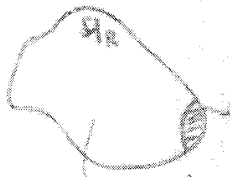
Trivialidade Dinâmica

(anniv: 0812.2385

→ Vimos que dada uma restrição macroscópica, podemos mostrar que a maior parte dos micro estados $|n\rangle$ leva a um mesmo valor para certa observável.



típico $\langle n|A|n\rangle \approx \overline{\langle n|A|n\rangle}$ → Quase todos os estados são "parecidos" em termos de alguma observável

→ Assim esperamos que a dinâmica em geral leve a um estado de equilíbrio.

→ Vamos ver como isso ocorre

→ Vou seguir a abordagem de Peres (anniv: 0812.2385)

Le Van Reimann 4b!

A ideia é que temos um sistema composto de S+B que irá evoluir com seu Hamiltoniano H

Sistema: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$H = \sum_k E_k |E_k\rangle\langle E_k|$ → Completamente geral, com excepção de não poder ter "gaps degenerados"

Vou supor que inicialmente conheço o estado global $|\psi(0)\rangle$

- Não assumo nenhuma ignorância

→ $\forall\ \Delta_{kl} = \Delta_{mn}$ implica $k=m$ e $l=n$ ou $k=l$ e $m=n$

$\Delta_{kl} = E_k - E_l$

Vou deixar o sistema evoluir naturalmente

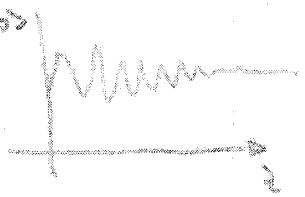
→ Segundo Popescu isto implica que H_I é totalmente interativo i.e. p/ $\forall$ bipartição S/B há interação

$|\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi(0)\rangle$

E observar se ele atinge algum equilíbrio

Há dois modos de fazer isso

- olhar p/ algum observável $\langle \hat{O}(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle$



- olhar direto para o estado!

Escolho um estado de referência $|\psi_0\rangle$

e vejo a distância entre $|\psi(t)\rangle$ e $|\psi_0\rangle$

• Preciso definir uma distância em $\mathcal{H}$. Há vários!
Duas medidas importantes: medidas para distância entre operadores (ou matrizes).

baseadas em normas de operadores

$\|M\|_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,|M| = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\sqrt{M^\dagger M}$ → traço distância
(= máxima diferença na prob. de 1 evento)

$\|M\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Tr}[M^\dagger M]}$ → Hilbert-Schmidt norm

↳ + fácil de manipular
(= preciso diagonalizar p/ obter a raiz)

Tanto $\|M\|_1$ quanto $\|M\|_2$ são invariantes sobre operações unitárias.

$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_1$ → não muda no tempo

→ não pode haver equilíbrio a "nível global"

• Preciso olhar para apenas uma parte do sistema

→ Vou analisar $\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\left[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\right]$

→ nosso estado de equilíbrio será

$$\bar{\rho} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\ |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$$

Tb temos $\overline{\rho_s} = \mathrm{Tr}_B[\overline{\rho}]$

Assim vamos analisar

$\|\rho_s(t) - \rho_s\|$ → distância entre o sistema e o estado médio do sistema

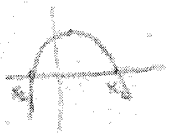
Queremos ver se o sistema atua em ω_1. Para isso vamos ver a distancia média

$\overline{\|\rho_s(t) - \rho_s\|_1}$ → médio temporal

Como sabemos $\|M\|_1 \leq \sqrt{d}\,\|M\|_2$ vamos ao $\|\cdot\|_2$
↳ dimensão

$$\to \overline{\|\rho_s(t) - \overline{\rho_s}\|_2} = \overline{\sqrt{\mathrm{Tr}_S(\rho_s(t) - \overline{\rho_s})^2}} \leq \sqrt{\overline{\mathrm{Tr}_S(\rho_s(t) - \overline{\rho_s})^2}}$$

