Ondas de Choque

ElisaBete M. de Gouveia Dal Pino
IAG-USP

Escola CBPF, julho 2008

O que e' uma onda de choque?

Discutimos antes: pequenas perturbacoes em torno do estado de equilibrio.

Em astronomia: e' comum a perturbacao de velocidade: $v >> v_s$ ou v_A

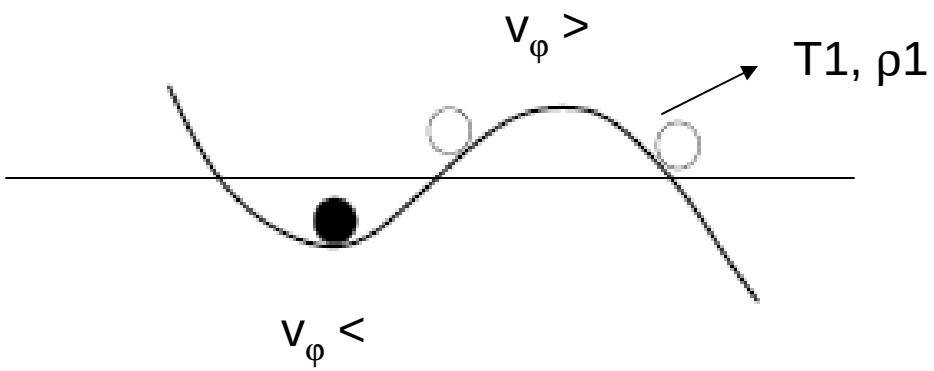
Exs.:
explosoes de supernovas
acrescao de material numa estrela,
impacto de um vento supersonico em um planeta
passagem de uma onda de densidade espiral em uma galaxia,
colisoes de "nuvens" em um meio multifasico
movimentos que se seguem `a liberacao de energia magnetica em um "solar flare",
jatos galacticos e extragalacticos impactando o MIS ou uma nuvem.

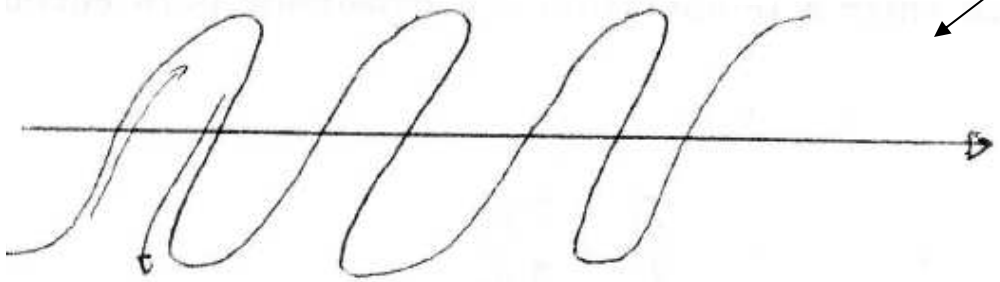


Vamos procurar compreender essas **ondas de amplitude finita**.

Uma caracteristica de tais ondas e' a "quebra" de onda.

Ex.: ondas do mar $\longrightarrow$ ondas de gravidade superficiais





No fundo do mar:

v_φ >> v fluido

No raso:

$v_\varphi \rightarrow$ v fluido

E a onda **"quebra"**:

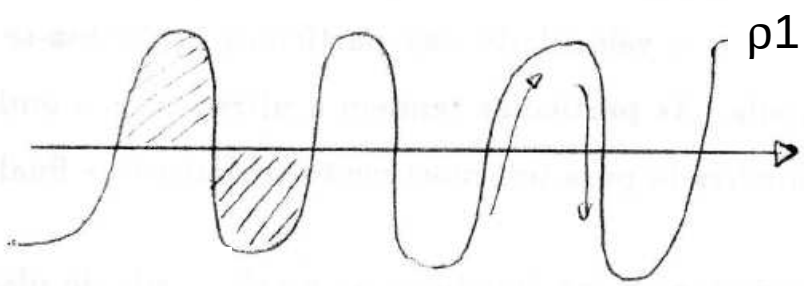
Fluido mais rapido da pico da onda tende a alcancar o fluido mais lento da parte inferior

Do mesmo modo, uma onda sonora ira "quebrar" se: **v plasma $\longrightarrow$ v_s**

Por que?

Suponha que temos uma onda de amplitude de densidade ρ_1:

Se as perdas de calor sao despreziveis (α= 1 na eq. 3.19): podemos usar a relacao adiabatica entre T e ρ (assumindo γ= 5/3):



$$\frac{T_1}{T_o} = \frac{2}{3}\frac{\rho_1}{\rho_o}$$

Mas, a velocidade do som adiabática é dada por (3.50) como

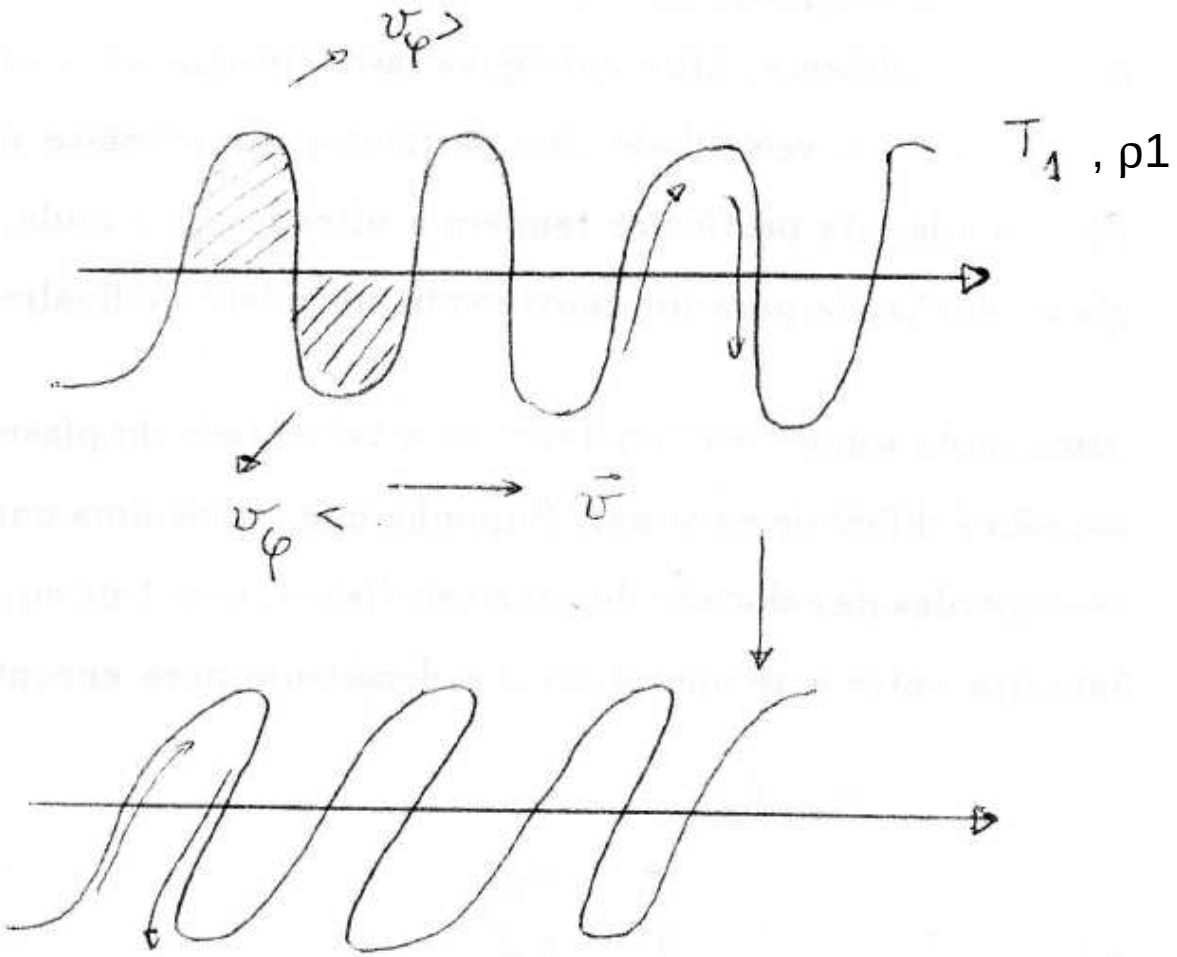
$$v_\phi = \left(\frac{\gamma k_B T}{\overline{m}}\right)^{1/2} \tag{4.2}$$

Logo, há uma variação de 1^a ordem em v_ϕ à medida que a onda evolui:

$$\frac{\delta v_\phi}{v_\phi} = \frac{1}{2}\frac{T_1}{T_o} = \frac{1}{3}\frac{\rho_1}{\rho_o} \tag{4.3}$$

No limite $\rho_1 \longrightarrow 0$ que tratamos no Cap. 3: efeito e' desprezivel $\longrightarrow$ todas as partes da onda prosseguem na mesma velocidade: e a onda continua a ter forma senoidal.

