2-\left(V^2\Box-\lambda^2\right). \tag{109}$$

Como sabemos as relações de dispersão deste modelo são obtidas via os pólos do propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$, sendo nosso objeto de estudo agora.

---

[3] Reescreve-se, inclusive, $\eta_{\beta\nu}=\Theta_{\beta\nu}+\varpi_{\beta\nu}$.

C. Relações de dispersão

As relações de dispersão carregam as informações acerca dos modos de propagação da teoria. A obtenção das relações de dispersão próprias ao modelo ocorre via a observação dos pólos do propagador. Para obter-se uma relação de dispersão escrita em forma conveniente (i.e., em termos do momento p e da frequência ω), utiliza-se o *ansatz* de onda plana:

$$A_\alpha(x) = \varepsilon_\alpha(p)\exp(-ip\cdot x)\ , \tag{110}$$

na qual vale $p = p^\alpha = (\omega, \mathbf{p})$. Implementando este ansatz na Eq.(107), emerge o progador $\langle A_\alpha(p) A_\nu(p)\rangle$ do modelo, agora escrito no espaço dos momentos:

$$\langle A_\alpha(p) A_\nu(p)\rangle = \frac{i}{\widetilde{D}(p)}\left\{-\left(p^2 - M_A^2\right)\widetilde{\Theta}_{\alpha\nu} + \widetilde{C}(p)\widetilde{\omega}_{\alpha\nu} + i\widetilde{S}_{\alpha\nu} + \frac{V\cdot p}{\Omega(p)}\left(\widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu} + \widetilde{\Sigma}_{\nu\alpha}\right) - \frac{p^2}{\Omega(p)}\Lambda_{\alpha\nu}\right\}, \tag{111}$$

onde vale:

$$\widetilde{\Theta}_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\nu} - \widetilde{\omega}_{\alpha\nu}, \qquad \widetilde{\omega}_{\alpha\nu} = \frac{p_\alpha p_\nu}{p^2}, \qquad \widetilde{S}_{\alpha\nu} = \varepsilon_{\alpha\nu\rho\varphi}V^\rho p^\varphi, \tag{112}$$

$$\widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu} = V_\alpha p_\nu, \tag{113}$$

$$\widetilde{C}(p) = \frac{\widetilde{D}(p)}{M_A^2} - \frac{(V\cdot p)^2}{\Omega(p)}, \qquad \Omega(p) = \left(p^2 - M_A^2\right), \tag{114}$$

$$\widetilde{D}(p) = \left(p^2 - M_A^2\right)^2 + V^2p^2 - (V\cdot p)^2. \tag{115}$$

Obtidos estes resultados, verifica-se que as relações de dispersão advindas dos pólos do propagador $\langle A_\alpha(p) A_\nu(p)\rangle$ são as seguintes:

$$p^2 = M_A^2, \tag{116}$$

$$\left(p^2 - M_A^2\right)^2 + V^2p^2 - (V\cdot p)^2 = 0. \tag{117}$$

A Eq.(116) advém de $\Omega(p) = 0$, enquanto a Eq.(117) resulta de $\widetilde{D}(p) = 0$. A Eq.(116) indica a existência de um modo massivo ordinário (i.e., previsto pela eletrodinâmica de Maxwell - Proca) associado aos setores $\widetilde{\omega}_{\alpha\nu}$, $\widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu}$ e $\Lambda_{\alpha\nu}$ do propagador. Este modo, por ser amplamente descrito em literatura especializada, não deveria ser aqui analisado. Porém, tal análise será aqui construída por fins didáticos: será utilizada como uma prescrição/guia para correta averiguação dos outros modos pertencentes ao modelo. A Eq.(117), obtida a partir de $\widetilde{D}(p) = 0$, constitui-se como a relação de dispersão que governa os modos (massivos) diretamente influenciados pelo presença do campo v^α. Verifica-se que tais modos estão associados a todos os setores de $\langle A_\alpha(p) A_\nu(p)\rangle$.

