

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

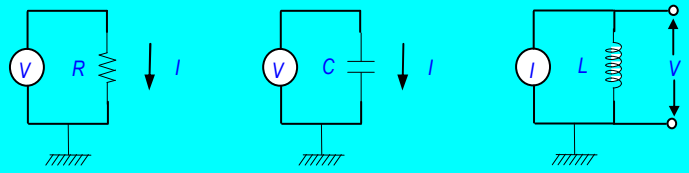
Curso de Eletrônica Analógica – VII Escola do CBPF

Prof. Ademarlaudo F. Barbosa

Circuitos elementares (divisor de tensão, integrador, diferenciador)
Notação complexa para grandezas elétricas
Uso de equações diferenciais em circuitos eletrônicos
Função de Transferência
Série de Fourier
Integral de Fourier
Transformadas de Fourier e Laplace
Teorema da Convolução
Teoremas de Thevenin e Norton
Regras de Kirchoff
Circuitos simples com diodos
Transistores (Bipolares e FET's)
Modelo de Ebers-Moll
Polarização de Transistores
Circuitos básicos com transistores (emissor comum, base comum, coletor comum)
Associações de transistores
Transistores em regime dinâmico
Amplificador Diferencial
Amplificadores Operacionais
Circuitos básicos envolvendo amplificadores operacionais
Realimentação
Osciladores (LC, Harley, Ponte de Wien, Relaxação, Kolpitz)
Influência de capacitâncias sobre amplificadores e transistores

Componentes passivos Componentes ativos

Os componentes básicos e sua “física”



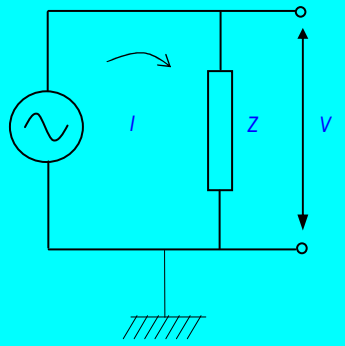
Circuitos simples nos quais se verificam relações lineares entre grandezas elétricas

$$V = RI \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} I \qquad V = L\frac{dI}{dt}$$

RESISTOR - Os materiais apresentam resistência à passagem de corrente elétrica (*I*); a corrente tende a circular quando se aplica um campo elétrico, materializado por uma diferença de potencial (*V*); A relação entre *V* e *I* é linear (para alguma “faixa”); *R* é a constante de proporcionalidade

CAPACITOR – Dados dois (ou mais) condutores, injetar carga elétrica *Q* em um deles implica o estabelecimento de uma diferença de potencial *V*. A relação entre *Q* e *V* é linear (para alguma “faixa”). Variações de *Q* ou de *V* são transmitidas entre os eletrodos, gerando passagem de corrente *I*.

INDUTOR – Passagem de corrente por um condutor gera campo magnético. Variações da corrente alteram o campo e vice-versa. Variações de corrente implicam diferença de potencial. Há uma relação de proporcionalidade linear entre os dois, dada por *L*.



$$I(t)=I_o\cos(\omega t)\Rightarrow\begin{cases}V(t)=RI_o\cos(\omega t) & \text{[para } R\text{]}\\ V(t)=\dfrac{I_o}{\omega C}\operatorname{sen}(\omega t)=\dfrac{I_o}{\omega C}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{[para } C\text{]}\\ V(t)=-L\omega I_o\operatorname{sen}(\omega t)=L\omega I_o\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{[para } L\text{]}\end{cases}$$

$$\cos(\omega t+\varphi)=\cos\left[\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right]\equiv\cos(\omega t')$$

$$\Rightarrow t'-t=\Delta t\equiv\frac{\varphi}{\omega}$$

A menos de uma diferença de tempo ($\pi/2\omega$), podemos dizer que ***V=ZI***, com:

$$\begin{cases}Z=R & \text{[para } R\text{]}\\ Z=\dfrac{1}{\omega C} & \text{[para } C\text{]}\\ Z=\omega L & \text{[para } L\text{]}\end{cases}$$

$$I(t)=I_o e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{cases} V(t)=RI(t) & \text{[para } R\text{]} \\ V(t)=\dfrac{1}{i\omega C}I(t) & \text{[para } C\text{]} \\ V(t)=i\omega L I(t) & \text{[para } L\text{]} \end{cases}$$

O mesmo argumento vale para $V(t)=V_o e^{i\omega t}$, e encontramos $V=ZI$, com:

$$\begin{cases} Z=R & \text{[para } R\text{]} \\ Z=\dfrac{1}{i\omega C} & \text{[para } C\text{]} \\ Z=i\omega L & \text{[para } L\text{]} \end{cases}$$

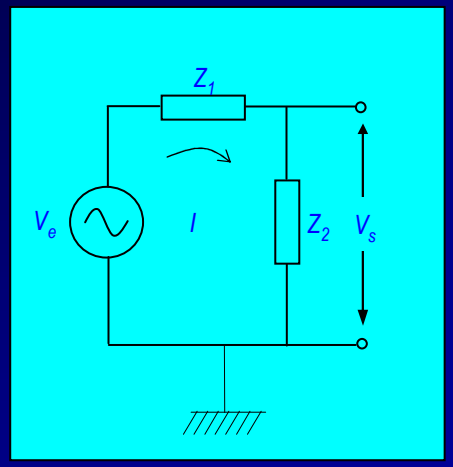
Qualquer sinal elétrico pode ser expresso como sobreposição de harmônicos
(a demonstração virá nas próximas aulas)

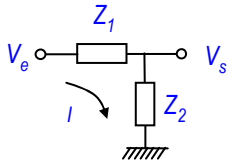
$$I(t)=\sum_k I_k e^{ik\omega t} \qquad V(t)=\sum_k V_k e^{ik\omega t}$$

Concluímos que os componentes *R, L e C* representam "impedâncias" que dependem da freqüência do sinal que veiculam.

Para cada freqüência temos relação linear entre *V* e *I*

Circuitos elementares envolvendo *R, L e C*





Circuito genérico

$$V_s = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} V_e$$

A mesma corrente passa por Z_1 e Z_2 :

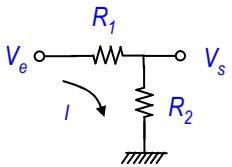
$$\frac{V_e - V_s}{Z_1} = \frac{V_s}{Z_2} \Rightarrow V_s = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} V_e$$

A soma das quedas de tensão no circuito fechado é nula:

$$V_e - Z_1 I - Z_2 I = 0; \quad I = \frac{V_s}{Z_2} \quad \Rightarrow V_s = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} V_e$$

Circuitos elementares envolvendo *R, L e C*

Caso mais simples:



Circuito divisor de tensão / atenuador

$$V_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_e$$

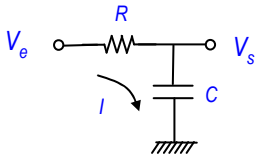
$V_s = 0 \longrightarrow$ para $R_2 = 0$ ou para $R_1 = \infty$

$V_s = V_e \longrightarrow$ para $R_1 = 0$ ou para $R_2 = \infty$

V_s *é uma fração de* $V_e \longrightarrow$ para valores intermediários de R_1 e R_2

Para transmitir V_e sem atenuação devemos ter $R_1 = 0$ ou $R_2 = \infty$

Circuitos elementares envolvendo *R*, *L* e *C*



filtro passa baixa

$$V_s = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R+\frac{1}{i\omega C}} V_e = \frac{1}{1+i\omega RC} V_e$$

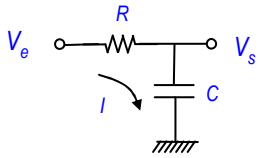
$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\upsilon^2}}$$

$$\varphi = -tg^{-1}(\upsilon)$$

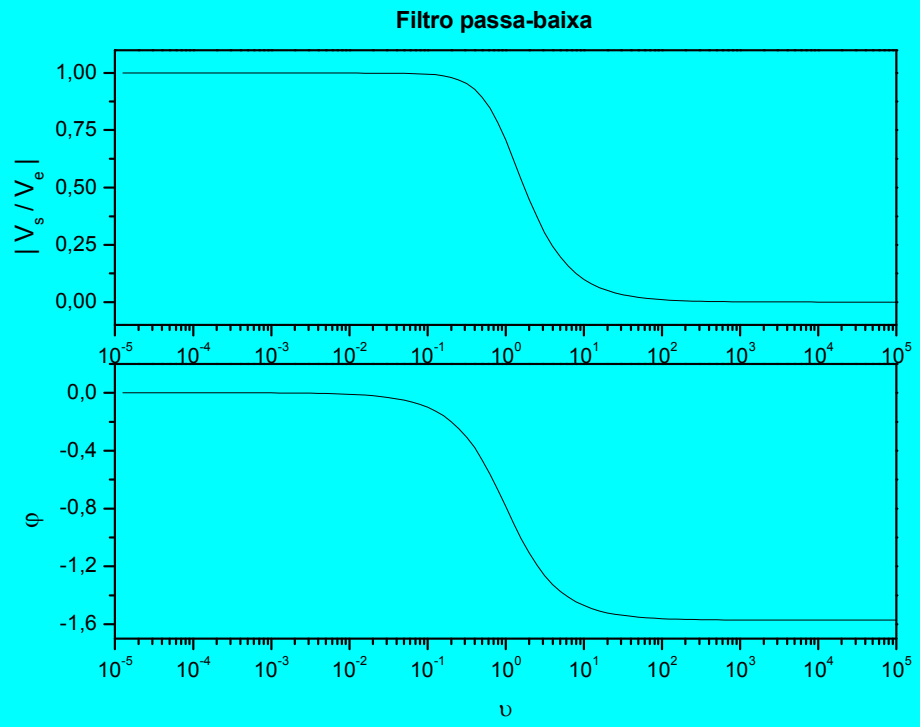
$$\upsilon = \frac{\omega}{\omega_o}; \quad \omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$a+ib \equiv Ae^{i\varphi}$$

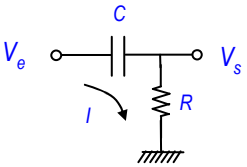
$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} = |a+ib| \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = Arg(a+ib) \end{cases}$$



filtro passa baixa



Circuitos elementares envolvendo *R*, *L* e *C*



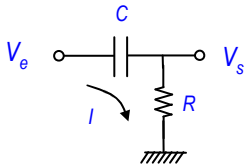
filtro passa alta

$$V_s = \frac{R}{R+\frac{1}{i\omega C}} V_e = \frac{i\omega RC}{1+i\omega RC} V_e$$

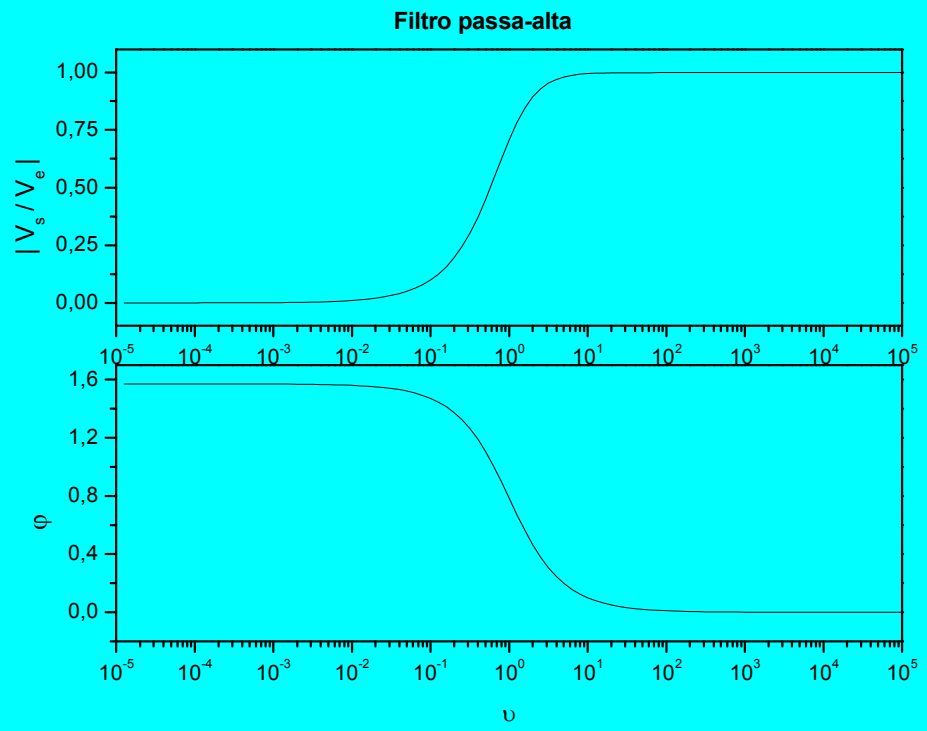
$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{\upsilon}{\sqrt{1+\upsilon^2}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{1}{\upsilon}\right)$$

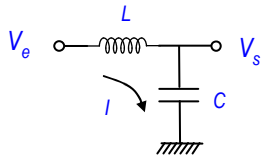
$$\upsilon = \frac{\omega}{\omega_o}; \quad \omega_o = \frac{1}{RC}$$



filtro passa alta



Circuitos elementares envolvendo *R, L e C*



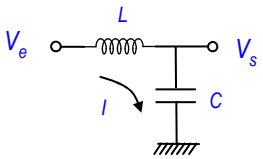
Filtro ressonante

$$V_s = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} V_e = \frac{1}{1-\omega^2 LC} V_e$$

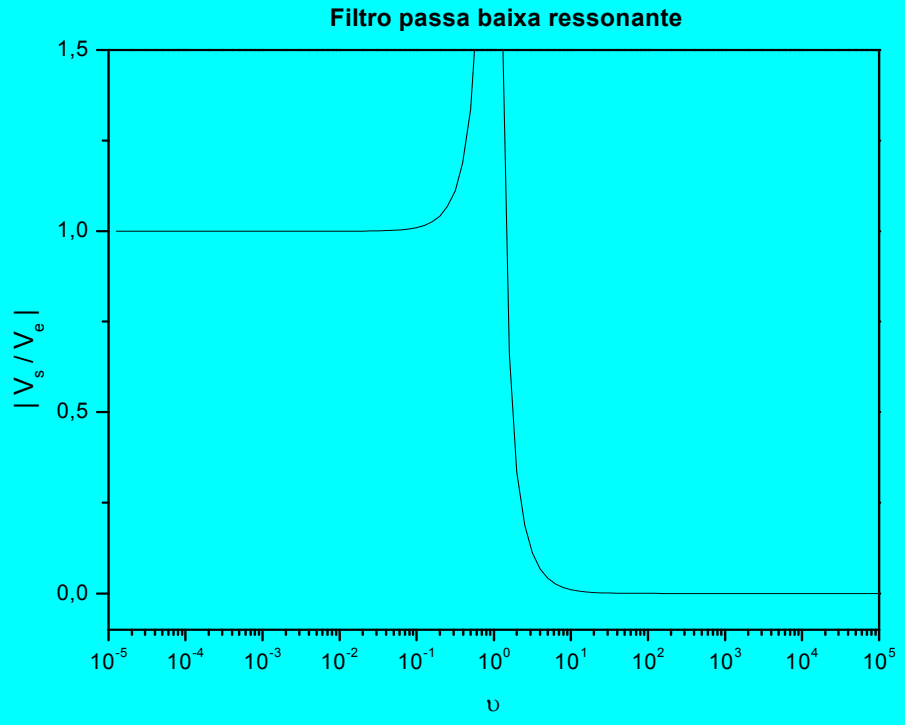
$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \begin{cases} \frac{1}{1-\upsilon^2} & (\upsilon < 1) \\ \frac{1}{\upsilon^2 - 1} & (\upsilon > 1) \end{cases}$$

$$\varphi = 0$$

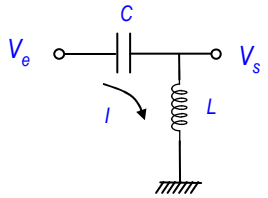
$$\upsilon = \frac{\omega}{\omega_o}; \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Filtro ressonante



Circuitos elementares envolvendo *R, L e C*



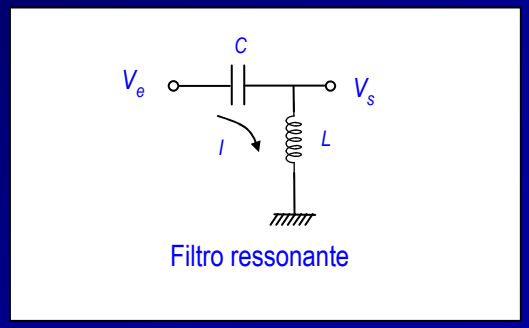
Filtro ressonante

$$V_s = \frac{i\omega L}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} V_e = \frac{-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} V_e$$

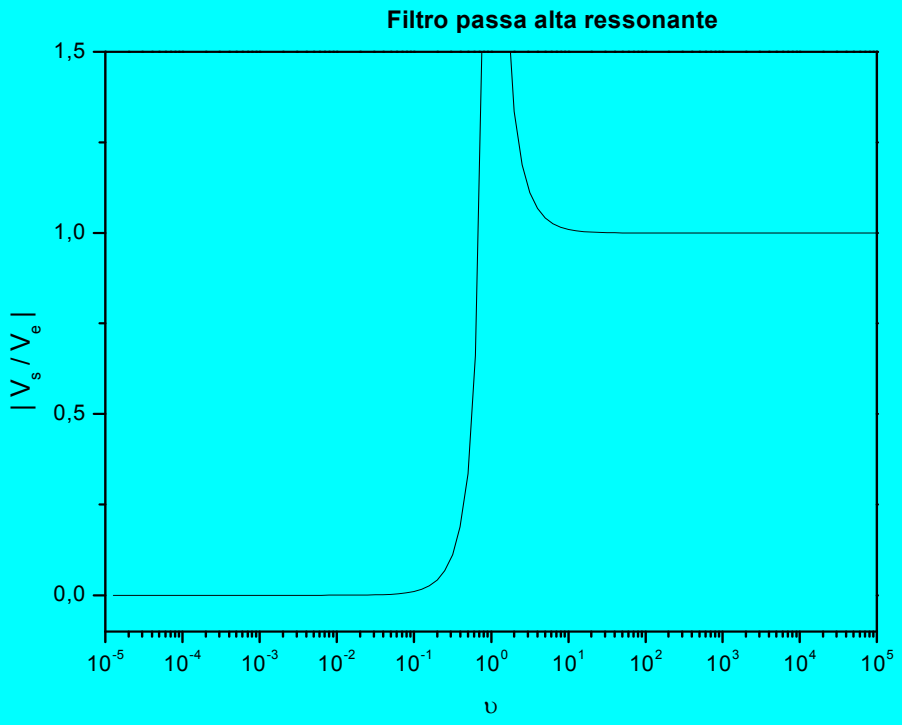
$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \begin{cases} \frac{-\upsilon^2}{1-\upsilon^2} & (\upsilon > 1) \\ \frac{\upsilon^2}{1-\upsilon^2} & (\upsilon < 1) \end{cases}$$

$$\varphi = 0$$

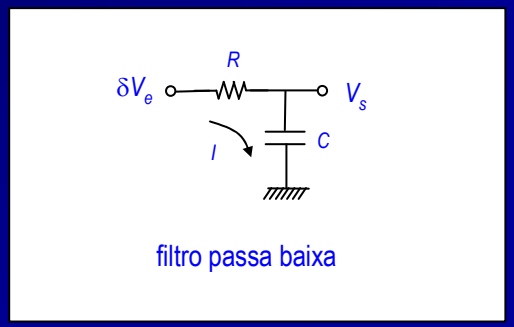
$$\upsilon = \frac{\omega}{\omega_o}; \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Filtro ressonante



Filtros *RC* no domínio do tempo



filtro passa baixa

Método das quedas de tensão

$$\delta V_e - RI - \frac{\delta Q}{C} = \delta V_e - RI - \frac{I\delta t}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \delta V_e = I\left(R + \frac{\delta t}{C}\right) = \frac{CV_s}{\delta t}\left(R + \frac{\delta t}{C}\right) = \frac{RCV_s}{\delta t}\left(1 + \frac{\delta t}{RC}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{RC}\delta V_e \delta t = V_s\left(1 + \frac{\delta t}{RC}\right)$$

para $RC >> \delta t$:

$$V_s = \frac{1}{RC}\delta V_e \delta t \approx \int \delta V_e \, dt$$

Método das correntes

$$\frac{\delta V_e - V_s}{R} = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{CV_s}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \delta V_e = \frac{RC}{\delta t}V_s + V_s = V_s\left(1 + \frac{RC}{\delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \delta V_e \delta t = V_s\left(RC + \delta t\right) = RCV_s\left(1 + \frac{\delta t}{RC}\right)$$

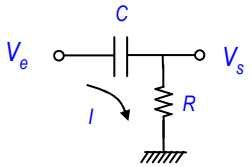
$$\Rightarrow \frac{1}{RC}\delta V_e \delta t = V_s\left(1 + \frac{\delta t}{RC}\right)$$

para $RC >> \delta t$:

$$V_s = \frac{1}{RC}\delta V_e \delta t \approx \int \delta V_e \, dt$$

Para $RC >> \delta t \Rightarrow$ circuito integrador

Filtros *RC* no domínio do tempo



filtro passa alta

Método das quedas de tensão

$$\delta V_e - \frac{\delta Q}{C} - RI = \delta V_e - \frac{I\delta t}{C} - RI = 0$$

$$\Rightarrow \delta V_e = I\left(\frac{\delta t}{C} + R\right) = \frac{V_s}{R}\left(\frac{\delta t}{C} + R\right) = V_s \delta t\left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{\delta t}\right)$$

$$\Rightarrow RC\delta V_e = V_s \delta t\left(1 + \frac{RC}{\delta t}\right)$$

$$\Rightarrow RC\frac{\delta V_e}{\delta t} = V_s\left(1 + \frac{RC}{\delta t}\right)$$

para $RC << \delta t$:

$$V_s = RC\frac{\delta V_e}{\delta t} \approx RC\frac{dV_e}{dt}$$

Método das correntes

$$\frac{V_s}{R} = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{C(\delta V_e - V_s)}{\delta t}$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{RC}{\delta t}\left(\delta V_e - V_s\right)$$

$$\Rightarrow V_s\left(1 + \frac{RC}{\delta t}\right) = RC\frac{\delta V_e}{\delta t}$$

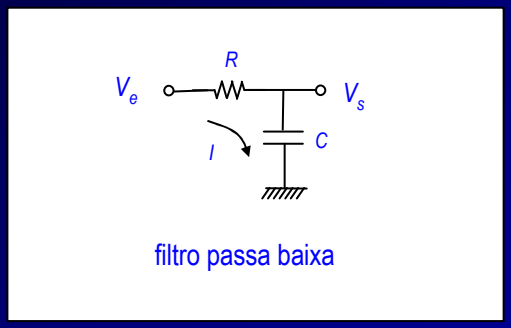
para $RC << \delta t$:

$$V_s = \frac{1}{RC}\frac{\delta V_e}{\delta t} \approx \frac{dV_e}{dt}$$

Para $RC << \delta t \Rightarrow$ circuito diferenciador

2a. aula

Equações diferenciais para os circuitos elementares



filtro passa baixa

Método das quedas de tensão

$$V_e = \frac{Q}{C} + RI(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_e}{dt} = \frac{1}{C} I(t) + R\frac{dI(t)}{dt}$$

para $t \geq 0$

$$\frac{1}{C} I(t) = -R\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\Rightarrow I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Solução conhecida para o caso da função degrau:



Condição de contorno: em *t=0* → *Q=0:*

em $t = 0$:

$$Q(t) = 0 = CV_s(t) \Rightarrow V_s(0) = 0$$

$$V_s(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt = R\left(-I(0)e^{-\frac{t}{RC}} + K\right)$$

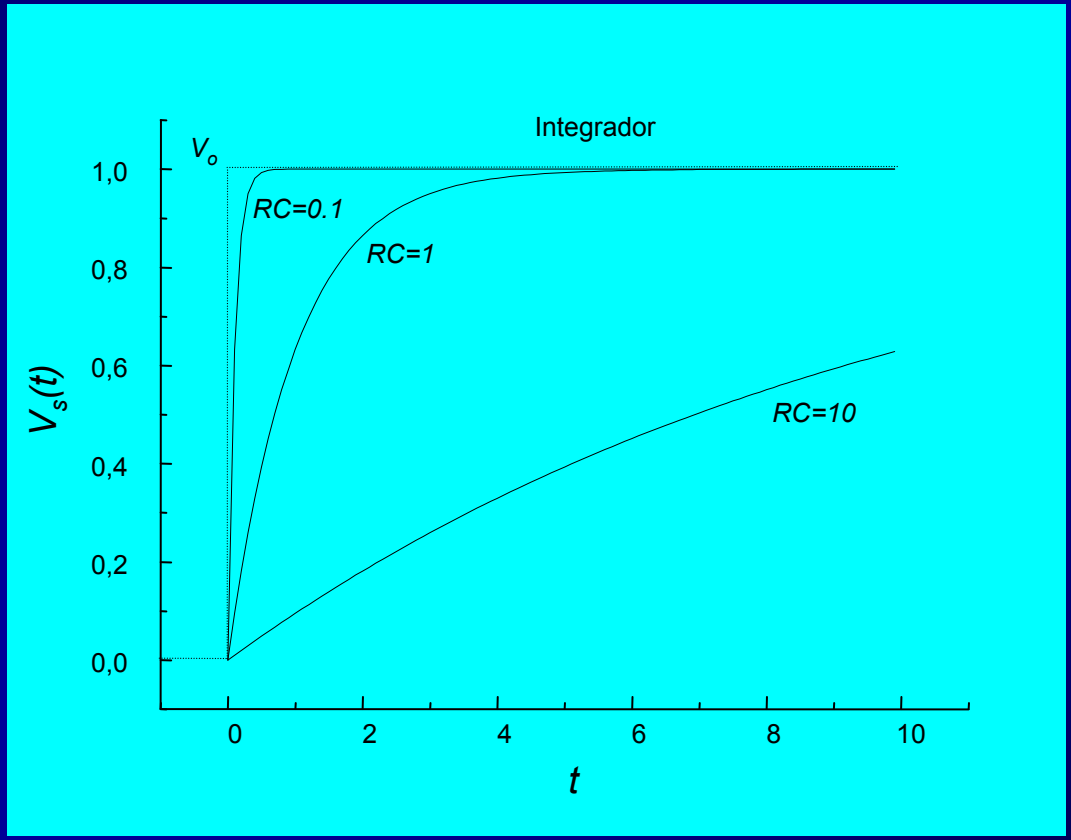
$$Q(0) = 0 \Rightarrow K = I(0)$$

$$\therefore V_s(t) = RI(0)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

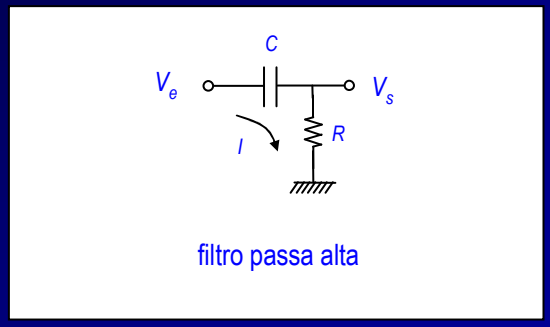
em $t = 0$: $V_e(0) - V_s(0) = V_0 - 0 = \frac{Q(0)}{C} = RI(0)$

$$\Rightarrow I(0) = \frac{V_o}{R}$$

$$V_s(t) = V_o\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



Equações diferenciais para os circuitos elementares



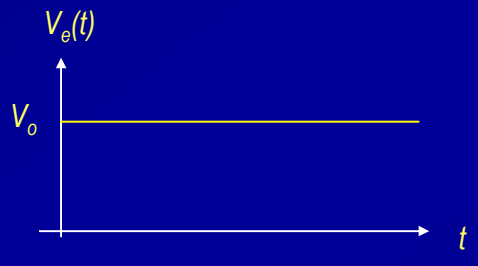
filtro passa alta

Método das quedas de tensão

$$V_e = \frac{Q}{C} + RI(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_e}{dt} = \frac{1}{C} I(t) + R\frac{dI(t)}{dt}$$