Se ρ_1 e' finito: (4.3) mostra que a onda viaja mais rapido onde ρ_1 ´ e grande (pico da onda): onda fica + aguda


$v_\varphi >$
T_1 , ρ1
$v_\varphi <$
$\vec{v}$

Se examinassemos essa onda acustica "aguda" no microscopio veriamos algo ~ ao que ocorre com a onda na praia:

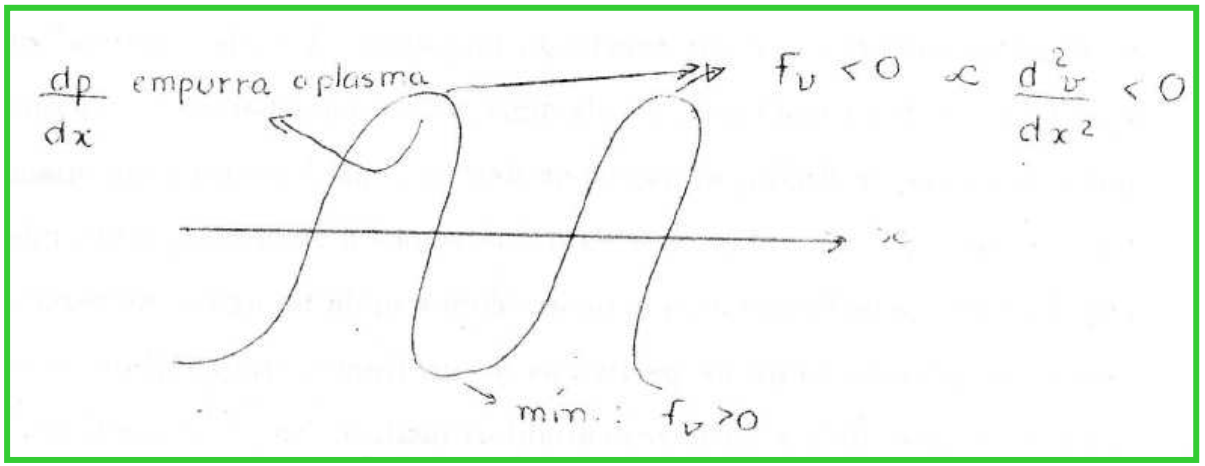
As particulas no pico movem-se mais rapido em relacao `as particulas `a sua frente (da parte inferior da onda): transmitindo a estas, momento atraves de colisoes em alguns livres-caminhos medios:

$\longrightarrow$ Levara a uma mistura ou difusao de particulas: entre particulas rapidas (atras do pico) e lentas (adiante do cume da onda)

A viscosidade nos permite descrever este fenômeno para uma onda acústica. Lembremos que o efeito da viscosidade é normalmente desprezível, mas torna-se importante onde a velocidade do fluido possui grandes gradientes. Aqui temos exatamente essa situação.

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} + \xi\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]$$

$$= -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\xi\frac{d^2v}{dx^2} \qquad (4.5)$$



o termo viscoso e' negativo nas proximidades do pico de velocidade do fluido na onda, esse termo tende a desacelerar o fluido; o gradiente de pressao, por sua vez, tenta acelerar o fluido. A razao entre a forca amortecedora e a forca de crescimento do pico e:

$$\frac{\left|\frac{4}{3}\xi\frac{d^2v}{dx^2}\right|}{\left|\frac{dp}{dx}\right|} \sim \frac{\frac{\xi v}{(\Delta x)^2}}{\frac{p}{\Delta x}} = \frac{\xi v}{p\Delta x} \tag{4.6}$$

A viscosidade é importante quando esta razão se aproxima de 1, ou

$$\Delta x = \frac{\xi v}{p} = \frac{\rho\nu v}{\rho v_S^2} \sim \frac{\nu}{v_S} \tag{4.7}$$

Onde usamos que $\xi = \rho\nu$ e usamos o fato de que v aproxima-se de v_S quando a onda torna-se aguda. O número de Reynolds correspondente

$$R_e \sim \frac{v_S \Delta x}{\nu} \sim 1 \tag{4.8}$$

$$R_e \sim \frac{v_S \Delta x}{\nu} \sim 1 \tag{4.8}$$

Mais importante, uma vez que v é um coeficiente de difusão, temos

$$\nu = mfp \times v_S \tag{4.9}$$

Onde mfp é o livre-caminho-médio ("mean-free-path") para troca de momento entre as partículas do gás. Segue-se então de (4.7) que forças viscosas tornam-se importantes quando

$$\Delta x \sim mfp \tag{4.10}$$

→ o mecanismo no qual a onda acustica "quebra" envolve a interacao colisional de particulas rapidas de detras da onda com particulas lentas da frente e esse processo so' pode ocorrer quando os dois conjuntos de particulas estao afastados entre si somente alguns livres-caminhos-medios.

Segue-se que a teoria de fluido pode dizer-nos em que ponto a onda sonora "quebra", mas como a teoria deixa de ser valida em escalas ~ *mfp*, ela nao pode descrever o que acontece em detalhe dentro da regiao Δx.

Porem, quando a camada Δx de intensa dissipacao (**frente de choque**) se forma podemos usar as leis de conservacao para verificar como as condicoes bem atras dessa camada dependem daquelas bem adiante da mesma.

O unico parametro que precisamos e a forca do choque, isto e, o **numero de Mach**:

$$M = \frac{v_1}{\gamma^{1/2} v_S} \tag{4.11}$$

Onde v_1 é a velocidade do choque com respeito ao fluido adiante e $\gamma^{1/2} v_S$ é a velocidade do som adiabática à frente do choque.

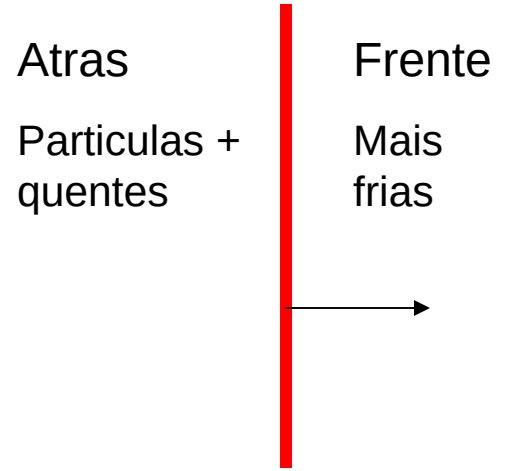
Essas ideias aplicam-se a um **"choque colisional"**:

→ um choque no qual a termalizacao do feixe de particulas atraves do choque e' causada por colisoes entre particulas.

Nos plasmas, distintamente de gases neutros, **podemos ter "choques acolisionais"**:

→ nos quais a termalizacao ocorre por interacoes particula-onda ou particula-nuvem de particulas

Ex. 1:
a instabilidade de dois feixes eletronicos ("electron two-stream instability"): nuvens de eletrons espalham particulas carregadas a uma taxa bem maior que a taxa de colisoes particula-particula (pois o ajuntamento de eletrons pode ter um grande numero de eletrons): de modo que a termalizacao processa-se mais rapidamente.



e- de detras penetram aqueles da frente com v_{sh}. Se esta e' maior que v_{th} este feixe fica instavel e tende a agrupar-se a 1 taxa w_p.

Ex. 2:

Se o plasma ´e magnetizado, `a medida que as particulas carregadas de detras do choque movem-se no campo magnetico em frente da onda, elas sao defletidas pelas ondas.

Nesse caso, verifica-se que a espessura do choque e' da ordem do raio de Larmour do ion ($\Delta x = r_L$):

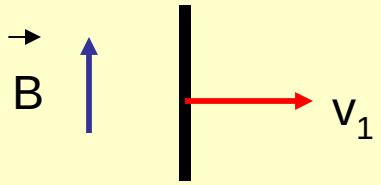
choque vento solar com Terra: Δx = 1000 km << λ_{mfp} = 10^8 km ($\Delta x = r_L$ ion)

O resultado liquido e' que as interacoes particula-onda termalizam os movimentos em uma frente de choque tal como as colisoes o fariam.

Para o tratamento de choque que veremos a seguir, nao faz diferenca se o mesmo e' colisional ou acolisional.

Relacoes de Hankine-Hugoniot

A seguir, estudaremos o caso particular de um choque propagando-se em uma direcao $\perp$ a B :



O caso da propagacao // a B pode ser obtido fazendo-se $B = 0$ nas equacoes, pois movimentos $// B$ nao o afetam e nem sao afetados por B e portanto nao trocam energia com o campo.