Observe que na ausência do termo de massa, a Eq. (117) fornece

$$p^4 + V^2p^2 - (V\cdot p)^2 = 0, \tag{118}$$

coincidindo exatamente com a relação de dispersão da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, calculada via equação de onda, dada na Eq. (50).

D. Modos de propagação da teoria de Carroll-Field-Jackiw-Proca

Escrevendo $p^2 = \omega^2 - p^2$ na Eq.(116), verifica-se a existência de um pólo massivo ordinário, cuja frequência ω está associada ao momento p pela a equação:

$$\omega = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_A^2}. \tag{119}$$

Deve-se agora buscar os valores de p^ν para os quais a Eq.(117) é satisfeita. Para tanto, é conveniente efetivar separadamente a análise dos casos nos quais V^α é puramente tipo-tempo, definido por $V^\alpha = (\mathrm{v}_0, 0)$, ou puramente tipo-espaço[4], $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$. Primeiramente, adotando o caso tipo-tempo, $V^\alpha = (\mathrm{v}_0, 0)$, a Eq.(117) assume a forma:

$$\omega^4 - 2\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)\omega^2 + \left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)^2 - \left(\mathrm{v}_0\mathbf{p}\right)^2 = 0, \tag{120}$$

cujas soluções são:

$$\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 + M_A^2 \pm \mathrm{v}_0\left|\mathbf{p}\right|. \tag{121}$$

Tais soluções descrevem os modos diretamente influenciados apenas pelo setor temporal de V^α. Visando a obtenção dos modos influenciados apenas pelo setor espacial de V^α, implementamos $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$ na Eq.(117):

$$\omega^4 - \left[2\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right) + \mathbf{v}^2\right]\omega^2 + \left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)^2 + \mathbf{v}^2\mathbf{p}^2 - \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2 = 0. \tag{122}$$

As soluções desta expressão estão dadas abaixo:

$$\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 + M_A^2 + \frac{1}{2}\left\{\mathbf{v}^2 \pm \sqrt{\left(2M_A^2 + \mathbf{v}^2\right)^2 + 4\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2 - M_A^4\right]}\right\}. \tag{123}$$

E. Análise de consistência da teoria

Uma teoria de campos só pode ser consistentemente quantizada quando os seus modos de excitação são estáveis, causais e unitários, sendo estas três características necessárias para definir uma "boa" teoria de campos. A seguir, investigaremos a teoria de Carroll-Field-Jackiw concernentemente a estes aspectos.

1. Estabilidade dos modos

Afirmamos que um modo é estável quando a sua energia é real e positivo-definida. Para que isto ocorra, devemos ter a energia quadrática sempre positiva, $\omega^2 \geq 0$. Modos em que esta condição não é satisfeita podem exibir energia imaginária. Tais modos, caso ocorram, conduzem à impossibilidade de interpretação física dos *quanta* por eles descritos.

a. Modo 1 Inicialmente, tome-se o modo $p^2 = M_A^2$. Este modo é naturalmente estável, pois sempre vale

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + M_A^2 \geq 0. \tag{124}$$

Ressalte-se que este modo possui energia quadrática positiva sem a necessidade de imposição de qualquer condição complementar; isto é o que configura a estabilidade do modo.

---

[4] Estas são as configurações extremas do campo de fundo. Portanto, o caso no qual este campos é tipo luz, definido por $v^\alpha v_\alpha = 0$, não será tratado.

b. Modo 2 Considere agora os modos da Eq.(121), correspondentes ao setor temporal da relação de dispersão (120). Neste contexto, verifica-se que o modo $p_+^2 = M_A^2 + \mathrm{v}_0 |\mathbf{p}|$ é estável caso $\mathrm{v}_0 > 0$, pois nesta situação sempre valerá $\omega_+^2 = p^2 + M_A^2 + \mathrm{v}_0 |\mathbf{p}| \geq 0$. No entanto, o modo $p_-^2 = M_A^2 - \mathrm{v}_0 |\mathbf{p}|$ será consequentemente não-estável. No intuito de obter maior esclarecimento sobre esta última afirmação, resolva-se a inequação seguinte (condição de estabilidade):

$$\omega_-^2 = \mathbf{p}^2 - \mathrm{v}_0 |\mathbf{p}| + M_A^2 \geq 0. \tag{125}$$