Solução conhecida para o caso da função degrau:



para $t \geq 0$

$$\frac{1}{C} I(t) = -R\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\Rightarrow I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Condição de contorno: em *t=0* → *Q=0:*

$$V_e(t) - V_s(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

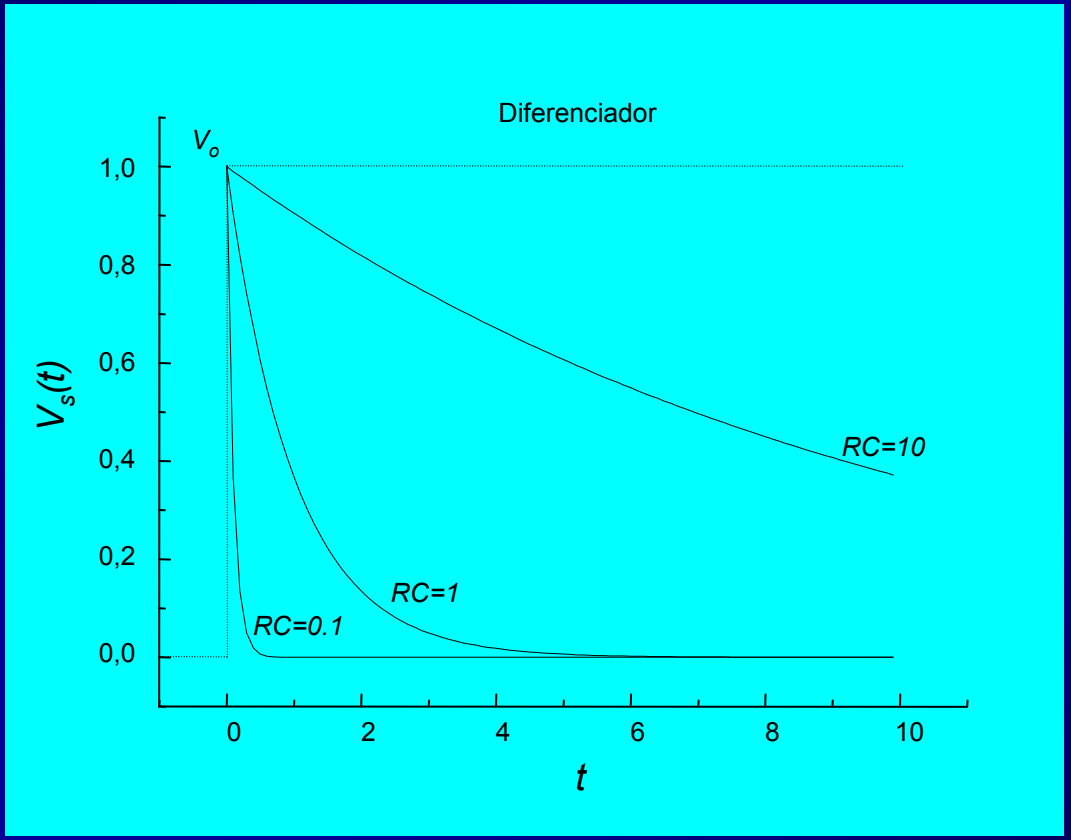
em $t = 0 \Rightarrow V_o - V_s(0) = 0$

$$\Rightarrow V_s(0) = V_o$$

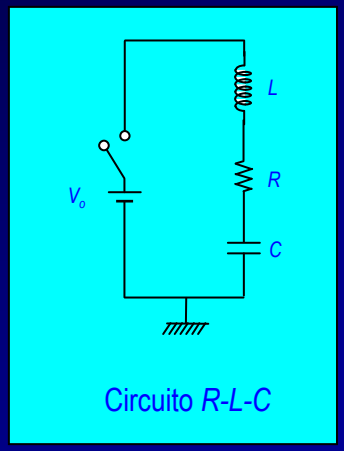
$$V_s(t) = RI(t) = RI(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow V_s(0) = RI(0) \Rightarrow I(0) = \frac{V_o}{R}$$

$$V_s(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$



Equações diferenciais para os circuitos elementares



Circuito *R-L-C*



Método das quedas de tensão

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V_e$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

Técnica de solução

$$I(t) = e^{at}$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 + \frac{R}{L}a + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}\right)$$

Solução geral

$$I(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t}$$

$$I(t) = C_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}\right)t}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Equações diferenciais para os circuitos elementares

Casos particulares

$\omega_0 > \gamma$

$$I(t) = C_1 e^{\left(-\gamma + i\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\gamma - i\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}\right)t}$$

$$\begin{cases} C_1 \equiv a + ib \\ C_2 \equiv c + id \end{cases} \Rightarrow I(t) = (a+ib)Ae^{i\psi} + (c+id)Ae^{-i\psi}$$

$$\therefore I(t) = A\{[(a+c)\cos\psi + (d-b)\text{sen}\,\psi] + i[(b+d)\cos\psi + (a-c)\text{sen}\,\psi]\}$$

$$I(t) \text{ real} \Rightarrow \begin{cases} \text{a} = \text{c} \\ \text{b} = \text{-d} \end{cases}$$

$$\therefore C_1 = C_2^*$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{2} Ae^{i\varphi} \\ C_2 &= \tfrac{1}{2} Ae^{-i\varphi} \end{aligned} \Rightarrow I(t) = 2K\cos\alpha$$

$$K = \tfrac{1}{2} Ae^{-\gamma t}$$

$$\alpha = \left(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}\right)t + \varphi$$

A e φ são determinados pelas condições de contorno

Equações diferenciais para os circuitos elementares

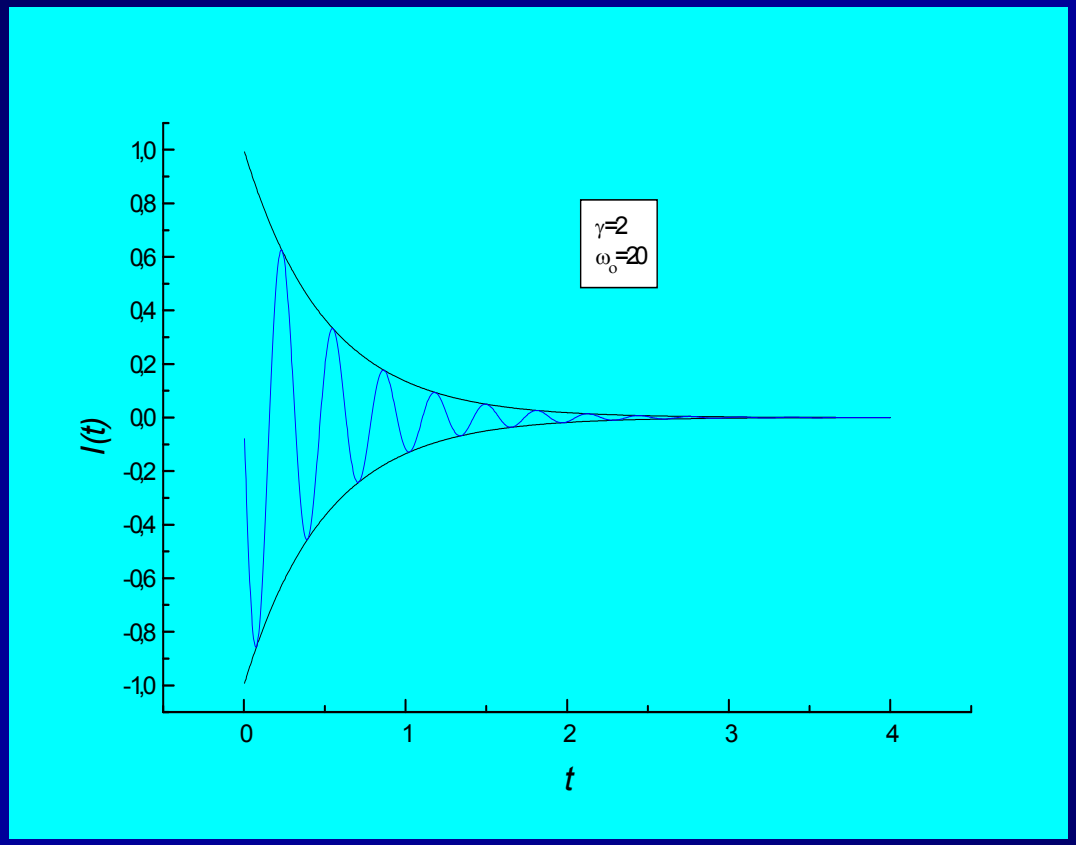
Condições de contorno [em *t=0: Q(t)=I(t)=0*]

$$\left[L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}\right]_{t=0}=\left[L\frac{dI}{dt}\right]_{t=0}=V_o$$

$$\left[\frac{dI}{dt}\right]_{t=0}=\left[2K\left(\gamma\cos\alpha-\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right]_{=0}=A\left(\gamma\cos\varphi-\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)$$

$$I(0)=0\Rightarrow 2K\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=\pm\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\Rightarrow A=\mp\frac{V_o}{\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}L}$$

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow$ $$I(t)=-\frac{V_o}{\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}L}e^{-\gamma t}\cos\left[\left(\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}\right)t+\frac{\pi}{2}\right]=-\frac{V_o}{\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}L}e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\left[\left(\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}\right)t\right]$$


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
I(t)
0
1
2
3
4
t
γ=2
ω0=20

Equações diferenciais para os circuitos elementares

$\omega_0 < \gamma$

$$I(t) = C_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)t}$$

$$I(t) \text{ real} \Rightarrow C_1 \text{ e } C_2 \text{ reais}$$

Condições de contorno [em *t=0: Q(t)=I(t)=0*]

$$I(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \equiv K$$

$$\left[L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}\right]_{t=0} = \left[L\frac{dI}{dt}\right]_{t=0} = V_o$$

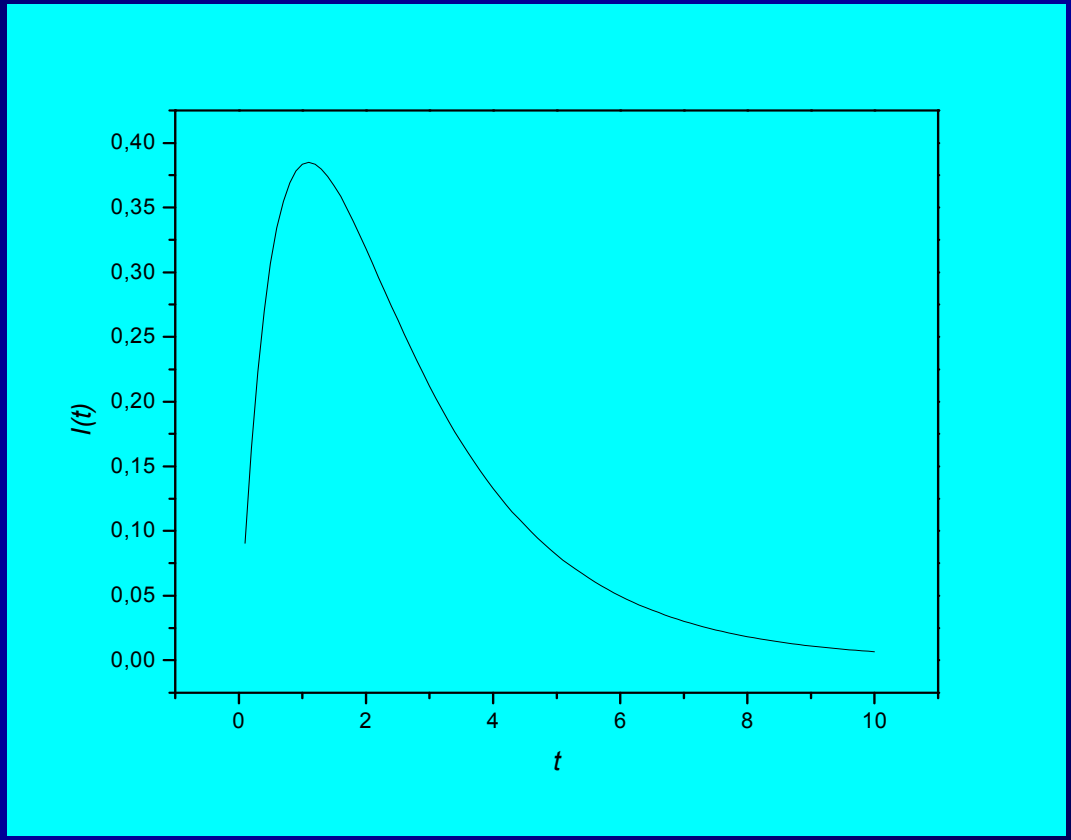
$$\left[\frac{dI}{dt}\right]_{t=0} = \left[K\left(2\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)t}\right]_{t=0} = 2K\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)$$

$$\Rightarrow K = \frac{V_o}{2L\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$I(t) = \frac{V_o}{2L\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)t} + e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\right)t}\right)$$

$$I(t) = e^{(-1+0.5)t} - e^{(-1-0.5)t}$$



Equações diferenciais para os circuitos elementares

$\omega_0 = \gamma$

$$I(t) = (C_1 + C_2)e^{-\gamma t} = Ke^{-\gamma t}$$
$$I(t) \text{ real} \Rightarrow K \text{ real}$$

Condições de contorno [em $t=0$: $Q(t)=0$]

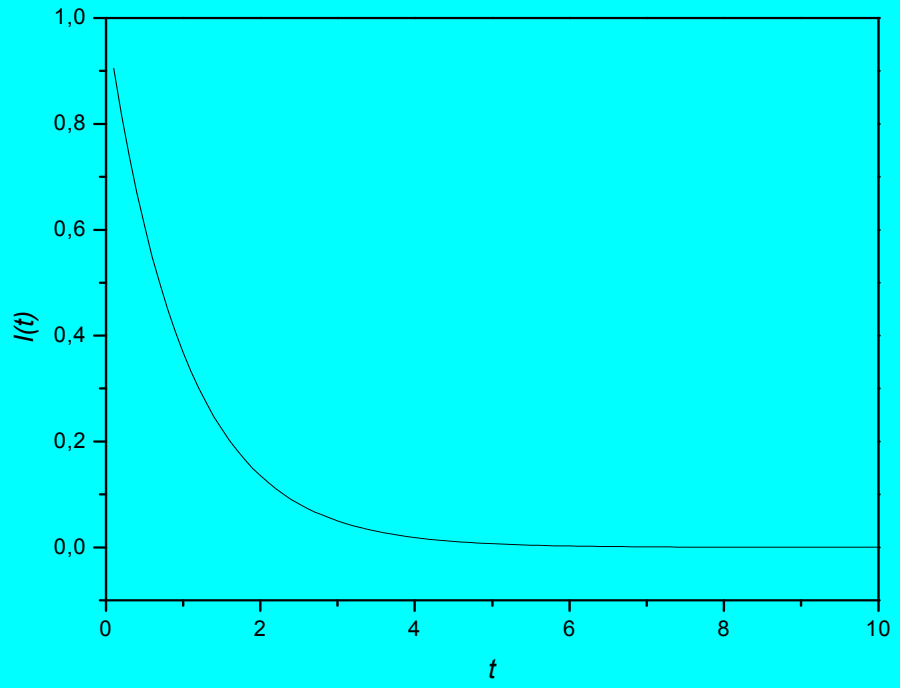
$$\left[L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}\right]_{t=0} = \left[L\frac{dI}{dt} + RKe^{-\gamma t}\right]_{t=0} = V_o$$

$$\left[L\frac{dI}{dt} + RKe^{-\gamma t}\right]_{t=0} = \left[Ke^{-\gamma t}(-\gamma L + R\right]_{t=0} = K(-\gamma L + R)$$
$$\Rightarrow K = \frac{V_o}{R - \gamma L}$$

$$\Downarrow$$

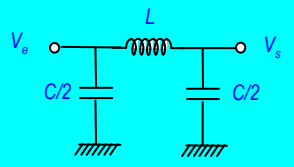
$$I(t) = \frac{V_o}{R - \gamma L}e^{-\lambda t}$$

$$I(t) = e^{-t}$$



Transmissão de sinais

Uma linha de transmissão de sinais tem propriedades eletrônicas:



$$V_s = \frac{\frac{1}{i\omega\frac{C}{2}}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega\frac{C}{2}}} V_e = \frac{1}{1-\omega^2 L\frac{C}{2}} V_e = \frac{1}{1-\upsilon^2} V_e$$

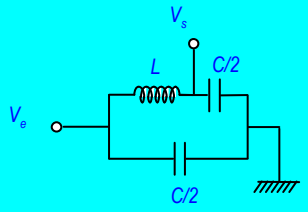
$$\upsilon \equiv \frac{\omega}{\omega_o} \qquad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C}{2}}}$$

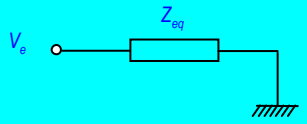
Circuito equivalente a uma linha de transmissão de sinais

L = auto-indutância por unidade de comprimento

C = capacitância por unidade de comprimento

(*) resistividade desprezada

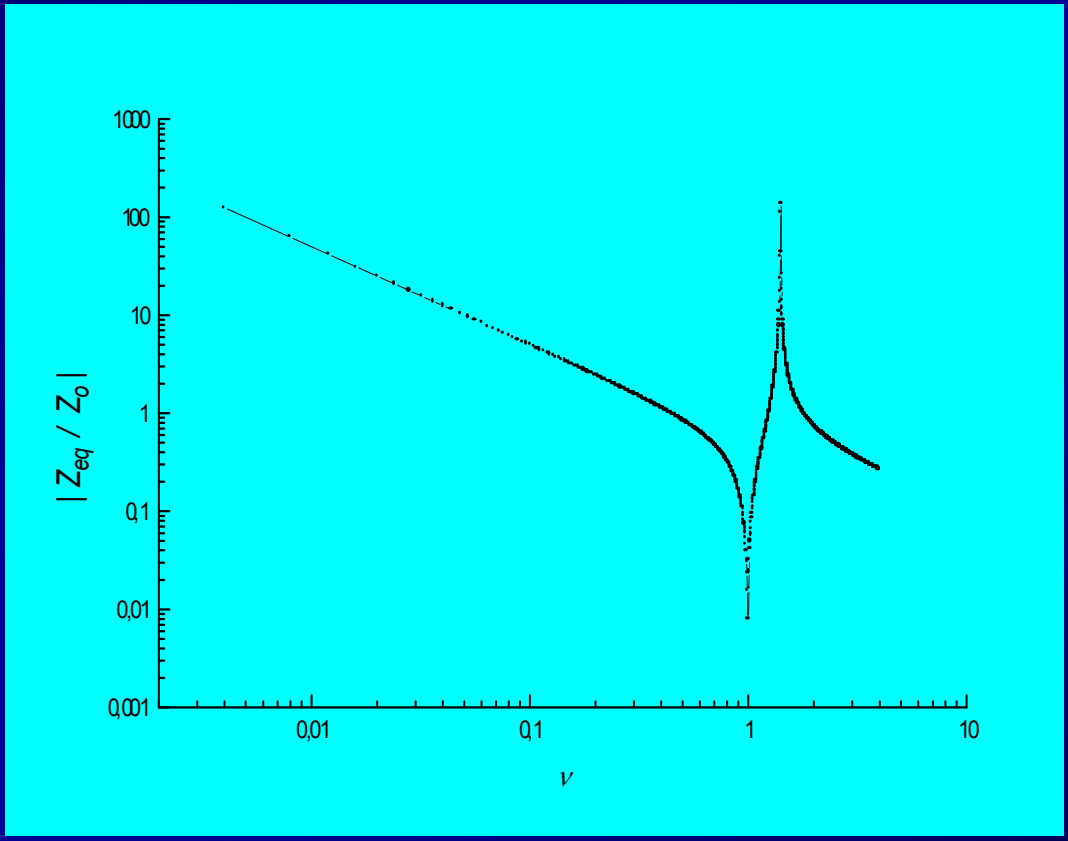




$$Z_{eq} = \frac{2}{i\omega C}\left(\frac{2-\omega^2 LC}{4-\omega^2 LC}\right)$$

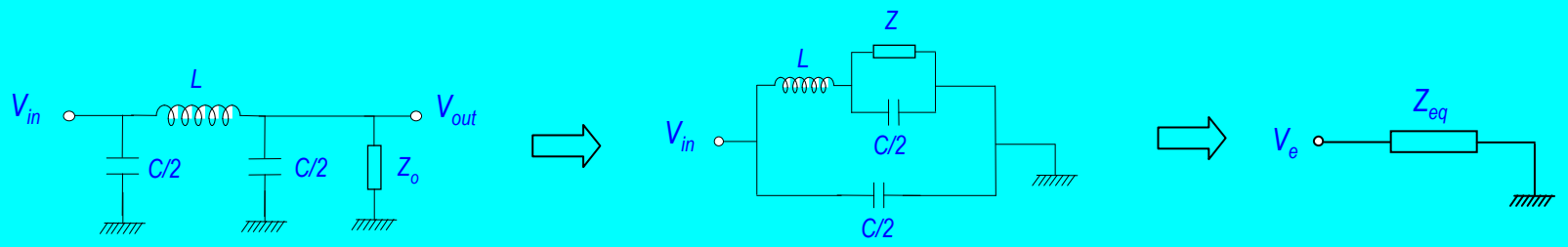
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C}{2}}} \Rightarrow L\omega_o^2 = \frac{2}{C} \Rightarrow \frac{2L}{C}\omega_o^2 = \frac{4}{C^2} \Rightarrow \frac{2}{C} = \omega_o\sqrt{\frac{2L}{C}} \quad \Rightarrow \quad Z_{eq} = \frac{Z_o}{i\upsilon}\left(\frac{1-\upsilon^2}{2-\upsilon^2}\right) = \frac{iZ_o}{\upsilon}\left(\frac{\upsilon^2-1}{2-\upsilon^2}\right); \quad Z_o = \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

$$\left|\frac{Z_{eq}}{Z_o}\right| = \frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu^2 - 1}{2 - \nu^2}\right]$$



Transmissão de sinais

A linha de transmissão pode ser terminada por um componente de impedância *Z*



Circuito equivalente a uma linha de transmissão de sinais terminada

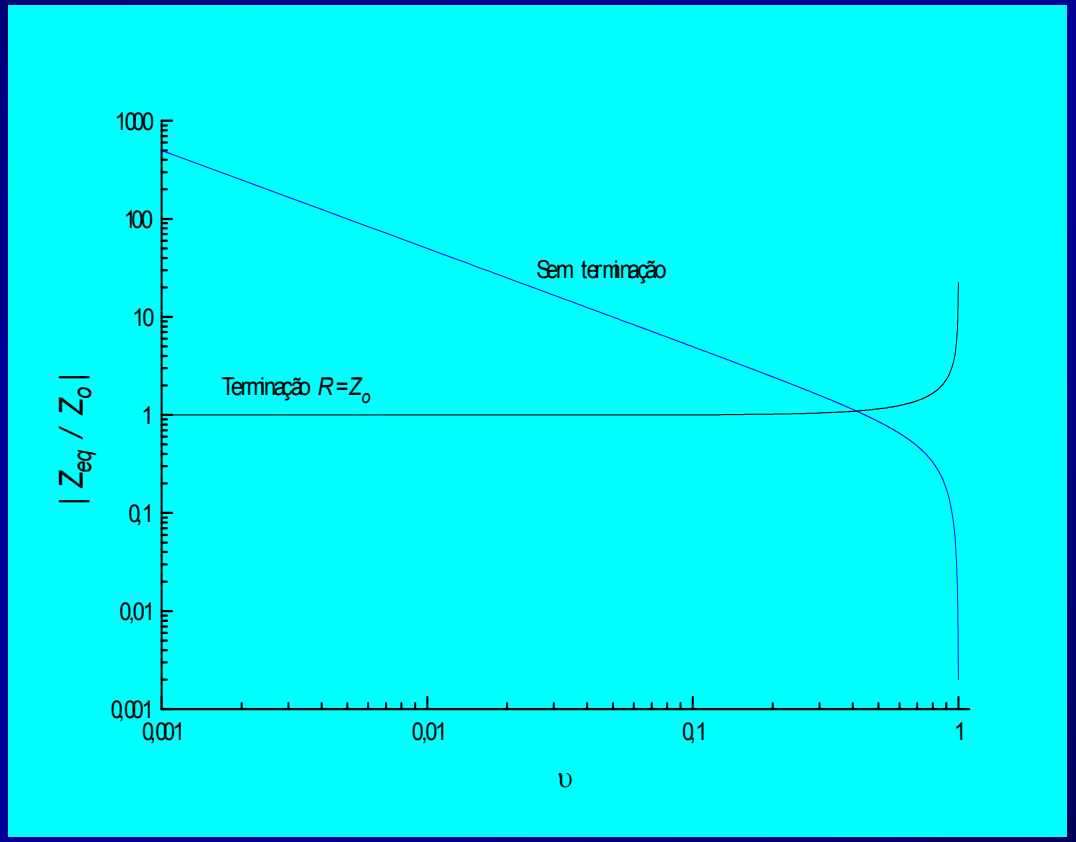
$$\Rightarrow Z_{eq} = \frac{-\omega^2 RL\frac{C}{2} + i\omega L + Z}{-i\omega^3 ZL\frac{C^2}{4} - \omega^2 L\frac{C}{2} + i\omega ZC + 1}$$