↳ convexidade da função raiz quadrada



$f(p x_1 + (1-p) x_2) \geq p f(x_1) + (1-p) f(x_2)$

↳ valor médio

Então vemos $\overline{\mathrm{Tr}\left[(\rho_s(t) - \overline{\rho_s})^2\right]}$

$$= \mathrm{Tr}\left[\overline{(\rho_s(t) - \overline{\rho_s})^2}\right] = \mathrm{Tr}\left[\overline{\rho_s(t)^2} - 2\overline{\rho_s(t)}\,\overline{\rho_s} + \overline{\rho_s}^2\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\overline{\rho_s(t)^2} - 2\overline{\rho_s}^2 + \overline{\rho_s}^2\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\overline{\rho_s(t)^2} - \overline{\rho_s}^2\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\overline{\rho_s(t)^2}\right] - \mathrm{Tr}\left[\bar{\rho}_s^2\right]$$

$$= \overline{\mathrm{Tr}\left[\rho_{sw}^2\right]} - \mathrm{Tr}\left[\bar{\rho}_s^2\right]$$

↳ purezza media ↳ purezza dello stato medio

→ Nota che se "estraiamo" a caso lo stato globale, $\overline{\mathrm{Tr}\left[\rho_w^2\right]} = \frac{1}{d}$, poiché l'evoluzione è unitaria: lo stato è sempre puro

→ Nota che $\frac{1}{d_s} \leq \mathrm{Tr}\left[\rho_s^2\right] \leq 1$

$$\overline{\| \rho_s(t) - \bar{\rho}_s \|_1} \leq \frac{1}{2}\sqrt{d_s}\,\sqrt{\overline{\mathrm{Tr}\left[\rho_{sw}^2\right]} - \mathrm{Tr}\left[\bar{\rho}_s^2\right]}$$

Vorremo ovviamente $\bar{\rho}_s$ = possibile stato di eq.

$$\overline{\rho_s(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\ \rho_s(t)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\ \mathrm{Tr}_B\left[e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\, e^{+iHt/\hbar}\right]$$

↳ stato iniziale di S+B

↳ è generale

$$|\psi(0)\rangle = \sum_k c_k |E_k\rangle$$

$$\overline{\rho_{ab}(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\ Tr_B\left[e^{-iHt/\hbar}\left(\sum_k c_k|E_k\rangle\right)\left(\sum_l c_l^*\langle E_l|\right)e^{iHt/\hbar}\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\ Tr_B\left[\sum_k c_k e^{-iE_kt/\hbar}|E_k\rangle \sum_l c_l^* e^{iE_lt/\hbar}\langle E_l|\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\ \sum_{kl} c_k c_l^* e^{-i(E_k-E_l)t/\hbar}\, Tr_B\left[|E_k\rangle\langle E_l|\right]$$

$$= \sum_{kl} c_k c_l^*\, Tr_B\left[|E_k\rangle\langle E_l|\right]\underbrace{\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\ e^{-i(E_k-E_l)t/\hbar}\right)}_{\delta_{kl}\ \text{se}\ E_k\neq E_l\ \text{p/}\ \forall k,l}$$

Logo se não há degenerescência na média de Energia

$$\overline{\rho_{ab}} = \sum_k |c_k|^2\, Tr_B\left[|E_k\rangle\langle E_k|\right] \qquad \overline{\rho} = \sum_k |c_k|\,|E_k\rangle\langle E_k|$$

Um estado inicial com decoerência; termos não diagonais são "apagados"

logo temos

$$\rho_S(t) - \rho_S = \sum_{k \neq l} c_k c_l^* \, e^{-i(E_k - E_l)t/\hbar} \, Tr_B\left[|E_k\rangle\langle E_l|\right]$$

$$(\rho_S(t) - \rho_S)^2 = \sum_{k \neq l} \sum_{m \neq n} \underbrace{c_k c_l^* c_m c_n^* \, e^{-i(E_k - E_l + E_m - E_n)t/\hbar}}_{T_{klmn}(t)} Tr_B\left[|E_k\rangle\langle E_l|\right] Tr_B\left[|E_m\rangle\langle E_n|\right]$$

$$Tr_S\left[(\rho_S(t) - \rho_S)^2\right] = \sum_{k \neq l} \sum_{m \neq n} T_{klmn}(t) \, Tr_S\left[Tr_B(|E_k\rangle\langle E_l|) \, Tr_B(|E_m\rangle\langle E_n|)\right]$$