Equacoes MHD

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{k_B}{\overline{m}\rho}\vec{\nabla}(\rho T) + \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} -$$

$$p = \rho k_B T/\overline{m}$$

$$-\nu\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0$$

MHD: Falta eq. para evoluir T

$$S = \frac{k_B}{\overline{m}} ln\left(\frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho}\right) = \frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{1}{\gamma-1} lnT - ln\rho\right)$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 + \eta J^2 + k\nabla^2 T - \rho\mathcal{L}(\rho, T)$$

$$\frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{1}{\gamma-1}\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\gamma-1}\rho\vec{v}.\vec{\nabla}T - T\frac{\partial \rho}{\partial t} - T\vec{v}.\vec{\nabla}\rho\right) -$$

$$-K\vec{\nabla}^2 T - \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 - \frac{c^2\eta}{(4\pi)^2}(\vec{\nabla}\times\vec{B})^2 + \rho\mathcal{L}(\rho, T) = 0$$

Precisamos das equacoes de conservacao na forma padrao:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \partial_j(\pi_{ij} + T_{ij}) = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{3}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right)\right] + \partial_i\left[\frac{B^2}{4\pi}v_i - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}B_i + \right.$$

$$+\frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J}\times\vec{B})_i + \rho v_i\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \left(\vec{v}.\sigma'\right)_i -$$

$$\left. -\frac{J_i}{n_e}\int\frac{dp_e}{n_e} + Q_i + R_i\right] = 0 \tag{4.14}$$

Onde:

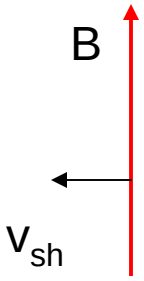
$$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \xi\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}.\vec{v}\right) \tag{4.15}$$

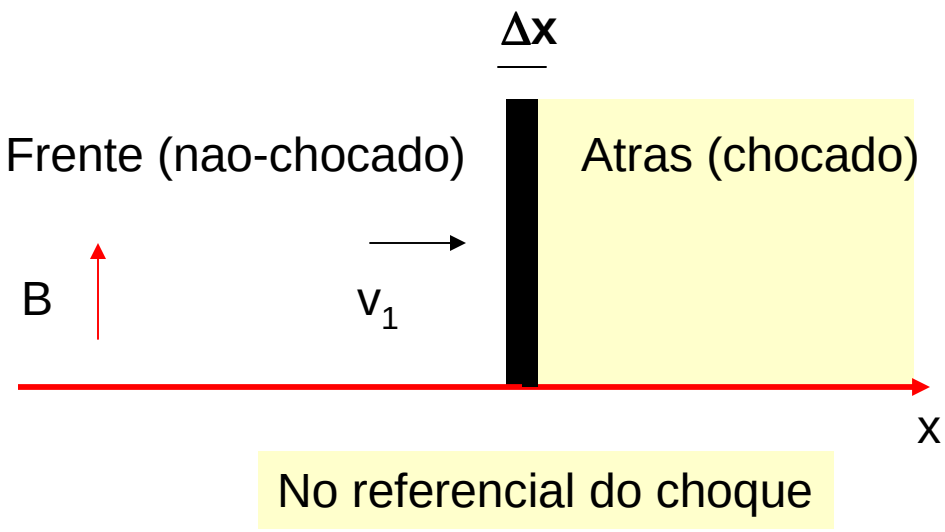
$$T_{ij} = \frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{1}{4\pi}B_i B_j \tag{4.16}$$

Hipoteses

Vamos assumir:

- fluxo estacionario ($\partial f/\partial t = 0$).
- desprezar gravidade;
- sistema de coordenadas em repouso no referencial do choque.
- plasma `a frente do choque flui com v_1 com respeito ao choque.
- Direcao da velocidade do choque // -x
- direcao de B // y.





No referencial do choque

Com o movimento na direcao x:

A única componente de π_{ij} que não se anula é

$$\pi_{xx} = p + \rho v^2 - \sigma'_{xx} = p + \rho v^2 - \xi\left(2\partial_x v - \frac{2}{3}\partial_x v\right)$$

$$= p + \rho v^2 - \frac{4}{3}\xi\partial_x v \qquad (4.17)$$

E:

$$T_{xx} = \frac{B^2}{8\pi} \qquad (4.18)$$

Pois $B_x B_x/4\pi = 0$

Integramos entao (4.12) a (4.14) pelo volume de uma caixa com lados paralelos a x e faces perpendiculares a x.

Convertemos a integral no volume em uma integral de superficie usando o teorema da divergencia

Precisamos das equacoes de conservacao na forma padrao:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \partial_j(\pi_{ij} + T_{ij}) = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{3}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right)\right] + \partial_i\left[\frac{B^2}{4\pi}v_i - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}B_i + \right.$$

$$+\frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J}\times\vec{B})_i + \rho v_i\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \left(\vec{v}.\sigma'\right)_i -$$

$$\left. -\frac{J_i}{n_e}\int\frac{dp_e}{n_e} + Q_i + R_i\right] = 0 \tag{4.14}$$

Onde:

$$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \xi\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}.\vec{v}\right) \tag{4.15}$$

$$T_{ij} = \frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{1}{4\pi}B_i B_j \tag{4.16}$$

Obtemos entao:

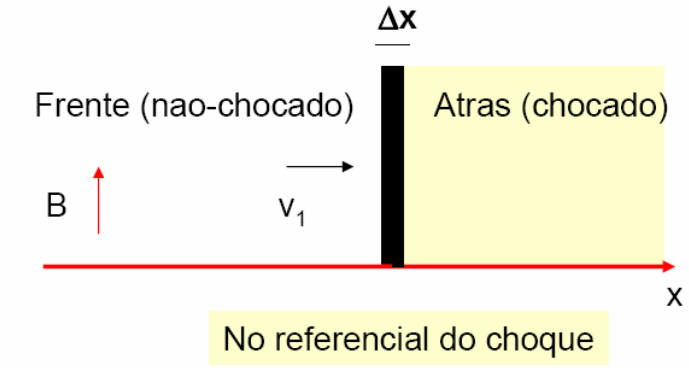
$$\int_{\partial V} \rho \vec{v}.d\vec{S} = 0 \tag{4.19}$$

$$\int_{\partial V} (\pi_i + T_i).d\vec{S} = 0 \tag{4.20}$$

$$\int_{\partial V} \left[\frac{B^2}{4\pi}\vec{v} - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}\vec{B} + \frac{c\eta}{4\pi}(J \times \vec{B}) + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \right.$$

$$\left. -(\vec{v}.\vec{\sigma}) - \frac{\vec{J}}{n_e}\int \frac{dp_e}{n_e} + \vec{Q} + \vec{R} \right].d\vec{S} = 0 \tag{4.21}$$

Em (4.19), $\vec{v}$ é paralelo aos lados da caixa, então obtemos:



$$\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2 = 0$$

Onde ρ_1 e v_1 referem-se a um ponto suficientemente distante da frente de choque do lado pré-shock (ou antes da frente de choque: "upstream"), e ρ_2 e v_2 referem-se a um ponto suficientemente distante da frente de choque do lado pós-choque (ou seja, atrás do choque: "downstream"). A condição "distante o bastante" é apenas para garantir que o gás alí já esteja completamente termalizado. Se denotamos os saltos na variável A por $[A] = A_1 - A_2$, (4.22) torna-se:

$$[\rho v] = 0 \qquad (4.23)$$

De (4.17) e (4.18), as unicas componentes que nao se anulam em (4.20) sao aquelas com $i = x$; logo novamente os lados y e z da caixa nao contribuem e encontramos que:

$$\left[p + \rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{4}{3}\xi \partial_x v\right] = 0 \qquad (4.24)$$

Obtemos entao:

$$\int_{\partial V} \rho \vec{v}.d\vec{S} = 0 \tag{4.19}$$

$$\int_{\partial V} (\pi_i + T_i).d\vec{S} = 0 \tag{4.20}$$

$$\int_{\partial V} \left[\frac{B^2}{4\pi}\vec{v} - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}\vec{B} + \frac{c\eta}{4\pi}(J \times \vec{B}) + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \right.$$

$$\left. -(\vec{v}.\vec{\sigma}) - \frac{\vec{J}}{n_e}\int \frac{dp_e}{n_e} + \vec{Q} + \vec{R} \right].d\vec{S} = 0 \tag{4.21}$$

Aplicando procedimento similar `a equacao de energia, fazendo termo por termo:

$B^2\vec{v}/4\pi$ contribuem so nas faces perpendiculares a x;

B.v=0;

$\vec{J} = c(\vec{\nabla} \times \vec{B})/4\pi$ está na direção de z, logo $\vec{J} \times \vec{B}$ está na direção x, e portanto, contribui somente nas faces perpendiculares a x da caixa. O termo $\rho\vec{v}(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\bar{m}})$ contribui somente nas faces perpendiculares também. O vetor $\vec{v}.\sigma'$ tem somente uma componente x, $\frac{4}{3}\xi v\partial_x v$. Por simetria, tanto $\vec{Q}$ como $\vec{R}$ têm somente componentes x.

A bateria de Biermann $(\vec{J}/n_e)\int dp_e/n_e$

J e' // z e poderia contribuir para a integral nos lados da caixa // *x*. Mas como $\int dp_e/n_e$ e' funcao de *x* somente, a conservacao de corrente entao implica que as contribuicoes dos lados da caixa cancelam-se.