Suponhamos $Z=Z_{eq}$ (linha perfeitamente terminada)

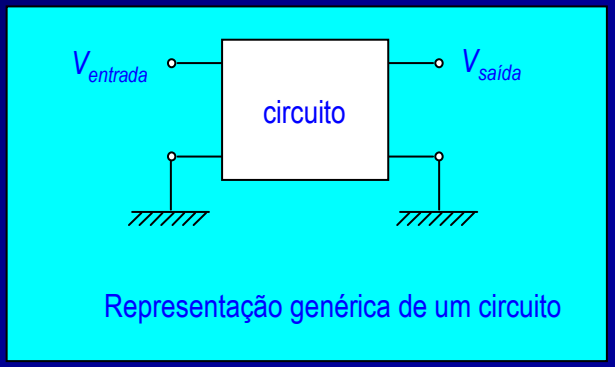
$$Z = Z_{eq} \Rightarrow Z\left(-i\omega^3 ZL\frac{C^2}{4} - \omega^2 L\frac{C}{2} + i\omega ZC + 1\right) = -\omega^2 ZL\frac{C}{2} + i\omega L + Z$$

$$\Rightarrow (\ldots) \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1-\omega^2\frac{LC}{4}}} = \frac{Z_o}{\sqrt{1-\upsilon^2}} \qquad \begin{cases} Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \upsilon = \frac{\omega}{\omega_o} \\ \omega_o = \frac{2}{\sqrt{LC}} \end{cases} \qquad (Z \approx Z_o \ \text{ para } \ \omega << \omega_o)$$

$$\left|\frac{Z_{eq}}{Z_o}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}}$$



Função de Transferência & Diagrama de Bode



Representação genérica de um circuito

Definimos Função de Transferência como a função *T*, tal que:

$$V_{saida} = TV_{entrada}$$

T é necessariamente uma função de ω:

$$T(\omega) = \frac{V_{saída}(\omega)}{V_{entrada}(\omega)}$$

(*) Não é simples definir $T(t)$, pois $V_{saída}(t) \approx V_{entrada}(t')$, $t'<t$

(tempo de propagação $\neq 0$)

Função de Transferência & Diagrama de Bode

Devido às diferenças de fase introduzidas pelos componentes, *T* é em geral uma função complexa

$$T = \frac{V_{saida}}{V_{entrada}} = Ae^{i\varphi} = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} |T| &= A(\omega) = ganho \\ Arg(T) &= \varphi(\omega) = fase \end{aligned}$$

A Função de Transferência para um circuito composto por *n* sub-circuitos conectados em série é:

(demonstração muito simples)

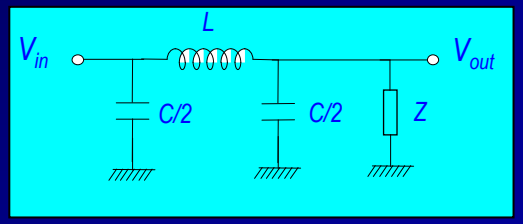
$$T = T_1 T_2 \ldots T_n$$

Diagrama de BODE é a representação da Função de Transferência através de dois gráficos:

Um para o ganho, outro para a fase - em função da freqüência

Função de Transferência & Diagrama de Bode

Exemplo: caso do circuito equivalente para linha de transmissão de sinais



$$T = \frac{1}{1+\frac{i\omega L}{Z_o}-\omega^2 L\frac{C}{2}}$$

Terminação "perfeita"

$$Z=\frac{Z_o}{\sqrt{1-\upsilon^2}} \Rightarrow T=T_{ideal}=\frac{1}{1-2\nu^2+2i\nu\sqrt{1-\nu^2}}$$

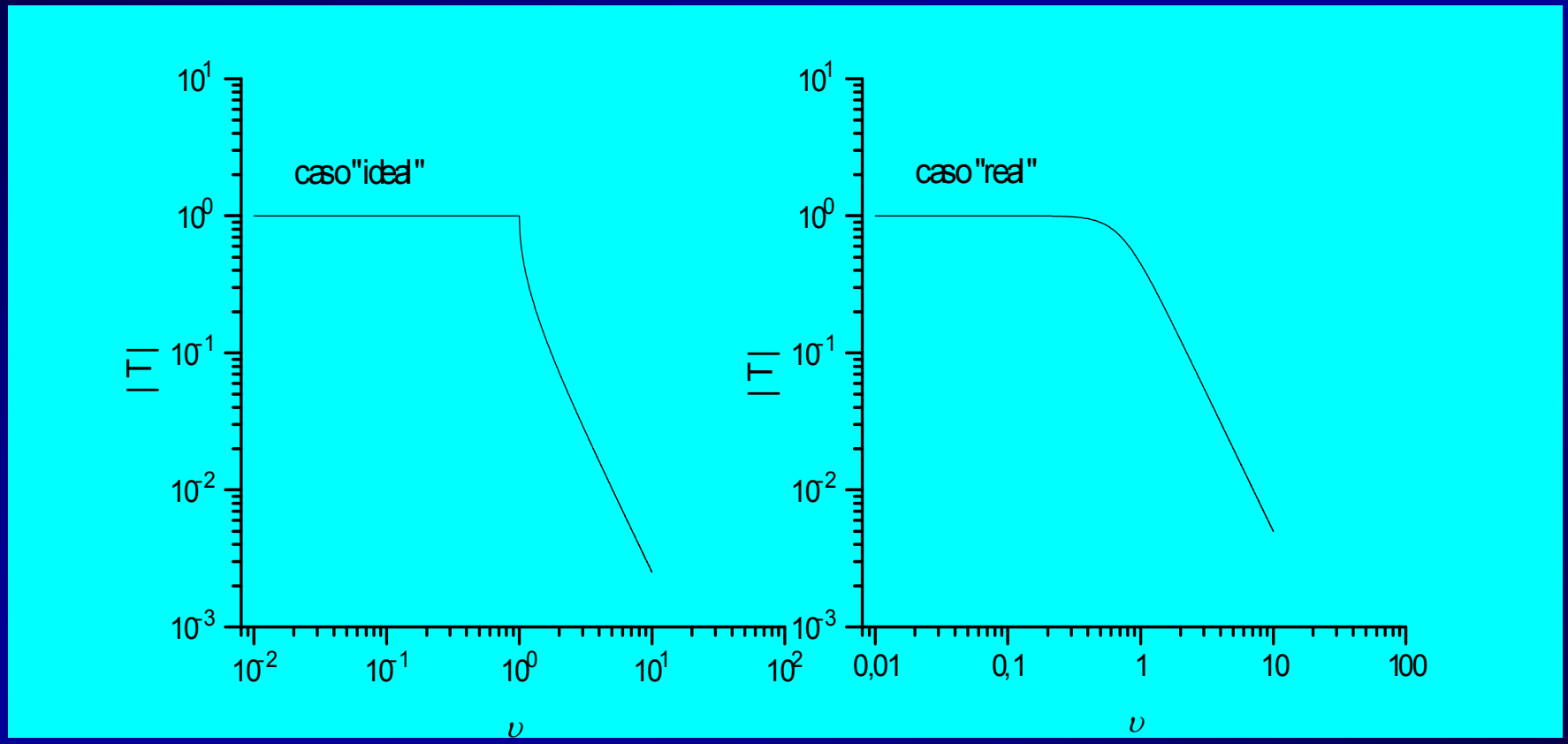
$$\left|T_{ideal}\right| = 1 \quad (\text{para } \nu \le 1)$$

$$\left|T_{ideal}\right| = \frac{1}{1-2\nu^2-2\nu\sqrt{\nu^2-1}} \quad (\text{para } \nu > 1)$$

Terminação "possível"

$$Z = Z_o \Rightarrow T = T_{real} = \frac{1}{1-2\nu^2+2i\nu}$$

$$\left|T_{real}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+4\nu^4}}$$


caso "ideal"
caso "real"
|T|
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
0,01
0,1
1
10
100
υ
υ

Função de Transferência & Diagrama de Bode

Fases:

$$\varphi_{ideal} = Arg[T_{ideal}] = -ArcTg\left(\frac{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}{1-2\nu^2}\right) \quad (para\ \nu < 1)$$

$$\varphi_{ideal} = Arg[T_{ideal}] = 0 \quad (para\ \nu > 1)$$

$$\varphi_{real} = Arg[T_{real}] = ArcTg\left(\frac{2\nu}{1-2\nu^2}\right)$$

Retardo:

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{Arg[T]}{\omega}$$

$$\varphi = Arg[T] = 2\nu + 4\frac{\nu^3}{3} + \ldots$$

$$\tau \cong \frac{2\nu}{\omega} = \frac{2\omega}{\omega\omega_o} = \frac{2}{\omega_o} = \sqrt{LC}$$

Para $\omega << \omega_0 \Rightarrow$ retardo constante

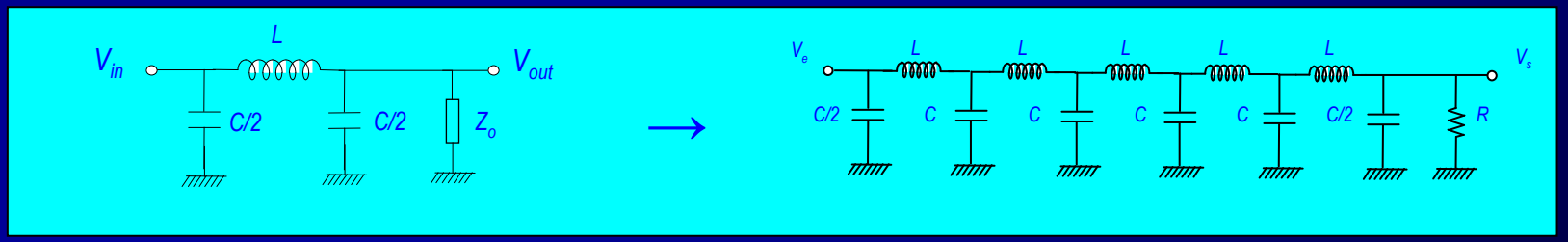
Função de Transferência & Diagrama de Bode

Linhas de transmissão: discreta e distribuída:

Um cabo é um tipo de linha de transmissão cujos parâmetros eletrônicos estão distribuídos continuamente ao longo do comprimento (parâmetros: resistividade, capacitância, auto-indutância por unidade de comprimento)

Nem sempre é possível obter uma linha de transmissão com os parâmetros desejados (retardo, banda passante) em uma configuração do tipo “contínuo”. Nestes casos, e em muitas outras aplicações, usam-se linhas de transmissão construídas com células discretas.

Exemplo



Substituindo Z_0 pela célula completa, obtém-se um circuito adaptado em impedância.
Cada célula adionada acrescenta retardo à transmissão de sinais.

3a. aula

Representação matemática de sinais

Qualquer função matemática de comportamento periódico ($\Rightarrow$período T, freqüência ω_o) pode ser representada por uma série de senos e cossenos.

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t) \right]$$

$$a_o = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_o t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, sen(n\omega_o t)\,dt$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

Verificação:

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T \left\{ \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t) \right] \right\} dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_o}{2} dt + \frac{2}{T} \underbrace{\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t) \right] dt}_{0} + \frac{2}{T} \underbrace{\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t) \right] dt}_{0}$$

$$= \frac{2}{T}\frac{a_o}{2} T + 0 + 0$$

$$= a_o$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \left\{ \frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos(m\omega_o t) + b_m \operatorname{sen}(m\omega_o t) \right] \right\} \cos(n\omega_o t) dt$$

$$= \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_o}{2} \cos(n\omega_o t) dt}_{0} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) \right] dt}_{\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{T}{2} \delta_{mn}} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \left[\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}(m\omega_o t) \cos(n\omega_o t) \right] dt}_{0}$$

$$= 0 + \frac{2}{T} a_n \frac{T}{2} + 0$$

$$= a_n$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \left\{ \frac{a_o}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos(m\omega_o t) + b_m \operatorname{sen}(m\omega_o t) \right] \right\} \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt$$

$$= \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_o}{2} \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt}_{0} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_o t) \operatorname{sen}(n\omega_o t) \right] dt}_{0} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \left[\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}(m\omega_o t) \operatorname{sen}(n\omega_o t) \right] dt}_{\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{T}{2} \delta_{mn}}$$

$$= 0 + 0 + \frac{2}{T} b_n \frac{T}{2}$$

$$= b_n$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen} a \text{sen} b$$
$$\Rightarrow \cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\Rightarrow \int_0^T \cos(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t) = \tfrac{1}{2}\int_0^T \cos\left[(m+n)\omega_o t\right]dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T \cos\left[(m-n)\omega_o t\right]dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & (\text{para } m = n) \\ 0 & (\text{para } m \neq n) \end{cases}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen} a \text{sen} b$$
$$\Rightarrow \text{sen} a \text{sen} b = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\Rightarrow \int_0^T \text{sen}(m\omega_o t)\text{sen}(n\omega_o t) = \tfrac{1}{2}\int_0^T \cos\left[(m-n)\omega_o t\right]dt - \tfrac{1}{2}\int_0^T \cos\left[(m+n)\omega_o t\right]dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & (\text{para } m = n) \\ 0 & (\text{para } m \neq n) \end{cases}$$

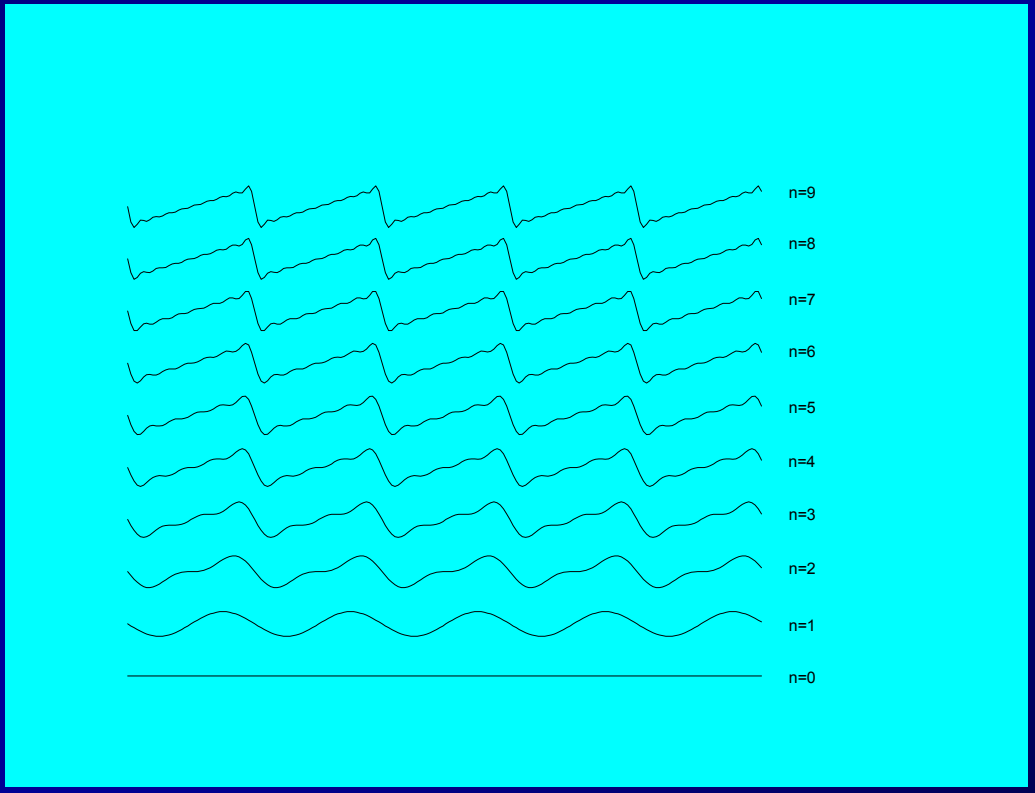
$$\text{sen}(a+b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$$
$$\text{sen}(a-b) = \text{sen} a \cos b - \text{sen} b \cos a$$
$$\Rightarrow \text{sen} a \cos b = \tfrac{1}{2}\left[\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\right]$$
$$\Rightarrow \int_0^T \text{sen}(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t) = \tfrac{1}{2}\int_0^T \text{sen}\left[(m+n)\omega_o t\right]dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T \text{sen}\left[(m-n)\omega_o t\right]dt = 0 \quad (\forall m, n)$$

Representação matemática de sinais

Exemplo: caso da função “dente de serra”

f(t) = *t*, para *0*<*t*<*1*, período *1*

$$a_o = 1$$
$$a_n = 0 \quad (\forall n)$$
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$



Representação matemática de sinais

Primeira simplificação: série de cossenos (ou série de senos)

$$a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t) \equiv \rho_n \cos(n\omega_o t - \varphi_n)$$

$$\rho_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$$
$$\varphi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

ou

$$a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t) \equiv \rho_n \operatorname{sen}(n\omega_o t - \varphi_n)$$

$$\rho_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$$
$$\varphi_n = -tg^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

série de cossenos

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t)\right] \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(n\omega_o t - \varphi_n)$$

Representação matemática de sinais

Segunda simplificação: série de exponenciais complexas

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi$$
$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\varphi$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\ \mathrm{sen}\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) \end{cases}$$

$$\therefore\ a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \mathrm{sen}\,(n\omega_o t) \equiv a_n \left(\frac{e^{in\omega_o t} + e^{-in\omega_o t}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega_o t} - e^{-in\omega_o t}}{2i}\right)$$
$$= \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\omega_o t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\omega_o t} \equiv c_n e^{in\omega_o t} + c_{-n} e^{-in\omega_o t}$$
$$c_n = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)$$
$$c_{-n} = \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_o t)\right] \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_o t}$$

Representação matemática de sinais

Para *n<0*:

$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \equiv c_n$$

Para *n=0*:

$$c_n = c_o = \tfrac{1}{2}\left(a_o - ib_o\right)$$
$$c_{-n} = c_o = \tfrac{1}{2}\left(a_o + ib_o\right)$$
$$\Rightarrow c_o = \frac{a_o}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t}$$

$$|c_n| = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} = \rho_n$$
$$Arg\,(c_n) = tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = -\varphi_n$$

Representação matemática de sinais

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t}$$

Válido para funções periódicos (período T, freqüência $\omega_o = 2\pi/T$)

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\cos(n\omega_o t) - i\,\mathrm{sen}(n\omega_o t)\right]dt = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i(n\omega_o t)}dt$$

Para representar uma função *f(t)* genérica, não periódica, fazemos $T \to \infty$

$T \to \infty \Rightarrow$

$$\omega_o \to \delta\omega$$
$$n\omega_o \to \omega$$
$$c_n \equiv \tfrac{1}{T}F(\omega) = \tfrac{\omega_o}{2\pi}F(\omega) = \tfrac{1}{2\pi}F(\omega)\delta\omega$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi}F(\omega)\delta\omega e^{in\omega_o t} \cong \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$F(\omega) = Tc_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_o t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

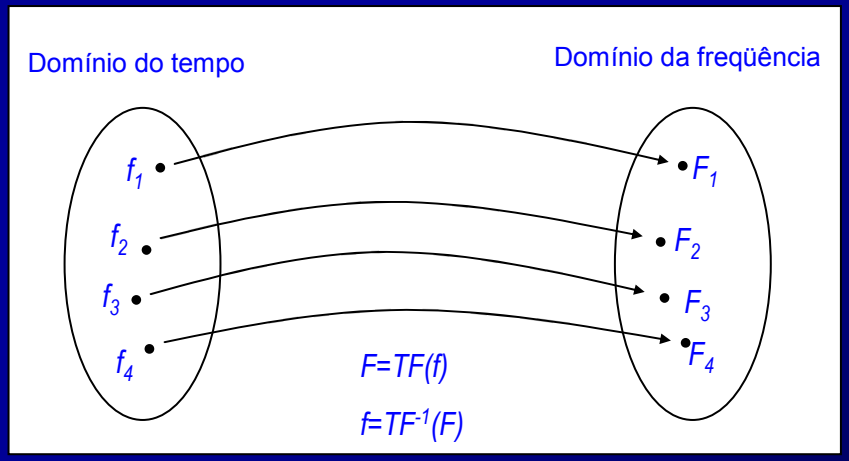
Representação matemática de sinais

Resumo

[para representação de uma função f(t) qualquer]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$



Representação matemática de sinais

Propriedades da Transformada de Fourier

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) \Leftrightarrow F(a\omega)$$

$$f(t - t_o) \Leftrightarrow F(\omega) e^{2\pi i \omega t_o}$$

$$f(t) e^{-2\pi i \omega_o t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_o)$$

$$f(t) = e^{-t^2} \Leftrightarrow F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$e^{-a^2 t^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

$$\frac{1}{|a|} e^{-\frac{t^2}{a^2}} \Leftrightarrow \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2 \omega^2}{4}}$$

$$e^{-(t-t_o)^2} \Leftrightarrow \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} e^{2\pi i \omega t_o}$$

$$e^{-t^2} e^{-2\pi i \omega_o t} \Leftrightarrow \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\omega - \omega_o)^2}{4}}$$

Representação matemática de sinais

Transformada de Laplace

(*) A Transformada de Fourier nem sempre é calculável analticamente; para estender sua aplicabilidade, fazemos algumas simplificações:

-Tratamos apenas funções definidas a partir de *t=0*;
- Introduzimos um fator multiplicativo (e^{-rt}), de modo que $f(t)e^{-rt}$ se reduza a zero em $t=\infty$

$$\Rightarrow F(\omega)=\int_0^{\infty}\left[e^{-rt}f(t)\right]e^{-i\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{-(r+i\omega)t}f(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt\equiv F(p)$$

$$e^{-rt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(p)e^{i\omega t}d\omega \qquad (t>0)$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(p)e^{rt}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(p)e^{(r+i\omega)t}d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}F(p)e^{pt}dp$$

Representação matemática de sinais

Conclusão

[para $r=0 \Rightarrow p=i\omega \Rightarrow$ recuperamos a Transformada de Fourier]

Transformada de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

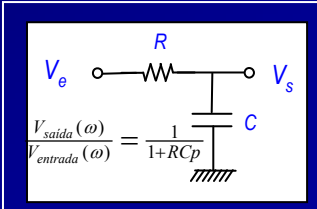
A Transformada de Laplace é mais tratável analiticamente do que a Transformada de Fourier

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
1	$\gamma(t)$
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^n}{(n-1)!}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{p+b}{(p+a)^2}$	$[1+(b-a)t]e^{-at}$
$\frac{p+b}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sqrt{b^2+\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi) \leftrightarrow tg\varphi=\frac{\omega}{b}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab}\left(1-\frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{b-a}\right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{be^{-bt}-ae^{-at}}{b-a}$
$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}\left[1-(\omega t+1)e^{-\omega t}\right]$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

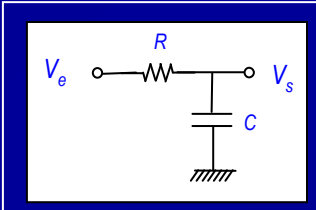
No domínio da freqüência, as relações entre os sinais de entrada e de saída para um circuito envolvem funções:

Exemplo:



$$\frac{V_{saída}(\omega)}{V_{entrada}(\omega)} = \frac{1}{1+RCp}$$

No domínio do tempo, as relações entre os sinais de entrada e de saída são descritas por equações diferenciais:



$$\frac{v_{saída}(t)}{v_{entrada}(t)} = \frac{1}{1+RC\frac{d}{dt}}$$

$$v_{entrada} = RI + v_{saída}$$

$$v_{entrada} = R\frac{dQ}{dt} + v_{saída}$$

$$v_{entrada} = RC\frac{dv_{saída}}{dt} + v_{saída}$$

$$v_{entrada} = \left[RC\frac{d}{dt} + 1\right]v_{saída}$$

$$\frac{v_{saída}}{v_{entrada}} = \frac{1}{1+RC\frac{d}{dt}}$$

$$\therefore \quad p \leftrightarrow \frac{d}{dt}$$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.)