Note que a condição $\omega_-^2 \geq 0$ está assegurada nos seguintes do eixo-p:

$$0 < |\mathbf{p}| < |\mathbf{p}|_- \quad , \qquad |\mathbf{p}| > |\mathbf{p}|_+ \ . \tag{126}$$

onde $|\mathbf{p}|_\pm$ são raízes da Eq.(125), dadas abaixo:

$$|\mathbf{p}|_\pm = \frac{1}{2}\left[\mathrm{v}_0 \pm \sqrt{\mathrm{v}_0^2 - 4M_A^2}\right]. \tag{127}$$

Perceba ainda que se

$$\mathrm{v}_0 < 2M_A, \tag{128}$$

então $|\mathbf{p}|_\pm$ não são raízes reais. Neste caso, termos $\omega_-^2 \geq 0$ para todo p. A Eq.(128) encerra a condição para a estabilidade do modo ω_-^2.

Considere o setor espacial do background, cujos modos $\omega_\pm$ são dados pela Eq.(123). Para que estes sejam estáveis, deve valer:

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{2\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right) + \mathbf{v}^2 \pm \sqrt{\left(2M_A^2 + \mathbf{v}^2\right)^2 + 4\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2 - M_A^4\right]}\right\} \geq 0, \tag{129}$$

da qual resulta:

$$2\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right) + \mathbf{v}^2 \geq \mp\sqrt{\left(2M_A^2 + \mathbf{v}^2\right)^2 + 4\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2 - M_A^4\right]}. \tag{130}$$

Elevando ao quadrado e escrevendo $\mathbf{v}\cdot p = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{p}|\cos\theta$, obtém-se:

$$\sin^2\theta \geq -\frac{\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)^2}{\mathbf{v}^2\mathbf{p}^2}, \tag{131}$$

a qual é automaticamente satisfeita. Desta maneira, verifica-se que ambos os modos influenciados por $\mathbf{v}$ possuem $\omega_\pm^2 \geq 0$, o que implica em estabilidade. Vale destacar que estes modos resultam estáveis porque obtém-se $\omega_\pm^2 \geq 0$ para qualquer valor de $|\mathbf{p}|$.

2. Causalidade

O estudo da causalidade consiste em estabelecer os modos causais (associados à transmissão de sinais com velocidades inferiores à da luz) e não causais de uma teoria. Os modos não causais, ligados à propagação de sinais superluminais/taquiônicos, conduzem à violação do princípio da causalidade. Esta violação é fisicamente indesejável. Consequentemente, tais modos impossibilitam a elaboração de uma teoria quântica consistente.

A causalidade do modo $\omega(\mathbf{p})$ é analisada a partir das correspondentes velocidades de grupo e de frente de onda:

$$u_g = \frac{d\omega}{d|\mathbf{p}|}, \quad u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty}\frac{\omega}{|\mathbf{p}|}. \tag{132}$$

O modo é causal quando exibe $u_g < 1$ e $u_{frente} \leq 1$, simultaneamente, [18]. Desta forma, calcula-se, separadamente, as velocidades de grupo e de frente associadas à cada modo pertencente ao modelo.

a. Modo 1 Considere-se, primeiramente, o modo $p^2 = M_A^2$. Os *quanta* descritos por este modo possuem velocidade grupo dada por:

$$u_g = \frac{d\omega}{d\,|\mathbf{p}|} = \frac{2\,|\mathbf{p}|}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_A^2}} = \frac{|\mathbf{p}|}{\omega} < 1. \tag{133}$$

Via Eq.(119), verifica-se $\omega > |\mathbf{p}|$ e, portanto, $u_g < 1$.