O resultado das consideracoes anteriores na eq. de energia e':

$$\left[\frac{B^2}{4\pi}v + \frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J}\times\vec{B})_x + \rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \frac{4}{3}\xi v\partial_x v - K\partial_x T + R_x\right] = 0 \qquad (4.25)$$

Onde usamos a eq. (2.36):

$$\vec{Q} = -K\vec{\nabla}T \qquad (2.36)$$

Na eq. acima:

$$\frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J}\times\vec{B})_x = \frac{c^2\eta}{16\pi^2}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}B^2\right) - \vec{B}.\vec{\nabla}\vec{B}\right]_x = \frac{c^2\eta}{16\pi^2}B\partial_x B \qquad (4.26)$$

Hipoteses (nas eqs. de energia e momentum):

- longe o bastante da frente de choque, todas as quantidades se ajustam aos seus valores no estado estacionario → as derivadas espaciais se anulam: eliminado os termos com η, ξ e K;

- $[R_x]$ = fluxo radiativo dirigido "upstream" [pre-choque (1)] - fluxo radiativo dirigido "downstream" [pos-choque (2)] :

Se as particulas termalizam (atraves de colisoes elasticas ou processos acolisionais) antes de emitirem energia sob forma de radiacao: **teremos um choque nao-radiativo**: ou melhor, podemos tomar a regiao do pos-choque antes da regiao onde o resfriamento comeca a ocorrer, nesse caso:

$$[R_x]=0$$

A eq. de Energia reduz-se entao a:

$$\left[\rho v\left(\frac{B^2}{4\pi\rho}+\frac{1}{2}v^2+\frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right]=0 \qquad (4.27)$$

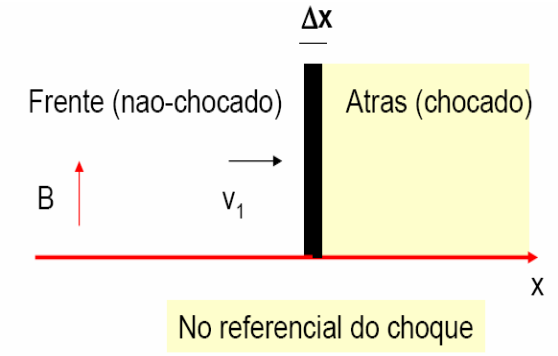
E como de (4.23):

$$\left[\rho v\right]=0 \qquad (4.23)$$

Vem que:

$$\left[\frac{B^2}{4\pi\rho}+\frac{1}{2}v^2+\frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right]=0 \qquad (4.28)$$

Falta-nos ainda uma condicao a partir da eq. de inducao magnetica:



$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) + \nu_M \nabla^2 \vec{B} = 0 \qquad (4.29)$$

Uma vez que $\partial_t = 0$ e $\vec{B}.\vec{\nabla} = B\partial_y = 0$ e $\vec{\nabla}.\vec{v} = \partial_x v$, a componente y de (4.29) resulta:

$$-v\partial_x B - B\partial_x v + \nu_M \partial_x^2 B = \partial_x(-vb + \nu_M \partial_x B) = 0 \qquad (4.30)$$

E usando o mesmo procedimento de antes teremos:

$$[-vB + \nu_M \partial_x B] = -[vB] = 0 \qquad (4.31)$$

Usando (4.23) $\boxed{[\rho v] = 0}$ podemos re-escrever a eq. acima:

$$\left[(\rho v)\frac{B}{\rho}\right] = [\rho v]\left[\frac{B}{\rho}\right] = 0 \qquad (4.32)$$

Se escrevemos p em termos de T e generalizamos o $5/2$ de (4.28) para $\gamma/(\gamma-1)$, podemos escrever (4.23), (4.32), (4.24) (onde tiramos $\partial_x v$) e (4.28), respectivamente, na forma

$$[\rho v] = 0 \tag{4.33}$$

$$\left[\frac{B}{\rho}\right] = 0 \tag{4.34}$$

$$\left[\rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}\right] = 0 \tag{4.35}$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right] = 0 \tag{4.36}$$

E' costume denotar-se os valores `a frente do choque (pre-choque) por (1) e os valores atras do choque por (2) (pos-choque).

As eqs. (4.33) - (4.36) podem ser vistas como 4 eqs. com 4 incognitas; $\rho 2$, $v2$, $B2$ e $T2$

em termos de $\rho_1, v_1, B_1, e\, T_1$. É costume definir-se:

$$M = \frac{v_1}{\left(\frac{\gamma k_B T_1}{\overline{m}}\right)^{1/2}} = \frac{v_1}{\gamma^{1/2} v_{S1}} \qquad (4.37)$$

O qual é o número de Mach no qual o plasma entra no choque

$\gamma^{1/2} v_{s1}$ é a velocidade do som adiabática à frente do choque (no pré-choque).

Vamos definir tambem:

$$x = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \text{crescimento de pressão} \tag{4.38}$$

$$y = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{crescimento de densidade} \tag{4.39}$$

$$\beta = \frac{B_1^2}{8\pi p_1} \tag{4.40}$$

Para resolver (4.33) - (4.36), eliminamos v_2 e B_2 em favor de ρ_2 usando (4.33) e (4.34), de modo que (4.35) torna-se

$$\rho_2 v_2^2 + \frac{B_2^2}{8\pi} + p_2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \frac{B_1^2}{8\pi} + p_2$$

$$= \frac{1}{y}\rho_1 v_1^2 + y^2\frac{B_1^2}{8\pi} + p_2 = \rho_1 v_1^2 + \frac{B_1^2}{8\pi} + p_1 \qquad (4.41)$$

ou

$$\rho_1 v_1^2(1 - y^{-1}) = \frac{B_1^2}{8\pi}(y^2 - 1) + p_2 - p_1 \qquad (4.42)$$

Se escrevemos p em termos de T e generalizamos o $5/2$ de (4.28) para $\gamma/(\gamma-1)$, podemos escrever (4.23), (4.32), (4.24) (onde tiramos $\partial_x v$) e (4.28), respectivamente, na forma

$$[\rho v] = 0 \tag{4.33}$$

$$\left[\frac{B}{\rho}\right] = 0 \tag{4.34}$$

$$\left[\rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}\right] = 0 \tag{4.35}$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right] = 0 \tag{4.36}$$

E (4.36) torna-se:

$$\frac{1}{2}v_2^2+\frac{B_2^2}{4\pi\rho_2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 v_1^2+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_2}{\rho_1}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}v_1^2+y\frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{y}\frac{p_2}{\rho_1}=\frac{1}{2}v_1^2+\frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} \qquad (4.43)$$

ou

$$\rho_1 v_1^2(1-y^{-2})=\frac{B_1^2}{8\pi}[4(y-1)]+\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{y}-p_1\right) \qquad (4.44)$$

Se eliminamos $\rho_1 v_1^2$ entre (4.42) e (4.44) obtemos:

$$\frac{1-y^{-2}}{1-y^{-1}} = 1+y^{-1} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{B_1^2}{8\pi}[4(y-1)] + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{y} - p_1\right)}{\frac{B_1^2}{8\pi}(y^2-1) + p_2 - p_1} \tag{4.45}$$

Se dividimos numerador e denominador por p_1, obtemos

$$\frac{y+1}{y} = \frac{4\beta(y-1) + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}{\beta(y^2-1) + x - 1} \tag{4.46}$$

....E depois de alguma algebra elementar:

$$\beta(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) = \beta(y-1)^3 =$$

$$x\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1 - y\right) - y\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1\right) + 1$$

$$= x\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y\right) - y\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) + 1 \qquad (4.48)$$

Então, resolvendo para x:

$$x = \frac{y\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} - 1 + \beta(y-1)^3}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y} \qquad (4.49)$$

O que resulta no crescimento em pressao em termos do crescimento em densidade para qualquer numero de Mach do choque.

(Note que para obter $y(x)$ tem-se que resolver uma equacao cubica).

É útil encontrar x como função de M. Para esse fim, nós dividimos (4.42) por $p_1 = \rho_1 v_{S1}^2$

$$\rho_1 v_1^2 (1 - y^{-1}) = \frac{B_1^2}{8\pi}(y^2 - 1) + p_2 - p_1 \qquad (4.42)$$

E obtemos:

$$\frac{v_1^2}{v_{S1}^2}(1 - y^{-1}) = \gamma M^2 (1 - y^{-1}) = \beta(y^2 - 1) + x - 1 \qquad (4.50)$$

E substituindo x de (4.49), obtemos apos alguma algebra:

$$\frac{\gamma M^2}{y} - \beta(y + 1) = \frac{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} + \beta(y - 1)^2}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - y} \qquad (4.52)$$

Multiplicando por $y\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-y\right)$, obtemos

$$\left[\gamma M^2-\beta(y^2+y)\right]\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-y\right)=\frac{2\gamma}{\gamma-1}y+\beta(y^3-2y^2+y) \tag{4.53}$$

Os termos em y^3 cancelam-se e somos deixados com uma equação quadrática que pode ser escrita como

$$2(2-\gamma)\beta y^2+\gamma\left[(\gamma-1)M^2+2(1+\beta)\right]y-\gamma(\gamma+1)M^2=0 \tag{4.54}$$

Assim, para um dado valor de *M*, podemos resolver (4.54) para *y*, e encontrar *x* de (4.49):

$$x=\frac{y\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}-1+\beta(y-1)^3}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-y} \tag{4.49}$$

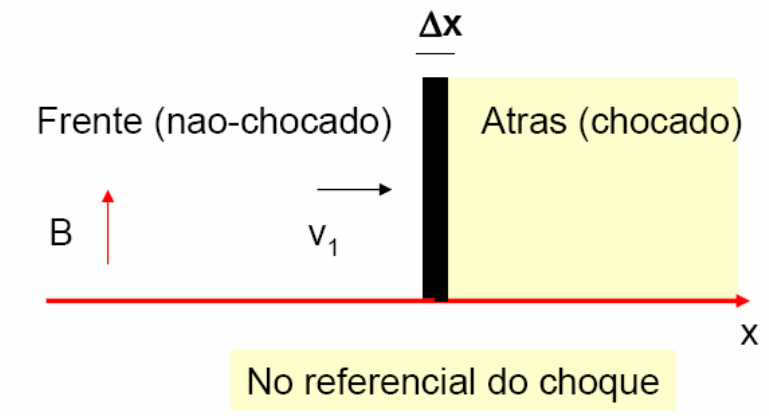
Lembrando:

$$x = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \text{crescimento de pressão} \qquad (4.38)$$

$$y = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{crescimento de densidade} \qquad (4.39)$$

$$\beta = \frac{B_1^2}{8\pi p_1}$$

$$M = \frac{v_1}{\left(\frac{\gamma k_B T_1}{\overline{m}}\right)^{1/2}} = \frac{v_1}{\gamma^{1/2} v_{S1}}$$



Choques com $B = 0$

Aplica-se se B e' fraco ou se a propagacao do choque e' // a B .