Caso Geral

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{n-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_o u$$

$$\Rightarrow \left[a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o \right] y = \left[b_m \frac{d^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_o \right] u$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty Y(p) e^{pt} dp$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty U(p) e^{pt} dp$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dt^n} y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty p^n Y(p) e^{pt} dp$$

$$\Rightarrow \frac{d^m}{dt^m} u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty p^m U(p) e^{pt} dp$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_o p^o \right\} Y(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_o p \right\} U(p) e^{pt} dp$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \left[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_o \right] Y(p) - \left[b_o p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_o \right] U(p) \right\} e^{pt} dp = 0$$

$$\Rightarrow \left[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_o \right] Y(p) - \left[b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_o \right] U(p) = 0$$

$$\therefore \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_o}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_o}$$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

Equação Diferencial ↔ Equação polinomial

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_o}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_o} = \frac{b_m (p - p'_m)(p - p'_{m-1}) \ldots (p - p'_o)}{a_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \ldots (p - p_0)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(p - p'_m)(p - p'_{m-1}) \ldots (p - p'_o)}{(p - p_n)(p - p_{n-1}) \ldots (p - p_0)}$$

Para $Y(p) \equiv V_{saída}(p)$ e $U(p) = V_{entrada}(p)$

$\Rightarrow$ A função de transferência, genericamente, tem *m* zeros e *n* polos

$$T(p) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(p - z_1)(p - z_2) \ldots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n)}$$

Solução para a equação homogênea

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o y = 0$$

$$y = e^{\lambda t} \Rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_o \lambda = 0$$

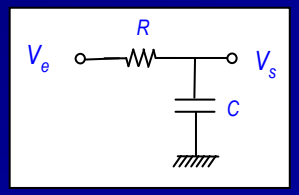
$$\Rightarrow a_n (\lambda^n + a'_{m-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a'_o \lambda) = a_n (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \ldots (\lambda - p_n) = 0$$

$$\therefore y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

4a. aula

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

Exemplo 1



$$T(\omega) = \frac{1}{1+RCp}$$

$$\therefore \mathrm{v}_{entrada}(t) = RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída}(t) + \mathrm{v}_{saída}(t)$$

Para $v_{entrada}(t)=V_o \quad t\geq 0$

$$V_o = RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída}(t) + \mathrm{v}_{saída}(t)$$

$$\Rightarrow RC\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}_{saída}(t) + \frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída}(t) = 0$$

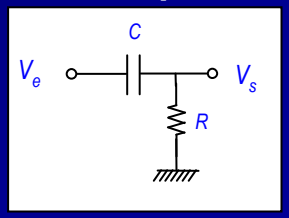
$$(\ldots)$$

$$\Rightarrow RCp^2 + p = p(RCp+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = \frac{-1}{RC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{saída}(t) = K_1 + K_2 e^{\frac{-t}{RC}} = (\ldots) = V_o(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

Exemplo 2



$$T(\omega) = \frac{RCp}{1+RCp}$$

$$\therefore RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{entrada}(t) = \mathrm{v}_{saída}(t) + RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída}(t)$$

Para $v_{entrada}(t)=V_o \quad t\geq 0$

$$C\frac{d}{dt}\left[\mathrm{v}_{entrada}(t) - \mathrm{v}_{saída}(t)\right] = \frac{\mathrm{v}_{saída}(t)}{R}$$

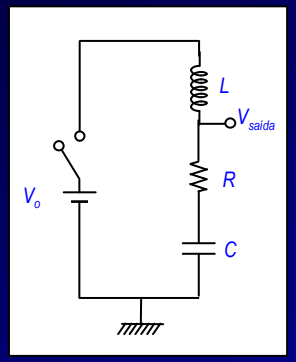
$$\Rightarrow RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{entrada}(t) - RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída}(t) = \mathrm{v}_{saída}(t)$$

$$\Rightarrow RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída}(t) + \mathrm{v}_{saída}(t) = RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{entrada}(t) = 0$$

$$\Rightarrow RCp + 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{-1}{RC}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{saída}(t) = K_1 e^{\frac{-t}{RC}} = (\ldots) = V_o e^{\frac{-t}{RC}}$$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência



Exemplo 3

$$T(\omega) = \frac{1+RCp}{1+RCp+p^2LC}$$

$$\therefore v_{entrada}(t) + RC\frac{d}{dt}v_{entrada}(t) = v_{saída}(t) + RC\frac{d}{dt}v_{saída}(t) + LC\frac{d^2}{dt^2}v_{saída}(t)$$

$$v_{entrada} = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{d}{dt}v_{entrada} = L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{d}{dt}I + \frac{I}{C}$$

$$v_{entrada} - v_{saída} = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(v_{entrada} - v_{saída}\right) = L\frac{d^2I}{dt^2} \\ \frac{d}{dt}I = \frac{v_{entrada} - v_{saída}}{L} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}v_{entrada} = \frac{d}{dt}\left(v_{entrada} - v_{saída}\right) + \frac{R}{L}\left(v_{entrada} - v_{saída}\right) + \frac{I}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}v_{saída} + \frac{R}{L}v_{saída} = \frac{R}{L}v_{entrada} + \frac{I}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}v_{saída} + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}v_{saída} = \frac{R}{L}\frac{d}{dt}v_{entrada} + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}I = \frac{R}{L}\frac{d}{dt}v_{entrada} + \frac{1}{C}\frac{\left(v_{entrada} - v_{saída}\right)}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}v_{saída} + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}v_{saída} + \frac{1}{LC}v_{saída} = \frac{R}{L}\frac{d}{dt}v_{entrada} + \frac{1}{LC}v_{entrada}$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2}{dt^2}v_{saída} + RC\frac{d}{dt}v_{saída} + v_{saída} = RC\frac{d}{dt}v_{entrada} + v_{entrada}$$

Para $v_{entrada}(t)=V_o \quad t \geq 0$

$$LC\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}_{saída} + RC\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída} + \mathrm{v}_{saída} = RC\frac{d}{dt}V_o + V_o = V_o$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^3}{dt^3}\mathrm{v}_{saída} + RC\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}_{saída} + \frac{d}{dt}\mathrm{v}_{saída} = 0$$

$$(...)$$

$$LCp^3 + RCp^2 + p = p(LCp^2 + RCp + 1) = 0$$

$$\Rightarrow p = \begin{cases} 0 \\ \frac{-RC+\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC} \quad (\equiv p_1) \\ \frac{-RC-\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC} \quad (\equiv p_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{saída}(t) = K_1 + K_2 e^{p1t} + K_3 e^{p2t}$$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

Condições de estabilidade para um circuito
[a partir dos polos da função de transferência]

$$T(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_o}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_o} \equiv \frac{b^m}{a^n} \frac{(p-z_1)(p-z_2)...(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)}$$

A função de transferência assume valores singulares quando:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_o = 0$$

A esta condição corresponde a equação diferencial homogênea:

$$\left[a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_o \right] \mathrm{v}_{saída} = 0$$

Esta equação corresponde ao circuito sem sinal de entrada, e a solução é:

$$\mathrm{v}_{saída}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

Relações entre domínio do tempo & domínio da freqüência

Princípio de superposição aplicado a equações diferenciais ordinárias:

$$\text{Se} \quad a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o y = u(t) \quad \text{tem solução} \quad S_1(t)$$

$$\text{e} \quad a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o y = w(t) \quad \text{tem solução} \quad S_2(t)$$

$$\Rightarrow a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o y = u(t) + w(t) \quad \text{tem solução} \quad \alpha S_1(t) + \beta S_2(t)$$

Supondo $u(t)=0 \Rightarrow S_1(t)$ é a solução para a equação homogênea

$\therefore$ A solução para a equação homogênea faz parte da solução geral

Conclusão

Mesmo que não conheçamos a solução para a resposta do circuito a um sinal qualquer, podemos ter informações sobre seu desempenho a partir dos polos da função de transferência:

$$v_{saída}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

Exemplos

-Polo real > $0 \Rightarrow$ circuito instável, saturação;
- Polo real < $0 \Rightarrow$ estável;
- Polo imaginário puro $\Rightarrow$ oscilação.

O Teorema da Convolução

A convolução entre duas funçoes *g(t)* e *h(t)* é uma função *f(t)* definida como:

$$f(t) \equiv g * h = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Por outro lado, sabemos que:

$$TF[h(t)] = H(\omega)$$

$$\Rightarrow h(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \qquad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\Rightarrow h(t-\tau) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[H(\omega) e^{-i\omega\tau}\right]}_{H'(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

$$\therefore TF[h(t-\tau)] = H'(\omega) = H(\omega) e^{-i\omega\tau}$$

$$\Rightarrow H'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\omega t} dt = H(\omega) e^{-i\omega\tau}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)e^{-i\omega t}d\tau\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)e^{-i\omega t}dt\right]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-i\omega t}dt\right]}_{H(\omega)e^{-i\omega\tau}}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)H(\omega)e^{-i\omega t}d\tau$$

$$= H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = H(\omega)G(\omega)$$

$$\therefore F(\omega) = H(\omega)G(\omega)$$

Dados $v_{in}(t)$ e a função de transferência $T(\omega)$ para um circuito, podemos obter $v_{out}(t)$ pelo seguinte processo:

$\rightarrow T(t)=TF^{-1}[T(\omega)]$

$\rightarrow V_{in}(\omega)=TF[v_{in}(t)]$

$\rightarrow V_{out}(\omega)=T(\omega)v_{in}(\omega)$

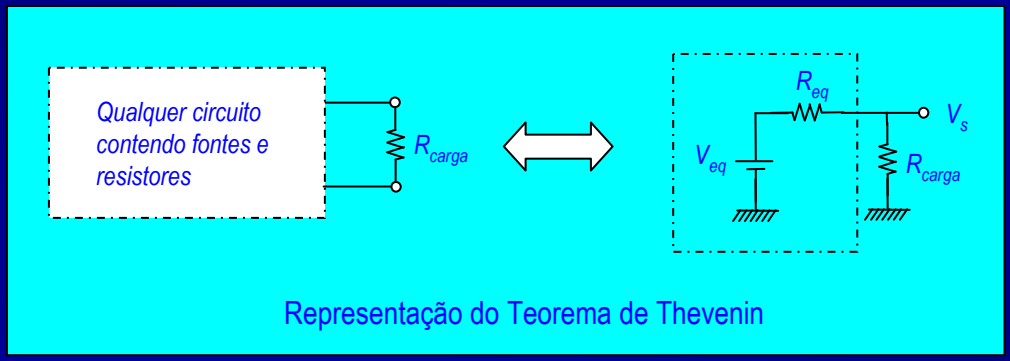
$\rightarrow v_{out}(t)=T(t)*v_{in}(t)$ ou $TF^{-1}[V_{out}(\omega)]$

(*) Esta é uma alternativa à solução da equação diferencial

Teoremas de Thevenin e de Norton

Teorema de Thevenin

qualquer circuito contendo fontes de tensão e resistores pode ser reduzido a um circuito equivalente contendo apenas uma fonte de tensão (V_{eq}) e um resistor (R_{eq}) em série.

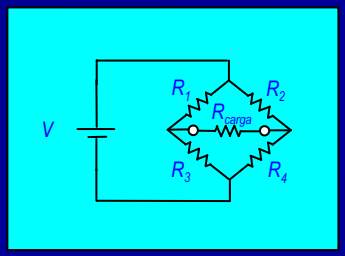


Representação do Teorema de Thevenin

- Quando suprimimos a resistência de carga, não há passagem de corrente. Nesse caso, a diferença de potencial entre os terminais de saída do circuito é V_{eq}. Ou seja, V_{eq} é a voltagem em regime de 'circuito aberto'.
- Quando a resistência de carga é nula há passagem de corrente, I. R_{eq} é dado por V_{eq} / I
- Na ausência de resistência de carga, R_{eq} é a resistência observada quando as fontes são reduzidas a curto-circuitos.

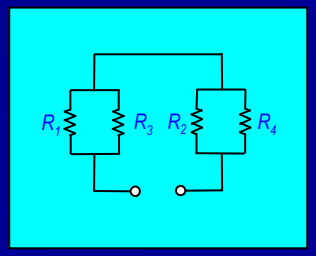
Teoremas de Thevenin e de Norton

Aplicação: Ponte de Wheatstone



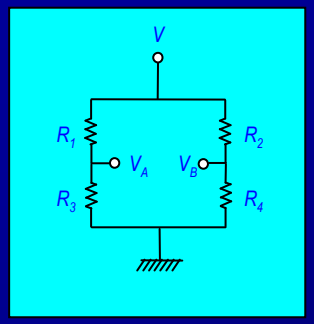
Para encontrar V_{eq} e R_{eq} :

1) supomos que V é substituído por um curto-circuito e que a resistência de carga é suprimida



$$\Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

2) V_{eq} é a diferença de potencial entre os terminais de saída quando não há carga

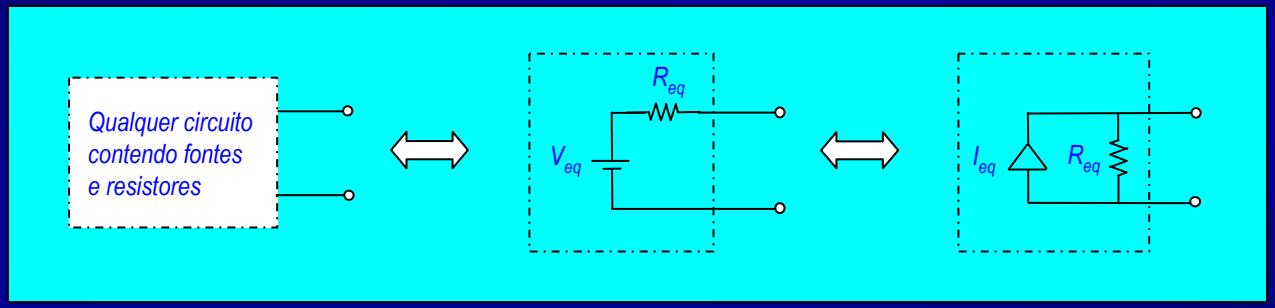


$$\Rightarrow \quad V_{eq} = V_A - V_B = V\left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)$$

Teoremas de Thevenin e de Norton

Teorema de Norton

qualquer circuito envolvendo fontes de tensão e resistores pode ser reduzido um circuito equivalente contendo apenas uma fonte de corrente (I_{eq},) e um resistor (R_{eq}) em paralelo.



- Os dois teoremas devem ser equivalentes

- Quando cirto-circuitamos todas as fontes $\Rightarrow$ $V_{eq} = 0$, $I_{eq} = 0$ e encontramos a equivalência $\Rightarrow$ R_{eq}(Thevenin) = R_{eq}(Norton)

- I_{eq} é a corrente que circula por R_{eq} quando a resistência de carga é nula (curto circuito).

$\Rightarrow$ $I_{eq} = V_{eq} / R_{eq}$

Teoremas de Thevenin e de Norton

Exemplo

• Um detector de partículas (a gás ou semicondutor) é equivalente a uma capacitor – impedância $C=Z_{eq}$;

• A detecção de uma partícula pode ser interpretada como uma fonte de corrente (equivalente Norton) ou uma fonte de tensão (equivalente Thevenin);

Num detector a gás monofilar, a queda de tensão devida à absorção de uma partícula pode ser calculada:

$$V(t) = K \ln \sqrt{1 - \frac{t}{t_o}} = V_{eq}(t) \qquad (K \text{ e } t_o \text{ constantes})$$

No modelo Thevenin, a fonte de tensão (partícula detectada) está em série com a capacitância que representa a resistência de saída do detector ($C=Z_{eq}$). A resistência de carga neste caso define um circuito diferenciador (filtro passa-alta)

$$\Rightarrow V_{saída}(t) \approx V(t) e^{\frac{-t}{RC}}$$

No modelo Norton, a partícula detectada equivale a uma fonte de corrente em paralelo com o capacitância do detector. Esta corrente está relacionada com a diferença de tensão entre os terminais do capacitor

$$I_{eq}(t) = C \frac{d}{dt}\left(K \ln \sqrt{1 - \frac{t}{t_o}}\right) = - \frac{CK}{2} \frac{1}{t - t_o}$$

5a. aula

Regras de Kirchoff

Queremos determinar as correntes (em todos os componentes) e as tensões (em todos os pontos) de um circuito

• Qualquer circuito apresenta nós e malhas, pelas malhas circulam correntes, nos nós se estabelecem potenciais elétricos;

• Suponhamos que haja *n* correntes incógnitas num circuito que contém *m* nós. A soma das correntes que convergem a cada nó se anula. Portanto:

$$\sum_{nós} I_i = 0$$

• Esta condição pode gerar *m-1* equações;

• No total, como há *n* correntes incógnitas, pode haver no máximo *n* equações;

• A soma das quedas de tensão nas malhas também deve se anular:

$$\sum_{malhas} V_i = 0$$

• Desta última só podem surgir *n-(m-1)* equações independentes;

As regras de Kirchoff permitem estabelecer o sistema de equações lineares independentes e encontrar sua solução $\Rightarrow$ identificar todas as tensões e todas as correntes envolvidas no circuito;

Regras de Kirchoff

n equações para as *n* correntes

$I_1=\Delta V_1/R_1$
$I_2=\Delta V_2/R_2$
.
.
.
$I_n=\Delta V_n/R_n$

Em cada nó: $\sum_{nós} I_i = 0$ $\Rightarrow$

$(I_1+I_2+...)_{nó\ 1} = 0$
$(I_1+I_2+...)_{nó\ 2} = 0$
.
.
.
$(I_1+I_2+...)_{nó\ m} = 0$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m} I_i = 0$ $\Rightarrow$

m-1 equações independentes:

Cada uma delas é um vínculo a ser considerado nas *n* equações para as correntes

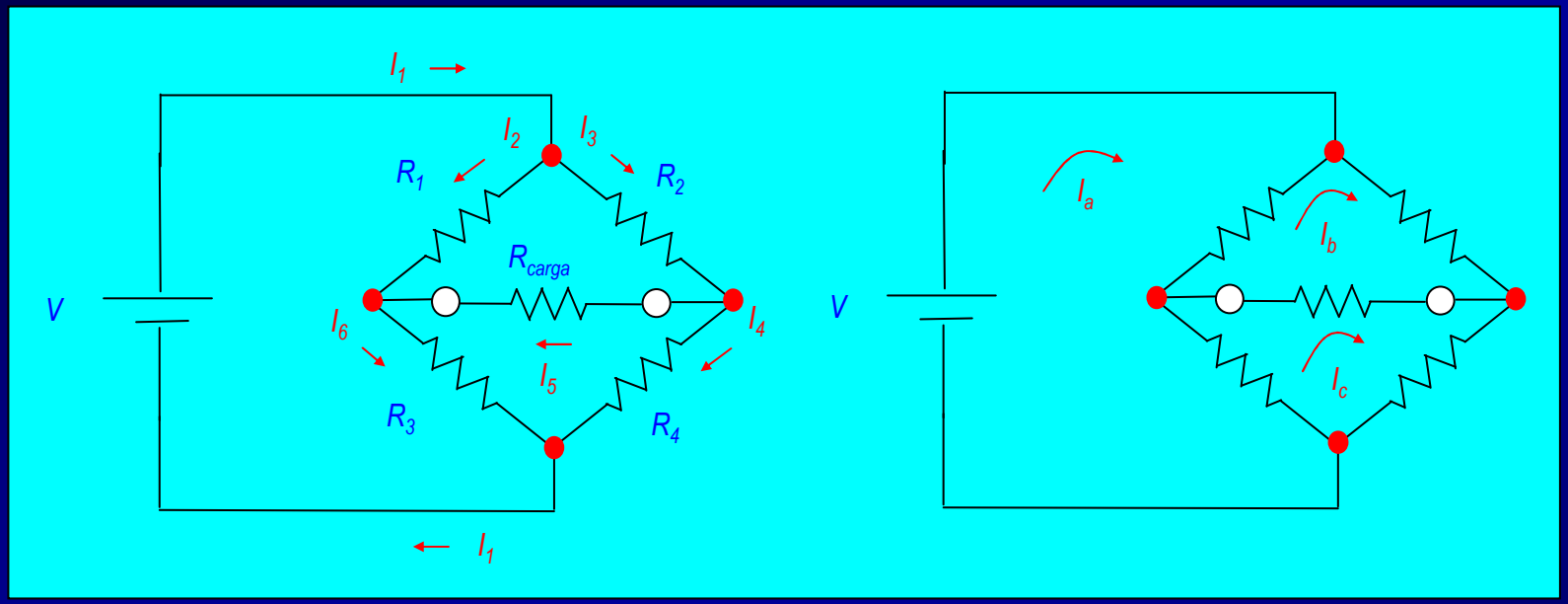
$\Rightarrow$ No total: *n-(m-1)* equações independentes

Considerando as quedas de tensão nas malhas $\sum_{malhas} V_i = 0$ $\Rightarrow$

Supondo que estas relações geram equações independentes

$\Rightarrow$ o circuito deve ter *n-(m-1)* malhas e *n-(m-1)* correntes independentes

Regras de Kirchoff



6 correntes, 4 nós ⇒ 6-(4-1) = 3 equações independentes ⇒ 3 malhas

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_a \\
I_2 &= I_a - I_b \\
I_3 &= I_b \\
I_4 &= I_c \\
I_5 &= I_c - I_b \\
I_6 &= I_a - I_c
\end{aligned}
$$

$$\sum_{malhas} V_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_1(I_a - I_b) + R_3(I_a - I_c) = V \\ R_1(I_a - I_b) - R_5(I_c - I_b) - R_2 I_b = 0 \\ R_5(I_c - I_b) + R_3(I_a - I_c) - R_4 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_3) & -R_1 & -R_3 \\ R_1 & -R_1 - R_2 + R_5 & -R_5 \\ R_3 & -R_5 & -R_3 - R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Regras de Kirchoff

$$[R][I]=[V]$$

Seja $\Delta = Det[R]$

As soluções são $I_i = \frac{Det[R \to V_i]}{\Delta}$

onde $Det[R \to V_i] = Det[R]$ com coluna i substituída por $[V]$

$$I_5 = I_c - I_b = \frac{1}{\Delta}\left\{ Det\begin{bmatrix} (R_1+R_3) & -R_1 & V \\ R_1 & -R_1-R_2+R_5 & 0 \\ R_3 & -R_5 & 0 \end{bmatrix} - Det\begin{bmatrix} (R_1+R_3) & V & -R_3 \\ R_1 & 0 & -R_5 \\ R_3 & 0 & -R_3-R_4+R_5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$I_5 = \frac{V}{\Delta}\left\{ \left[-R_1R_5 - R_3(-R_1-R_2+R_5) \right] - \left[-R_1(-R_3-R_4+R_5) - R_3R_5 \right] \right\}$$

$$I_5 = \frac{V}{\Delta}\left\{ \left[-R_1R_5 + R_1R_3 + R_2R_3 - R_3R_5 \right] + \left[-R_1R_3 - R_1R_4 + R_1R_5 + R_3R_5 \right] \right\}$$

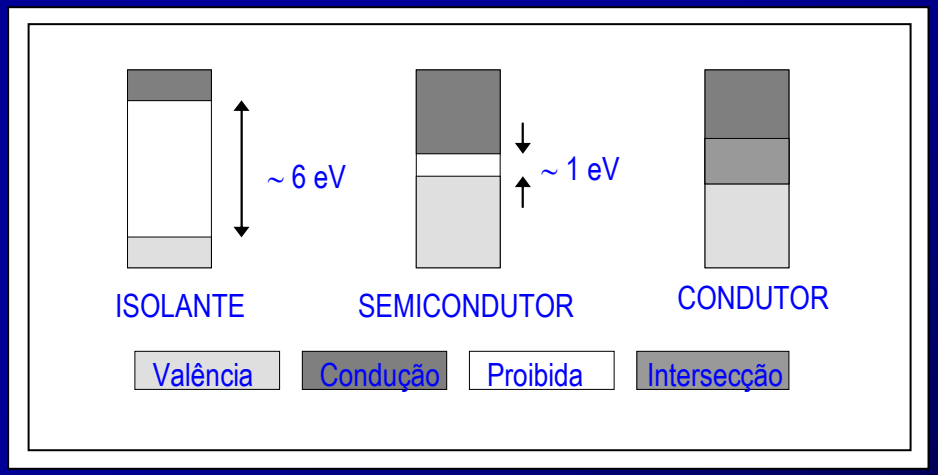
$$I_5 = \frac{V}{\Delta}\left\{ R_2R_3 - R_1R_4 \right\}$$

$$I_5 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{R_1R_4}{R_3}$$

Materiais Semicondutores

Os átomos de um material semicondutor são dispostos em uma rede cristalina. Enquanto em um átomo isolado os níveis de energia acessíveis a um elétron são discretos, quando ordenados na rede os níveis se subdividem (degeneração) a tal ponto que para o cristal podemos identificar bandas de energia. A chamada banda de valência é ocupada por elétrons ligados aos átomos e a banda de condução contém os elétrons livres para circular pela rede cristalina. Entre as bandas de condução e valência existe a banda 'proibida', no sentido de que não há probabilidade para que um elétron do cristal tenha energia com valor dentro desta banda.

Classificação de materiais em termos da estrutura de bandas de energia acessíveis aos elétrons



Materiais Semicondutores

Semicondutor intrínseco

Na rede cristalina de um semicondutor puro (também denominado intrínseco) a temperatura ambiente, existe uma probabilidade não nula para que elétrons passem para a banda de condução, de modo que pares elétron-buraco são constantemente gerados. Em condições de equilíbrio elétrico e térmico a concentração n_i de elétrons ou buracos pode ser expressa por:

$$n_i \approx T^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

T é a temperatura em K, E_g é a diferença de energia entre bandas a 0º K, k é a constante de Boltzmann

Exemplo:

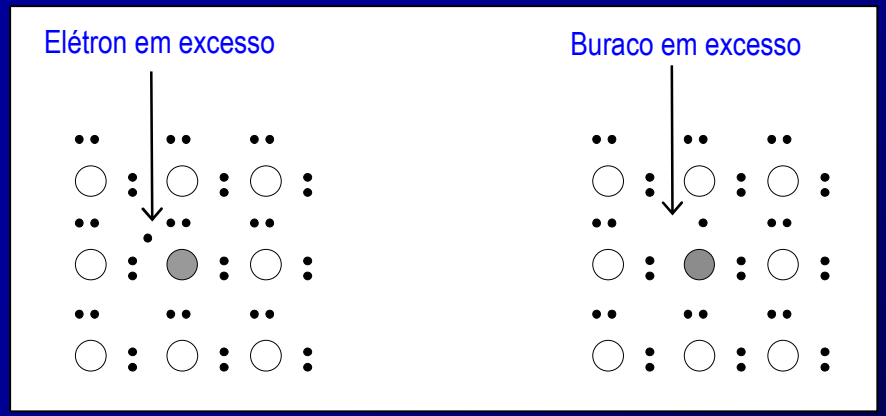
a *300* K, $n_i \approx 2.5 \times 10^{13}$ /cm^3 (para silício) e 1.5×10^{10} /cm^3 (para germânio).

Densidade do próprio semicondutor ≈ 10^{22} átomos/cm^3.

Materiais Semicondutores

Semicondutor dopado

- Tanto silício quanto germânio são átomos tetravalentes;
- A substituição de um dos átomos da rede por um átomo pentavalente equivale a acrescentar um elétron à rede, enquanto que a substituição por um átomo trivalente equivale a acrescentar um buraco;
- Os semicondutores dopados são referidos como 'tipo-n' e tipo 'tipo-p'. Nos semicondutores tipo-n a corrente elétrica é principalmente determinada pelo movimento de elétrons, e nos tipo-p pelo movimento de buracos;
- Impurezas tipicamente usadas: fósforo, arsênio, antimônio, gálio, índio e boro;
- No semicondutor dopado o equilíbrio elétrico é mantido, já que o átomo acrescentado também é eletricamente neutro.

