# Ondas e Instabilidades MHD

ElisaBete M. de Gouveia Dal Pino
IAG-USP

Escola CBPF, julho 2008

**Em fluidos compressiveis comuns**:

– **ondas acusticas e instabilidades** (liberacao de energia livre associada com densidades ou velocidades nao-uniformes)

**Em plasmas:**

- Alem destas: novos modos aparecem

– **Ondas :** modos com **frequencias (k) reais**

– **Instablidades: frequencias complexas** (com parte Im(k)<0)

## Ondas e Instabilidades:

estudadas no regime LINEAR

$\longrightarrow$ assumindo pequenas perturbacoes

# Equacoes MHD

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{k_B}{\overline{m}\rho}\vec{\nabla}(\rho T) + \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} -$$

$$-\nu\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0$$

# Equacoes MHD

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

$\vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B})$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{k_B}{\overline{m}\rho}\vec{\nabla}(\rho T) + \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} -$$

$$-\nu\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0$$

# Equacoes MHD

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{k_B}{\overline{m}\rho}\vec{\nabla}(\rho T) + \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} -$$

$$p = \rho k_B T/\overline{m}$$

$$-\nu\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0$$

# MHD: Falta eq. para evoluir T

$$S = \frac{k_B}{\overline{m}} ln\left(\frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho}\right) = \frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{1}{\gamma-1} lnT - ln\rho\right)$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 + \eta J^2 + k\nabla^2 T - \rho\mathcal{L}(\rho, T)$$

$$\frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{1}{\gamma-1}\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\gamma-1}\rho\vec{v}.\vec{\nabla}T - T\frac{\partial \rho}{\partial t} - T\vec{v}.\vec{\nabla}\rho\right) -$$

$$-K\vec{\nabla}^2 T - \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 - \frac{c^2\eta}{(4\pi)^2}(\vec{\nabla}\times\vec{B})^2 + \rho\mathcal{L}(\rho, T) = 0$$

# Para perturbar equacoes

**Hipoteses:**

- $B_o$, $\rho_o$, $v_o$, $T_o$ : **no equilibrio constantes e uniformes**
- Eq. de calor: para fazer $T_o$ constante:

  perdas radiativas = a ganhos radiativos

  ⇒ $\mathcal{L}(\rho, T) = 0$ → no estado "0"

  colocar plasma em banho termico
- Considerar perturbacoes no plasma: **$\lambda$ << L** (sistema)

⇓

Desprezar todos $\vec{\nabla}$ (na ordem 0)

# Perturbando o sistema

$$f(\vec{x},\psi) = f_o + f_1(\vec{x},t) + f_2(\vec{x},t) + ..$$

Quantidade fisica no equilibrio (ordem 0)

$f_1(\vec{x},t)$ perturbacao de 1a. ordem: $f_1(\vec{x},t) << f_o$

*Desprezar:* $f_1^2, f_2, g_2^2, g_2, f_1 g_1,$ etc.

*v= $v_o$ + $v_1$, tomar $v_o$ = 0, denotar* ***$v_1$= v***

# Equacoes de 1a. ordem

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - (\vec{B}_o.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{B}_o(\vec{\nabla}.\vec{v}) - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_o \vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{k_B}{\overline{m}}\vec{\nabla}T_1 + \frac{kT_o}{\overline{m}\rho_o}\vec{\nabla}\rho_1 + \frac{1}{4\pi\rho_o}\vec{B}_o \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) - \nu\left[\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0$$

$$\frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{\rho_o}{\gamma - 1}\frac{\partial T_1}{\partial t} - T_o\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) + \rho_o(\mathcal{L}_\rho \rho_1 + \mathcal{L}_T T_1) - K\nabla^2 T_1 = 0$$

$$\mathcal{L}_\rho \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}\right)_{T_o} \qquad \mathcal{L}_T \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}\right)_{\rho_o}$$

# Equacoes de 1a. ordem

- Coeficientes das eqs. todos constantes:



solucoes:

$$f_1(\vec{x},t) = f_1 exp(nt + i\vec{k}.\vec{x})$$

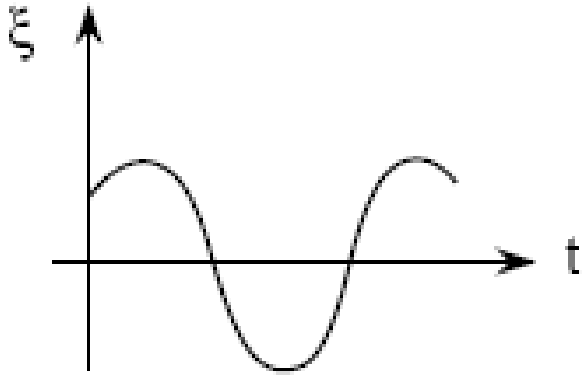
Se n imaginario e k real $\longrightarrow$ ONDA

Se n real e n>0 $\longrightarrow$ taxa de crescimento de INSTABILIDADE: ***f $\propto$ exp (nt)***

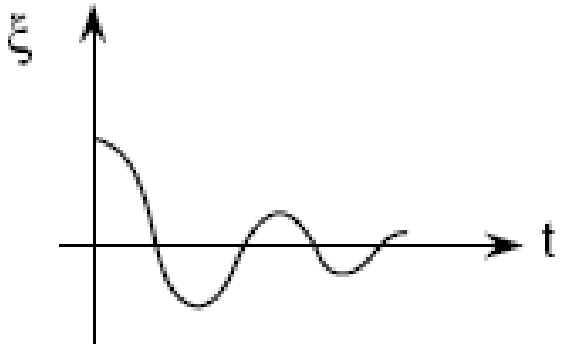
Se n complexo $\longrightarrow$ onda com amplitude crescente ou decrescente no tempo

Se k real $\longrightarrow$ onda com amplitude constante no espaco

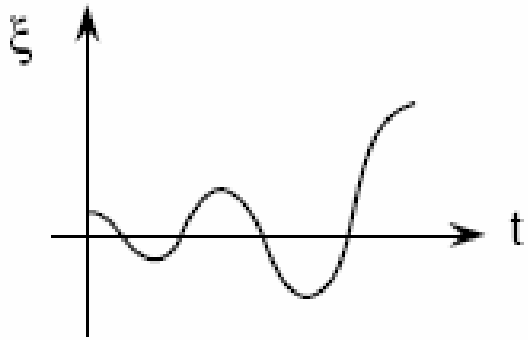
Se k imaginario $\longrightarrow$ onda com amplitude crescente ou amortecida no espaco




Onda estavel




Amplitude decrescente:  amortecida




Amplitude crescente: instavel

# Relacao de Dispersao n(k)

- Como $\longrightarrow$ $f_1(\vec{x},t) = f_1 exp(nt + i\vec{k}.\vec{x})$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(\vec{x},t) = n f_1(\vec{x},t)$$

$$\vec{\nabla} f_1(\vec{x},t) = i\vec{k} f_1(\vec{x},t)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{f_1}(\vec{x},\vec{t}) = i\vec{k}.\vec{f_1}(\vec{x},t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f_1}(\vec{x},t) = i\vec{k} \times \vec{f_1}(\vec{x},t)$$

$$\nabla^2 f_1(\vec{x},t) = -k^2 f_1(\vec{x},t)$$

# Relacao de Dispersao *n(k)*

- Substituindo $f_1(\vec{x},t) = f_1 exp(nt + i\vec{k}.\vec{x})$

  $\longrightarrow$ Na eq. para $T_1$:

$$\frac{T_1}{T_o} = \frac{\rho_1}{\rho_o}\left[\frac{\frac{k_B n}{\overline{m}} - \frac{\rho_o}{T_o}\mathcal{L}_\rho}{\frac{k_B n}{\overline{m}(\gamma-1)} + \mathcal{L}_T + \frac{Kk^2}{\rho_o}}\right]$$

$$p = \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}$$

$$\frac{p_1}{p_o} = \frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{T_1}{T_o} = \gamma\frac{\rho_1}{\rho_o}\left[\frac{\frac{k_B n}{\overline{m}(\gamma-1)} + \frac{1}{\gamma}(\mathcal{L}_T - \frac{\rho_o}{T_o}\mathcal{L}_\rho) + \frac{Kk^2}{\gamma\rho_o}}{\frac{k_B n}{\overline{m}}\frac{1}{\gamma-1} + \mathcal{L}_T + \frac{Kk^2}{\rho_o}}\right] \equiv \gamma\frac{\rho_1}{\rho_o}\alpha(n,k)$$

# Equacoes de 1a. ordem

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - (\vec{B}_o.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{B}_o(\vec{\nabla}.\vec{v}) - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_o \vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{k_B}{\overline{m}}\vec{\nabla}T_1 + \frac{kT_o}{\overline{m}\rho_o}\vec{\nabla}\rho_1 + \frac{1}{4\pi\rho_o}\vec{B}_o \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) - \nu\left[\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0$$

$$\frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{\rho_o}{\gamma - 1}\frac{\partial T_1}{\partial t} - T_o\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) + \rho_o(\mathcal{L}_\rho \rho_1 + \mathcal{L}_T T_1) - K\nabla^2 T_1 = 0$$

$$\mathcal{L}_\rho \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}\right)_{T_o} \qquad \mathcal{L}_T \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}\right)_{\rho_o}$$

