Typicalidade Canônica (Goldstein, et al. PRL 96, 050403 (2006))

Lo vo lb: Reinaren, Popescu, Gemmer
e até mesmo Schrödinger

sistema em $\mathcal{H}_S$ com banho térmico a temp T é descrito pela matriz densidade

$$\rho_T = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z}$$

- Vem do fato que o sistema todo é descrito por um ensemble microcanônico com uma dada energia E e que a interação entre sist e banho é pequena

$H = H_S + H_B$ • despreza a interação

Lo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ • está num range pelo $[E, E+\Delta E]$

$\Delta E \ll E$ matematicamente pequeno mas pode variar muito em valor absoluto

Defino $\mathcal{P}_{[E,E+\Delta E]} = \sum_{E \le E_i \le E+\Delta E} |E_i\rangle\langle E_i|$

Logo $\rho_{E,\Delta E} = \dfrac{\mathcal{P}_{[E,E+\Delta E]}}{\mathrm{Tr}[\mathcal{P}_{[E,E+\Delta E]}]} \to \dim \mathcal{H}_{[E,E+\Delta E]}$ ← subespaço de energia

Pode-se provar que no limite termodinâmico

$$\rho_E = \mathrm{Tr}_B[\rho_{E,\Delta E}] = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z}$$

Temos $\begin{cases} H_S |E_S^i\rangle = E_S^i |E_S^i\rangle \\ H_B |E_B^i\rangle = E_B^i |E_B^i\rangle \end{cases}$ $\qquad E = E_S + E_B$

$$\Omega_{[E,E+\delta E]} = \sum_{E \le E_S^i + E_B^i \le E+\delta E} |E_S^i\rangle |E_B^i\rangle \langle E_S^i| \langle E_B^i|$$

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_B[\rho] = \sum_i \langle E_B^i | \rho | E_B^i \rangle$$

$$\rho_S = \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}} \sum_k \langle E_B^k \left(\sum_{E \le E_S^i + E_B^j \le E+\delta E} |E_S^i\rangle |E_B^j\rangle \langle E_S^i| \langle E_B^j| \right) |E_B^k\rangle$$

$$= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}} \sum_k \sum_{E \le E_S^i + E_B^j \le E+\delta E} |\langle E_B^k | E_B^j \rangle|^2 \, |E_S^i\rangle \langle E_S^i|$$

$$= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}} \sum_{E \le E_S^i + E_B^j \le E+\delta E} |\langle E_B^j | E_B^i \rangle|^2 \, |E_S^i\rangle \langle E_S^i|$$

Para dado E_S^i somo sobre todo E_B^j tal que $E \le E_S^i + E_B^j \le E+\delta E$

$E - E_S^i \le E_B^j \le E - E_S^i + \delta E$

$$= \frac{1}{\dim \mathcal{H}} \sum_i \left(\dim \mathcal{H}_{E-E_S^i}^B \right) |E_S^i\rangle \langle E_S^i|$$

$$\mathcal{H}_{E_S^i}^B = \mathcal{H}^B_{[E-E_S^i,\, E-E_S^i+\delta E]}$$

A partir disso e algumas aproximações pode-se obter $\rho_S = \dfrac{e^{-\beta H_S}}{Z}$

→ Temos que assumir ignorância sobre o estado do sistema total, já que usamos uma matriz densidade.

• E porque usar a dista de peso uniforme?

• A única informação que temos é que a energia está no intervalo $[E, E+\Delta E]$

→ O sistema tem um estado bem definido, mas não sabemos qual!

• Sabemos que $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{[E,E+\Delta E]}$

→ Pode-se mostrar que a maior parte dos estados $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{[E,E+\Delta E]}$ leva a $\rho_S \approx \frac{e^{-\beta H_S}}{Z}$

• O ensemble canônico é ainda mais invariável em MQ

• não precisa assumir uma ignorância subjetiva!