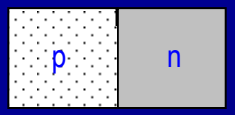


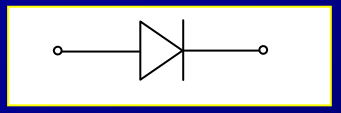
Materiais Semicondutores

Junção de semicondutores

- Uma junção *p-n* é obtida quando se fabrica um semicondutor tipo-p justaposto a um tipo-n;
- Na região de interface entre os dois, haverá tendência dos elétrons a migrar para a região tipo-p, e dos buracos a migrar para a região tipo-*n*;
- A região tipo-n torna-se carregada positivamente por haver capturado buracos, e a região tipo-p torna-se carregada negativamente por haver capturado elétrons;
- Um campo elétrico se estabelece, com uma diferença de potencial tipicamente da ordem de *1V*.

Diodo = dispositivo semicondutor formado pela junção de dois semicondutores dopados com polaridades opostas





Diodos

• O diodo pode ser polarizado de modo a favorecer ou a bloquear a passagem de corrente;

• Se aplicamos uma diferença de potencial entre os terminais *p* e *n*, de modo que do lado *n* o potencial seja inferior ao do lado *p*, favorecemos a migração de portadores de carga através da junção. Haverá portanto passagem de corrente pelo diodo.

• O movimento de elétrons é oposto ao que convencionalmente adotamos para simbolizar a direção da corrente elétrica (do potencial positivo para o negativo).

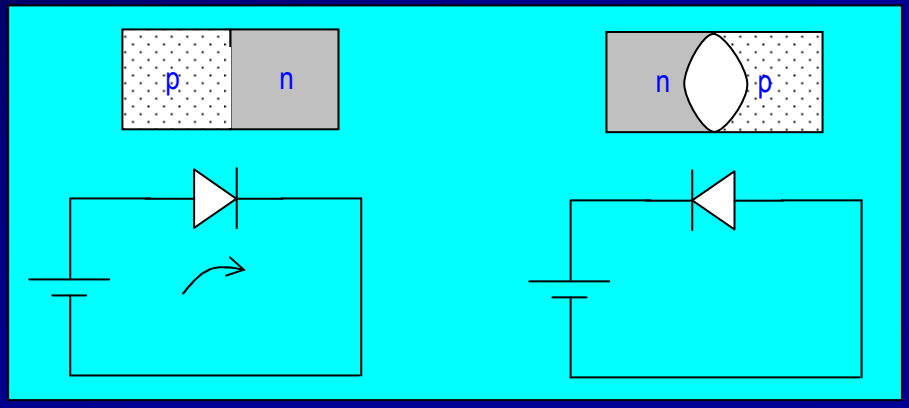
• Invertendo a diferença de potencial, ou seja, aplicando ao lado *n* um potencial superior ao do lado *p*, estaremos confinando ainda mais os elétrons à região *p* e os buracos à região *n*. Neste caso somente uma pequena corrente residual passa pela junção, em direção oposta à anterior.

• A magnitude desta corrente residual depende da temperatura, da concentração de impurezas *p* e *n*, e está também relacionada com as características do material semicondutor.

• Sob polarização reversa, a região de interface da junção *p*-*n* fica desprovida de portadores de carga.

• Quanto maior a diferença de potencial reversa, maior a região desprovida de portadores de carga, chamada de 'região de depleção'.

Diodos

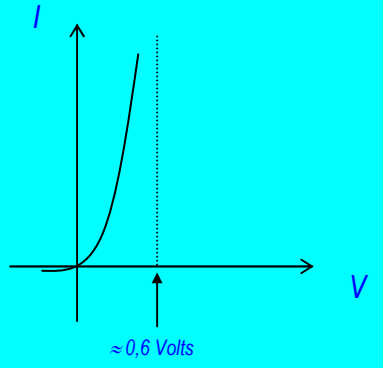


Polarização do diodo:
À esquerda: polarização favorável $\Rightarrow$ passagem de corrente;
À direita: polarização reversa $\Rightarrow$ aumento da região de depleção.

No diodo, a relação matemática entre *V* e *I* é **não-linear**

$$I = I_o\left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1\right)$$

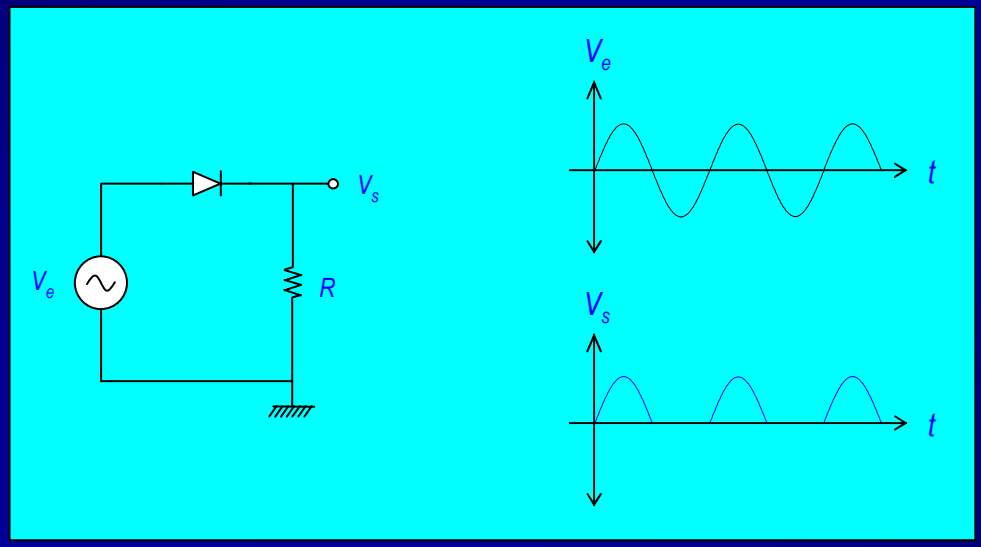
$$I_o = Ke^{-\frac{eV_o}{kT}}$$



$V \neq ZI$

Diodos

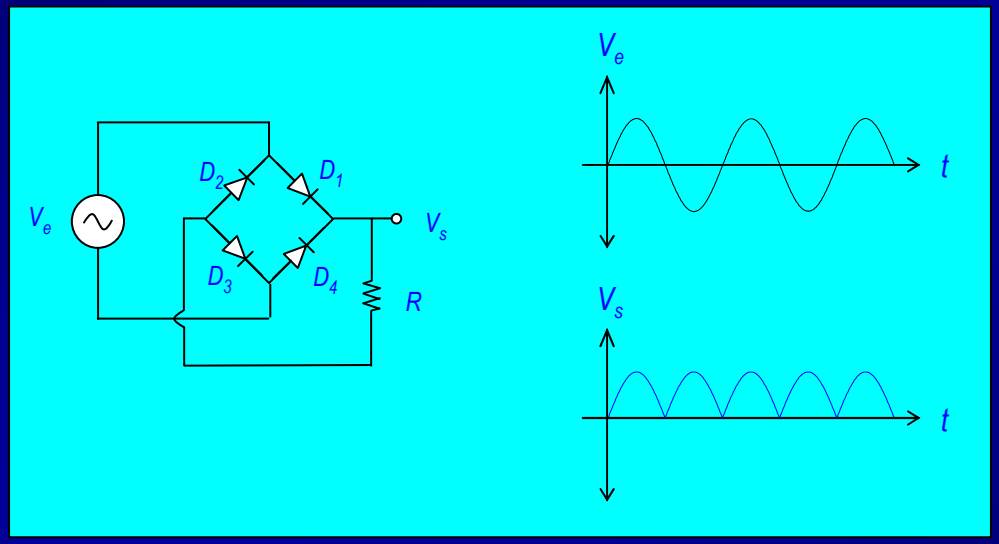
Aplicação básica: retificador de forma de onda (meia onda)



Função do resistor *R*: limitar a corrente que passa pelo diodo

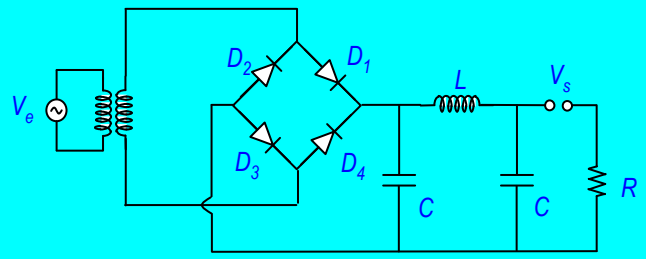
Diodos

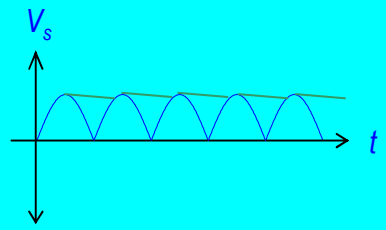
Aplicação: retificador de forma de onda (onda completa)



Diodos

Aplicação: fonte de tensão





Fonte de alimentação DC, com retificação completa e filtragem *LC*

Diodos

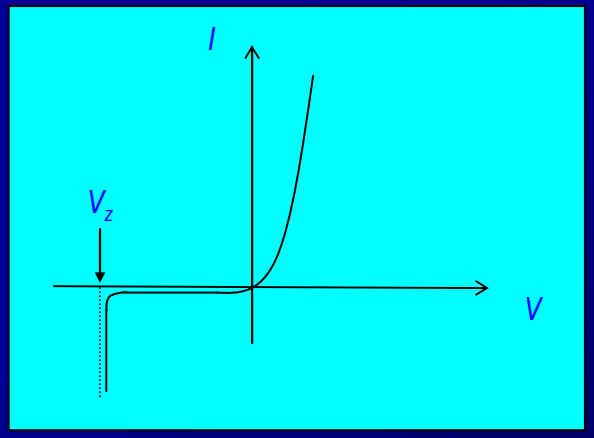
Diodo Zener

• Em um diodo polarizado na direção oposta à condução de corrente, a diferença de potencial tende a aumentar a região de depleção, confinando elétrons e buracos em lados opostos da junção;

• Aumentando esta diferença de potencial chega-se a um limite de ruptura, V_z, a partir do qual elétrons são desprendidos de suas posições na rede cristalina, e acelerados em direção ao eletrodo correspondente;

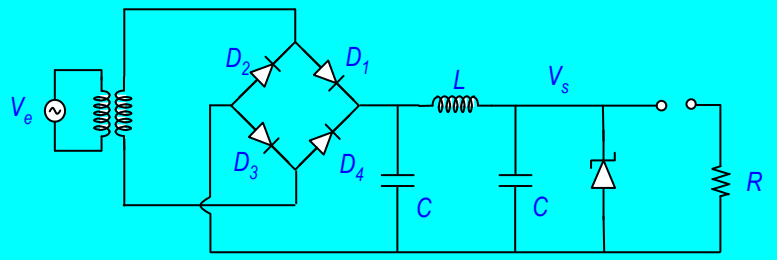
• Um elétron nestas condições colide com outros elétrons, que por sua vez colidem com outros e contribuem em uma avalanche de carga elétrica;

• Resulta que uma corrente importante passa pelo diodo, e esta corrente não é necessariamente destrutiva. Fabricam-se diodos que podem suportar correntes reversas de até alguns amperes.



Diodos

Aplicação do Diodo Zener: regulagem de tensão

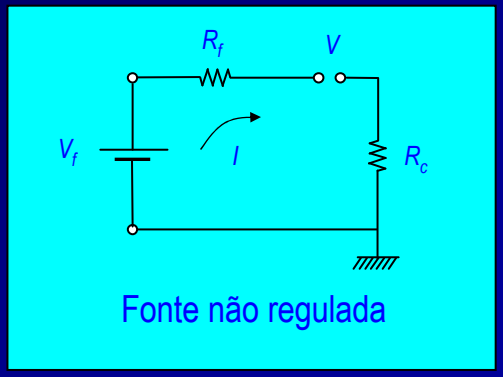


Fonte de alimentação DC, com retificação completa e filtragem *LC*

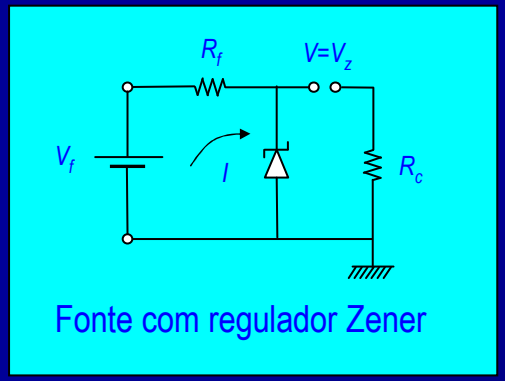
6a. aula

Diodos

Diodo Zener: condições para regulagem



Fonte não regulada



Fonte com regulador Zener

$$V_f - R_f I - V = 0$$
$$\Rightarrow I = \frac{V_f}{R_f} - \frac{1}{R_f} V$$

Diodo operante $\Rightarrow I_z > 0$

$$I = I_z + I_c$$
$$I_z > 0 \Rightarrow I_c < I$$

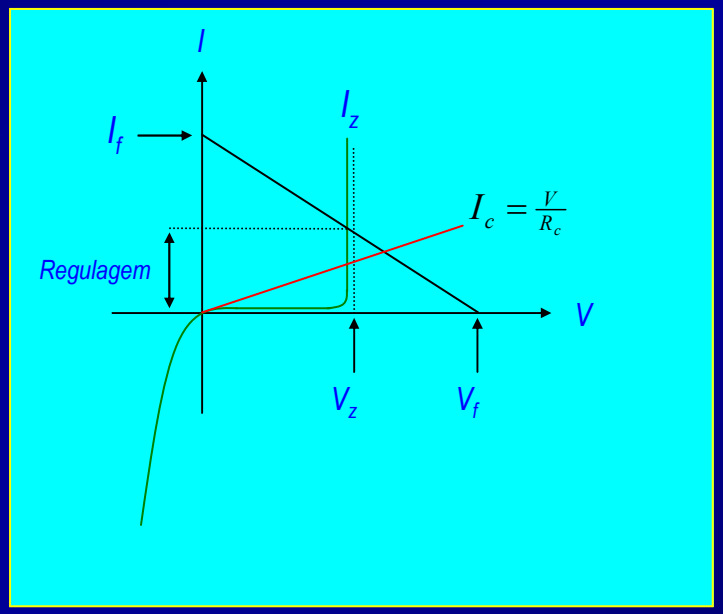
Corrente na carga

$$I_c = \frac{V}{R_c}$$

Diodos

Diodo Zener: condições para regulagem

$$I_f = \frac{V_f}{R_f}$$



Diodos

Modulação e demodulação de freqüência

$$f(x) = K(e^{x} - 1) \Rightarrow f(x) = Kx + \frac{K}{2}x^{2} + \frac{K}{6}x^{3} + \ldots$$

$$I(V) = I_o\left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1\right) \Rightarrow I = a_1 V + a_2 V^2 \qquad \text{para } \frac{eV}{kT} << 1$$

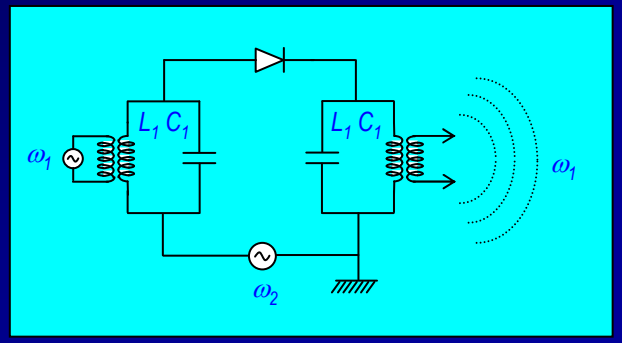
$$V = V(t) = V_1 Sen(\omega_1 t) + V_2 Sen(\omega_2 t)$$

$$\Downarrow$$

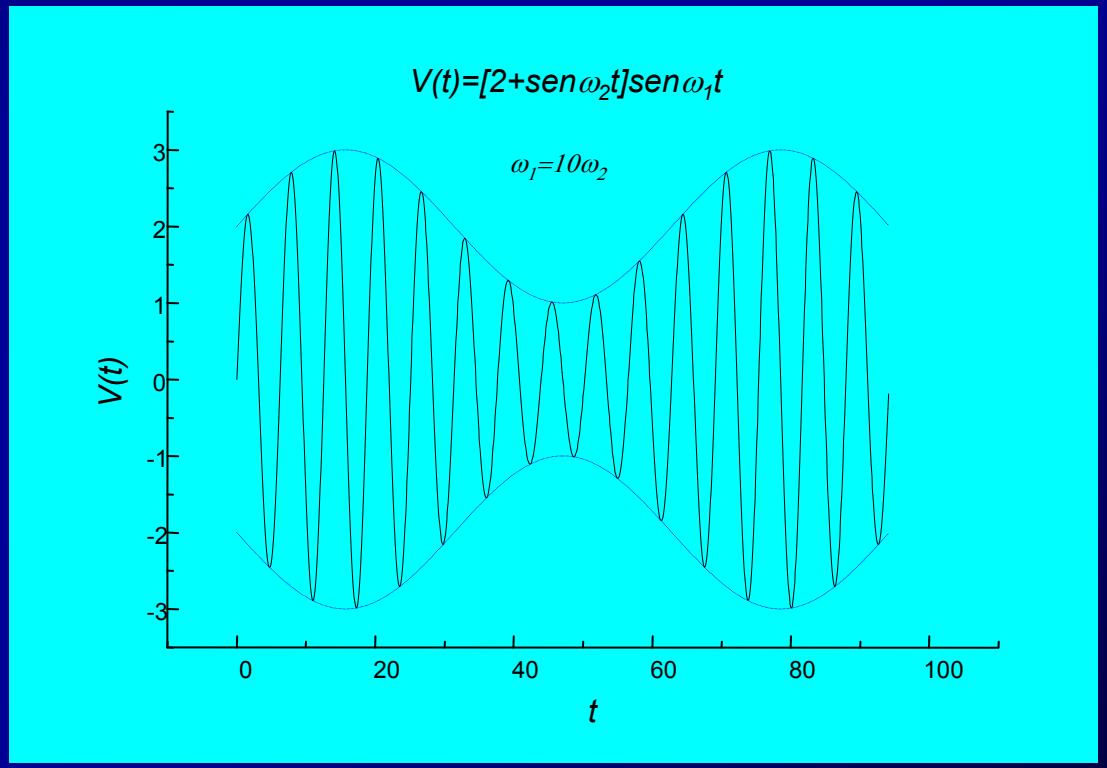
$$I = \underbrace{\frac{a_2}{2}(V_1^2 + V_2^2)}_{\text{constante}} - \frac{a_2}{2}\underbrace{\left[V_1^2\cos(2\omega_1 t) + V_2^2\cos(2\omega_2 t)\right]}_{\text{freqüências dobradas}} + \underbrace{\left[a_1 V_1 + \left(a_1 V_2 + 2a_2 V_1 V_2\right)\text{sen}(\omega_2)t\right]}_{\text{modulação}}\text{sen}(\omega_1 t) + a_1 V_2\ \text{sen}(\omega_2)t$$

Diodos

Circuito de modulação

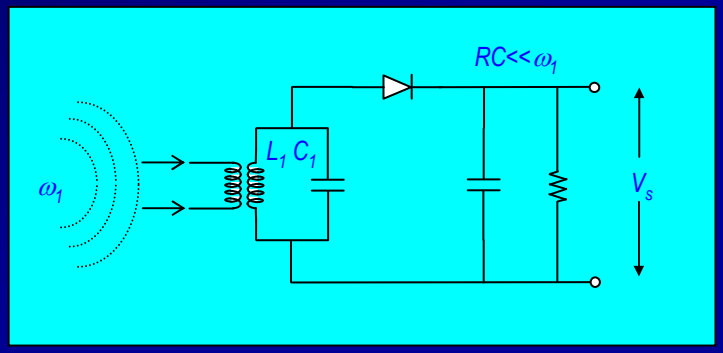


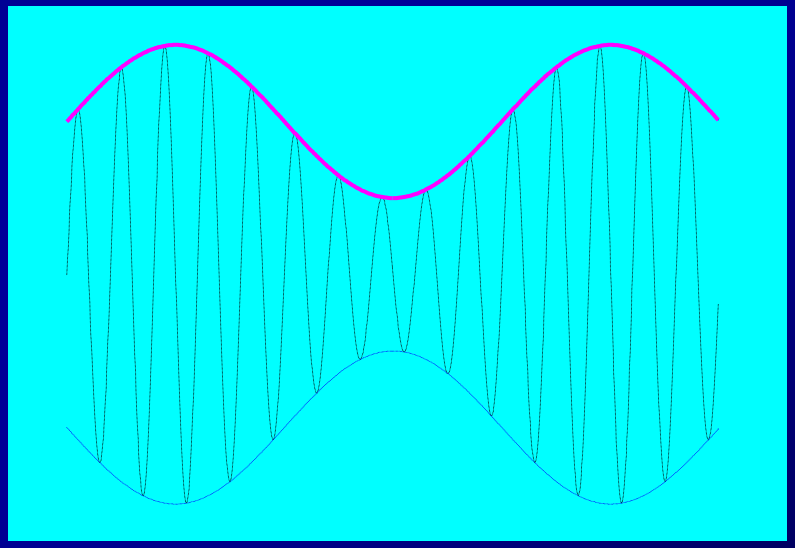
$\omega_1 >> \omega_2$



Diodos

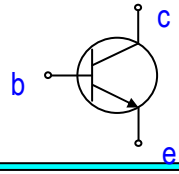
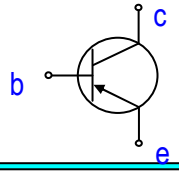
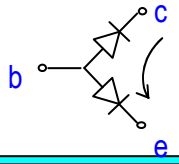
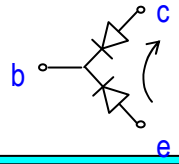
Circuito de demodulação





Transistores bipolares

- Componentes obtidos por uma dupla junção (*npn* ou *pnp*);
- A dupla junção determina 3 terminais: base, emissor, coletor;
- Da base para o emissor há um diodo, que é polarizado para conduzir corrente;
- Da base para o coletor há um diodo polarizado reversamente, funcionando como "reservatório" de portadores de carga ⇒ a corrente de saída provém desta junção

	npn	*pnp*
Junções		
Símbolo		
Circuito		

Transistores bipolares

"MISSÃO" do Transistor:

Fornecer corrente de saída I_e (no emissor) às custas do coletor. Este último obtém corrente de uma fonte de alimentação externa.

A corrente total disponbilizada no emissor é dada por: $I_e=I_c+I_b$ onde I_b é a corrente na entrada (base).