# Relacao de Dispersao *n(k)*

$$\frac{p_1}{p_o} = \frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{T_1}{T_o} = \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \left[ \frac{\frac{k_B n}{\overline{m}(\gamma-1)} + \frac{1}{\gamma}(\mathcal{L}_T - \frac{\rho_o}{T_o}\mathcal{L}_\rho) + \frac{Kk^2}{\gamma\rho_o}}{\frac{k_B n}{\overline{m}} \frac{1}{\gamma-1} + \mathcal{L}_T + \frac{Kk^2}{\rho_o}} \right] \equiv \gamma \frac{\rho_1}{\rho_o} \alpha(n,k)$$

$$\frac{p_1}{p_o} \equiv \gamma \alpha(n,k) \frac{\rho_1}{\rho_o}$$

Se:

$$\mathcal{L}_\rho = \mathcal{L}_T = K = 0, \rightarrow \alpha(n,k) = 1 \rightarrow p \propto \rho^\gamma$$

Caso de perturbacoes **adiabaticas** $\longrightarrow$ ocorrem **sem variacao de S !**

- As demais eqs. ficam $\longrightarrow$

$$n\vec{B}_1 - i(\vec{k}.\vec{B}_o)\vec{v} + i\vec{B}_o(\vec{k}.\vec{v}) + \nu_M k^2 \vec{B}_1 = 0$$

$$n\frac{\rho_1}{\rho_o} + i\vec{k}.\vec{v} = 0$$

$$n\vec{v} + i\gamma\frac{p_o}{\rho_o}\alpha\vec{k}\frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{i}{4\pi\rho_o}\vec{B}_o \times (\vec{k} \times \vec{B}_1) + \nu\left[k^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{k}(\vec{k}.\vec{v})\right] = 0$$

# Relacao de Dispersao *n(k)*

- Subst. $B_1$ e $\rho_1$ na eq. para v $\longrightarrow$

$$n\vec{v} + \frac{\gamma \alpha v_s^2}{n}\vec{k}(\vec{k}.\vec{v}) - \frac{1}{4\pi\rho_o(n+\nu_M k^2)}\vec{B}_o \times \left[(\vec{k}\times\vec{v})(\vec{k}.\vec{B}_o) - \right.$$

$$\left. -(\vec{k}.\vec{v})(\vec{k}\times\vec{B}_o)\right] + \nu\left[k^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{k}(\vec{k}.\vec{v})\right] = 0$$

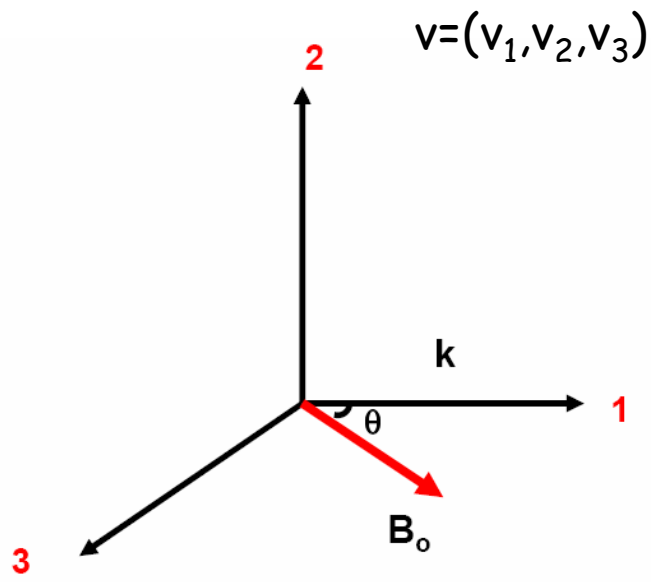
onde definimos

$$v_s = \left(\frac{p_o}{\rho_o}\right)^{1/2} = \left(\frac{k_B T_o}{m}\right)^{1/2}$$

Velocidade do som isotermica

# Relacao de Dispersao *n(k)*

Se $\theta$ é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{B}_o$, as quantidades que aparecem em (3.23) são:




$$\vec{k}.\vec{v} = kv_1$$

$$\vec{k} \times \vec{v} = k(\hat{u}_3 v_2 - \hat{u}_2 v_3)$$

$$\vec{k}.\vec{B}_o = kB_o cos\theta$$

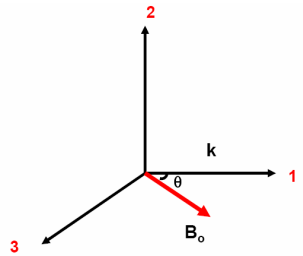
$$\vec{k} \times \vec{B}_o = -kB_o sen\theta \hat{u}_2$$

Para simplificar as coisas, é conveniente introduzirmos a velocidade "Alfvén":

$$v_A = \frac{B_o}{(4\pi\rho_o)^{1/2}}$$

# Relacao de Dispersao *n(k)*

Considerando as eqs. (3.25) - (3.29) acima, as três componentes (1, 2 e 3) da eq. (3.23) podem ser escritas como:




$v_1$

$$nv_1 + \frac{\gamma\alpha v_s^2 k^2}{n} v_1 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} sen\theta(-cos\theta v_3 + sen\theta v_1) + \frac{4}{3}\nu k^2 v_1 = 0 \qquad (3.30)$$

$v_2$

$$nv_2 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} cos^2\theta v_2 + \nu k^2 v_2 = 0 \qquad (3.31)$$

$v_3$

$$nv_3 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} cos\theta(cos\theta v_3 - sen\theta v_1) + \nu k^2 v_3 = 0 \qquad (3.32)$$

**Uma vez que estas eqs. sao homogeneas: ha solucoes somente se o determinante dos coeficientes for nulo – o resultado nos da: relacao de dispersao n(k)**

De (3.31), $v_2$ não está acoplada às outras duas componentes de velocidade. Uma vez que $v_2$ é finito, seu coeficiente em (3.31) deve anular-se, logo temos a relação de dispersão:

$$n^2 + n(\nu + \nu_M)k^2 + k^2 v_A^2 cos^2\theta + \nu\nu_M k^4 = 0 \tag{3.33}$$

a qual é uma equação quadrática para $n$ com soluções

$$n = \pm ikv_A cos\theta\left[1 - \frac{k^2(\nu_M - \nu)^2}{4v_A^2 cos^2\theta}\right]^{1/2} - \frac{1}{2}(\nu + \nu_M)k^2 \tag{3.34}$$

No limite que $k\nu << v_A$ e $k\nu_M << v_A$, (3.34) reduz-se a:

$$n = \pm ikv_A cos\theta \tag{3.35}$$

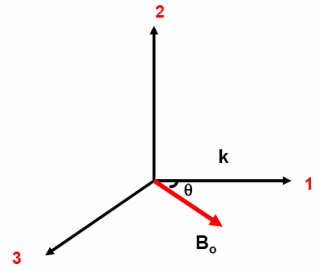
Desde que a dependência de $v_2$ (e das outras perturbações) é

$$exp(nt + i\vec{k}.\vec{x}) = exp(nt + ikx_1) = exp\left[ik(\pm v_A cos\theta t + x_1)\right] \tag{3.36}$$

(3.36) corresponde a ondas cujas velocidades de fase ao longo de $\vec{x}_1$ são ($v_\phi = \pm in/k$):

$$v_\phi = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_\phi = \mp v_A cos\theta = \mp\frac{B_o}{\sqrt{4\pi\rho_o}}cos\theta \tag{3.37}$$

# Ondas Alfven (plano $\perp B_o$,k)




Estes modos pela primeira vez descritos por Alfven em 1953: **onda Alfven**.

Flutuacoes de velocidade  transversais ao plano *k* e *Bo*

*Propagam // Bo*.

Como sao  transversais a *k*:  nao ha compressao: nenhuma variacao  de pressao esta associada a esse modo (incompressivel)

Como as flutuacoes sao  transversais a *B*: linhas de forca sao curvadas pelo movimento da onda e uma forca  restauradora e' exercida pelas linhas devido `a tensao magnetica (**similar tensao em uma corda**):

$$v_\phi \propto v_A = (B_o^2/4\pi\rho)^{1/2}$$

**A velocidade da onda e' a (tensao/densidade)$^{1/2}$**

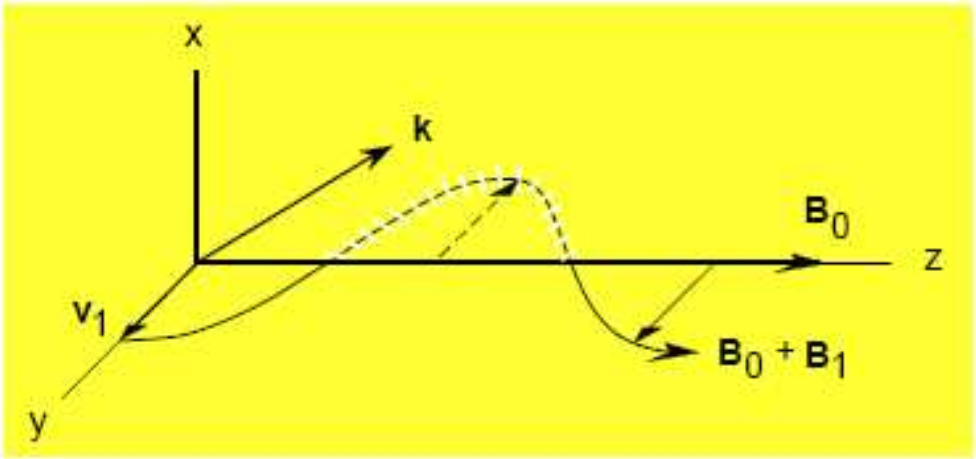
$B_o^2/4\pi$

- Hence, two *Alfvén waves* (1942) (right/left) with frequency

$$\mathsf{k} = \pm\omega_{\rm A}\,, \quad \omega_{\rm A} \equiv k_\parallel v_{\rm A}\,. \quad (87)$$