O único termo que depende tempo é T_{klmn} logo quando fazemos a média temporal teremos

$$\overline{T_{klmn}} = \lim_{T \to \infty} \int_0^T dt \; c_k c_l^* c_m c_n^* \, e^{-i(E_k - E_l + E_m - E_n)t/\hbar}$$

Temos que assumir que H não tem "gaps degenerados"

$$\text{i.e. } E_k - E_l \neq 0 \text{ p/ } \forall \, k \neq l$$
$$E_m - E_n \neq 0 \text{ p/ } \forall \, m \neq n$$

$\therefore$ O único modo ter o expoente nulo é $\begin{cases} k = n \\ l = m \end{cases}$

$$\overline{Tr_S\left[(\rho_S(t) - \rho_S)^2\right]} = \sum_{k \neq l} |c_k|^2 |c_l|^2 \, Tr_S\left[Tr_B\left[|E_k\rangle\langle E_l|\right] Tr_B\left[|E_l\rangle\langle E_k|\right]\right]$$

---

ss'bb'

b each term is a complex number so I can

Vou analisar o termo $Tr_S\left[Tr_B(|E_K\rangle\langle E_L|)\, Tr_B(|E_{K'}\rangle\langle E_{L'}|)\right]$

Sejam bases para o sistema e banho tal que

$$|E_K\rangle = \sum_{sb} a_{sb}\,|sb\rangle \qquad \{|sb\rangle\}_{b \text{ base}} \qquad \sum_{sb} |sb\rangle\langle sb| = \mathbb{1}$$

$$Tr_S[(\ldots)] = \sum_s \langle s|(\ldots)|s\rangle$$

$$Tr_B[(\ldots)] = \sum_b \langle b|(\ldots)|b\rangle$$

$$\rightarrow \sum_s \langle s| \Big(\underbrace{\sum_b \langle b|(|E_K\rangle\langle E_L|)|b\rangle}_{\in \mathcal{H}_B} \underbrace{\sum_{b'} \langle b'|(|E_{K'}\rangle\langle E_{L'}|)|b'\rangle}_{\in \mathcal{H}_B} \Big) |s\rangle$$

$$\sum_{s'} |s'\rangle\langle s'|$$

$$\rightarrow \sum_{ss'bb'} \langle sb|E_K\rangle \langle E_L|b\rangle \langle b'|s'\rangle\langle s'|E_{K'}\rangle \langle E_{K'}|sb'\rangle$$

$$\sum_{ss'bb'} \langle sb|E_K\rangle \langle E_L|s'b\rangle \langle s'b'|E_{K'}\rangle \langle E_{K'}|sb'\rangle$$

↳ each term is a complex number so I can move them around

$$\sum_{ss'bb'} \langle sb|E_K\rangle\langle E_K|sb'\rangle \langle s'b'|E_{K'}\rangle\langle E_{K'}|s'b\rangle$$

$$\sum_{bb'} \langle b|(Tr_S\, |E_K\rangle\langle E_{K'}|)|b'\rangle \underbrace{\langle b'|(Tr_S\, |E_L\rangle\langle E_{L'}|)|b\rangle}_{\sum_{b''} |b''\rangle\langle b''| = \mathbb{1}_B}$$

$$= \mathrm{Tr}_B \left[\mathrm{Tr}_S (|E_k\rangle\langle E_k|) \, \mathrm{Tr}_S (|E_l\rangle\langle E_l|) \right]$$