A eficiência de um transistor é medida por:

$$\alpha = \frac{I_c}{I_e}$$

$$I_c = I_e - I_b = \frac{I_c}{\alpha} - I_b$$
$$\Rightarrow I_c\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = I_c\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = I_b$$

$$\therefore I_c = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_b \equiv \beta I_b$$

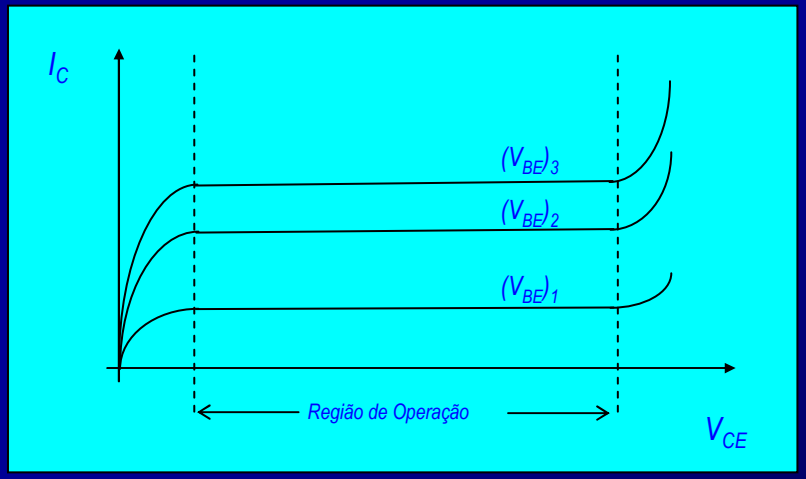
Transistores bipolares

A corrente no coletor é dada por (modelo de Ebers-Moll):

$$I_C = I_S\left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1\right), \text{ com } \quad V_T = \frac{kT}{e} \approx 26mV \text{ a } T \text{ ambiente}$$

V_{BE} = diferença de potencial entre base e emissor

Para que o transistor funcione deve haver uma polarização mínima entre coletor e emissor:



Transistores bipolares

Parâmetros intrínsecos para o transistor em regime dinâmico

$$I_C = I_C(V_{BE}, V_{CE})$$

$$dI_c = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} dV_{BE} + \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} dV_{CE}$$

$$i_c = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} v_{BE} + \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} v_{CE}$$

$$i_c = \beta \frac{\partial I_B}{\partial V_{BE}} v_{BE} + \frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}} v_{CE}$$

Definimos: $r = \frac{\partial V_{BE}}{\partial I_B}$, e $\rho = \frac{\partial V_{CE}}{\partial I_C}$

$$\Rightarrow \quad i_c = \frac{\beta}{r} v_{BE} + \frac{1}{\rho} v_{CE} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r \\ \beta \\ \rho \end{cases} = \text{parâmetros intrínsecos}$$

Transistores bipolares

Como $\rho \approx \infty$

$\Rightarrow$ $i_c \approx \frac{\beta}{r} v_{BE}$ $\Rightarrow$ $r \approx \frac{\beta}{i_C} v_{BE} = \frac{v_{BE}}{i_B}$ (r = resistência de entrada do transistor)

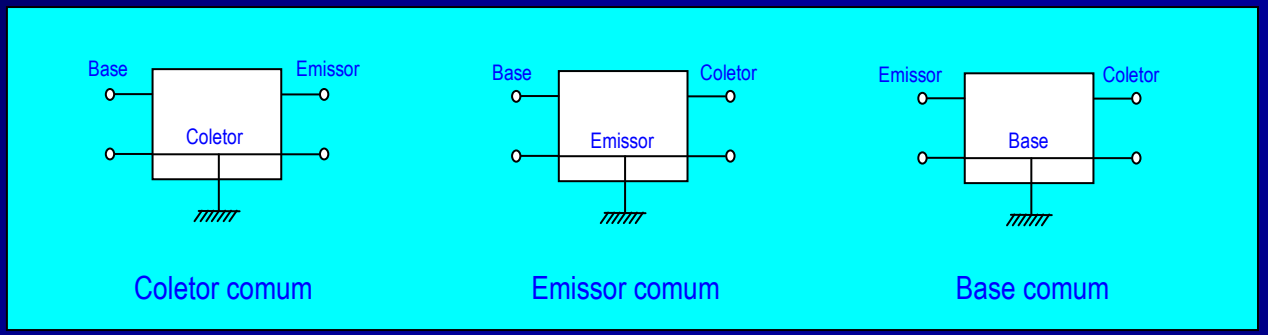
$$\frac{\partial I_C}{\partial v_{BE}} = \frac{\partial}{\partial v_{BE}}\left[I_s \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \right] = \frac{I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}}{V_T} = \frac{I_C + I_S}{V_T} \approx \frac{I_C}{V_T}$$

$$r = \frac{\partial V_{BE}}{\partial I_b} = \beta \frac{\partial V_{BE}}{\partial I_c} = \beta \frac{V_T}{I_c} = \frac{V_T}{I_b}$$

$$\Rightarrow r \approx \frac{26mV}{I_b\,(\mathrm{mA})}$$

Transistores bipolares

Circuitos Básicos

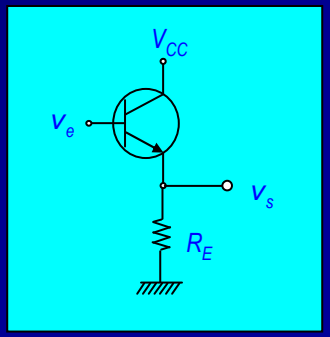


- ganho em tensão (*Av*)
- ganho em corrente (*Ai*)
- impedância de entrada (*Ze*)
- impedância de saída (*Zs*)
- ganho em potência ($Ap = A_v A_i$)

7a. aula

Transistores bipolares

Coletor comum



Ganho em tensão:

$$V_B - V_E \approx 0{,}6 \approx \text{ constante} \Rightarrow v_e \approx v_s \Rightarrow A_v \approx 1$$

Mais precisamente:

$$v_e = ri_B + R_E i_E \qquad v_e = \left[r + (\beta+1)R_E\right] i_B \qquad v_s = R_E i_E = (\beta+1) R_E i_B$$

$$\Rightarrow \quad A_v = \frac{v_s}{v_e} = \frac{(\beta+1)R_E}{r+(\beta+1)R_E}$$

Transistores bipolares

Coletor comum

Ganho em corrente:

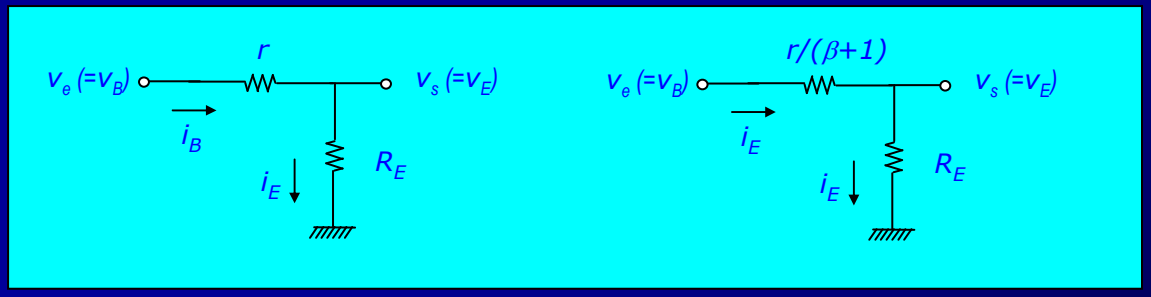
$$i_s = i_E = (\beta+1) i_B = (\beta+1) i_e$$

$$A_i = \frac{i_s}{i_e} = \beta + 1 \approx \beta$$

Impedância de entrada:

$$Z_e = \frac{v_e}{i_e} = \frac{v_b}{i_B} = \frac{[r+(\beta+1)R_E]i_B}{i_B} = r + (\beta+1)R_E \approx \beta R_E$$

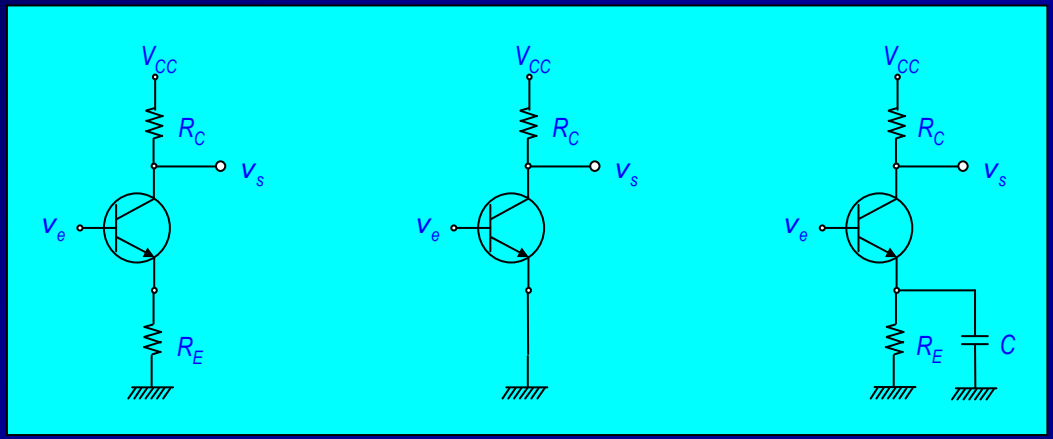
Impedância de saída:



$$v_s = \frac{R_E}{\frac{r}{\beta+1}+R_E} v_e = \frac{(\beta+1)R_E}{r+(\beta+1)R_E} v_e \Rightarrow Z_s = \frac{r}{\beta+1}$$

Transistores bipolares

Emissor comum



Ganho em tensão:

$$V_C = V_{CC} - R_C I_C \quad \Rightarrow \quad v_s = v_c = -R_C i_C$$

$$v_e = v_B \approx v_E = R_E i_E \approx R_E i_C \quad \Rightarrow \quad A_v \approx \frac{-R_C i_C}{R_E i_C} = -\frac{R_C}{R_E}$$

Fazer $R_E=0 \Rightarrow$ máximo ganho em tensão

Transistores bipolares

Mais precisamente:

$$v_e = r i_B + R_E i_E = \left[r + (\beta+1)R_E\right] i_B \quad \Rightarrow \quad \therefore \; A_v = \frac{-R_C i_C}{\left[r+(\beta+1)R_E\right] i_B} = -\frac{R_C(\beta i_B)}{\left[r+(\beta+1)R_E\right] i_B} = -\frac{\beta R_C}{r+(\beta+1)R_E}$$

Ganho em corrente:

$$i_s = i_C = \beta\, i_B = \beta\, i_e \quad \Rightarrow \quad A_i = \beta$$

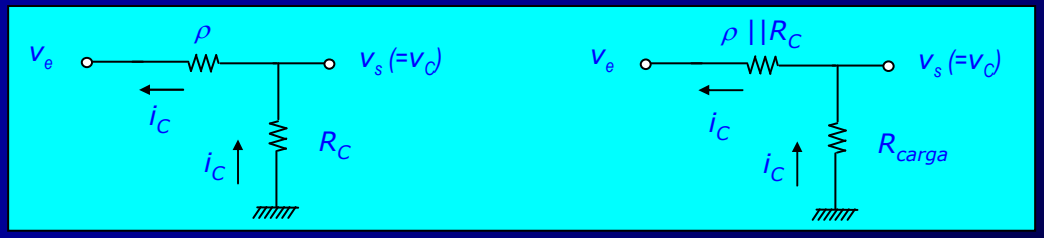
Impedância de entrada:

$$Z_e = \frac{v_B}{i_B} = \frac{\left[r+(\beta+1)R_E\right] i_B}{i_B} = r + (\beta+1)R_E$$

Impedância de saída:

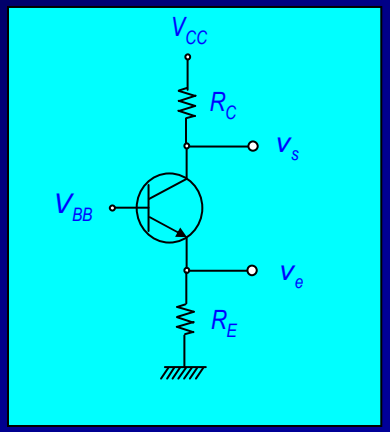
Se R_C é a carga ⇒ corrente vem da junção base-colegor⇒ρ é a impedância de saída

Se a carga é externa ⇒ a corrente vem de ρ || R_C⇒ ρ || *RC* é a impedância de saída



Transistores bipolares

Base comum



O sinal de entrada continua sendo uma variação de tensão entre base e emissor

$$V_{BB} - rI_B = V_E$$
$$\Rightarrow v_e = -ri_B$$

Ganho em tensão

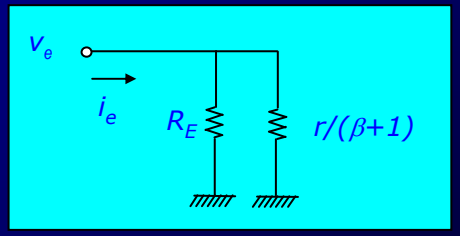
$$A_v = \frac{-R_C i_C}{-r i_B} = \frac{\beta R_C i_B}{r i_B} = \frac{\beta R_C}{r}$$

Ganho em corrente

$$A_i = \frac{-i_C}{i_E} = -\frac{\beta\, i_B}{(\beta+1) i_B} \approx -1$$

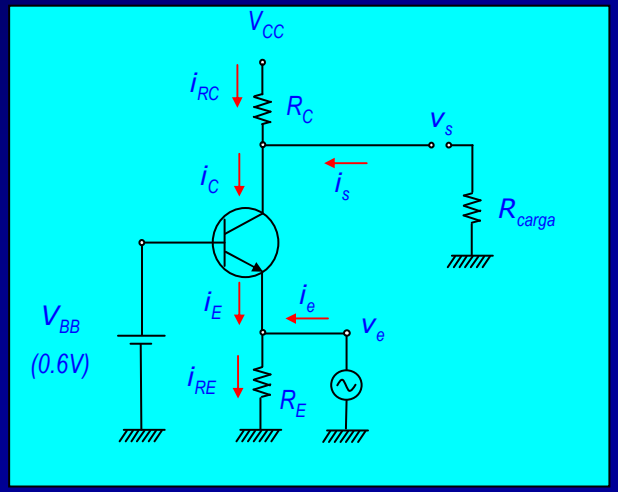
Impedância de entrada

$$Z_{in} = \frac{r}{\beta+1} \,||\, R_E = \frac{\frac{r}{\beta+1} R_E}{\frac{r}{\beta+1} + R_E} \approx \frac{r}{\beta+1}$$



Transistores bipolares

Mais precisamente:



$$i_C = i_s + i_{R_C}$$

$$i_s = \frac{R_C}{R_C + R_{\text{carga}}} i_C$$

$$i_{R_C} = \frac{R_{\text{carga}}}{R_C + R_{\text{carga}}} i_C$$

$$i_{R_E} = i_E + i_e \Rightarrow i_e = i_{R_E} - (\beta+1) i_B$$

$$V_{BB} - r I_B - R_E I_{R_E} = 0 \Rightarrow r i_B = -R_E i_{R_E} \Rightarrow i_{R_E} = -\frac{r}{R_E} i_B$$

$$\therefore A_i = \frac{i_s}{i_e} = \begin{cases} \dfrac{i_C}{i_{R_E} - (\beta+1) i_B} = \dfrac{\beta\, i_B}{-\frac{r}{R_E} i_B - (\beta+1) i_B} = -\dfrac{\beta}{\frac{r}{R_E} + (\beta+1)} \approx -1 & (\text{carga} = R_C) \\ \dfrac{i_C \frac{R_C}{R_C + R_{\text{carga}}}}{i_{R_E} - (\beta+1) i_B} = \dfrac{\beta\, i_B \frac{R_C}{R_C + R_{\text{carga}}}}{-\frac{r}{R_E} i_B - (\beta+1) i_B} = -\dfrac{\beta}{\frac{r}{R_E} + (\beta+1)} \dfrac{R_C}{R_C + R_{\text{carga}}} & (\text{carga externa}) \end{cases}$$

Impedância de saída: idêntico ao caso emissor comum

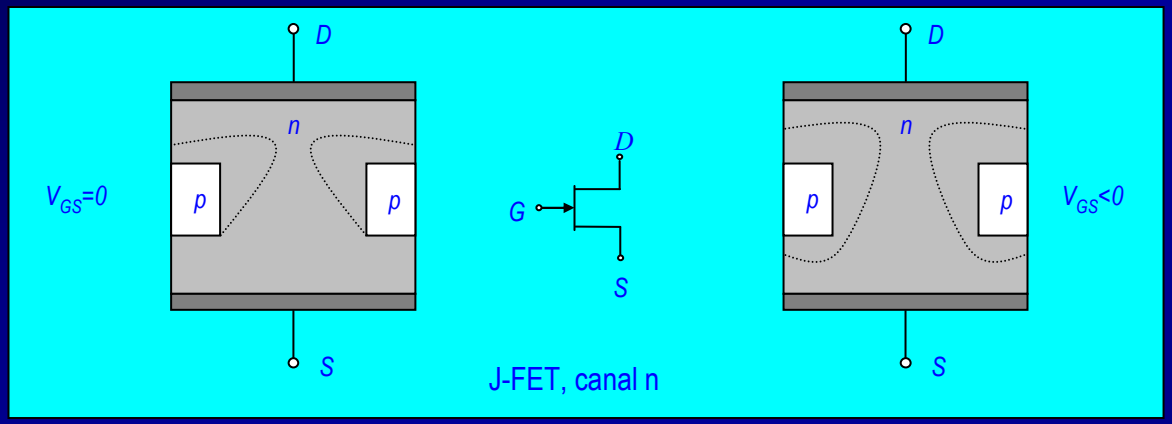
Transistores bipolares

Resumo

	Z_e	Z_s	A_v	A_i	A_p
Coletor comum	$r+(\beta+1)R_E \approx \beta R_E$	$\frac{r}{\beta+1}$	$\frac{(\beta+1)R_E}{r+(\beta+1)R_E}$	$\beta+1\approx\beta$	$\approx\beta$
Emissor comum	$r+(\beta+1)R$	ρ ou $R_C\|\|\rho$	$-\frac{\beta R_C}{r+(\beta+1)R_E}$	β	$-\frac{\beta^2 R_C}{r+(\beta+1)R_E}$
Base comum	$\frac{rR_E}{(\beta+1)R_E+r} \approx \frac{r}{\beta+1}$	ρ ou $R_C\|\|\rho$	$\frac{\beta R_C}{r}$	$-\frac{\beta}{\frac{r}{R_E}+(\beta+1)}$	$-\frac{\beta^2 R_C}{\frac{1}{R_E}+r(\beta+1)}$

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

(*) FET = Field Effect Transistor



• Dois terminais condutores são previstos nas extremidades opostas de uma região dopada com excesso de portadores tipo *n*.

• Entre estes terminais implanta-se uma região com excesso de portadores tipo *p*. Os terminais condutores são denominados 'fonte' (referido como *S*, de *source*) e 'dreno' (referido como *D*, de *drain*).

• O terceiro terminal é implementado na região p, e é denominado 'porta' (referido como *G*, de *gate*).

•Estabelecendo-se uma diferença de potencial entre *D* e *S* (V_{DS}) favorece-se a passagem de corrente de *S* a *D* (canal *S*-*D*).

• O valor desta corrente não varia linearmente com V_{DS}. Supondo que porta e fonte estejam ao mesmo potencial (V_{GS}=*0*) $\Rightarrow$ à medida em que se aumenta V_{DS}, forma-se uma região de depleção cada vez maior entre *G* e *D*.

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

• Para valores de V_{DS} muito pequenos o volume da região de depleção é desprezível, e a corrente nesse caso varia linearmente com V_{DS}.

• Se aumentamos o valor de V_{DS}, aumentamos o volume da região de depleção $\Rightarrow$ a resistividade do canal *S-D* também aumenta, de modo que relação de linearidade entre corrente e V_{DS} é gradualmente perdida.

• Continuando a aumentar V_{DS} , chega-se a uma situação limite em que as duas regiões de depleção praticamente se encontram através do canal.

• A partir deste limite, incrementos de V_{DS} são contra-balanceados pelo incremento da resistividade do canal, de tal forma que a corrente permanece aproximadamente constante para uma ampla faixa de valores de V_{DS}.

• O valor de V_{DS} para o qual a situação limite é atingida é conhecido como tensão de ruptura *(pinchoff)* do canal.

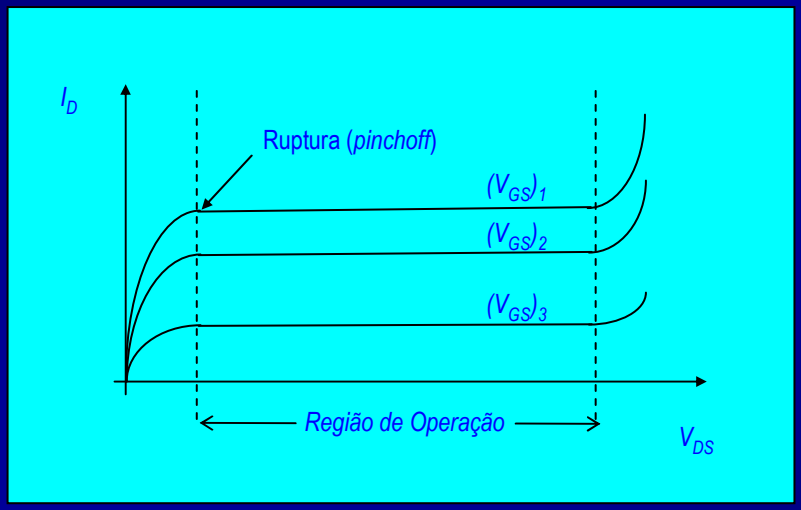
• Esta tensão marca o início da região de operação do dispositivo como um transistor. Além da região de operação, ou seja, para valores de V_{DS} muito elevados, ocorre ruptura da própria junção *pn*.

• Caso a tensão V_{GS} seja menor que zero a mesma análise é válida, mas observamos que a corrente obtida na região de operação é menor do que a verificada quando $V_{GS}=0$. Isto se deve essencialmente ao fato de que $V_{GS}<0$ se opõe à passagem de corrente pelo canal (diodo polarizado reversamente).

• V_{GS} não deve ser positiva. Nesse caso haveria condução de corrente no sentido oposto a I_D no diodo configurado na junção *pn*, o que impediria o funcionamento regular do transistor.

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

Curvas características I_D x V_{DS} para transistores a efeito de campo com canal *n*.



Modelo matemático para I_D x V_{GS} para transistores a efeito de campo com canal *n*.

$$I_D = I_{DSS}\left(1 + \frac{V_{GS}}{V_T}\right)^2$$

I_{DSS} = Corrente *"**D**rain to **S**ource with gate **S**horted"*

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

Parâmetros intrínsecos para o FET

$$I_D = I_D(V_{GS}, V_{DS})$$

$$\Rightarrow dI_D = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} dV_{GS} + \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} dV_{DS}$$

$$i_D = s v_{GS} + \frac{1}{\rho} v_{DS}$$

$$s = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}, \quad \rho = \frac{\partial V_{DS}}{\partial I_D}$$

$$\rho \approx \infty \Rightarrow \quad \frac{1}{s} \approx \frac{v_{GS}}{i_D}$$

s = transcondutância do FET

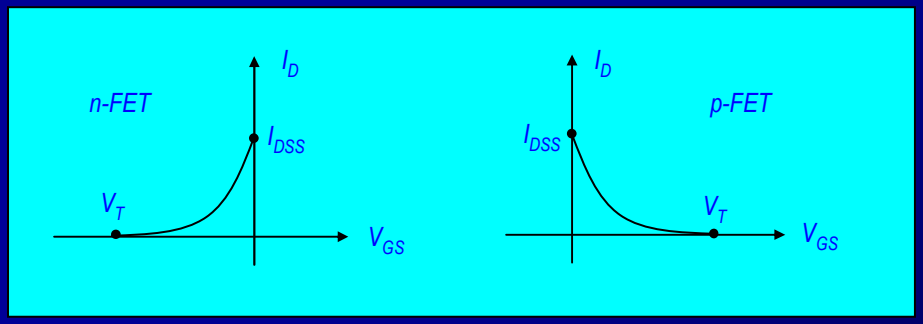
Transistores a efeito de campo *(FETs)*

Outros tipos de FETs

J-FET canal p

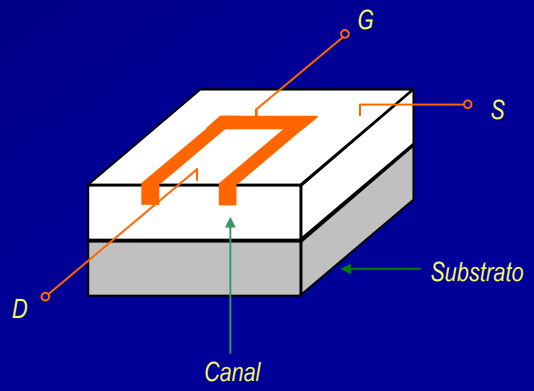
Caso substituamos o semicondutor presente no canal por outro dopado com impurezas do tipo p e o *gate* por um do tipo n, chegamos a um dispositivo que também opera como transistor. A diferença é que no FET com canal p a polarização VGS tem que ser invertida relativamente ao n-FET. A equação para I_D em função de V_{GS} muda para:

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_T}\right)^2$$

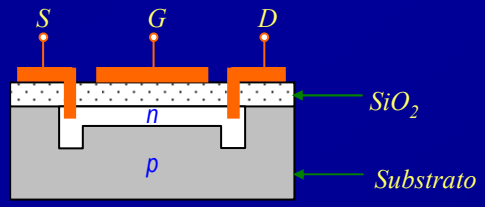


Transistores a efeito de campo *(FETs)*

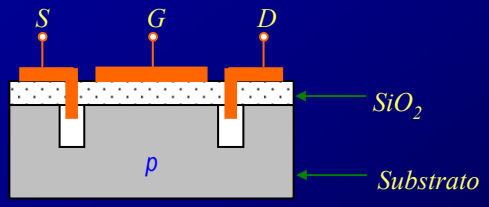
MOS-FET, Insulated Gate FET, Enhancement FET



Esboço genérico da implementação de um *FET*



MOS-FET

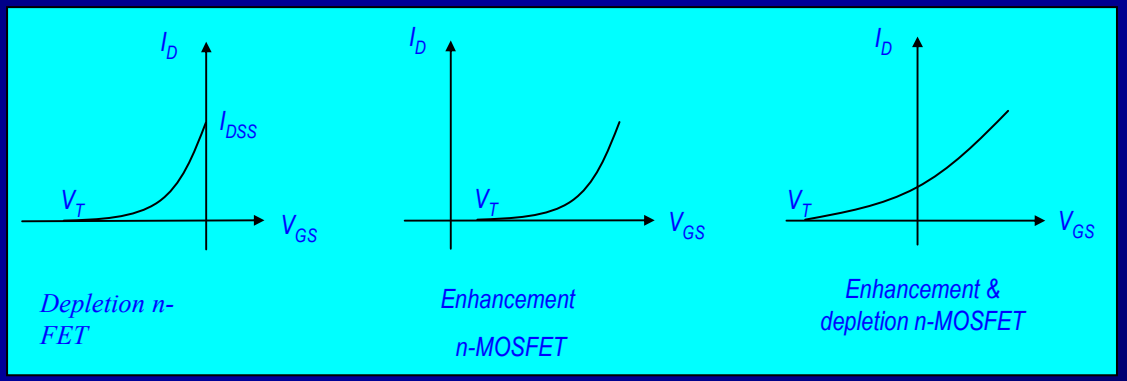


enhanced MOS-FET

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

Dependência I_D x V_{GS}

Pelo controle da geometria, composição e polarização (inclusive do substrato) podem-se obter diferentes características de operação para os FETs

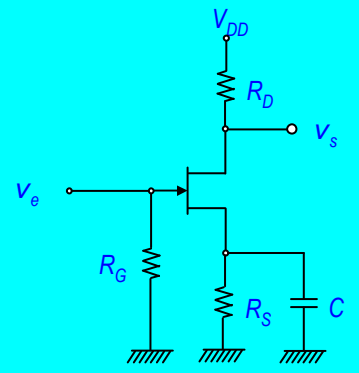


8a. aula

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

Configurações básicas de circuitos com FETs

- A principal característica dos transistores a efeito de campo é a alta impedância de entrada.
- No caso dos MOSFETs, como o terminal de entrada está fisicamente isolado dos outros terminais, a resistência de entrada atinge valores altíssimos, tipicamente da ordem de $10^{14}\ \Omega$. Sinais elétricos são transmitidos devido essencialmente a variações de campo elétrico através do material isolante presente entre o eletrodo de entrada e o semicondutor. Por isto: "transistores a efeito de campo".
- No caso dos FETs de junção, ou J-FETS, a impedância de entrada também é alta porque a junção semicondutora *gate-source* é polarizada reversamente.