A velocidade de fase, $u_{ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}|}$, prevista para este modo é:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_A^2}}{|\mathbf{p}|}, \tag{134}$$

que implica na velocidade de frente de onda:

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} u_{ph} = 1\ . \tag{135}$$

Via eqs.(133) e (135), concluímos que o modo $p^2 = M_A^2$ é causal.

b. Modo 2 **Setor temporal:** vamos agora analisar o segundo modo (117), que no **setor timelike**, é dado pela Eq.(121). Calculamos a velocidade de grupo:

$$u_g = \frac{d\omega_\pm}{d\,|\mathbf{p}|} = \frac{2\,|\mathbf{p}| \pm \mathrm{v}_0}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_A^2 \pm \mathrm{v}_0\,|\mathbf{p}|}} = \frac{2\,|\mathbf{p}| \pm \mathrm{v}_0}{2\omega_\pm}. \tag{136}$$

No intuito de obter $u_g \leq 1$, devemos ter

$$2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_A^2 \pm \mathrm{v}_0\,|\mathbf{p}|} \geq 2\,|\mathbf{p}| \pm \mathrm{v}_0. \tag{137}$$

Esta inequação é verdadeira apenas para $\mathrm{v}_0 < 2M_A$, a mesma condição (128) que assegura a estabilidade deste modo. Logo, temos $u_g \leq 1$ quando $\mathrm{v}_0 < 2M_A$, condição que assegura a causalidade do modo. Observe que este modo é, em geral, **não causal.**

A velocidade de fase resulta:

$$u_{ph} = \frac{\omega_\pm}{|\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 \pm \mathrm{v}_0\,|\mathbf{p}| + M_A^2}}{|\mathbf{p}|}\ . \tag{138}$$

Desta, obtém-se a velocidade de frente de onda:

$$u^\pm_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} u^\pm_{ph} = 1\ . \tag{139}$$

Conclusão: o modo $\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 + M_A^2 \pm \mathrm{v}_0\,|\mathbf{p}|$ é causal e estável desde que seja satisfeita a condição $\mathrm{v}_0 < 2M_A$.

Setor espacial: Analisamos agora a possibilidade dos modos $\omega_\pm$, ambos previstos pela Eq.(123), resultarem causais. A velocidade de grupo u_g associada a estes modos é:

$$u_g = \frac{d\omega_\pm}{d\,|\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{\omega_\pm}\left[1 \pm \frac{|\mathbf{v}|\cos^2\theta}{\sqrt{\mathbf{v}^2 + 4\,(\mathbf{p}^2\cos^2\theta + M_A^2)}}\right]. \tag{140}$$

Para efeito de simplificação, considere um contexto caracterizado por $\mathbf{v} \perp p$, em que $\cos\theta = 0$, no qual a Eq.(123) reduz-se a

$$\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 + M_A^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \pm \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|\,\sqrt{\mathbf{v}^2 + 4M_A^2}, \tag{141}$$

e a velocidade de grupo vale:

$$u_g = \frac{|\mathbf{p}|}{\omega_\pm}. \tag{142}$$

Note que para que ocorra $u_g < 1$ deve valer $\omega_\pm > |\mathbf{p}|$. Esta última é automaticamente satisfeita [vide eq.(141)], ou seja, é válida sem a necessidade de imposição de qualquer condição complementar.

A velocidade de fase é

$$u_{ph} = \frac{\omega_\pm}{|\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M_A^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \pm \frac{1}{2}|\mathbf{v}|\sqrt{\mathbf{v}^2 + 4M_A^2}}}{|\mathbf{p}|} \ , \tag{143}$$

e a velocidade de frente de onda:

$$u_{frente} = \lim_{|\mathbf{p}|\to\infty} u_{ph} = 1 \ . \tag{144}$$

Neste ínterim, os modos $\omega_\pm$, influenciados pelo *background* $V^\alpha = (0; \mathbf{v})$, resultam causais ($u_g < 1$ e $u_{frente} = 1$).