Inserindo na expressão para $\overline{\mathrm{Tr}\,[\rho_S(t) - \bar{\rho}_S)^2]}$ temos

$$= \sum_{k \neq l} |c_k|^2 |c_l|^2 \, \mathrm{Tr}_B \left[\mathrm{Tr}_S (|E_k\rangle\langle E_k|) \, \mathrm{Tr}_S (|E_l\rangle\langle E_l|) \right]$$

$$= \sum_{k \neq l} \mathrm{Tr}_B \left[\mathrm{Tr}_S \left(|c_k|^2 |E_k\rangle\langle E_k| \right) \mathrm{Tr}_S \left(|c_l|^2 |E_l\rangle\langle E_l| \right) \right]$$

usando $\sum_{k \neq l} = \sum_{k,l} - \sum_k$ e que $\sum_k |c_k|^2 |E_k\rangle\langle E_k| = \bar{\rho}$

$$= \mathrm{Tr}_B \left[\underbrace{\mathrm{Tr}_S [\bar{\rho}]}_{\bar{\rho}_B} \underbrace{\mathrm{Tr}_S [\bar{\rho}]}_{\bar{\rho}_B} \right] - \sum_k |c_k|^4 \, \mathrm{Tr}_B \left[\left(\mathrm{Tr}_S (|E_k\rangle\langle E_k|) \right)^2 \right]$$

$$= \mathrm{Tr}_B \left[\bar{\rho}_B^2 \right] - \sum_k |c_k|^4 \underbrace{\mathrm{Tr}_B \left[\underbrace{\left(\mathrm{Tr}_S (|E_k\rangle\langle E_k|) \right)^2}_{\in H_B} \right]}_{\geq 0}$$

Logo para ignorar o segundo termo e obter um limite superior

$$\overline{\mathrm{Tr}\,[(\rho_S(t) - \bar{\rho}_S)^2]} \leq \underbrace{\mathrm{Tr}_B \left[\bar{\rho}_B^2 \right]}_{\text{pureza do ambiente estado do Earth}}$$

Portanto obtemos

$$\overline{\|\rho_s(t) - \bar{\rho}_s\|_1^2} \leq \frac{1}{4} d_s \underbrace{\mathrm{Tr}_s[\bar{\rho}_s^2]}_{\frac{1}{d_s} < \cdot < 1}$$

Em geral $\mathrm{Tr}_s[\bar{\rho}_s^2] \approx \frac{1}{d_s}$ → tipicalidade

Pode-se mostrar que $\mathrm{Tr}_s[\bar{\rho}_s^2] \leq d_e \mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2]$

Vem de que
$S_\alpha(\rho_{AB}) \leq S_\alpha(\rho_A) + S_\alpha(\rho_B)$
com $S_\alpha = \frac{\log \mathrm{Tr}[\rho^\alpha]}{1-\alpha}$

Logo

$$\overline{\|\rho_s(t) - \bar{\rho}_s\|_1^2} \leq \frac{1}{4} d_s^2 \mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2]$$

Se $\underbrace{\mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2]}_{\frac{1}{d_e d_s} < \cdot < 1} << \frac{1}{d_s^2}$ → há equilibração

Note que $\mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2]$ só depende do estado inicial

$$\mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2] = \sum_\kappa |c_\kappa|^4$$

Para ter equilibração preciso de

i) H não ter "gaps degenerados"

ii) Estado inicial é uma superposição de muitos $|E_k\rangle$. Não pode estar concentrado: $\mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2] \ll 1/d^2$

- Haverá muitas mudanças durante a evolução

iii) Tenho que observar uma parte local e pequena (em relação ao banho) do sistema.

→ Para entendermos $(\mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2])^{-1}$ como uma dimensão efetiva

→ Pode-se mostrar que a maior parte dos estados ψ, escolhidos uniformemente, tem $\mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2]$ pequeno de tal

$$\int d\psi \; \mathrm{Tr}[\bar{\rho}^2] \leq \frac{2}{d_R}$$

→ Sabemos que a maior parte dos estados $|\psi\rangle$ já tem ρ_S em equilíbrio (típicalidade). E estados que estão fora do eq. inicialmente (são poucos)?

. Pode-se mostrar que eles equilibram

→ Estado de eq. depende, em geral, do estado inicial do sistema