FET em modo *source*-comum.

$$V_{DD} - R_D I_D = V_D = V_s \Rightarrow v_s = -R_D i_D$$
$$i_D = s v_{GS} = s v_e \Rightarrow v_s = -R_D s v_e$$
$$\Rightarrow A_v = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-R_D s v_e}{v_e} = -sR_D$$

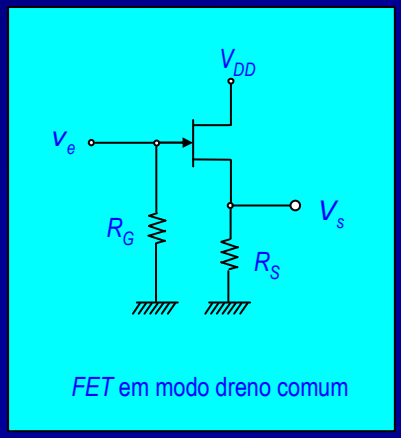
$$s = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} = \frac{2I_{DSS}}{V_T}\left(1 + \frac{V_{GS}}{V_T}\right)$$
$$s_{\max} \Rightarrow V_{GS} = 0$$

Ganho em tensão é máximo quando V_{GS}=0

Transistores a efeito de campo *(FETs)*

- A impedância de entrada é praticamente infinita;
- Justamente por isto, é importante a presença do resistor R_G, para fixar o ponto de polarização do *gate*.
- A impedância de saída é obtida pelo mesmo raciocínio usado para a configuração emissor-comum ou base-comum de transistores bipolares: $R_D \parallel \rho$ (carga externa) ou ρ (se R_D é a própria carga).
- Não faz muito sentido computar o ganho em corrente para um FET, pois não há corrente de entrada.

Outra possível montagem com FET



FET em modo dreno comum

A mesma corrente passa por *source* e dreno:

$$v_s = R_S i_S = R_S i_D = R_S s v_{GS} = sR_s(v_G - v_S)$$

$$v_G = v_e \Rightarrow v_s(1 + sR_s) = sR_s v_e$$

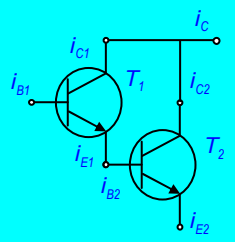
$$\therefore A_v = \frac{v_s}{v_e} = \frac{sR_s}{(1+sR_s)}$$

Divisor de tensão:

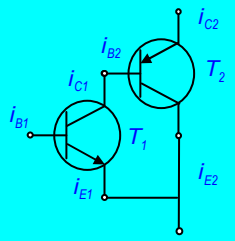
$$v_s = \frac{R_s}{\frac{1}{s}+R_s} v_e \Rightarrow \text{impedância de saída} = \frac{1}{s}$$

Associações de Transistores

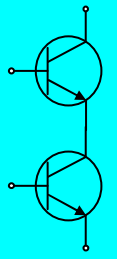
Exemplos de associações



Montagem Darlington



Montagem a Transistor Complementar



Montagem Cascode

	β_{eq}	r_{eq}
Darlington	$\beta_1+\beta_2(\beta_1+1)$	$r_1+r_2(\beta_1+1)$
Complementar	$\beta_1\beta_{2+}(\beta_1+1)$	r_1
Cascode	$\beta_1\beta_2/(\beta_2+1)$	r_1

Associações de Transistores

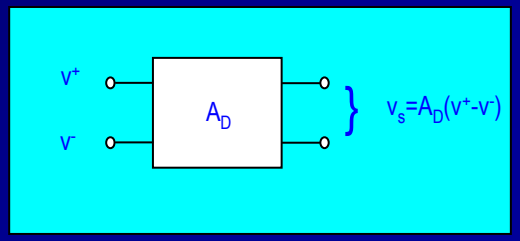
Transistores: variedade de aplicações praticamente inesgotável

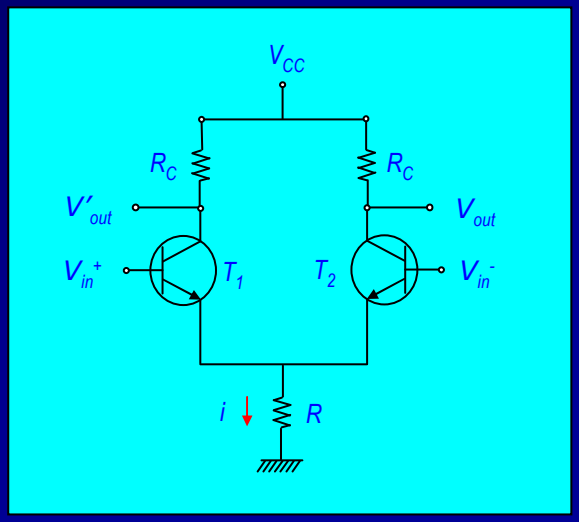
- **Amplificadores** (de carga, de tensão, de corrente, de potência)
- **Filtros** ativos (em combinação com resistores, capacitores e indutores)
- **Adaptadores** de impedância
- **Fontes** (de corrrente, de tensão)
- **Sensores** (de temperatura, de luz)
- **Chaveadores** a alta frequência
- **Portas lógicas**

(...)

Associações de Transistores

Amplificador diferencial





$$v_{out} = -R_C i_{C2} = -\beta R_C i_{B2}$$
$$i = i_{E1} + i_{E2} = (\beta+1) i_{B1} + (\beta+1) i_{B2}$$
$$\therefore i = (\beta+1)(i_{B1} + i_{B2})$$

$$v_{in}^{+} = r i_{B1} + R i = r i_{B1} + (\beta+1)(i_{B1} + i_{B2})$$
$$v_{in}^{-} = r i_{B2} + R i = r i_{B2} + (\beta+1)(i_{B1} + i_{B2})$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_{in}^{+} + v_{in}^{-} = r(i_{B1} + i_{B2}) + 2(\beta+1)(i_{B1} + i_{B2}) \\ v_{in}^{+} - v_{in}^{-} = r(i_{B1} - i_{B2}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} i_{B1} + i_{B2} = \frac{v_{in}^{+} + v_{in}^{-}}{r + 2R(\beta+1)} \\ i_{B1} - i_{B2} = \frac{v_{in}^{+} - v_{in}^{-}}{r} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} i_{B1} = \frac{1}{2}\left[\frac{v_{in}^{+} + v_{in}^{-}}{r + 2R(\beta+1)} + \frac{v_{in}^{+} - v_{in}^{-}}{r}\right] \\ i_{B2} = \frac{1}{2}\left[\frac{v_{in}^{+} + v_{in}^{-}}{r + 2R(\beta+1)} - \frac{v_{in}^{+} - v_{in}^{-}}{r}\right] \end{cases}$$

Associações de Transistores

$$v_{out} = -R_C i_{C2} = -\beta R_C i_{B2}$$

$$v_{out} = \frac{\beta R_C}{2}\left[\frac{\left(v_{in}^{+} - v_{in}^{-}\right)}{r} - \frac{\left(v_{in}^{+} + v_{in}^{-}\right)}{r + 2R(\beta+1)}\right]$$

$$v_{out} = A_D\left(v_{in}^{+} - v_{in}^{-}\right) + A_C\left(v_{in}^{+} + v_{in}^{-}\right)$$

$$A_D = \frac{\beta R_C}{2r}$$

$$A_C = \frac{\beta R_C}{2[r + 2R(\beta+1)]}$$

⇒ Chegamos ao amplificador diferencial, desde que tenhamos $A_C = 0$

$$v'_{out} = -R_C i_{C1} = -\beta R_C i_{B1}$$

$$v'_{out} = -\frac{\beta R_C}{2}\left[\frac{\left(v_{in}^{+} - v_{in}^{-}\right)}{r} + \frac{\left(v_{in}^{+} + v_{in}^{-}\right)}{r + 2R(\beta+1)}\right]$$

$$v'_{out} = -A_D\left(v_{in}^{+} - v_{in}^{-}\right) + A_C\left(v_{in}^{+} + v_{in}^{-}\right)$$

$$\Rightarrow v_{out} - v'_{out} = 2A_D\left(v_{in}^{+} - v_{in}^{-}\right)$$

⇒ Poderíamos tomar o sinal de saída entre v_{out} e v'_{out}, mas desta maneira nenhum dos dois poderia ser conectado ao terra

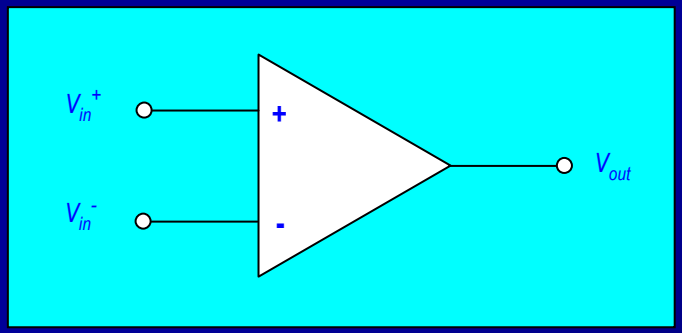
Associações de Transistores

⇒ A melhor maneira de se obter o amplificador diferencial é fazer $A_C=0$

$$A_C = \frac{\beta R_C}{2[r+2R(\beta+1)]}$$

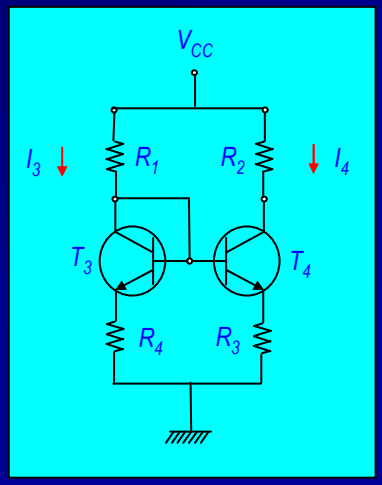
$$A_C = 0 \Rightarrow R = \infty$$

Com isto obtemos um dispositivo do tipo



Associações de Transistores

Para fazer $R=\infty$



$$I_C \approx I_E$$

$$V_{CC} = R_1 I_3 + V_{BE}^3 + R_3 I_3$$

$$I_3 = \frac{V_{CC} - V_{BE}^3}{R_1 + R_3}$$

$$V_{BE}^3 + R_3 I_3 = V_{BE}^4 + R_4 I_4$$

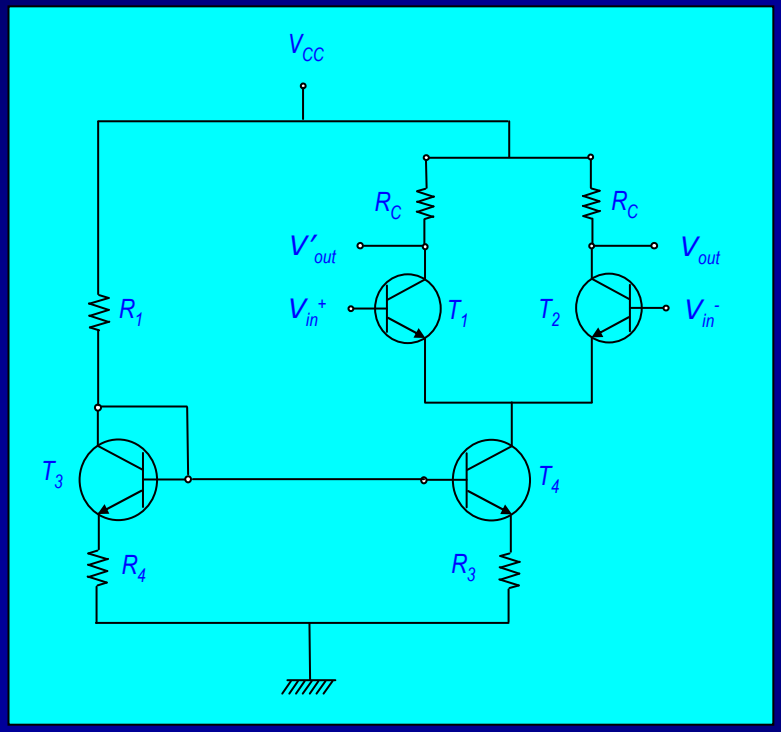
$$I_4 = \frac{V_{BE}^3 - V_{BE}^4}{R_4} + \frac{R_3}{R_4} I_3 \approx \frac{R_3}{R_4} I_3$$

- I_3 e I_4 não dependem de R_2;
- Para $R_3=R_4 \Rightarrow I_3=I_4$;
- Variações de tensão sobre R_2 vêm impedância infinita (ρ);

$\therefore$ Este circuito pode ser usado como um componente de resistência infinita pelo qual passa corrente *i*

Amplificador Operacional

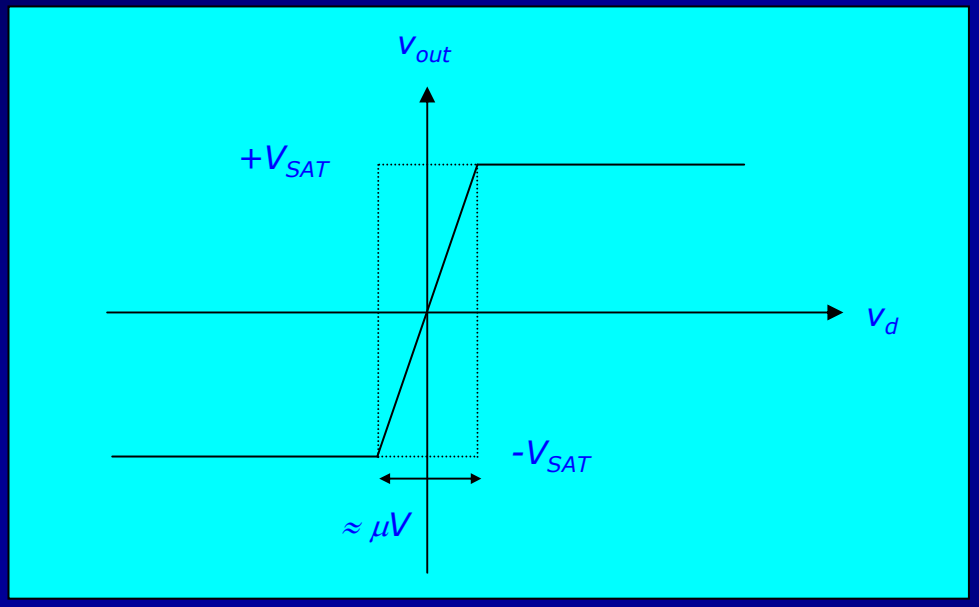
Ponto de partida: amplificador diferencial



Adicionam-se: estágio de ganho + estágio de *driver*

- Ganho elevado (da ordem de 10^6)
- Impedância de entrada alta
- Impedância de saída baixa

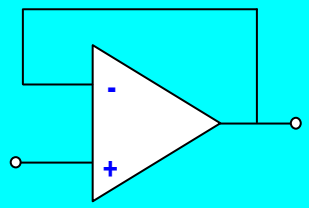
Amplificador Operacional



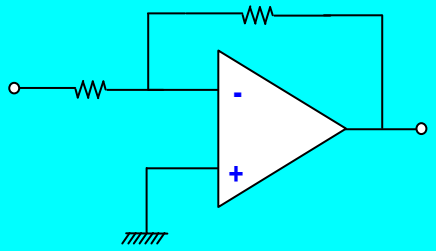
- $v_d \approx 0 \Rightarrow$ terra virtual
- O amplificador operacional geralmente trabalha com realimentação negativa (para sair da saturação)

Amplificador Operacional

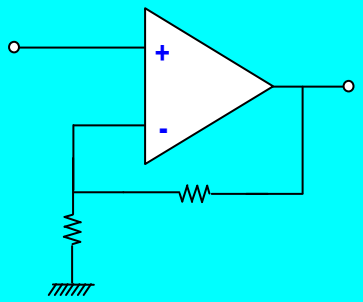
Aplicações “clássicas” dos amplificadores operacionais



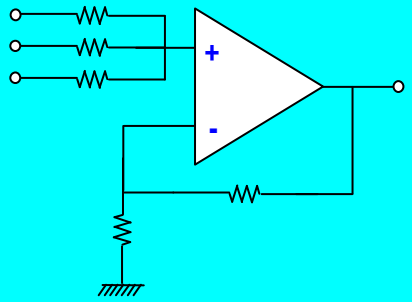
“Buffer”



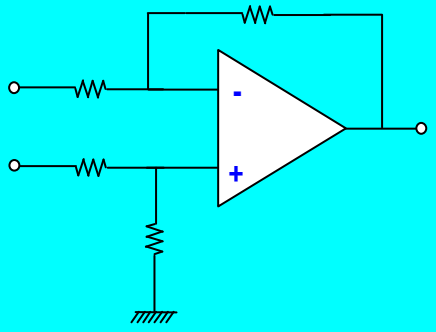
Amplificador inversor



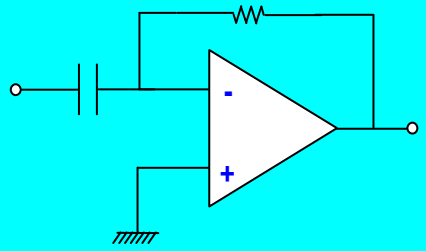
Amplificador não-inversor



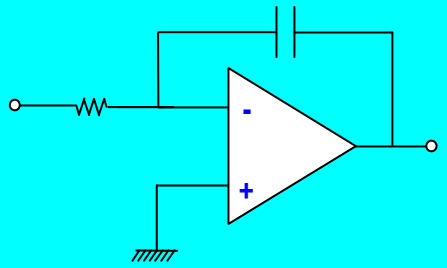
Somador



Subtrator



Diferenciador

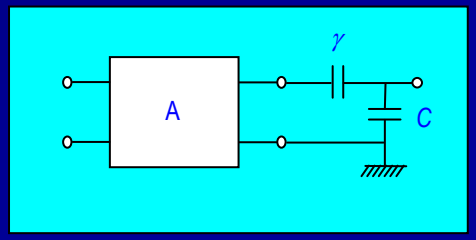


Integrador

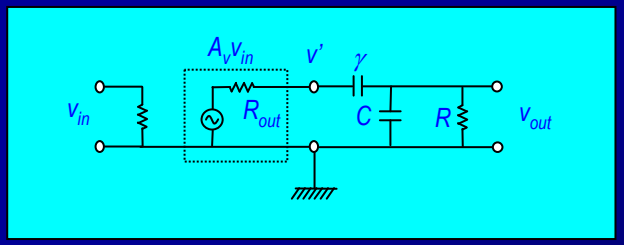
Banda passante: influência de capacitâncias

Influências externas

Capacitores são introduzidos para realizar acoplamento AC, desacoplamento DC, e também como componentes “parasitas” somados ao circuito de carga



Circuito equivalente



$$T = \frac{v_{out}}{v'} \frac{v'}{v_{out}}$$

Banda passante: influência de capacitâncias

$$T = \frac{AZ}{\frac{1}{i\omega\gamma} + Z + R_{out}}; \qquad Z = \frac{R}{1 + i\omega RC}$$

γ e ω são tipicamente diferentes em magnitude:

$\gamma \rightarrow$ *grande (acoplamento, desacoplamento)*

C $\rightarrow$ pequena (parasita, residual)

$$T \approx \frac{T_o}{1 + i\frac{\omega}{\omega'}}$$ → Freqüências altas (passa-baixa)

$$T \approx \frac{T_o}{1 - i\frac{\omega''}{\omega}}$$ → Freqüências baixas (passa-alta)

$$T \approx T_o = \frac{AR}{R + R_{out}}$$ → Freqüências intermediárias

$$\omega' = \frac{R + R_{out}}{RR_{out}C}$$

$$\omega'' = \frac{1}{\gamma(R + R_{out})}$$

Banda passante: influência de capacitâncias

Influências internas

As influências internas são devidas à capacitância das próprias junções de semi-condutores;

A mais importante é a capacitância de base para coletor, pois implica realimentação de sinal.

O efeito final se traduz sobre uma variação do parâmetro β com a freqüência:

$$\beta = \frac{\beta_o}{1+i\frac{\omega}{\omega_\beta}}$$

$$\omega_\beta = \frac{1}{rC}$$

$$C = C_{BE} \,||\, C_{BC}$$

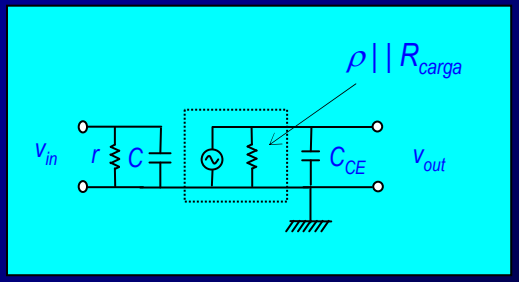
$$f_\beta = \frac{1}{2\pi\omega_\beta}$$

$$f >> f_\beta \Rightarrow \beta \approx \frac{f_\beta \beta_o}{if} \Rightarrow |\beta| \approx \frac{f_\beta \beta_o}{f} \equiv \frac{f_T}{f}$$

$$C = C_{BE} \,||\, C_{BC}$$

f_T é fornecido pelo fabricante.

f_T é a frequência para a qual β se reduz a *1*.



Banda passante: influência de capacitâncias

$$\beta = \frac{i_C}{i_B}$$

$$i_B = \frac{v_{BE}}{Z_{in}}$$

$$Z_{in} = r \,||\, C = \frac{r}{1+i\omega rC}$$

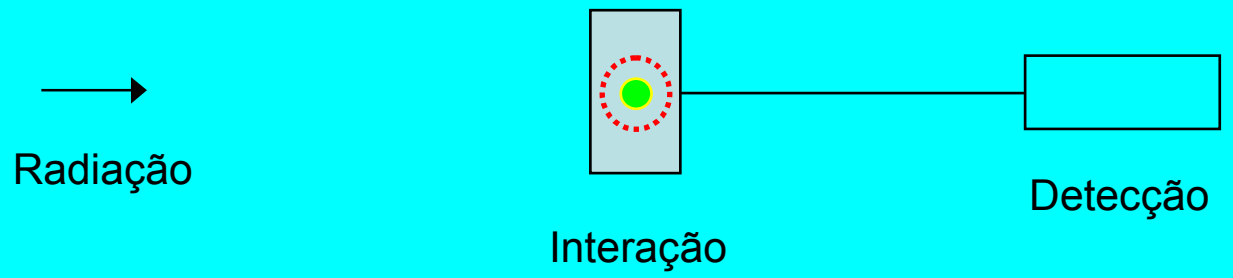
$$s \equiv \frac{i_C}{v_{BE}} = \frac{i_C}{i_B Z_{in}} = \frac{i_C}{i_B \frac{r}{1+i\omega rC}}$$

$$\Rightarrow \frac{i_C}{i_B} = \beta = \frac{sr}{1+i\omega rC} = \frac{\beta_o}{1+i\omega rC}$$

Eletrônica para Detecção de Partículas

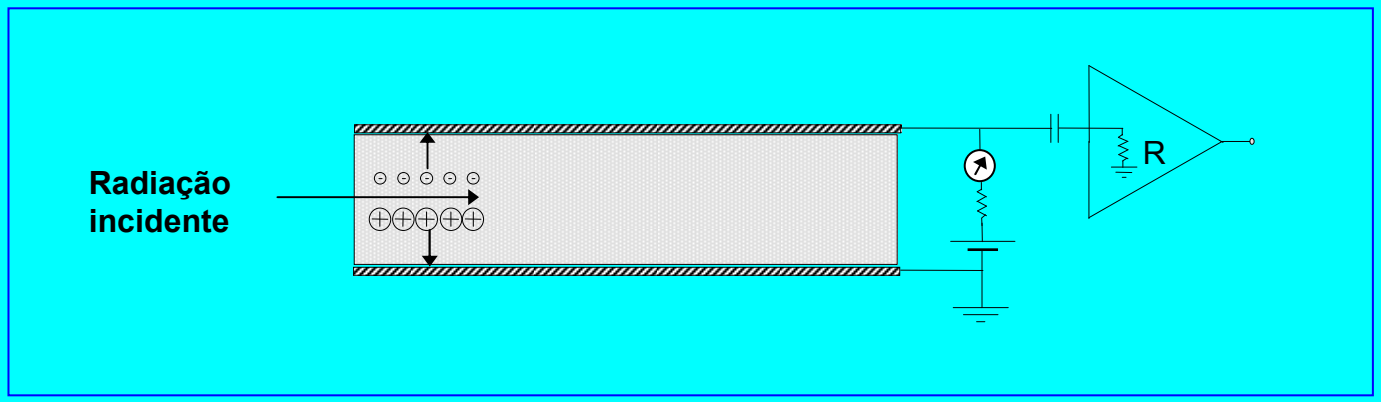
Como detectar partículas ?