→ Para quantificar "a maior parte" precisa definir um volume (ou medida) em $\mathcal{H}$

• Usaremos uma medida uniforme no sentido de mais um na subespaço $\mathcal{H}_{[E,E+\Delta E]}$

↳ dista de peso uniforme sobre $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{[E,E+\Delta E]}$

- Medida de Haar. É uniforme sobre unitários; não muda com a evolução.

- Pego $|\psi\rangle = \sum c_n |E_n\rangle$ p/ $E \leq E_n \leq E+\delta E$

  → $u_{E,\delta E}$ é a dist uniforme no espaço $\sum |c_n|^2 = 1$

  → $\int u_{E,\delta E}\, d\psi\, |\psi\rangle\langle\psi|$ → maximamente mista

- Quero saber quais $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}$ levam a $\rho_s \approx \frac{e^{-\beta H_s}}{Z}$

  - Dizer que a "maior parte" tem essa propriedade é equivalente a pegar que: Se pego $|\psi\rangle$ aleatoriamente com a dist $u_{E,\delta E}$ então existe uma grande probabilidade de $\rho_s \approx \rho_B$

    → $\mathbb{P}(\rho_s \approx \rho_B) \approx 1$

  - Então $|\psi\rangle$ é uma variável aleatória

- Um modo de obter um valor aleatoriamente de modo uniforme sobre uma esfera é

  - Pegar um valor aleatório de uma dist gaussiana com média zero

  - Então normalizar o valor

$$|\psi\rangle = \frac{|\phi\rangle}{\||\phi\rangle\|} \qquad |\phi\rangle = \sum_{i,\delta} C_{i\delta}\, |E_S^i\rangle |E_B^\delta\rangle$$

$Re[C_{i\delta}]$, $Im[C_{i\delta}]$ são variáveis aleatórias gaussianas com média zero e variancia $1/2$ quando $E \le E_S^i + E_B^\delta \le E + \Delta E$, $C_{i\delta} = 0$ caso contrário

$$\mathcal{P}(C_{i\delta}) = e^{-\frac{Re[C_{i\delta}]^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{Im[C_{i\delta}]^2}{2\sigma^2}}$$

Podemos reescrever

$$|\phi\rangle = \sum_i |E_S^i\rangle \left[\sum_\delta C_{i\delta} |E_B^\delta\rangle \right]$$

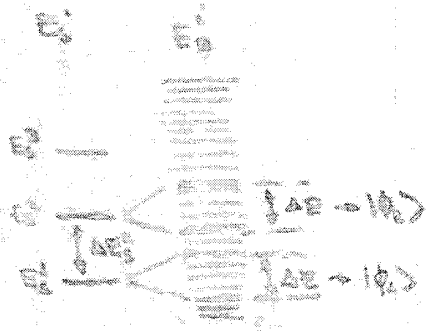
$$= \sum_i |E_S^i\rangle |\phi_i\rangle \qquad |\phi_i\rangle = \sum_{E-E_S^i \le E_B^\delta \le E-E_S^i+\Delta E} C_{i\delta}\, |E_B^\delta\rangle$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{\|\phi\|^2} |\phi\rangle\langle\phi|$$

$$\rho_S = \frac{1}{\|\phi\|^2} Tr_B \left[|\phi\rangle\langle\phi| \right] = \frac{1}{\|\phi\|^2} \sum_{i,i'} |E_S^i\rangle\langle E_S^{i'}| \underbrace{Tr_B \left[|\phi_i\rangle\langle\phi_{i'}| \right]}_{\langle\phi_{i'}|\phi_i\rangle}$$

$$= \frac{1}{\|\phi\|^2} \sum_{i,i'} \langle\phi_{i'}|\phi_i\rangle\, |E_S^i\rangle\langle E_S^{i'}| \,.$$

Suponho $\Delta E \ll \Delta E_s^i = E_s^{i+1} - E_s^i$



Dado $E_s^i \to E - E_s^i \leq E_s^i \leq E - E_s^i + \Delta E$

Se somo $\Delta E_s \to E - E_s^i + \Delta E_s \leq E_s^{i+1} \leq E - E_s^i + \Delta E + \Delta E_s$