- SUMÁRIO DOS RESULTADOS OBTIDOS ATÉ AQUI:

(1) modo massivo usual existente no modelo é estável e causal.

(2) Quanto ao modo 2, quando alterado pelo *background* tipo-tempo, $V_\alpha = (\mathrm{v}_0, \mathbf{0})$, observamos que o modo ω_- é **em geral** não-estável e não-causal, sendo estável e causal apenas para $\mathrm{v}_0 < 2M_A$.

(3) Simultaneamente, para um *background* tipo-espaço, $V_\alpha = (0, \mathbf{v})$, verificamos que os modos $\omega_\pm$ são ambos estáveis e causais.

Resta, finalmente, averiguar este modelo quanto à unitáriedade. Esta averiguação será efetivada a seguir.

F. Unitariedade dos modos

A unitariedade de uma teoria está ligada à norma dos estados definidos no espaço de Hilbert. Quando todos os estados exibem norma positiva, a teoria é dita unitária. Quando surgem estados de norma negativa, a teoria resulta não-unitária, e temos os chamados estados *fantasmas*. A investigação acerca da unitariedade da eletrodinâmica de MCFJP será efetivada via o método da Saturação do propagador. Este método consiste em calcular, utilizando o propagador do campo considerado, a contração tensorial entre as correntes J^μ, J^ν e a matriz do propagador $\langle A_\alpha(p) A_\nu(p)\rangle$ escrita em cada um dos seus pólos, o que envolve, naturalmente, o cálculo do resíduo do propagador nestes pólos. Neste ínterim, a saturação S é dada pela contração tensorial do propagador com as correntes:

$$S = J^\alpha(p)\langle A_\alpha(p) A_\nu(p)\rangle J^\nu(p) \, , \tag{145}$$

na qual $J^\nu = (\rho; \mathbf{j})$ representa a fonte do campo satisfazendo $\partial_\mu J^\mu = 0$.

O método consiste em calcular obtenção do valor dea quantidade S deve cada um dos modos da teoria. Este valor resultará em uma quantidade tal que $S = \alpha i$, na qual α é um parâmetro real. Quando $\alpha \geqslant 0$, o modo será unitário, caso contrário, o modo em questão será não-unitário. Para $\alpha = 0$ o modo é dito não-físico, uma vez que não contribui em cálculos da matriz de espalhamento.

VIII. MODOS DE PROPAGAÇÃO DA TEORIA DE CARROLL-FIELD-JACKIW (SEM TERMO DE MASSA)

Observe que na ausência do termo de massa de Proca, a Eq. (117) fornece a seguinte relação de dispersão

$$p^4 + V^2 p^2 - (V \cdot p)^2 = 0, \tag{146}$$

coincidindo exatamente com a relação de dispersão da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, calculada via equação de onda, dada na Eq. (50).

A. Caso1: background puramente tipo-tempo - $V^\alpha = (\mathbf{v}_0, 0)$

Nesta situação, a Eq.(146) assume a forma:

$$\omega^4 - 2\mathbf{p}^2\omega^2 + \mathbf{p}^4 - \mathrm{v}_0^2\mathbf{p}^2 = 0, \tag{147}$$

cujas soluções são:

$$\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 \pm \mathrm{v}_0 \left|\mathbf{p}\right|. \tag{148}$$

No que concerne à estabilidade, vemos que o modo $\omega_+ = \mathbf{p}^2 + \mathrm{v}_0 \left|\mathbf{p}\right|$ é estável, enquanto o modo $\omega_- = \mathbf{p}^2 - \mathrm{v}_0 \left|\mathbf{p}\right|$ é instável. Observe que temos $\omega_- > 0$ apenas quando $|\mathbf{p}| > \mathrm{v}_0$. Isto estabelece que este modo da teoria de Carroll-Field-Jackiw é **instável**.