Tokamak example:

$$v_{\rm A} \approx 6\times 10^6\,{\rm m\,s^{-1}}\,,$$
$$\tau = 2\pi R/v_{\rm A} \approx 3\,\mu{\rm s}\,.$$



# Ondas Alfven

Foram observadas em laboratorio, magnetosfera da Terra e no vento solar e, tem um papel relevante em plasmas astrofisicos em geral, como as coroas do sol e das estrelas, discos de acrecao



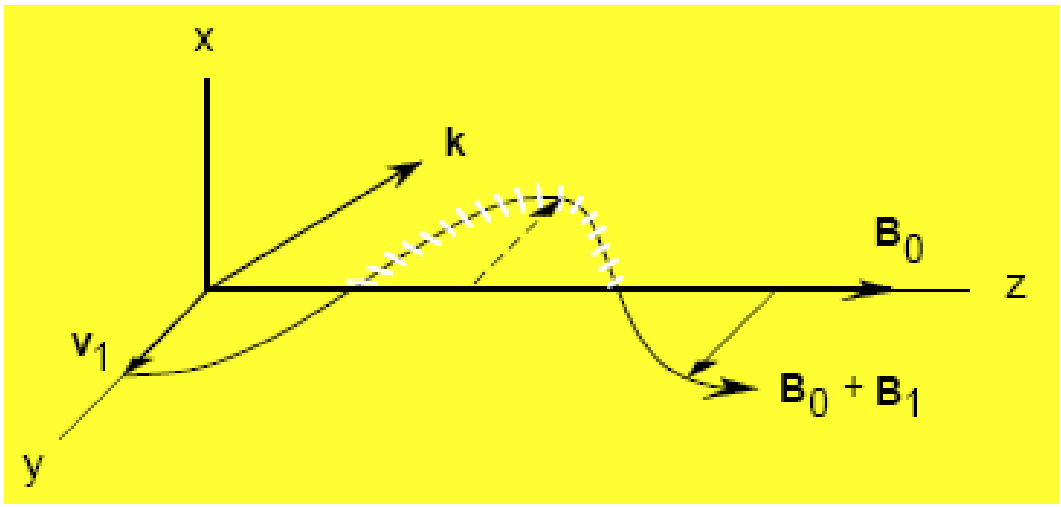
papel chave na transmissao de forcas, tal como as ondas acusticas em gases nao-magnetizados.

Ex.: fluido magnetizado aproximando-se de um obstaculo (nuvem):

se ($v < v_A$): ondas A avisam fluido sobre obstaculo

se ($v > v_A$): nao ha tempo de as ondas avisarem: forma-se uma **onda de choque** no fluido (veremos adiante)

# Onda Alfven (1942)



# Ondas Alfven

. Note-se que a pressão magnética pode ser escrita como

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \tag{3.41}$$

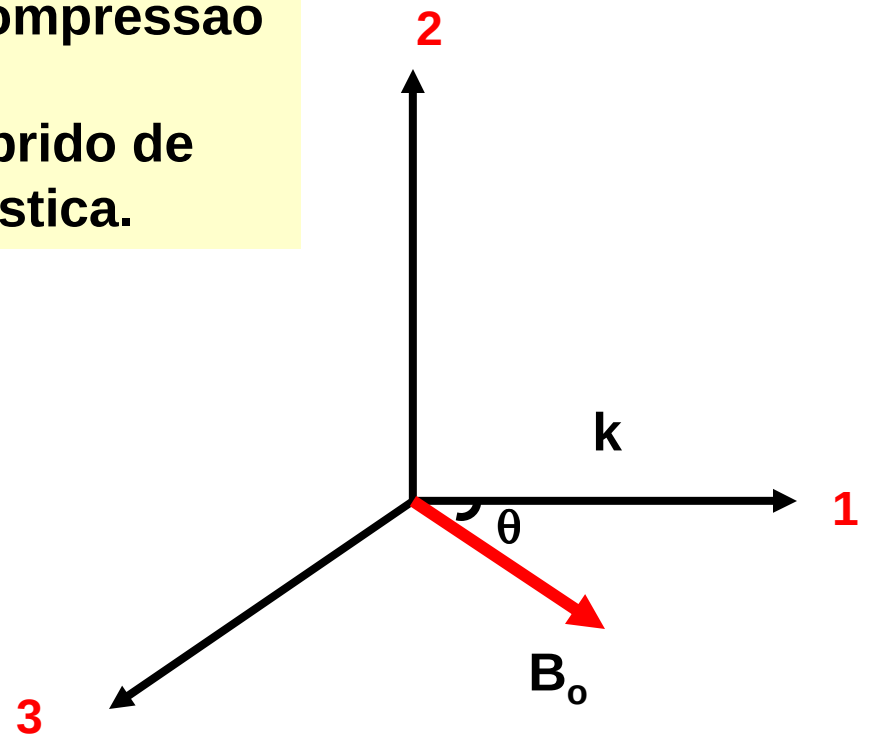
enquanto que a força de curvatura em (2.10) fica:

$$\frac{B^2}{4\pi}\frac{\hat{n}}{\lambda_{cur}} = \rho v_A^2 \frac{\hat{n}}{\lambda_{cur}} \tag{3.42}$$

# Ondas Magneto-acusticas

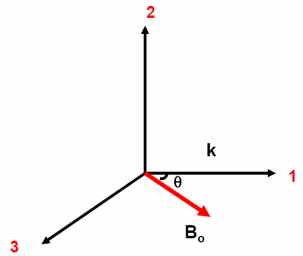
**Vamos agora considerar movimentos nas direcoes 1 – 3:**
**possuem componentes de velocidade // a *k* (e portanto envolvem compressao) e normais a *B* (e portanto a compressao das linhas de B)**

**⟶ comportamento hibrido de onda magnetica e acustica.**



# Relacao de Dispersao *n(k)*

Considerando as eqs. (3.25) - (3.29) acima, as três componentes (1, 2 e 3) da eq. (3.23) podem ser escritas como:




$V_1$

$$nv_1 + \frac{\gamma\alpha v_s^2 k^2}{n} v_1 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} sen\theta(-cos\theta v_3 + sen\theta v_1) + \frac{4}{3}\nu k^2 v_1 = 0 \qquad (3.30)$$

$V_2$

$$nv_2 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} cos^2\theta v_2 + \nu k^2 v_2 = 0 \qquad (3.31)$$

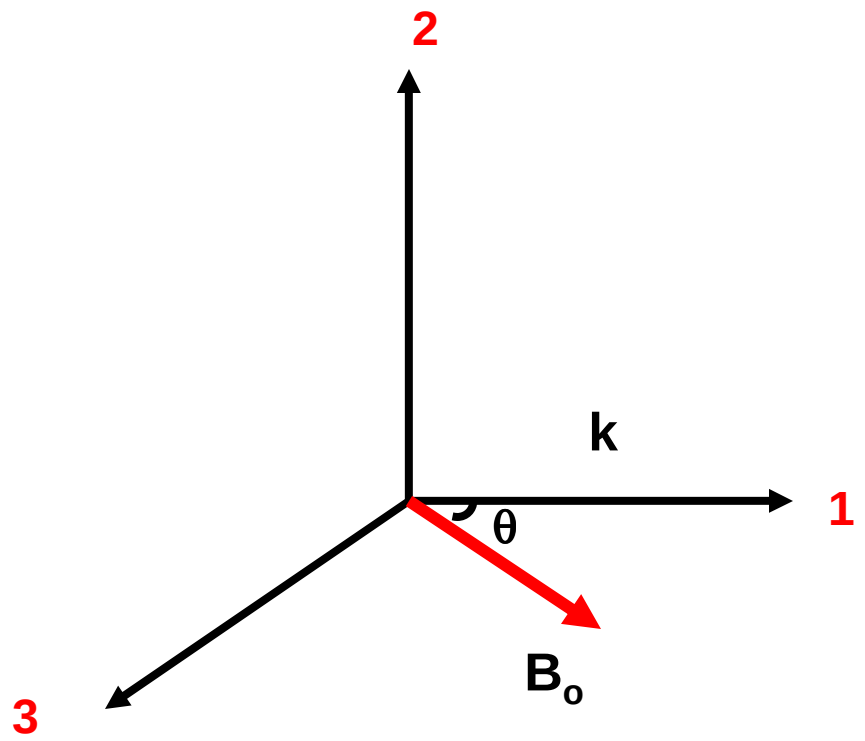
→ Alfven

$V_3$

$$nv_3 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} cos\theta(cos\theta v_3 - sen\theta v_1) + \nu k^2 v_3 = 0 \qquad (3.32)$$

**Uma vez que estas eqs. sao homogeneas: ha solucoes somente se o determinante dos coeficientes for nulo – o resultado nos da: relacao de dispersao n(k)**