(4.54) e' resolvida para y (tomando- se $\beta = 0$):

$$y = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2} \qquad (4.55)$$

Crescimento em densidade

e o resultado injetado em (4.49) dá:

$$x = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \qquad (4.56)$$

Crescimento em p

Então, $M = 1$ implica $x = y = 1$, correspondendo a um choque bem fraco ou, o que dá na mesma, uma onda acústica viajando com a velocidade de fase $\gamma^{1/2} v_S$.

Frequentemente, o caso interessante em astronomia é $v_1 >> \gamma^{1/2} v_S$, descrevendo movimento fortemente supersônico, como em uma explosão de supernova ou flares. Então

Para M>>1:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = y \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \; (= 4 \; para \; \gamma = 5/3) \tag{4.57}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = x \rightarrow \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 \; \left(= \frac{5}{4} M^2 \; para \; \gamma = \frac{5}{3} \right) \tag{4.58}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M^2 \; \left(= \frac{5}{16} M^2 \; para \; \gamma = \frac{5}{3} \right) \tag{4.59}$$

A ultima eq. nos permite escrever:

$$T_2 = \frac{2(\gamma-1)\overline{m}v_1^2}{(\gamma+1)^2 k_B} \qquad \left(= \frac{3}{16}\frac{\overline{m}v_1^2}{k_B} \; para \; \gamma = \frac{5}{3} \right) \tag{4.60}$$

Que fica independente de T1 !

Logo para M>>1:

- o crescimento de densidade e' no maximo 4
- temperatura no pos-choque T_2 cresce com v_1^2 e torna-se independente de T_1.

A termalizacao da energia cinetica do pre-choque por grama: $\frac{1}{2}\, v_1^2$ deveria resultar = `a entalpia no pos-choque, i.e.:

$$\tfrac{1}{2}\, v_1^2 = H_2 = p_2/\rho_2 + U_2 = 5/2\ k\ (T_2/m)$$

Resultando : $T_2 = \frac{1}{5}\frac{\bar{m} v_1^2}{k_B}$ Que e' > que (4.60) !

Por que?

Resposta esta em (4.36): $\tfrac{1}{2}\, v_1^2 + 5/2\ k\ (T_1/m) = \tfrac{1}{2}\, v_2^2 + 5/2\ k\ (T_2/m)$

Como $T_1 << T_2$: $\tfrac{1}{2}\, v_1^2 \sim \tfrac{1}{2}\, v_2^2 + 5/2\ k\ (T_2/m)$ = en cin.+entalpia

E como: $v_2 = (\rho_1/\rho_2)\, v_1 = \tfrac{1}{4}\, v_1$:

$$\tfrac{1}{2}\, v_1^2 = 1/16\ (\ 1/2\ v_1^2\ ) + 15/16\ (\ 1/2\ v_1^2\ )$$

$$Ec_1 = Ec_2 + H_2$$

Voltemos `as eqs. gerais para x e y, para analisar um choque com $B \neq 0$:

$$x = \frac{y\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} - 1 + \beta(y-1)^3}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y} \tag{4.49}$$

$$2(2-\gamma)\beta y^2 + \gamma\big[(\gamma-1)M^2 + 2(1+\beta)\big]y - \gamma(\gamma+1)M^2 = 0 \tag{4.54}$$

Choques com $B \neq 0$:

Comecemos com choque fraco, $y = \rho_2/\rho_1 = 1$

De (4.54) isso requer que:

$$2(2-\gamma)\beta + \gamma(\gamma-1)M^2 + 2\gamma(1+\beta) - \gamma(\gamma+1)M^2 = 0 \qquad (4.61)$$

ou

$$\gamma M^2 = \gamma + 2\beta \qquad (4.62)$$

Ou ainda como: $\beta = \dfrac{B_1^2}{8\pi p_1}$ $\qquad M = \dfrac{v_1}{\left(\frac{\gamma k_B T_1}{\overline{m}}\right)^{1/2}} = \dfrac{v_1}{\gamma^{1/2} v_{S1}}$

$$v_1^2 = \gamma v_S^2 + v_A^2 \tag{4.63}$$

O qual, notamos é a fórmula da velocidade de fase de uma onda magnetossônica em (3.52). Logo, $y = 1$ é a extensão das relações de choques fracos para choques que se propagam através de $\vec{B}$. Segue que se B é finito, M tem que exceder 1 por um valor finito para excitar ondas de choque através de B (pois agora $v_1^2 \geq \gamma v_s^2 + v_A^2$)!

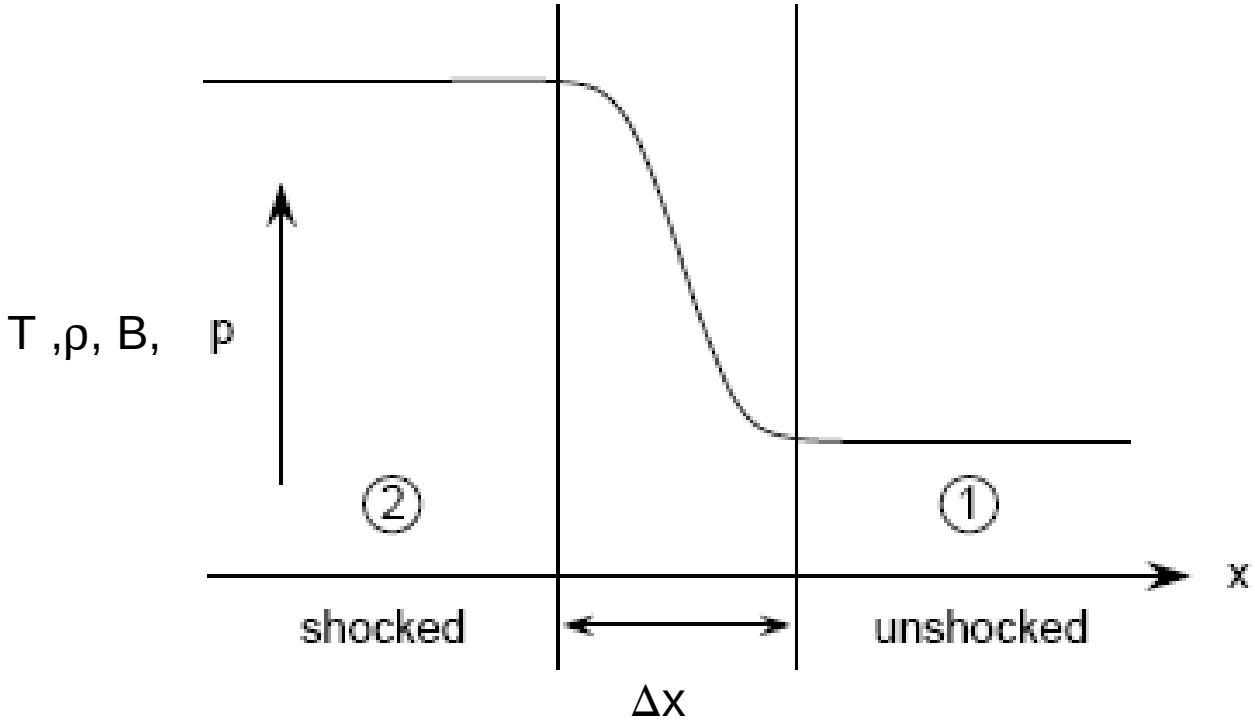
Ou seja, para excitar ondas de choque ATRAVES de B, e' necessario que a onda tenha velocidade SUPER-MAGNETOSSONICA !

Quando B=0 basta M>1: SUPER-SONICO

Para M=5 e B≠0:

Dependência com β de parâmetros de choques perpendiculares a $\vec{B}$			
$(\gamma = 5/3,\ M = 5)$			
$\beta = \frac{B_1^2}{8\pi p_1}$	$x = \frac{p_2}{p_1}$	$y = \frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{x}{y} = \frac{T_2}{T_1}$
0	31	3.6	8.6
5	6.8	2.0	3.4
10	2.5	1.5	1.7
15	1.3	1.2	1.1
20	1.0	1.0	1.0

Desenho esquematico de um choque adiabatico



Analisando a Tabela:

Tabela mostra que:

`a medida que $B_1^2/8\pi$ cresce: β cresce $\longrightarrow$ x e T_2 crescem cada "menos" no pos-choque

Logo: choques com B $\perp$ v_{choque}: sao menos dissipativos pois havera < crescimento de T_2 para irradiar

Usando (4.62) vemos que:

Para M=5 e y=1 $\longrightarrow$ β=20 $\longrightarrow$ logo, se M=5 e $\beta \geq 20$: nao ha choque:

ou para M=5: so ha choque se $\beta < 20$ (como vemos na Tabela)

Por que?