No que concerne à causalidade do modo (148), calculamos a velocidade de grupo:

$$u_g = \frac{d\omega_\pm}{d\left|\mathbf{p}\right|} = \frac{2\left|\mathbf{p}\right| \pm \mathrm{v}_0}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 \pm \mathrm{v}_0\left|\mathbf{p}\right|}} = \frac{2\left|\mathbf{p}\right| \pm \mathrm{v}_0}{2\omega_\pm}. \tag{149}$$

Note que para assegura $u_g \leq 1$, devemos ter

$$2\sqrt{\mathbf{p}^2 \pm \mathrm{v}_0\left|\mathbf{p}\right|} \geq 2\left|\mathbf{p}\right| \pm \mathrm{v}_0. \tag{150}$$

Esta inequação não é satisfeita para nenhum valor de $|\mathbf{p}|$, indicando que o modo (148) **é não-causal**. Neste ínterim, é importante comentar o papel desempenhado pela massa de Proca, que abre uma janela ($\mathrm{v}_0 < 2M_A$) em que a teoria torna-se causal e estável.

B. Caso2: background puramente tipo-espaço - $V^\alpha = (\mathbf{0}, \mathbf{v})$

Considere o setor espacial do background, cujos modos $\omega_\pm$ da Eq. (146) são dados por:

$$\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2}, \tag{151}$$

O modo ω_+^2 é estável, enquanto o modo ω_-^2 será estável se:

$$\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2}, \tag{152}$$

que é sempre verdadeira. Logo, os modos (151) são estáveis.

No que concerne à causalidade, a velocidade de grupo vale:

$$u_g = \frac{d\omega_\pm}{d\left|\mathbf{p}\right|} = \frac{2\left|\mathbf{p}\right| \pm \frac{2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})|\mathbf{v}|\cos\theta}{\sqrt{\mathbf{v}^4+4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})^2}}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2}}}, \tag{153}$$

$$u_g = |\mathbf{p}| \left[\frac{\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2} \pm |\mathbf{v}|^2\cos^2\theta}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2}}}\right]. \tag{154}$$

Para efeito de simplificação, considere um contexto caracterizado por $\mathbf{v} \perp p$, a Eq. (151) reduz-se a

$$\omega_\pm^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \pm \frac{\mathbf{v}^2}{2}. \tag{155}$$

Temos $\omega_{-}^{2}=\mathbf{p}^{2}$, e $\omega_{\pm}^{2}=\mathbf{p}^{2}+\mathbf{v}^{2}$. O modo ω_{-}^{2} é obviamente causal. Para o modo ω_{+}^{2}, a velocidade de grupo vale:

$$u_{g+}=\frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^{2}+\mathbf{v}^{2}}}. \tag{156}$$

que implica em $u_g<1$. **Causalidade assegurada!**

- SUMÁRIO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA A ELETRODINÂMICA DE CARROLL-FIELD-JACKIW (sem Proca):

(1) modo massivo usual existente no modelo é estável e causal.

(2) Quanto ao modo alterado pela violação de Lorentz, o caso de um *background* tipo-tempo, $V_\alpha=(\mathrm{v}_0,\mathbf{0})$, observou-se que o modo ω_{-} é não-estável e não-causal.

(3) Para um *background* tipo-espaço, $V_\alpha=(0,\mathbf{v})$, os modos $\omega_{\pm}$ são ambos estáveis e causais.

IX. APÊNDICE: SIMETRIAS DISCRETAS

A. Operação de paridade

A operação de paridade é caracterizada por promover a inversão do sistema de coordenadas de tal forma que o vetor posição é revertido:

$$\mathbf{r}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{r},$$

valendo $\partial_i\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\partial_i$ sobre o operador gradiente $\left(\nabla\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\nabla\right)$, enquanto $\partial_t\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad\partial_t$. Logo, vale:

$$\partial_\mu\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad\partial^\mu.$$