# Ondas Magneto-acusticas



Faremos também $\nu = \nu_M = 0$. Logo, (3.30) e (3.32) podem ser escritos como

$$(n^2 + \gamma k^2 v_S^2 + k^2 v_A^2 sen^2\theta)v_1 - k^2 v_A^2 sen\theta cos\theta v_3 = 0 \tag{3.43}$$

e

$$(n^2 + k^2 v_A^2 cos^2\theta)v_3 - k^2 v_A^2 sen\theta cos\theta v_1 = 0 \tag{3.44}$$

O anulamento do determinante dos coeficientes requer que a seguinte relação de dispersão seja satisfeita:

$$n^4 + k^2 n^2 (v_A^2 + \gamma v_S^2) + \gamma k^4 v_A^2 v_S^2 cos^2\theta = 0 \tag{3.45}$$

Esta é uma equação quadrática na qual $B^2 - 4AC > 0$, logo as raízes de $n^2$ são reais. Devido ao fato de que os coeficientes em (3.45) são todos positivos, as raízes de $n^2$:

$$n^2 = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

são ambas $< 0$. Logo, $n$ é imaginário puro, o que significa que temos ondas! Escrevendo

$$v_\phi = \pm i\frac{n}{k} \tag{3.46}$$

# Movimentos no plano 1-3

$$v_\phi = \pm i\frac{n}{k} \qquad (3.46)$$

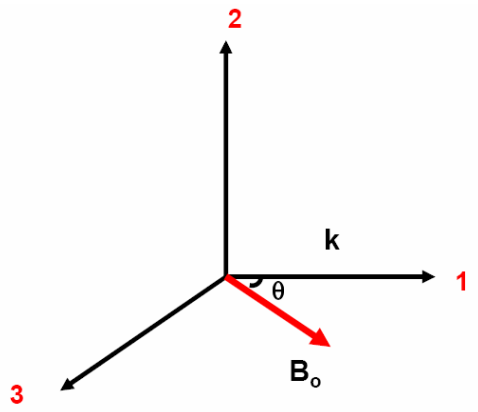
Substituindo em 3.45

$$v_\phi^4 - (v_A^2 + \gamma v_S^2)v_\phi^2 + \gamma v_S^2 v_A^2 cos^2\theta = 0 \qquad (3.47)$$

Vamos considerar os casos especiais:

(i) $\theta = 0 \ \ (\vec{k}//\vec{B}_o)$

(ii) $\theta = \pi/2 (\vec{k}\perp\vec{B}_o)$

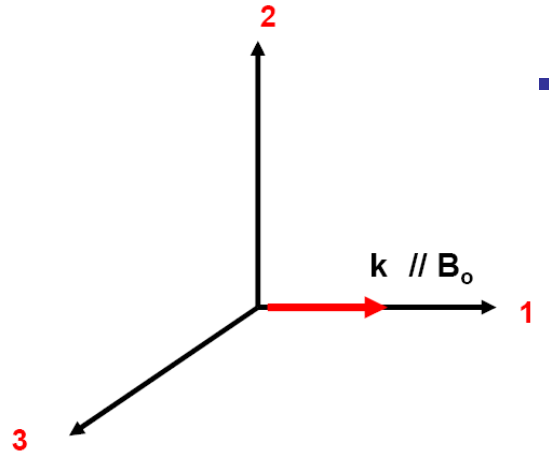


# Ondas Alfven de novo (k//$B_o$)

(i) $\theta = 0 \ \ (\vec{k}//\vec{B}_o)$

Nesse caso, a relação de dispersão (3.47) pode ser fatorada em

$$(v_\phi^2 - v_A^2)(v_\phi^2 - \gamma v_S^2) = 0$$




De modo que uma das raízes é:

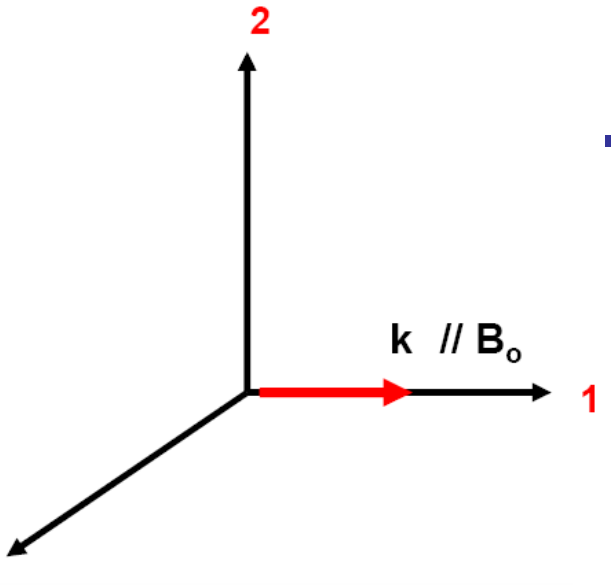
$$v_\phi = \pm v_A \qquad (3.49)$$

correspondendo a ondas Alfvén propagando ao longo da linha de campo. (3.49), que é também a solução de 3.44 (com $\vec{v} = \vec{v}_3$) representa um modo no qual o movimento é perpendicular a ambos $\vec{k}$ e $\vec{B}$ e com $\vec{k}//\vec{B}_o$. Trata-se de uma solução semelhante a (3.37), só que em (3.37) $\vec{k}$ e $\vec{B}_o$ não eram paralelos entre si e somente a componente de $\vec{B}_o$ ao longo de $\vec{k}$, i.e., $B_o\, cos\theta$, era afetada. De um modo geral então, para que haja o surgimento de uma onda Alfvén, é necessário que haja pelo menos uma componente do movimento do plasma perpendicular a $\vec{k}$ e uma componente de $\vec{B}_o//\vec{k}$.

# Ondas Acusticas (k//$B_o$)

Voltando a (3.48):

$$(v_\phi^2 - v_A^2)(v_\phi^2 - \gamma v_S^2) = 0$$

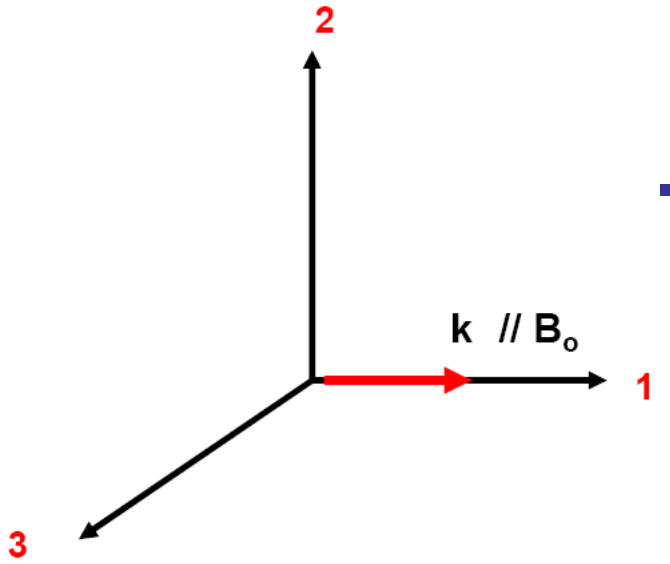



A outra solucao e:

$$v_\phi = \pm\gamma^{1/2} v_S = \pm\left(\frac{\gamma k_B T}{m}\right)^{1/2} \qquad (3.50)$$

O outro modo em (3.48) envolve movimentos compressivos ao longo de $\vec{k}$ ($\vec{v} = \vec{v}_1$, veja 3.43). Uma vez que neste caso especial (onde $\theta = 0$) os movimentos são também ao longo de $\vec{B}$, não há nenhum acoplamento com $\vec{B}_o$, e temos apenas uma onda acústica ordinária

# Ondas Acusticas (k//$B_o$)




Voltando a (3.48):

$$(v_\phi^2 - v_A^2)(v_\phi^2 - \gamma v_S^2) = 0$$

A outra solucao e:

$$v_\phi = \pm\gamma^{1/2} v_S = \pm\left(\frac{\gamma k_B T}{m}\right)^{1/2}$$

$=(\partial p/\partial \rho)_S = \gamma p_o/\rho_o \quad (3.50)$

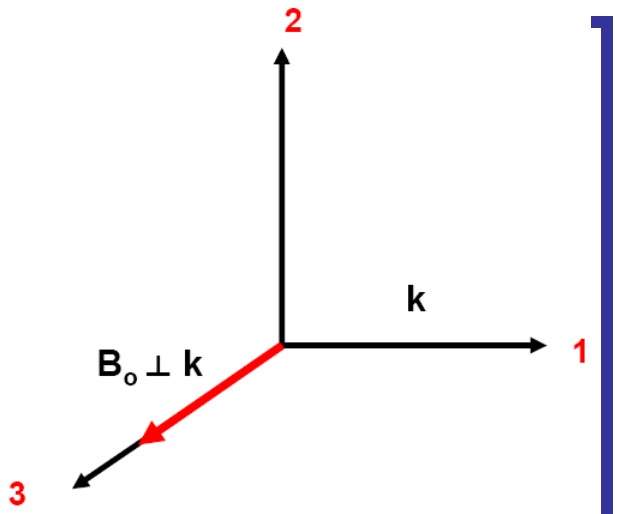
O outro modo em (3.48) envolve movimentos compressivos ao longo de $\vec{k}$ ($\vec{v} = \vec{v}_1$, veja 3.43). Uma vez que neste caso especial (onde $\theta = 0$) os movimentos são também ao longo de $\vec{B}$, não há nenhum acoplamento com $\vec{B}_o$, e temos apenas uma onda acústica ordinária