De (4.35): $$\left[\rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}\right] = 0$$

Vemos que:

Parte da pressao dinamica do pre-choque $\rho_1 v_1^2$ vai para P_m e parte para P.

Como de (4.34): $$\left[\frac{B}{\rho}\right] = 0 \longrightarrow P_m \propto B^2 \propto \rho^2$$

E como: $$P \propto \rho^{5/3}$$

$\longrightarrow$ P_m cresce mais rapido com ρ no pos-choque:

- B_2 resite mais `a compressao que P (campo absorve parte da energia do choque)
- < absorcao de energia interna (< aumento de T_2)

Logo:

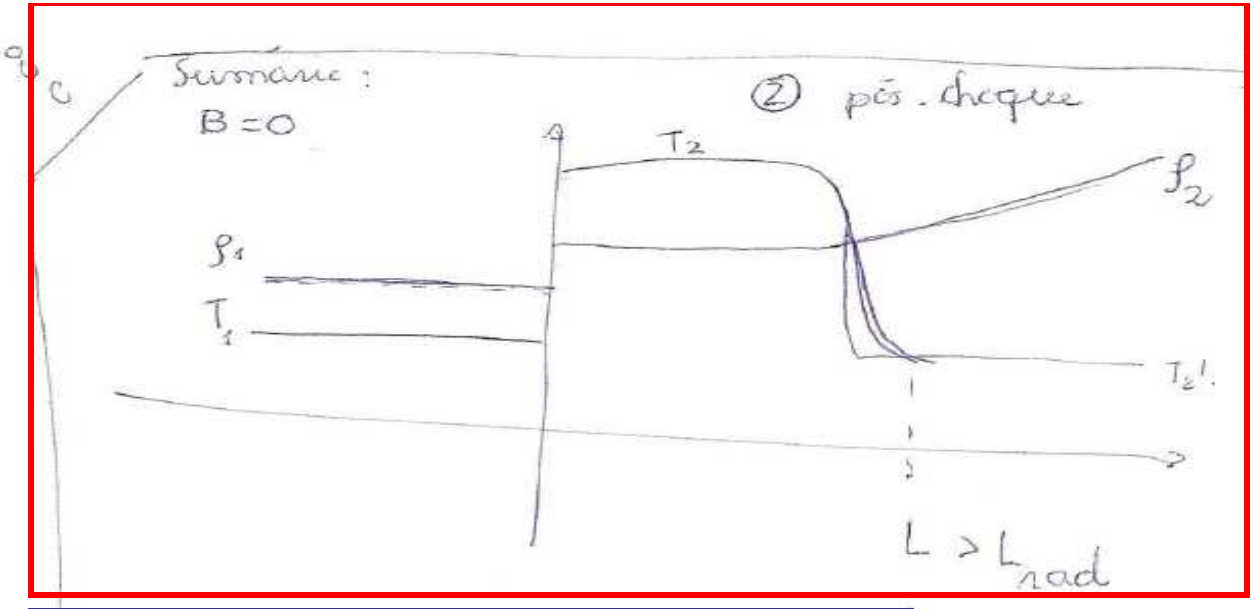
Choque com $B \neq 0$:

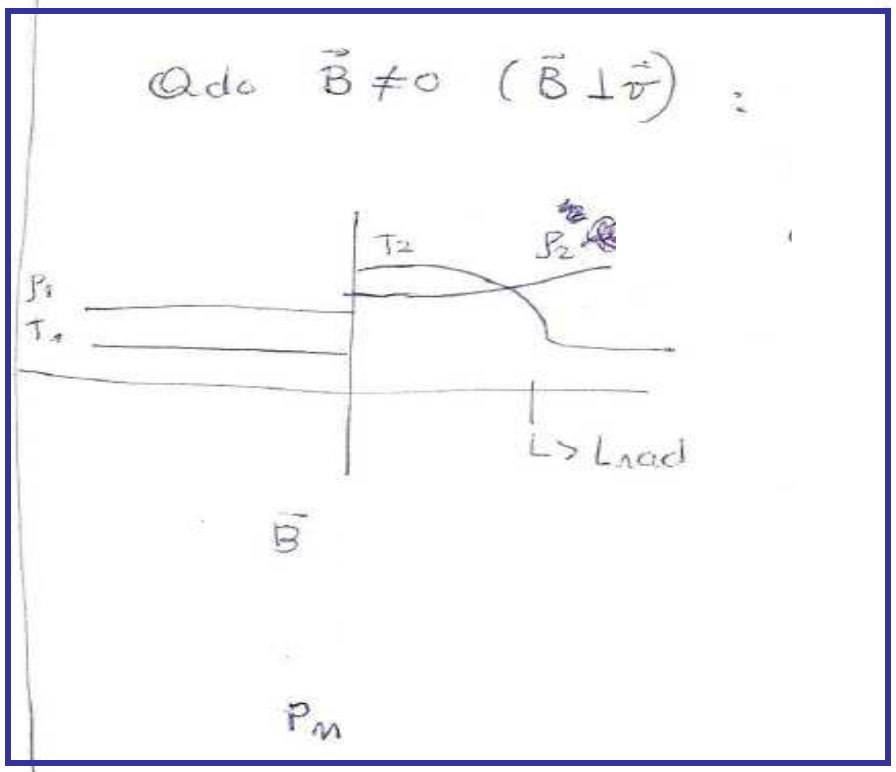
Para dado M: quanto > B: mais fraco e o choque pois < y e < T2

Choque e' mais ELASTICO: absorve menos ENERGIA INTERNA, parte da energia do choque fica armazenada no campo magnetico ($B^2/8\pi$)

Corolario:

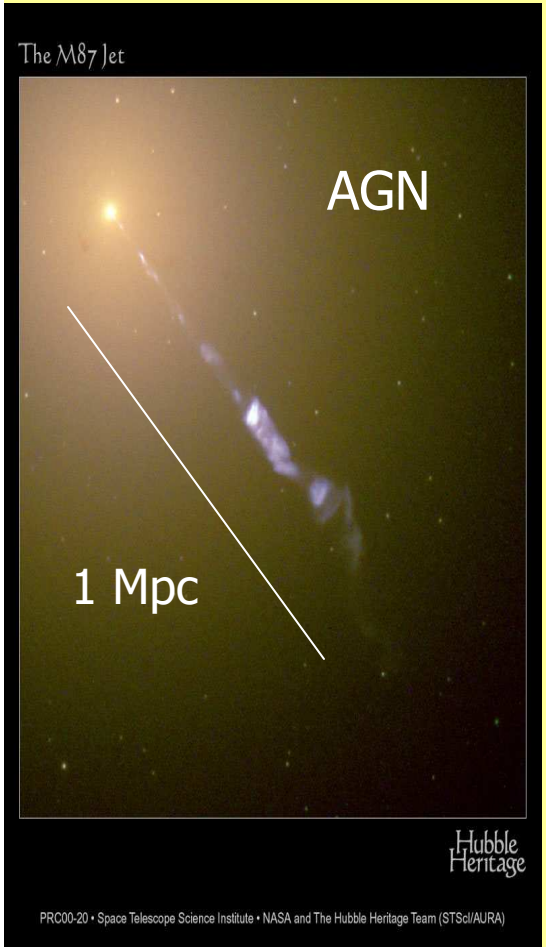
Um plasma frio (nuvem fria do MIS) com $B \neq 0$: ao colidir com outras nuvens tende a ser mais elastica que no caso B=0


Soumise :
B = 0
② pos. choque
A
T_2
ρ_2
ρ_1
T_1
T_2'
$L > L_{rad}$

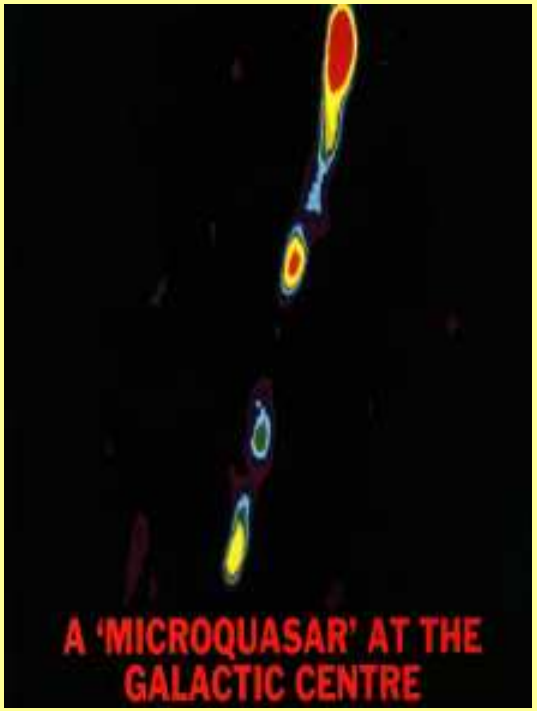

Qdo $\vec{B} \neq 0$ $(\vec{B} \perp \vec{v})$:
T_2
ρ_2
ρ_1
T_1
$L > L_{rad}$
$\vec{B}$
P_M