Se $\Delta E \ll \Delta E_s^i$ p/ $\forall\, i \to E_s^i$ e E_s^{i+1} estão em subespaços ortogonais

$\to \langle \phi_i | \phi_{i'} \rangle = \delta_{ii'} \|\phi\|^2$

$\to$ Vamos argumentar que isto ainda é válido aproximadamente, mesmo sem a hipótese sobre ΔE_s^i

$|\phi_i\rangle = \sum_j C_{ij} |E_j^0\rangle$ é um vetor obtido de componentes independentes. As direções estão distribuídas de modo uniforme

$\to \langle \phi_i | \phi_{i'} \rangle \to$ envelope de dois vetores obtidos independentemente

$\to \overline{|\langle \alpha | \phi \rangle|^2} = \frac{1}{n}$

média sobre vetores obtidos independentemente

Se $\begin{cases} \overline{|\langle u|v\rangle|^2} \sim \frac{1}{m} \rightarrow \text{variância} \\ \overline{\langle u|v\rangle} = 0 \rightarrow \text{média} \end{cases}$ $\rightarrow$ Para $m \gg 1$ a prob. de $\langle u|v\rangle = 0$ tende a 1

$P(\langle u|v\rangle \approx 0) \approx 1$

$\rightarrow$ Logo $\rho_\epsilon = \frac{1}{\|\Phi\|} \sum_i \underbrace{\frac{\langle \phi_i|\phi_i\rangle}{\|\phi_i\|^2}} |E_\epsilon^i\rangle\langle E_\epsilon^i|$

Note que no nosso caso m é a dimensão de $\mathcal{H}_i^\epsilon$, que supomos ser grande pois o banho é macroscópico e ΔE é tal que contém muitos níveis de energia

$\rightarrow$ $\|\phi_i\|^2 = \sum_{\delta=1}^{N_i} |c_{i\delta}|^2$ $\leftarrow$ soma de $N_i = \dim \mathcal{H}_i^\epsilon$ variáveis aleatórias idênticas e independentes (iid) $|c_{i\delta}|^2$ com média 1

$\overline{|c_{i\delta}|^2} = \overline{\text{Re}[c_{i\delta}]^2} + \overline{\text{Im}[c_{i\delta}]^2} = 1$

$\downarrow$

como $\overline{\text{Re}[c_{i\delta}]} = 0$

$\Downarrow$

variância $= 1/2$

Lei dos grandes números → O que ocorre quando fazemos o mesmo experimento várias vezes? Nesse caso sorteia a variável aleatória $|c_{ij}|^2$

$$\frac{\sum_j |c_{ij}|^2}{N_i} \approx \overline{|c_{ij}|^2} = 1$$

→ média se aproxima do valor esperado quando o número de "sorteios" é grande

Logo $\|\psi_i\|^2 \approx \dim \mathcal{H}_i^B$

$x_1, x_2 \ldots$ variáveis aleatórias idênticas e independentes (i.e.e.)

$\bar{x}_m = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_m}{m} \xrightarrow{m\to\infty} \mu$

$\mathrm{Var}(\bar{x}_m) \sim \frac{\sigma^2}{m}$

a maior parte dos vetores

e $\|\psi\|^2 = \sum_i \|\psi_i\|^2 \approx \dim \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}$

Finalmente

$$\rho_S \approx \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}} \sum_i (\dim \mathcal{H}_i^B)\, |E_i^S\rangle\langle E_i^S|$$

P/ obter $\rho_S = e^{-\beta H}$ temos que pagar outras hipóteses tal como no caso anterior

→ Se escolho $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{[E,E+\delta E]}$ aleatoriamente é muito provável (ou seja tipicamente) terei

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_B[|\psi\rangle\langle\psi|] \approx \rho_\beta$$

- Não preciso assumir ignorância sobre o estado do sist+banho a priori!
- A ignorância sobre o sistema é intrínseco do MQ. Vem do emaranhamento entre S e B