# Ondas Magneto-acusticas ($k \perp B_o$)

(ii) $\theta = \pi/2 (\vec{k} \perp \vec{B}_o)$

Nesse caso, podemos fatorar a relação de dispersão (3.47) em:

$$v_\phi^2 [v_\phi^2 - (v_A^2 + \gamma v_S^2)] = 0$$




Uma raiz é (veja também eq. 3.43):

$$v_\phi = \pm (v_A + \gamma v_S^2)^{1/2} \qquad (3.52)$$

A qual representa uma onda magnetossônica (ou magneto-acústica). Se escrevemos

$$p_{tot} = \frac{B^2}{8\pi} + p \qquad (3.53)$$

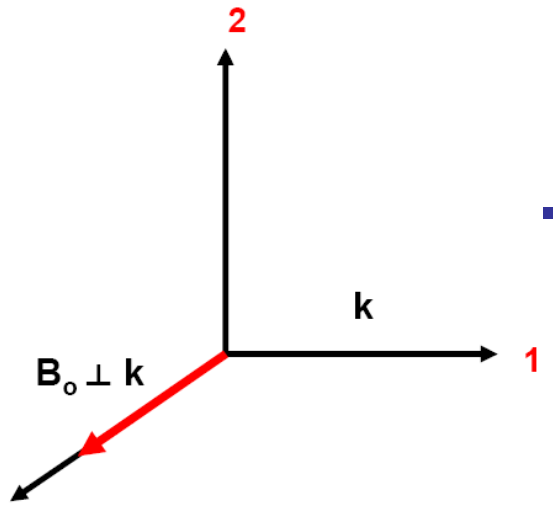
e avaliamos

$$\left( \frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho} \right)_S = \left( \gamma \frac{p_o}{\rho_o} \right) + \frac{2}{8\pi} B_o \frac{\partial B}{\partial \rho} \qquad (3.54)$$

# Ondas Magneto-acusticas

Como $\vec{B}_o.\vec{k} = 0,$ ($\theta$=90º):

e $B_o.v_1=0$




$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{B_o}{\rho_o}$$

Então

$$\left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S = \gamma v_S^2 + \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o} = \gamma v_S^2 + v_A^2 \qquad (3.56)$$

De modo que (3.52) pode ser escrito como

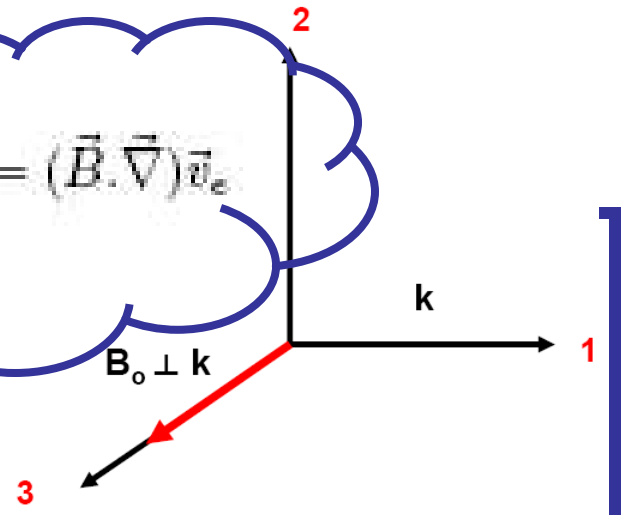
$$v_\phi = \left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S^{1/2} \qquad (3.57)$$

A onda magnetoacústica então representa uma onda acústica na qual os movimentos compressivos encontram resistência não apenas da pressão térmica mas também da pressão magnética associada com a compressão perpendicular às linhas magnéticas.

# Ondas Magneto-a

$$n_e \frac{d(\vec{B}/n_e)}{dt} = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v}_e$$

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{B_o}{\rho_o}$$




Como $\vec{B}_o.\vec{k} = 0$, (θ=90º):

e $B_o.v_1=0$

Então

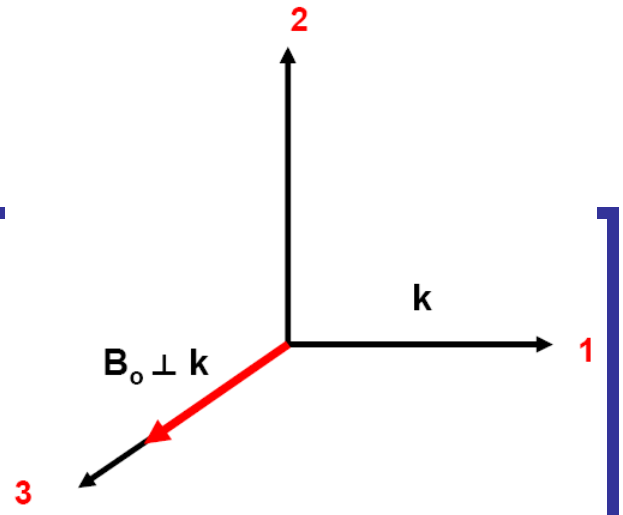
$$\left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S = \gamma v_S^2 + \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o} = \gamma v_S^2 + v_A^2 \qquad (3.56)$$

De modo que (3.52) pode ser escrito como

$$v_\phi = \left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S^{1/2} \qquad (3.57)$$

A onda magnetoacústica então representa uma onda acústica na qual os movimentos compressivos encontram resistência não apenas da pressão térmica mas também da pressão magnética associada com a compressão perpendicular às linhas magnéticas.

# Ondas Magneto-acusticas




Como $\vec{B}_o.\vec{k} = 0$, (θ=90º):

e $B_o.v_1=0$

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{B_o}{\rho_o}$$

Então

$$\left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S = \gamma v_S^2 + \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o} = \gamma v_S^2 + v_A^2 \qquad (3.56)$$

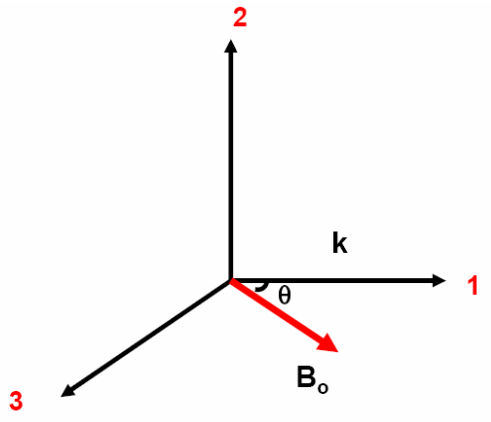
De modo que (3.52) pode ser escrito como

$$v_\phi = \left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S^{1/2} \qquad (3.57)$$

A onda magnetoacústica então representa uma onda acústica na qual os movimentos compressivos encontram resistência não apenas da pressão térmica mas também da pressão magnética associada com a compressão perpendicular às linhas magnéticas.

# Ondas Magneto-acusticas

A outra solucao de (3.51):




(ii) $\theta = \pi/2 (\vec{k} \perp \vec{B}_o)$

Nesse caso, podemos fatorar a relação de dispersão (3.47) em:

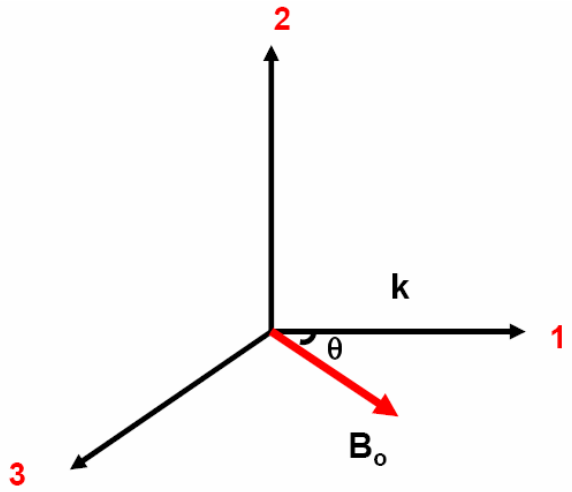
$$v_\phi^2 \left[ v_\phi^2 - (v_A^2 + \gamma v_S^2) \right] = 0 \qquad (3.51)$$

O modo restante, com $\vec{v}_\phi = 0$ (3.51) (veja também 3.44 para $cos\theta = 0$), parece estranho até que se perceba que movimentos transversais a $\vec{k}$ mas paralelos a $\vec{B}$ ($\vec{v} = \vec{v}_3$) não experimentam qualquer força restauradora!