Vetores genuínos (velocidade ($\mathbf{v}$), momento ($\mathbf{p}$), aceleração ($\mathbf{a}$),força ($\mathbf{f}$), campo elétrico ($\mathbf{E}$), vetor potencial ($\mathbf{A}$)) são revertidos perante o operador paridade ($\mathcal{P}$), ou seja,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{v};\qquad\mathbf{p}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{p},\\
&\mathbf{v}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{v};\qquad\mathbf{f}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{f},\\
&\mathbf{A}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{A},\quad\mathbf{E}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{E},
\end{aligned}$$

enquanto pseudo-vetores (campo magnético ($\mathbf{B}$), spin ($\mathbf{S}$),momento angular ($\mathbf{J}$)) permanecem invariantes:

$$\mathbf{B}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad+\mathbf{B},\qquad\mathbf{S}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{S},\quad\mathbf{J}\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad-\mathbf{J}.$$

Quantidades escalares permanecem invariantes, $A_0\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad A_0$, enquanto pseudo-escalares sofrem reversão de sinal. O 4-potencial e a 4-corrente altera-se como

$$A_\mu\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad A^\mu,\quad J_\mu\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad J^\mu,\quad\partial_\mu\quad\overset{\mathcal{P}}{\rightarrow}\quad\partial^\mu.$$

B. Operação de inversão temporal

A operação de inversão temporal é caracterizada por $t \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -t$, atuando da seguinte forma sobre os vetores:

$$\mathbf{r} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathbf{r}; \quad \mathbf{v} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\mathbf{v}; \quad \mathbf{p} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\mathbf{p}; \quad \mathbf{a} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathbf{a}; \quad \mathbf{f} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathbf{f};$$

onde usamos $\partial_t \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\partial_t$, $\partial_i \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \partial_i$. Para manter a força de Lorentz invariante, $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, o operador $\mathcal{T}$ atua da seguinte forma sobre o campo eletromagnético:

$$\mathbf{B} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\mathbf{B}; \quad \mathbf{E} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathbf{E};$$
$$A_0 \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} A_0, \quad \mathbf{A} \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\mathbf{A};$$

$$A_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} A^\mu, \quad J_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} J^\mu, \quad \partial_\mu \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\partial^\mu.$$

C. Operação de conjugação de carga

A operação de conjugação de carga é caracterizada por reverter a carga do sistema $q \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -q$, ou levar o estado de partícula ao de anti-partícula em uma quântico-relativístico. Por reverter a 4-corrente, $J_\mu \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -J_\mu$, atua da seguinte forma sobre o 4-potencial:

$$A_0 \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -A_0, \quad \mathbf{A} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -\mathbf{A};$$

Ademais, não atua sobre o espaço-tempo, de modo que $\partial_\mu \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \partial_\mu$. Com isto, resulta:

$$\mathbf{E} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -\mathbf{E}; \quad \mathbf{B} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} -\mathbf{B};$$
$$\mathbf{p} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathbf{p}; \quad \mathbf{a} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathbf{a}; \quad \mathbf{f} \overset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \mathbf{f};$$

D. Operador CPT

Atua da seguinte forma sobre o campo eletromagnético e sobre as derivadas espaço-temporais:

$$A_0 \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -A_0, \quad \mathbf{A} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -\mathbf{A},$$
$$A_\mu \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -A_\mu, \quad \partial_\mu \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} -\partial_\mu,$$
$$\mathbf{E} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathbf{B}.$$

Vemos assim que o termo de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2),$$

é invariante sob o operador CPT e sob os operadores P,C, T, individualmente.

---

[1] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* D **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* D **59**, 116008 (1999); S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev.* D **59**, 116008 (1999).

[2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev.* D **39**, 683 (1989); *Phys. Rev.* D **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys.* B **359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996).

[3] N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D**76**, 027701 (2007); H. Belich, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, R.C. Paschoal, Phys. Lett. A **370**, 126 (2007); H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009); C. N. Ferreira, J. A. Helayël-Neto and C. E. C. Lima, New J. Phys. 12 (2010) 053029.