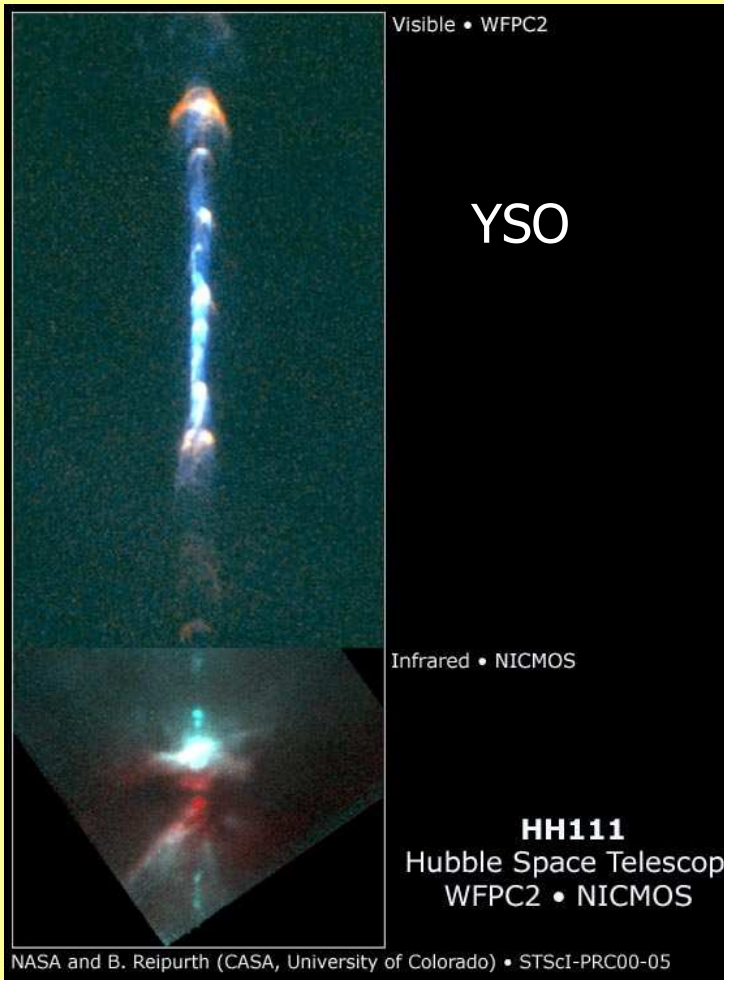
ASTROPHYSICAL JETS

➔ Despite difference in scales: similar morphology



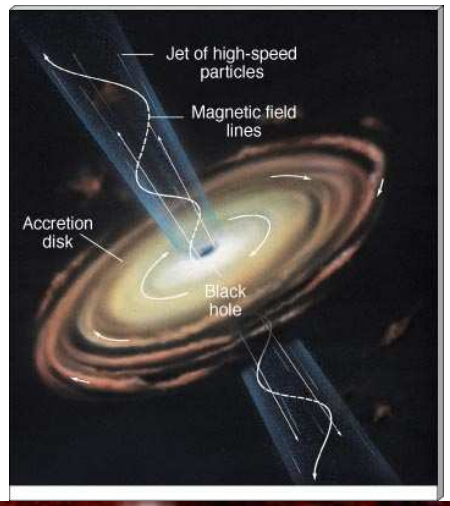
Microquasar

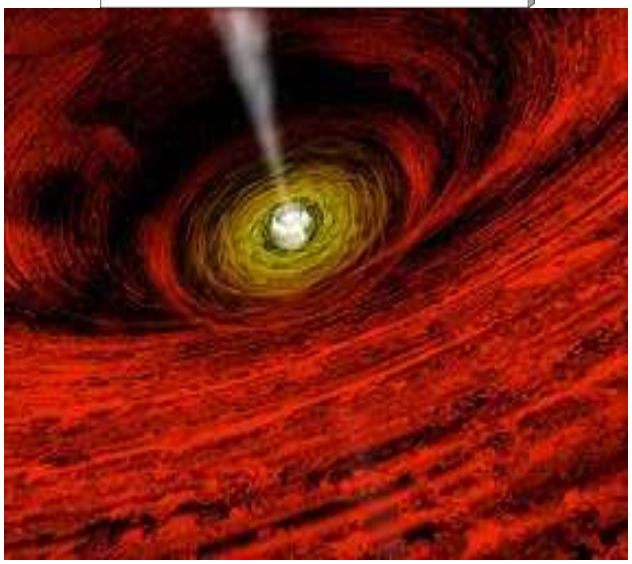




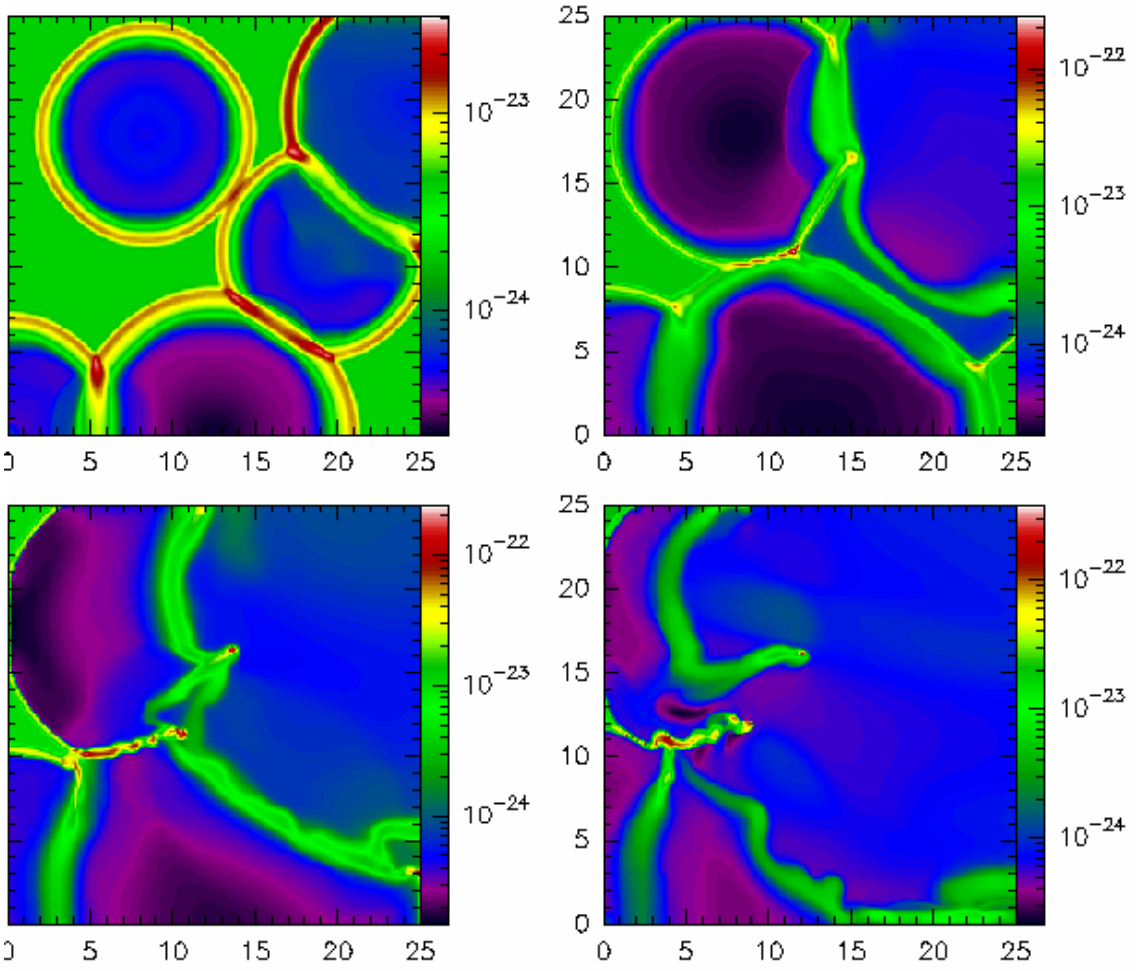
Discos de Acrecao





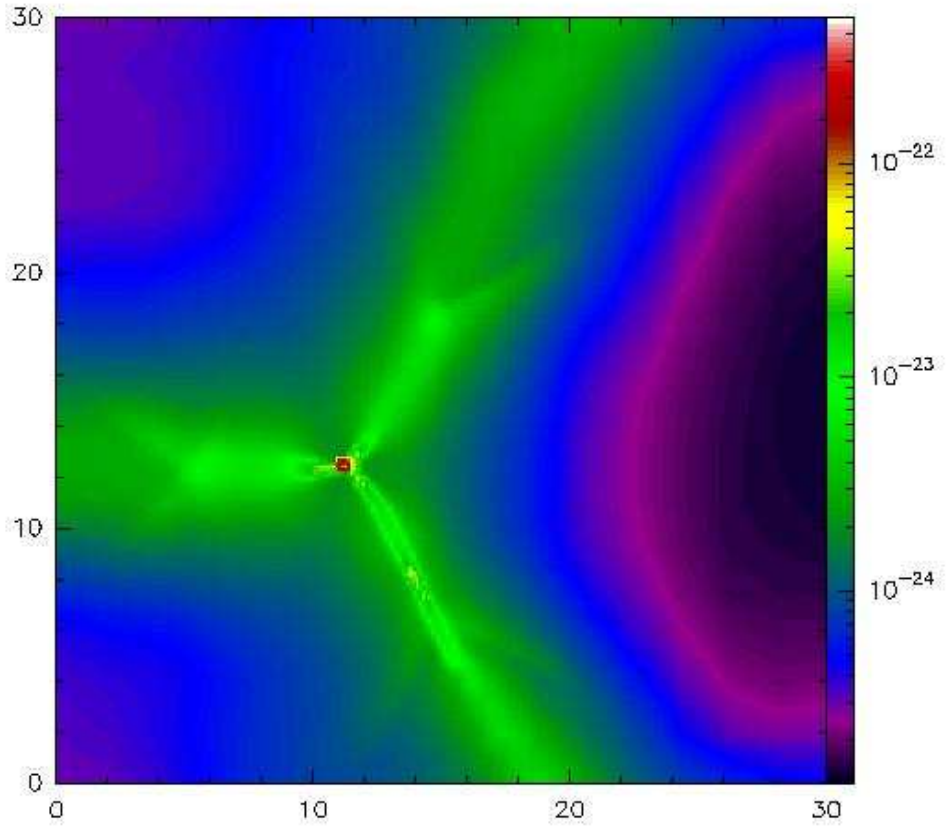


Interactions among SNRs



Also lead to formation of filaments and new clouds (Melioli, de Gouveia Dal Pino & Raga, A&A, 2005)

3 SNR interactions



Star Formation!

(Melioli, de Gouveia Dal Pino, de la Reza, Raga 2005)

$\Re = 12\Re_{SB}$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,,\qquad(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,. \tag{2}$$

$$\nabla\times\nabla\Phi=0\,, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0\,, \tag{4}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla\,\nabla\cdot\mathbf{a}-\nabla^2\mathbf{a}\,. \tag{5}$$

$$\nabla\cdot(\Phi\,\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\nabla\Phi+\Phi\,\nabla\cdot\mathbf{a}\,, \tag{6}$$

$$\nabla\times(\Phi\,\mathbf{a})=\nabla\Phi\times\mathbf{a}+\Phi\,\nabla\times\mathbf{a}\,, \tag{7}$$

$$\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})=(\nabla\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\,, \tag{8}$$

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{b}=(\nabla\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\,\nabla\cdot\mathbf{b}\,, \tag{9}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a}+\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})\,, \tag{10}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\,\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\,\nabla\cdot\mathbf{a}\,, \tag{11}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{b}\,, \tag{12}$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\,\nabla\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a}-\mathbf{b}\,\nabla\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\,. \tag{13}$$

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{a}\, d\tau = \oiint \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \qquad \text{(Gauss)}\,, \tag{14}$$

$$\mathbf{a} \to \mathbf{a} \times \mathbf{c}(\text{onst}) \quad \Rightarrow \quad \iiint \nabla \times \mathbf{a}\, d\tau = \oiint \mathbf{n} \times \mathbf{a}\, d\sigma\,, \tag{15}$$

$$\mathbf{a} \to \Phi\, \mathbf{c}(\text{onst}) \quad \Rightarrow \quad \iiint \nabla\Phi\, d\tau = \oiint \Phi\, \mathbf{n}\, d\sigma\,, \tag{16}$$

$$\mathbf{a} \to \Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi \Rightarrow$$

$$\iiint (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi)\, d\tau = \oiint (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \quad \text{(Green)}\,, \tag{17}$$

$$\iint (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint \mathbf{a} \cdot dl \qquad \text{(Stokes)}\,, \tag{18}$$

$$\mathbf{a} \to \mathbf{a} \times \mathbf{c}(\text{onst}) \quad \Rightarrow \quad \iint (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{a}\, d\sigma = \oint dl \times \mathbf{a}\,, \tag{19}$$

$$\mathbf{a} \to \Phi\, \mathbf{c}(\text{onst}) \quad \Rightarrow \quad \iint \mathbf{n} \times \nabla\Phi\, d\sigma = \oint \Phi\, dl\,. \tag{20}$$

Maxwell's equations

$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$	Faraday
$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	'Ampère'
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	no magnetic monopoles
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\tau}{\epsilon_0}$	Poisson

One cannot escape the feeling that these equations have an existence and intelligence of their own; that they are wiser than we are, wiser even than their discoverers; that we get more out of them than was originally put into them.

(Heinrich Hertz)

Physical constants

Physical quantity	*Symbol*	*Value*	*Units*
charge of the electron	e	1.602×10^{-19}	C
mass of the electron	m_e	9.109×10^{-31}	kg