# Ondas Magneto-acusticas (1-3)

A solucao de (3.47):

$$v_\phi^4 - (v_A^2 + \gamma v_S^2)v_\phi^2 + \gamma v_S^2 v_A^2 cos^2\theta = 0$$




Para θ arbitrario:

$$2v_\phi^2 = (v_A^2 + \gamma v_S^2)\left[1 \pm \left(1 - \frac{4\gamma v_S^2 v_A^2 cos^2\theta}{(\gamma v_S^2 + v_A^2)^2}\right)^{1/2}\right]$$

**O modo "+" : magneto-acustico rapido (+ rapido que onda A)**

**O modo "-" : magneto-acustico lento (+ lento que onda A)**

# Instabilidade de Parker-Rayleigh-Taylor

# Instabilidade de Rayleigh-Taylor

Fluido denso suportado por um fluido rarefeito ( $\rho$ maior sobre $\rho$ menor) (ex., copo d'agua de ponta-cabeca: agua esta sobre ar comprimido):

INSTAVEL

Razao:

$\longrightarrow$ Uma pequena perturbacao da superficie fara com que o fluido denso migre para baixo, reduzindo sua energia potencial, e o fluido mais rarefeito que e' deslocado para cima nao ganha tanta energia potencial gravitacional:

RUNAWAY

Em Astrofisica essa situacao ocorre:

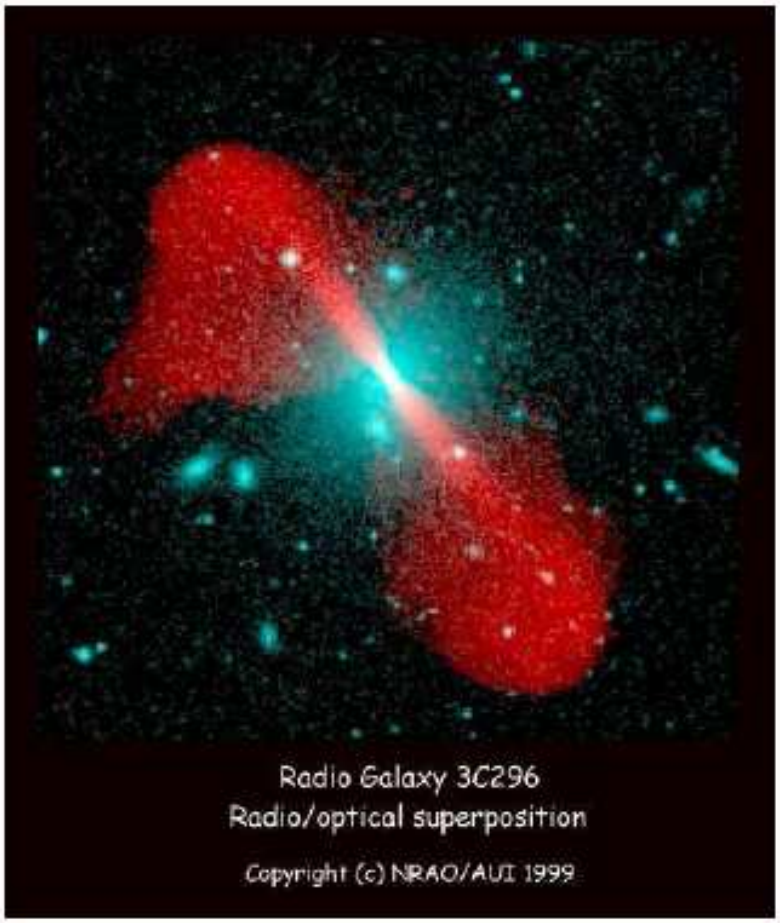
nas camadas das supernovas mais expandidas (por estarem bem expandidas possuem baixa densidade e sao empurradas na direcao do gas externo mais denso)

nas cabecas dos jatos supersonicos galacticos e extragalacticos



**Instabiliidade de Rayleigh-Taylor**

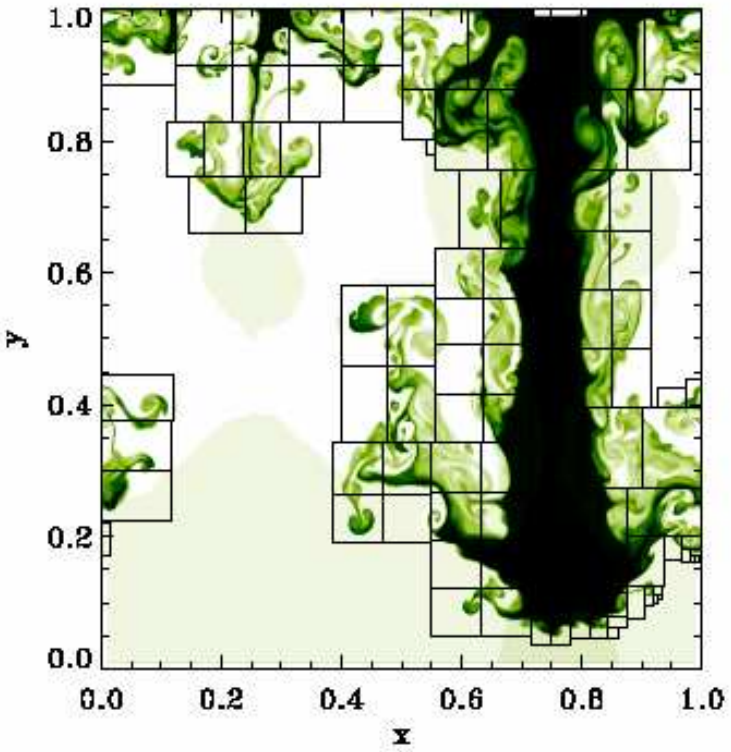
# Ex. de um jato emergindo de uma galaxia ativa




Active galactic nucleus ($M_* \sim 10^8 M_\odot$): optical emission (blue) centered on disk, radio emission (red) shows the jets.

Ex. evolucao da Instabilidade de Parker-Rayleigh Taylor mostrando o desenvolvimento de "cogumelos" do material mais denso "caindo" sobre o menos denso e deslocando o menos denso para cima. Como o mais denso ao cair perde mais energia potencial gravitacional e o menos denso ao subir ganha menos energia: a configuracao vai para um menor estado de energia

## Nonlinear evolution from numerical simulation



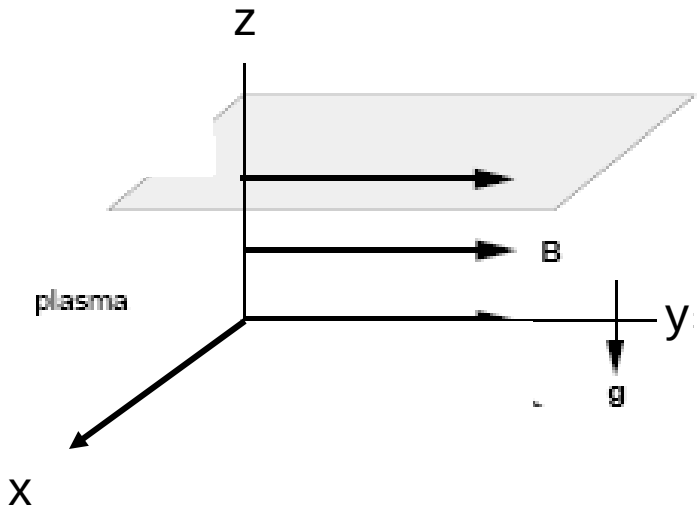

- Snapshot Rayleigh–Taylor instability for purely 2D hydrodynamic case: density contrast 10, (compressible) evolution.
- Shortest wavelengths grow fastest, 'fingers'/'spikes' develop, shear flow instabilities at edges of falling high density pillars.
- Simulation with AMR-VAC:
  Versatile Advection Code, maintained by Gábor Tóth and Rony Keppens;
  Adaptive Mesh Refinement resolves the small scales.
  www.rijnh.nl/n3/n2/f1234.htm

- Full nonlinear evolution (rthd.qt)

# Instabilidade de Parker-Rayleigh-Taylor

Um gas com campo magnetico: em algumas situacoes pode ser visualizado como um fluido de densidade desprezivel permeando um plasma e exercendo uma pressao $\nabla(B^2/8\pi)$.

Logo:
se um plasma e' suportado verticalmente por um campo magnetico horizontal nao homogeneo com $\nabla(B^2/8\pi)$, podemos esperar instabilidade tipo: Rayleigh-Taylor



# Instabilidade de Parker-Rayleigh-Taylor

Estudada pela 1a. vez por Parker esta situacao aparece em:

Exs.:

discos galacticos ou discos de acrescao, onde parte do suporte vertical contra a gravidade e' suprida pela pressao magnetica.

Vimos que a situacao de **B // g**: ESTAVEL

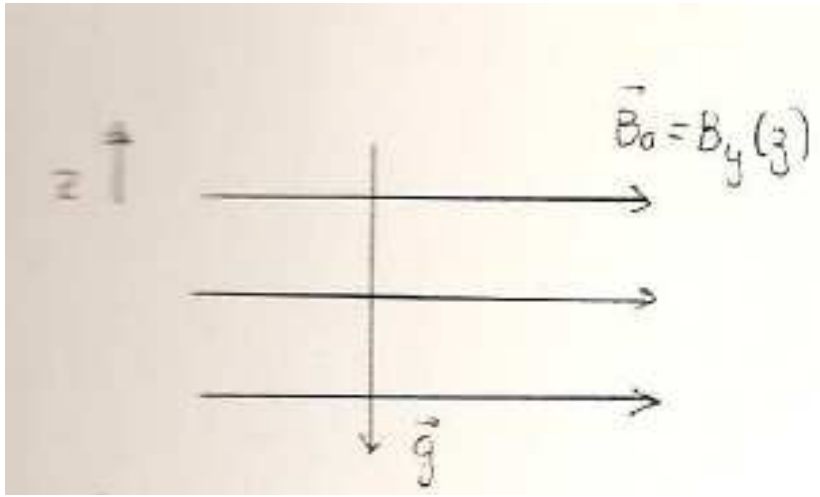
Agora estudaremos **B ⊥ g**: e veremos INSTAVEL: **com formacao de loops**