- **Radiação** transporta energia, como se fosse composta por **partículas** objetivamente identificáveis, cada uma veiculando uma contribuição quantitativa (*quanta*)
- A detecção de partículas implica conversão da energia em algum tipo de sinal mensurável (Exemplos: **sinais elétricos** e luminosos)

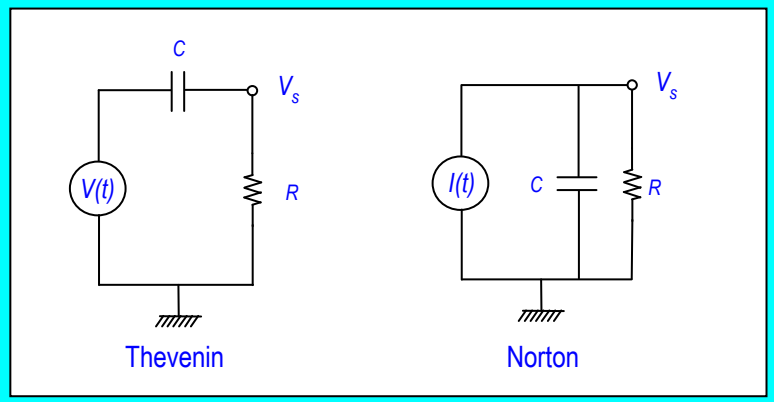


Eletrônica para Detecção de Partículas

Abordagem básica



Circuito elétrico equivalente

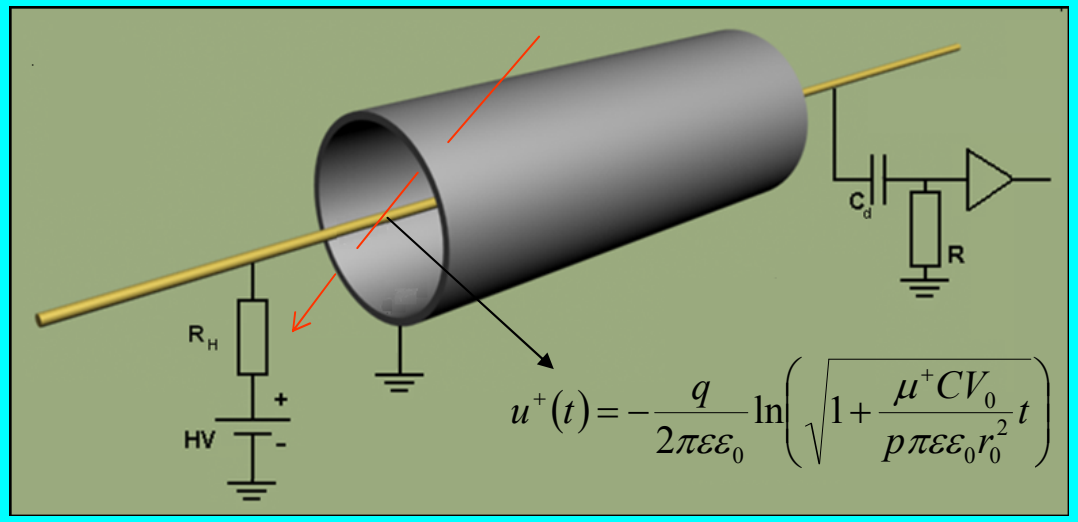


C = capacitância do detector

R = impedância do amplificador

Eletrônica para Detecção de Partículas

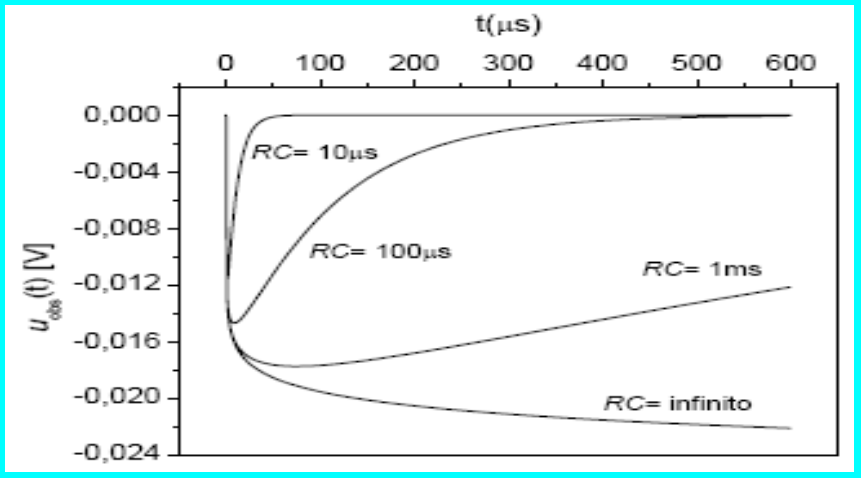
Montagem prática – detector a gás



- Partícula ioniza moléculas do gás
- Elétrons e íons migram em direção aos eletrodos
- O movimento de cargas gera um sinal elétrico *u(t)*

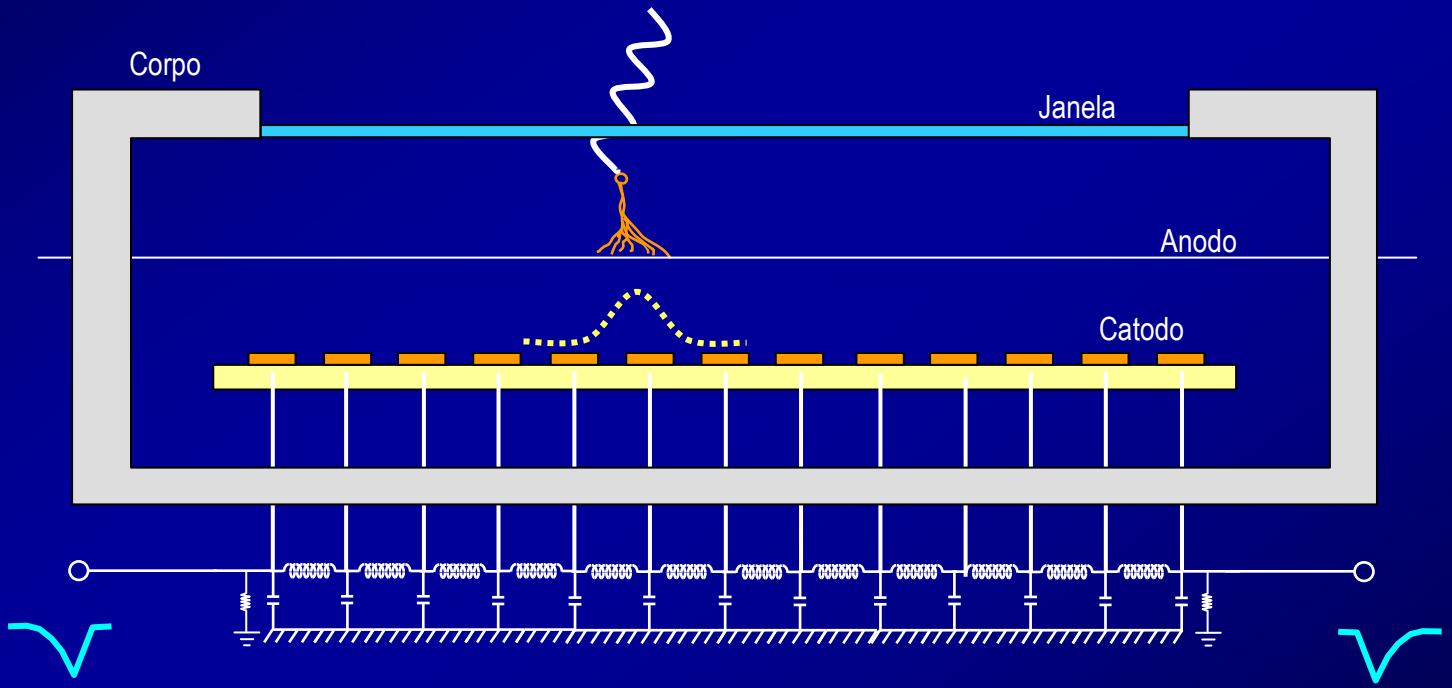
A ação de *R* e *C* sobre o sinal se reduz a:

$$u(t) \cong u^+(t)\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Eletrônica para Detecção de Partículas

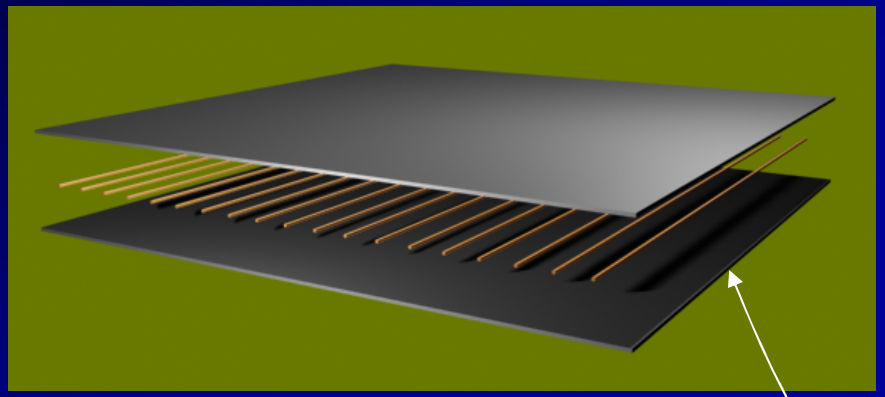
Registro de posição da partícula detectada

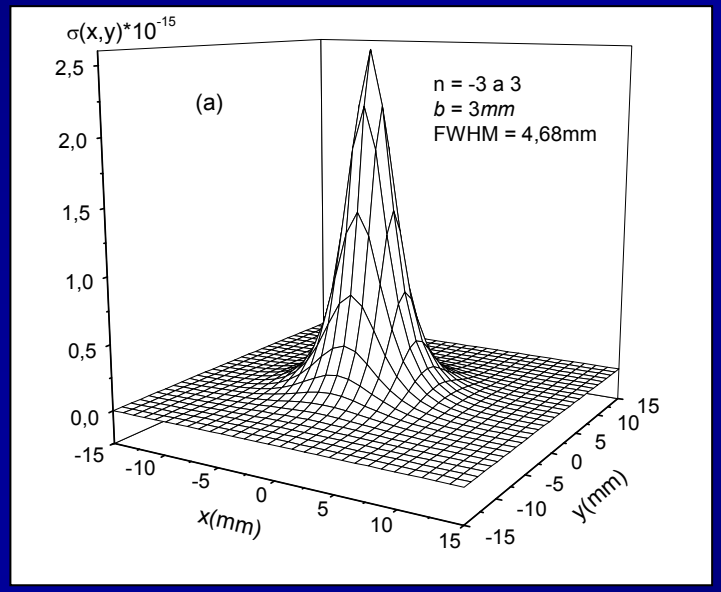


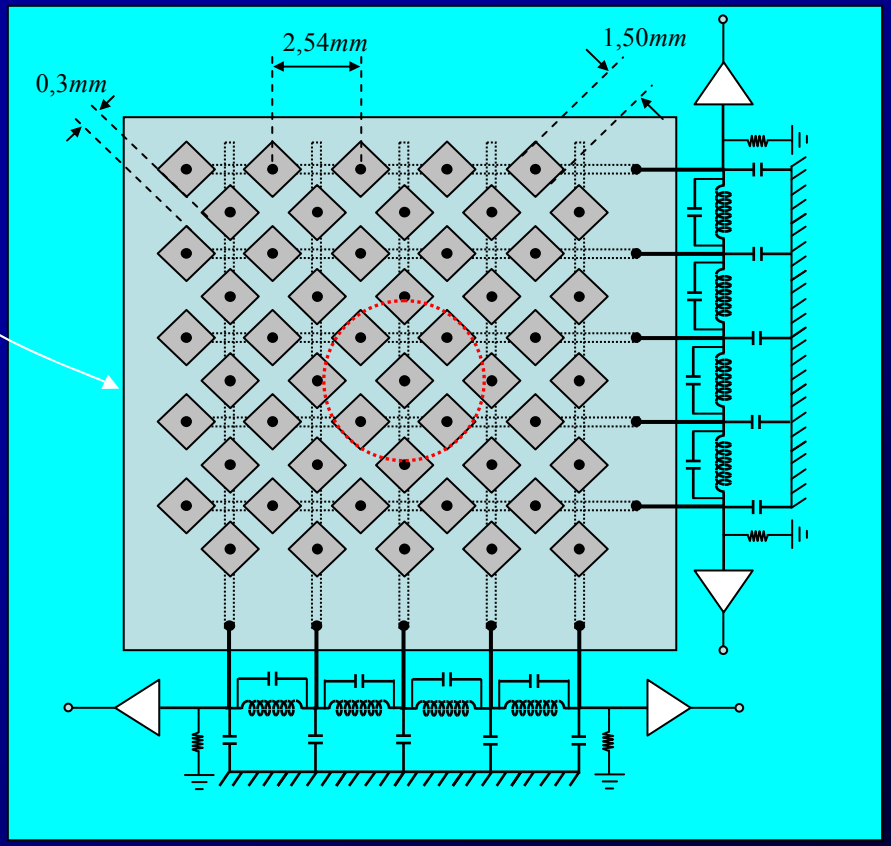
Posição ≈ tempo de propagação dos sinais através da linha de retardo

Eletrônica para Detecção de Partículas

Estrutura para detecção bidimensional

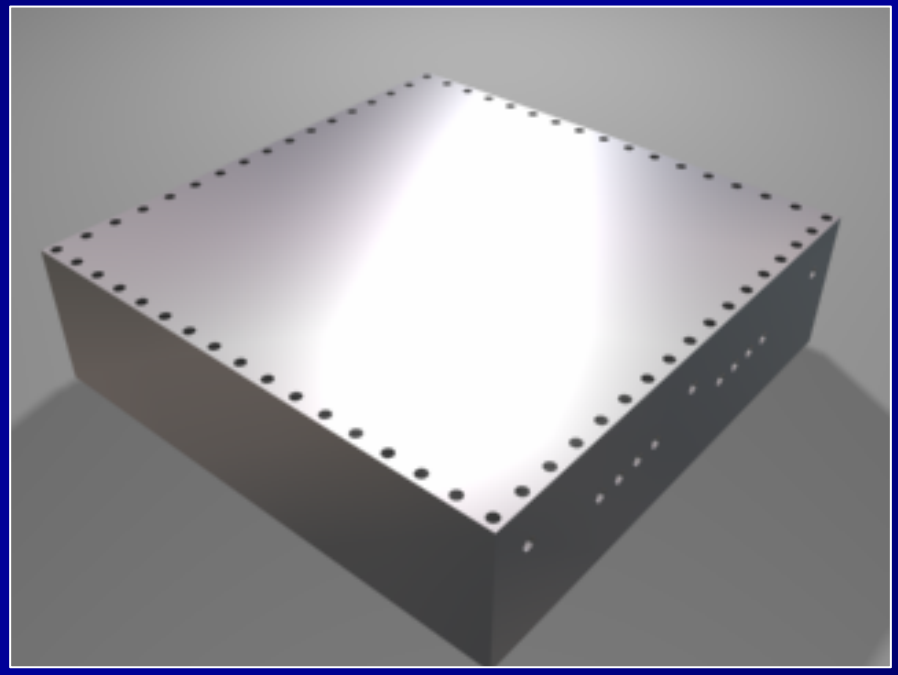






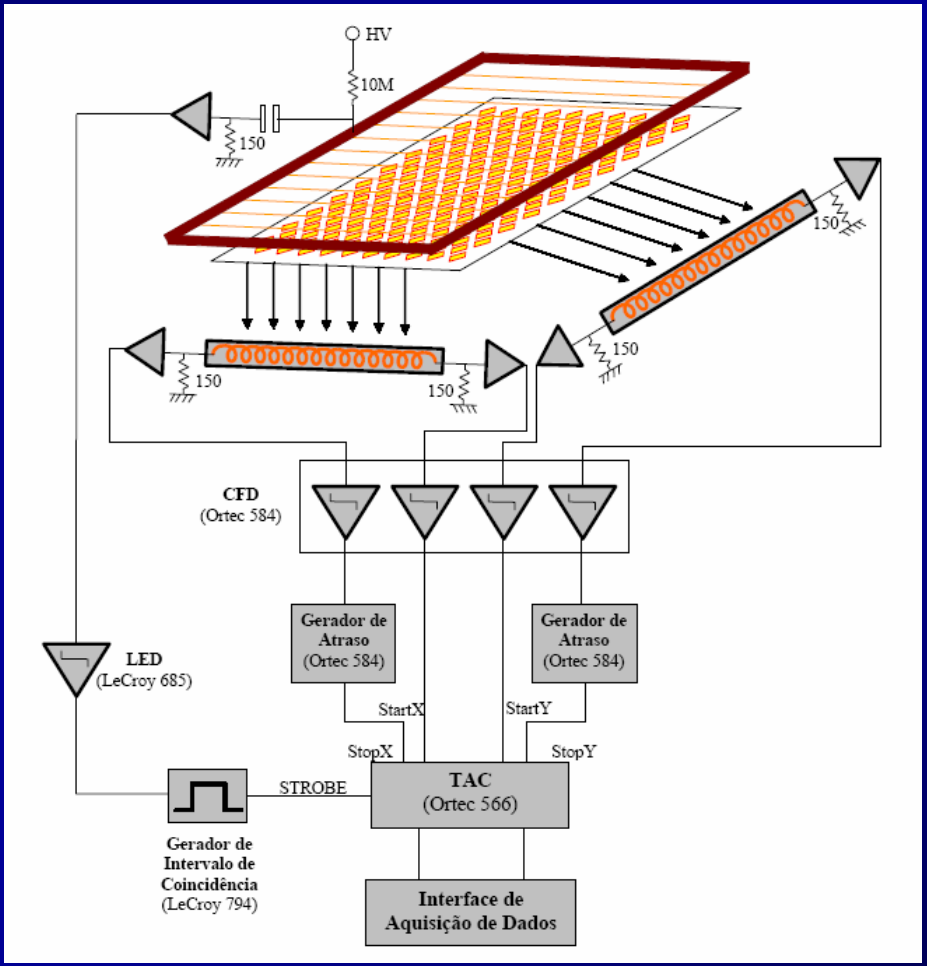
Eletrônica para Detecção de Partículas

Montagem Mecânica



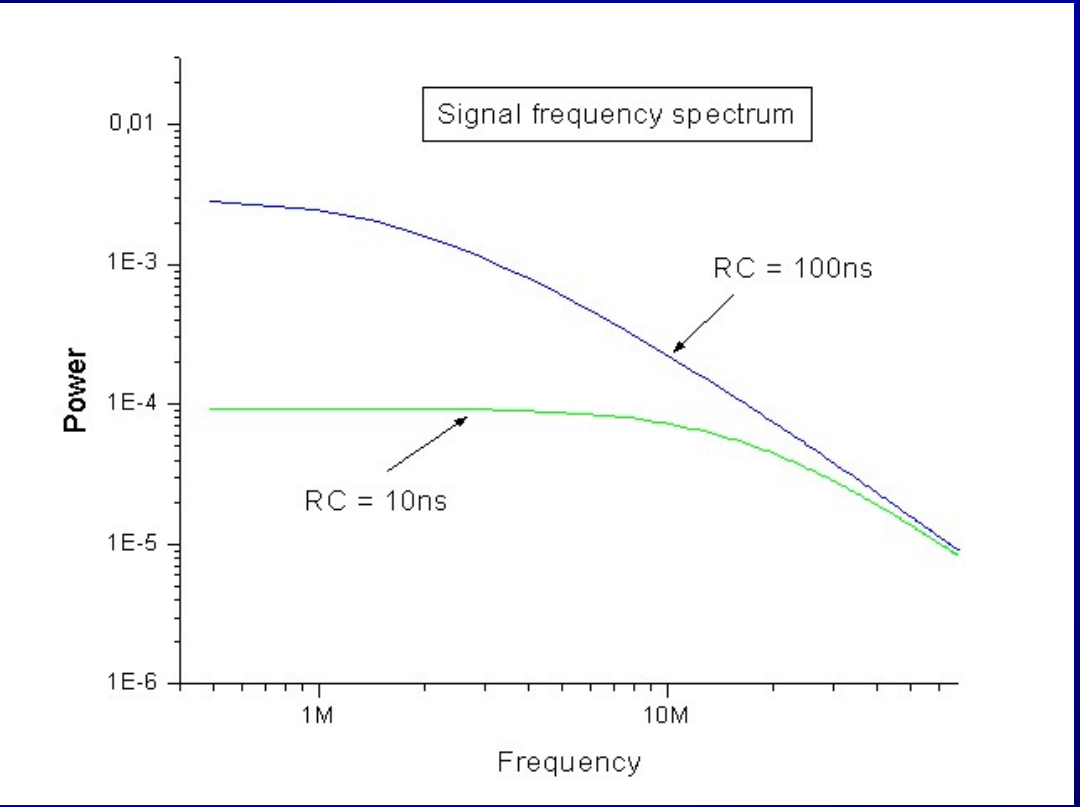
Eletrônica para Detecção de Partículas

Módulos de Eletrônica



Eletrônica para Detecção de Partículas

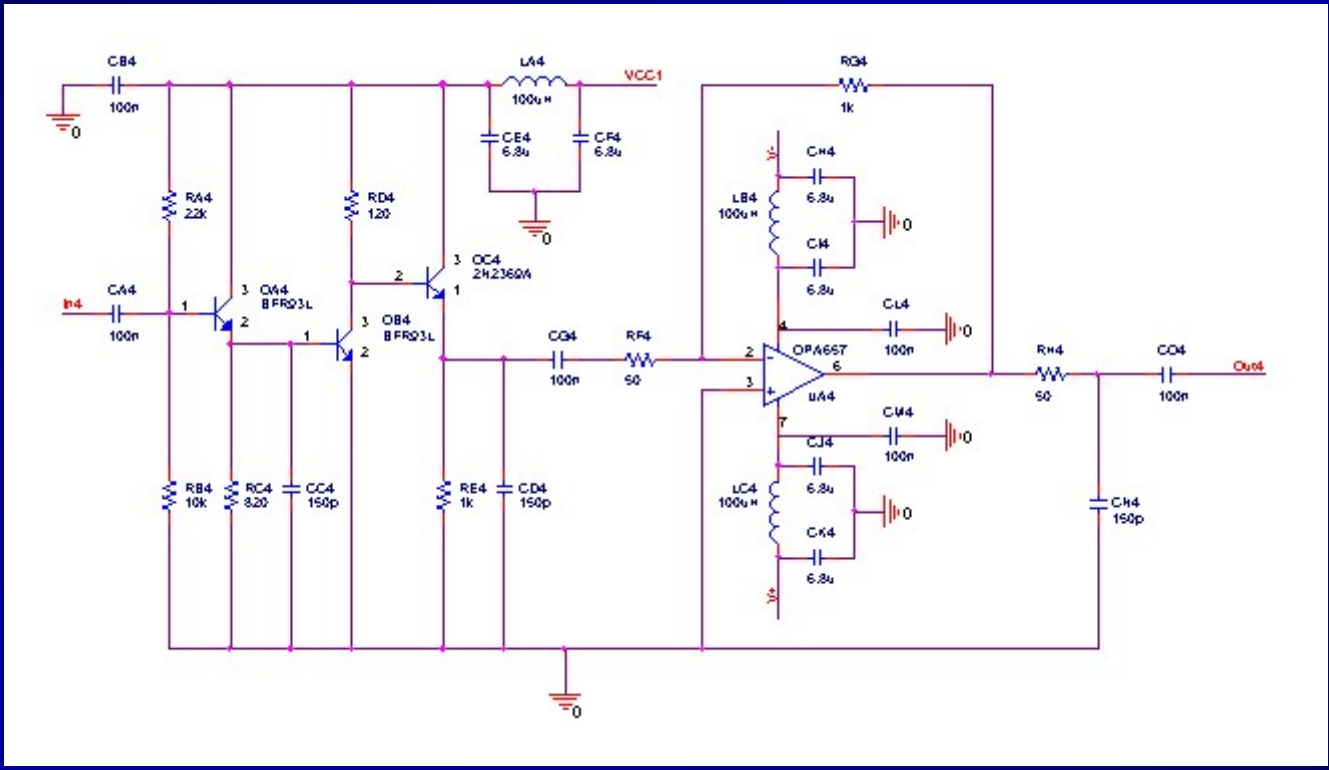
Parte Analógica: pré-amplificadores



Composição espectral dos sinais gerados no detector

Eletrônica para Detecção de Partículas

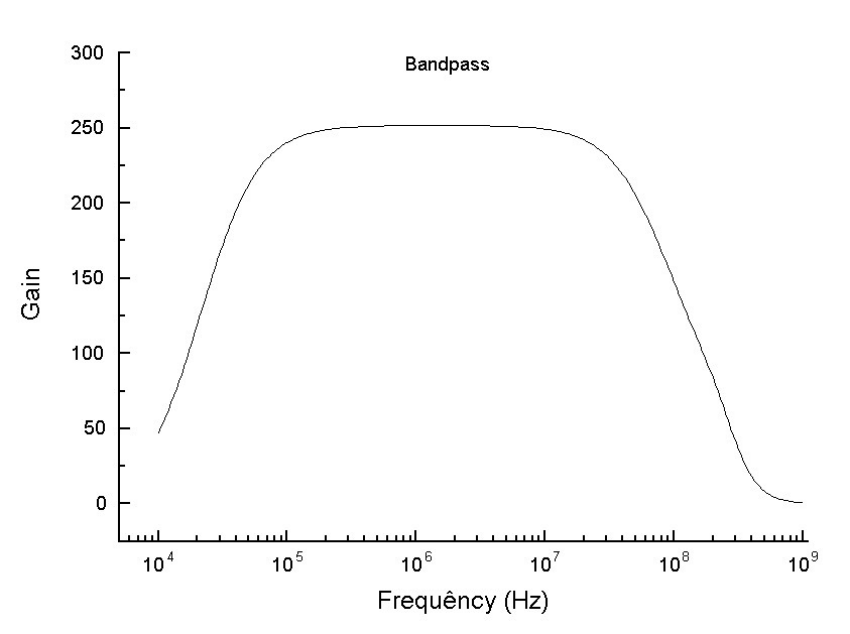
Parte Analógica: pré-amplificadores

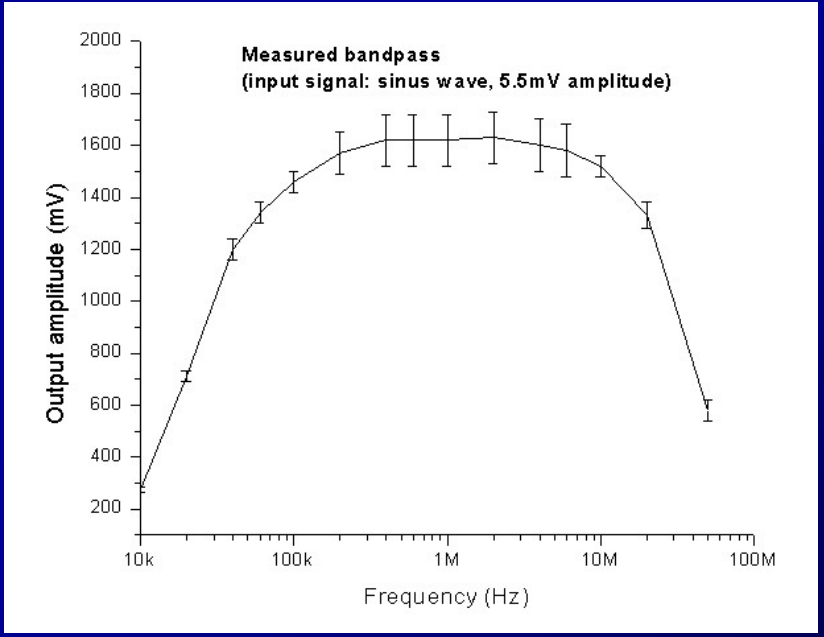


Circuito de pré-amplificação: baixo ruído, banda passante adaptada à composição espectral do sinal

Eletrônica para Detecção de Partículas

Parte Analógica: pré-amplificadores





Banda passante simulada

Banda passante medida