[4] B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004); G. M. Shore, Nucl. Phys. B **717**, 86 (2005); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Lett. B **511**, 209 (2001); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, J. Math. Phys. **48**, 092302 (2007); R. Lehnert, Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003); V.A. Kostelecky and C. D. Lane, J. Math. Phys. **40**, 6245 (1999); R. Lehnert, J. Math. Phys. **45**, 3399 (2004); W. F. Chen and G. Kunstatter, Phys. Rev. D **62**, 105029 (2000); B. Goncalves, Y. N. Obukhov, I. L. Shapiro, Phys.Rev.D80, 125034 (2009).

[5] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[6] V.Alan Kostelecky, Phys.Rev.D 69, 105009 (2004); V. A. Kostelecký, Neil Russell, and Jay D. Tasson, Phys. Rev. Lett. 100, 111102 (2008); V. A. Kostelecký and J. D. Tasson, Phys. Rev. Lett. 102, 010402 (2009); Q. G. Bailey, V.A. Kostelecky, Phys.Rev. D **74**, 045001 (2006); Q. G. Bailey, Phys.Rev. D **80**, 044004 (2009); V.A. Kostelecky and R. Potting, Phys.Rev. D79, 065018 (2009); Q. G. Bailey, Phys.Rev. D82, 065012 (2010); V.B. Bezerra, C.N. Ferreira, J.A. Helayel-Neto, Phys.Rev. D 71, 044018 (2005); J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, L.M. de Moraes, C.A.G. Sasaki, V.J. Vasquez Otoya, Phys. Lett. B 689, 112 (2010); A.F. Ferrari, M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Lett. B 652, 174 (2007).

[7] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003).

[8] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003).

[9] A.A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, R. Soldati, J. High Energy Phys. 0909, 057 (2009); J. Alfaro, A.A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, R. Soldati, Int.J.Mod.Phys.A 25, 3271 (2010); V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, E. M. Murchikova, Phys.Rev. D73 065016, (2006).

[10] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **67**,125011 (2003); Erratum-ibid., Phys. Rev. **D** 69, 109903 (2004).

[11] M.S. Berger, V. A. Kostelecky, Phys.Rev.D 65, 091701 (2002); H. Belich , J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Phys.Rev. D **68**, 065030 (2003); A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Nucl. Phys. Proc. Suppl.127, 105-109 (2004).

[12] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001); J.M. Chung, Phys.Rev. D **60**, 127901 (1999); G. Bonneau, Nucl.Phys. B **593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999); M. Perez-Victoria, J. High. Energy Phys. **0104**, (2001) 032; O.A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. B **610**, 316 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G **28**, L23 (2002); J. Phys. G **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, J. High. Energy Phys. **0510** (2005) 019; J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, F. A. Brito, J. High. Energy Phys. **0706**, (2007) 016; B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 101701 (2004); A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Eur. Phys. J. C **56**, 571 (2008); F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. **B** 664, 112 (2008); Oswaldo M. Del Cima, J. M. Fonseca, D.H.T. Franco, O. Piguet, Phys. Lett. **B** 688, 258 (2010); F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, Phys.Rev. D 78, 125023 (2008); Wotzasek, C. ; Grigorio, L. S. ; F.A. Brito, M. S. Guimaraes; E.M.R. Passos, Physics Letters. B **681**, 495 (2009).

[13] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **734, 1** (2006).

[14] A.H. Gomes, J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, JHEP 05, 104 (2010).

[15] M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D 74, 033016 (2006); O.G. Kharlanov, V.Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D81, 025015 (2010).

[16] M. Veltman, "Quantum Theory of Gravitation", in Methods in Field Theory Ed.by R. Bailian and J. Zinn-Justin, North-Holland Publising Company and World Scientific Publising Co Ltd, Singapore, 1981.

[17] W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940).

[18] C. Adam e F. R. Klinkhamer, *Phys. Lett. B* **513**, 245 (2001); L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York, 1960.

[19] Q. G. Bailey and V. Alan Kostelecky, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).