Instabilidade de Parker-Rayleigh-Taylor

Seja entao o sistema ou "atmosfera" abaixo:

vamos considerar uma configuracao de equilibrio estatico na ordem "0" e depois perturba-lo

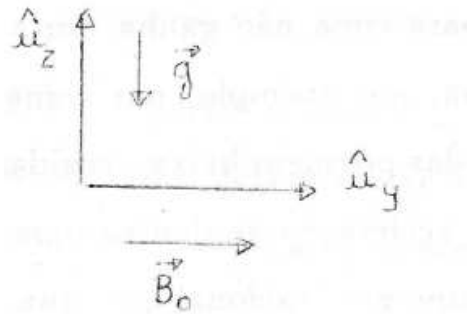



Por simplicidade: assumir que a razao entre as pressoes magnetica e' termica e' constante

$$\frac{B_o^2}{8\pi} = \beta p_o \qquad (3.62)$$

onde $\beta$ é independente de $z$, e $\vec{B}_o = B_o \hat{u}_g$ é o campo magnético horizontal.

assumiremos $T_o$ independente de $z$, tal que




$$p_o = \rho_o v_{So}^2 \tag{3.63}$$

onde

$$v_{So}^2 = \frac{kT_o}{\overline{m}} \tag{3.64}$$

Segue daí que

$$v_{Ao}^2 = \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o} = 2\beta\frac{p_o}{\rho_o} = 2\beta v_{So}^2 \tag{3.65}$$

A componente $z$ da equação de momento (2.5) será

$$-\frac{d}{dz}\left(p_o + \frac{B_o^2}{8\pi}\right) - \rho_o g = -v_{So}^2(1+\beta)\frac{d\rho_o}{dz} - \rho_o g = 0 \qquad (3.66)$$

Cuja solução é:

$$\rho_o = \rho_o(0)e^{-z/H} \qquad (3.67)$$

onde

$$H = \frac{(1+\beta)v_{oS}^2}{g} = \frac{v_{oS}^2 + v_{Ao}^2/2}{g} \qquad (3.68)$$

Mostrando que o suporte contra a forca gravitacional e' devido a ambas as pressoes: a termica e a magnetica.

**NOTAS** Note que $B_o$ é proporcional a $e^{-z/2H}$ e, portanto, decai mais lentamente que $\rho_o(z)$ e, como $p_o \propto \rho_o$, $p_o \propto e^{-z/H}$.

(Note-se que no presente caso, como $H$ é maior, $p$ e $\rho$ decrescem mais lentamente que no caso estudado

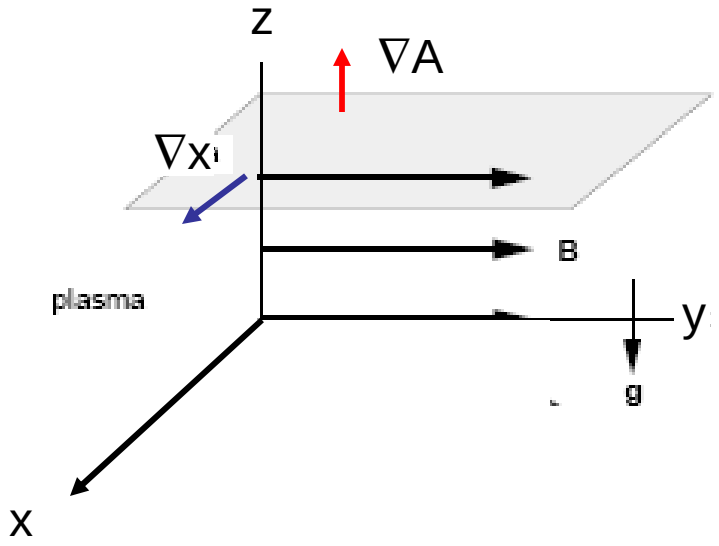
Naquele caso estudamos a componente de $\vec{B}$ ao longo do campo gravitacional e vimos que naquele caso, a força gravitacional é suportada somente pelo gradiente da pressão do gás, já que não há gradiente da pressão magnética naquela direção. Já no presente caso, a presença de $\vec{B} \perp \vec{g}$, introduz gradiente de pressão magnética na direção de $\vec{g}$ e portanto, aumenta o gradiente de pressão total contra a gravidade.)

# Perturbando esse estado de equilibrio

Agora, queremos estudar perturbações com movimentos no plano $y - z$, no qual o campo magnético é forçado a participar porque $\vec{v} \times \vec{B} \neq 0$. Como $\vec{B}$ está no plano $y - z$, $\vec{B}$ permanece nesse plano. Nesses casos, pode-se representar $\vec{B}$ pelos potenciais de Euler $\lambda = A$ e $\mu = x$, tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} A \times \vec{\nabla} x = \vec{\nabla} A \times \hat{u}_x = \vec{\nabla} \times (A \hat{u}_x) \tag{3.69}$$

(já que $\vec{\nabla}_x \hat{u}_x = 0$).




$$\vec{A} = A \hat{u}_x$$

Logo, $A$ e' o potencial vetor!

Pode-se demonstrar que com B escrito em termos de A, a forca magnetica pode ser escrita como:

$$\frac{1}{c}(\vec{J}\times\vec{B}) = \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}\right] = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}A\times\vec{u}_x)\right]\times\vec{B}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}(\nabla^2 A)\vec{u}_x\times\vec{B} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 A\vec{\nabla}A \qquad (3.76)$$

podemos escrever as equações básicas na forma

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{u}_x.(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{g} + \frac{1}{4\pi\rho}\nabla^2 A\vec{\nabla}A = 0 \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}p - \gamma\frac{p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \gamma\frac{p}{\rho}\vec{v}.\vec{\nabla}\rho = 0 \tag{3.80}$$

as quais são suplementadas por (3.69), expressando-se $\vec{B}$ em termos de $A$. (Devido ao fato de que $\vec{v}$ é de $1^a$ ordem, somente $B_o$ entrará em (3.77).) (A equação 3.80 vem da hipótese de que $\rho T dS/dt = 0$ com $S$ dado por 3.4). **(Adiabatico)**

Onde $A = A_o + A_1$, $p = p_o + p_1$, $v = v_1$, etc.

**As quantidades na ordem 0:**

denotamos $H^{-1}$ por $k_o$ as derivadas das quantidades de ordem-0 $\rho_o, p_o$ e $B_o^2$ satisfazem $\partial_z \rho_o = -k_o \rho_o$, etc. (veja eqs. 3.67 e 3.68). Uma vez que

$$\rho_o = \rho_o(0) e^{-z/H} \tag{3.67}$$

$$H = \frac{(1+\beta) v_{oS}^2}{g} = \frac{v_{oS}^2 + v_{Ao}^2/2}{g} \tag{3.68}$$

Solucoes no estado de equilibrio (ordem-0)

**Equacoes da Perturbacao (1a. or.)** Uma vez que os coeficientes nas equações de perturbação dependem de $z$ e somente $z$, podemos fazer análise de Fourier em $y$ mas não em $z$. As equações correspondentes a (3.77) - (3.80) serão:

$f_1(\vec{x},t) = f_1 exp(nt + i\vec{k}.\vec{x})$

$$nA_1 + v_z B_o = 0 \tag{3.83}$$

$$n\rho_1 - k_o\rho_o v_z + \rho_o(ik_y v_y + \partial_z v_z) = 0 \tag{3.84}$$

$$n\rho_o v_y + ik_y p_1 - \frac{ik_o k_y}{8\pi} B_o A_1 = 0 \tag{3.85}$$

$$n\rho_o v_z + \partial_z p_1 + \rho_1 g + \frac{B_o}{4\pi}\left[ -\frac{1}{2}k_o \partial_z A_1 + (\partial_z^2 - k_y^2)A_1 \right] = 0 \tag{3.86}$$

$$np_1 - k_o p_o v_z - n\gamma\frac{p_o}{\rho_o}\rho_1 + \gamma k_o p_o v_z = 0 \tag{3.87}$$

## Mudanca de variaveis nas eqs. de Ordem-1:

Seguindo Parker, vamos escolher nossas variáveis como sendo $\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1$, $B_o v_y$, e $A_1$. Logo, (3.84), (3.85) e (3.86) podem ser escritas como

$$n\left(\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1\right) + ik_y(B_o v_y) - n(\partial_z - \frac{1}{2}k_o)A_1 = 0 \tag{3.89}$$

$$ik_y\gamma\left(\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1\right) + \frac{n}{v_S^2}(B_o v_y) - ik_o k_y(1+\beta-\gamma)A_1 = 0 \tag{3.90}$$

$$\left[(1+\beta)k_o + \gamma(\partial_z - \frac{1}{2}k_o\right)\left(\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1\right) +$$

$$+\left[-\frac{n^2}{v_S^2} - k_o\beta\partial_z + 2\beta(\partial_z^2 - k_y^2) + (\gamma-1)k_o(\partial_z - \frac{1}{2}k_o)\right]A_1 = 0 \tag{3.91}$$

coeficientes nessas equações descrevendo $\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1, B_o v_y$, e $A_1$ são constantes, logo há soluções exponenciais para eles da forma $exp(ik_z z)$, então $\partial_z = ik_z$. A relação de dispersão que resulta estabelecendo-se que o determinante dos coeficientes do sistema acima seja nulo, é

$$n^4 + n^2 v_S^2(\gamma + 2\beta)(k^2 + \tfrac{1}{4}k_o^2) + k_y^2 v_S^4\left\{2\beta\gamma k^2 + \left[\gamma(1 + \tfrac{3}{2}\beta) - (1+\beta)^2\right]k_o^2\right\} = 0 \qquad (3.92)$$

Onde

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2 \qquad (3.93)$$

Se agora consideramos o caso $g = 0$, $k_o = H^{-1} = g/v_S^2(1+\beta) = 0$, a eq. (3.92) reduz-se a (3.45) que descreve ondas MHD polarizadas no plano $y - z$, com $\theta$ sendo o ângulo entre $\vec{k} = (k_y, k_z)$ e $\vec{B}_o = (B_y, 0)$. Logo, na ausência de gravidade ($g = 0$) há somente soluções estáveis (as ondas MHD).

as raízes (3.92) são reais; nesse caso $n^2$ é ou positivo (instabilidade) ou negativo (estabilidade). Vamos escrever (3.92) na forma

$$n^4 + Bn^2 + C = 0 \tag{3.104}$$

onde $B > 0$. Desde que a soma das raízes é $-B < 0$, pelo menos uma das raízes de $n^2$ (o qual é real), deve ser negativa, correspondendo a uma solução estável. Desde que o produto das raízes é $C$, $C > 0$ implica que ambas as raízes são negativas, e o sistema é estável. Inversamente, se $C < 0$, exatamente uma raiz é positiva, e o sistema é instável. O critério para instabilidade pode ser escrito como $(C < 0)$:

$$2\beta\gamma\left(k^2 + \frac{1}{4}k_o^2\right) - (1 + \beta - \gamma)(1 + \beta)k_o^2 < 0 \tag{3.105}$$

ou

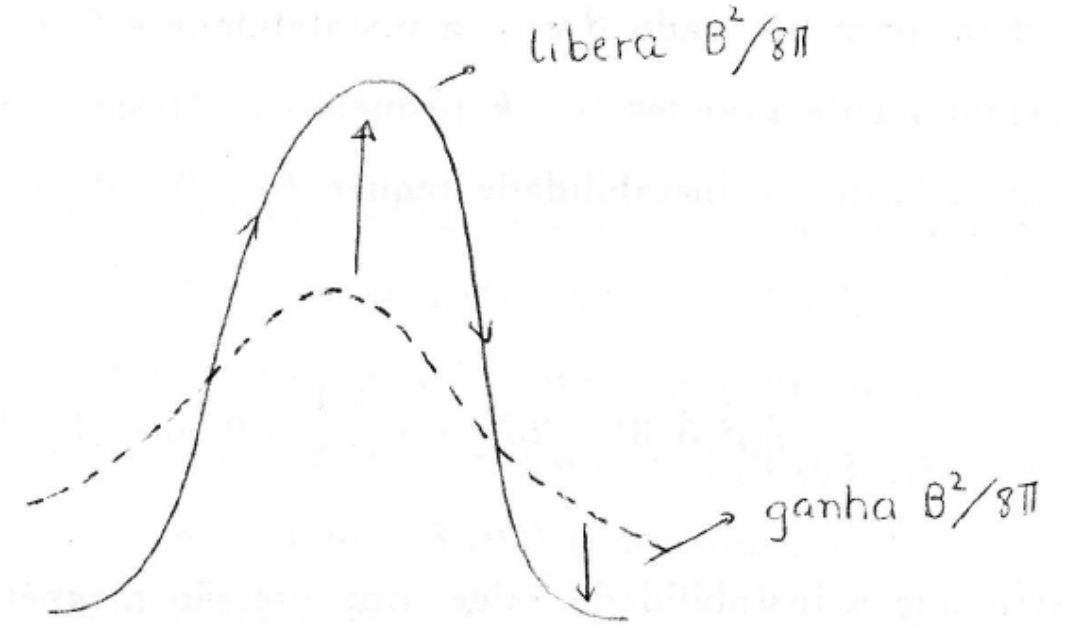
$$\left(\frac{2k}{k_o}\right)^2 < \frac{2(1+\beta-\gamma)(1+\beta)-\beta\gamma}{\beta\gamma} = f(\beta,\gamma) \qquad (3.106)$$

para um dado $\beta$ e $\gamma$, a instabilidade é favorecida para comprimentos-de-onda extremamente grandes (ou $k$ pequenos). Mesmo para comprimentos-de-onda extremamente grandes, a instabilidade requer $f > 0$. Para $\gamma = 5/3$, verificamos que isso requer que

$$2\beta^2 - \beta - \frac{4}{3} > 0 \quad \text{ou} \quad \beta > 1.1 \qquad (3.107)$$

o que mostra que a instabilidade exige uma pressao magnetica comparavel `a pressao termica.

## Qual a natureza dessa Instabilidade?




Imagine que em alguma area, a atmosfera em estudo expanda um pouco: necessita de energia gravitacional, mas energia magnetica e' liberada `a medida que as linhas de B expandem com o gas, aliviando a pressao magnetica.

Na parte inferior (+densa): o gas draga as linhas do campo para lugares mais baixos: liberando > energia gravitacional e permitindo que o campo magnetico (na parte superior) expanda ainda mais (~ instabilidade Rayleigh-Taylor classica).

Na parte superior: quanto mais rapido o campo expande, mais facil sera' para o gas mover para baixo as linhas de campo (na parte inferior), e o processo se auto-alimenta: levando a um crescimento exponencial.

## Saturacao da Instabilidade

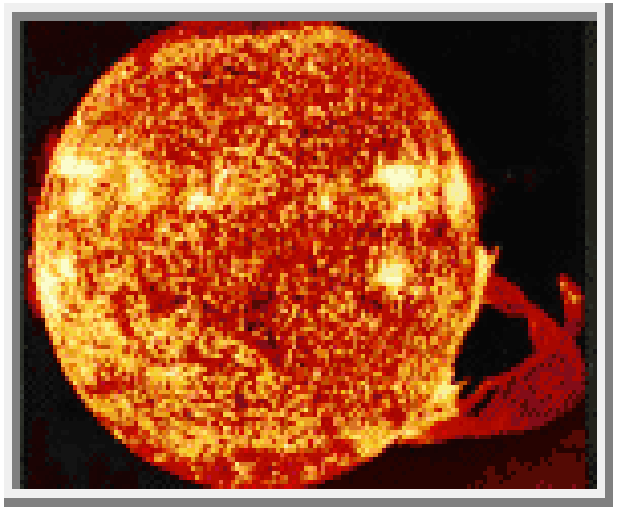
Entretanto, há certas tendências contrárias: à medida que o gás expande para fora, o campo magnético associado é recurvado para baixo, logo, mais expansão irá exigir realização de trabalho contra a tensão magnética; além do mais, o gás já no fundo do vale irá resistir a mais compressão, realizando trabalho "pdv" contra ela. Ambos os efeitos são tanto mais fortes quanto menor o comprimento-de-onda, explicando porque a instabilidade é maior para comprimentos-de-onda maiores ($k$'s menores).

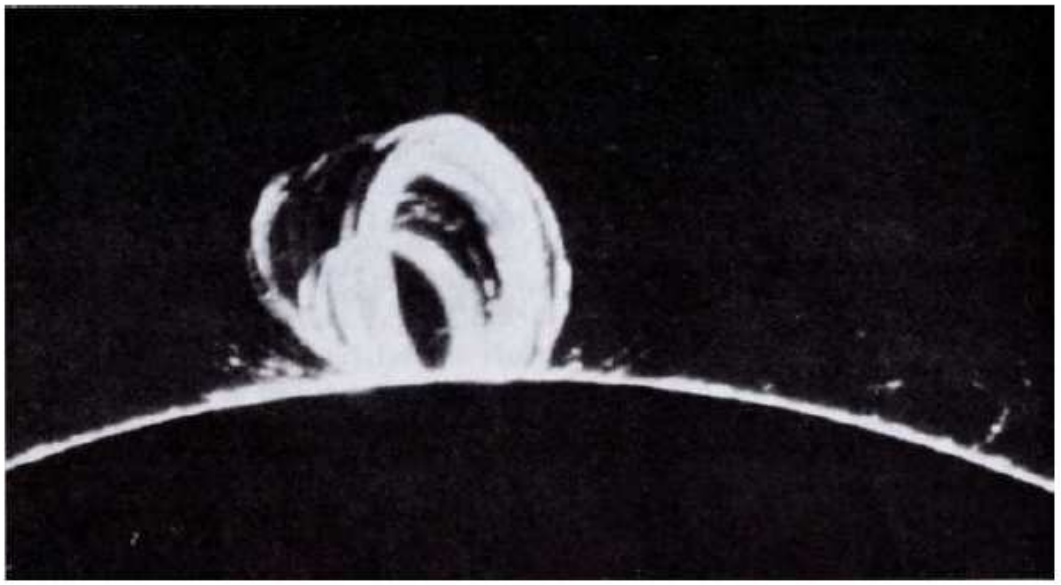
# Natureza da Instabilidade de Parker-Rayleigh-Taylor

A instabilidade: ira formar "loops" de campo B gravitacionalmente ancorados em "vales" contendo a maior parte do gas.

Loops na coroa do Sol

Example: Coronal loops





[from Priest, Solar Magnetohydrodynamics (1982)]

# Loops na Coroa Solar



[ from recent observations with TRACE spacecraft ]