mass of the proton	m_p	1.673×10^{-27}	kg
permittivity of the vacuum	ϵ_0	8.854×10^{-12}	$\mathrm{F\,m^{-1}}$
permeability of the vacuum	μ_0	1.257×10^{-6} $(= 4\pi \times 10^{-7})$	$\mathrm{H\,m^{-1}}$
velocity of light	c	2.998×10^{8} $(= (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2})$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Planck's constant	h	6.626×10^{-34}	J s
Boltzmann's constant	k	1.381×10^{-23}	$\mathrm{J\,K^{-1}}$
gravitational constant	G	6.671×10^{-11}	$\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

Physical quantity	*Definition*	*Expression **	*Units*
plasma frequency	$\omega_{p,e} \equiv \sqrt{\dfrac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$	$= 56.6\,\sqrt{n}$	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
Debye length	$\lambda_D \equiv \sqrt{\dfrac{\epsilon_0 kT}{ne^2}}$	$= 69.0\,\sqrt{\dfrac{T}{n}}$	m
electron cyclotron frequency	$\Omega_e \equiv \dfrac{eB}{m_e}$	$= 1.76 \times 10^{11}\,B$	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
electron cyclotron radius	$R_e \equiv \dfrac{v_{\perp,e}}{\Omega_e}$	$= 2.21 \times 10^{-8}\,\dfrac{\sqrt{T}}{B}$	m
ion cyclotron frequency	$\Omega_i \equiv \dfrac{ZeB}{m_i}$	$= 9.58 \times 10^{7}\,\dfrac{Z}{A}\,B$	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
ion cyclotron radius	$R_i \equiv \dfrac{v_{\perp,i}}{\Omega_i}$	$= 9.47 \times 10^{-7}\,\dfrac{\sqrt{A}}{Z}\,\dfrac{\sqrt{T}}{B}$	m
electron thermal speed	$v_{\mathrm{th},e} \equiv \sqrt{\dfrac{2kT}{m_e}}$	$= 5.5 \times 10^{3}\,\sqrt{T}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
ion thermal speed	$v_{\mathrm{th},i} \equiv \sqrt{\dfrac{2kT}{m_i}}$	$= 1.3 \times 10^{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{A}}\,\sqrt{T}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
sound speed	$v_s \equiv \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}$	$= 1.17 \times 10^{2}\,\sqrt{\dfrac{1+Z}{A}}\,\sqrt{T}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Alfvén speed	$v_A \equiv \dfrac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$	$= 2.18 \times 10^{16}\,\sqrt{\dfrac{Z}{A}}\,\dfrac{B}{\sqrt{n}}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$

	Physical quantity	*Symbol/definition*	**Tokamak**	**Coronal loop**	**Solar wind**	**Magnetosphere**
⇒	particle density	n	$10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$	$10^{16}\,\mathrm{m}^{-3}$	$10^{7}\,\mathrm{m}^{-3}$	$10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$
⇒	magnetic field	B	3 T (30 kG)	0.03 T (300 G)	6×10^{-9} T (60 μG)	3×10^{-5} T (0.3 G)
⇒	temperature	T	10^{8} K ($\approx$10 keV)	10^{6} K ($\approx$100 eV)	10^{5} K ($\approx$10 eV)	10^{4} K ($\approx$1 eV)
	electron th. speed	$v_{\mathrm{th},e}\equiv\sqrt{2kT/m_e}$	$5.9\times10^{7}\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$5900\,\mathrm{km\,s}^{-1}$	$1700\,\mathrm{km\,s}^{-1}$	$590\,\mathrm{km\,s}^{-1}$
	ion thermal speed*	$v_{\mathrm{th},i}\equiv\sqrt{2kT/m_i}$	$1.4\times10^{6}\,\mathrm{m\,s}^{-1}$	$140\,\mathrm{km\,s}^{-1}$	$41\,\mathrm{km\,s}^{-1}$	$14\,\mathrm{km\,s}^{-1}$
	electron gyro freq.	$\Omega_e\equiv eB/m_e$	$5.3\times10^{11}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$5.3\times10^{9}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$1.1\times10^{3}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$5.3\times10^{6}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$
		$\Omega_e/(2\pi)$	84 GHz	0.84 GHz	0.17 kHz	0.84 MHz
	electron gyro radius	$R_e\equiv v_{\perp,e}/\Omega_e$	0.1 mm	1 mm	1.5 km	10 cm
	ion gyro freq.*	$\Omega_i\equiv ZeB/m_i$	$2.9\times10^{8}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$2.9\times10^{6}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$0.58\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$2.9\times10^{3}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$
		$\Omega_i/(2\pi)$	46 MHz	0.46 MHz	0.1 Hz	0.46 kHz
	ion gyro radius*	$R_i\equiv v_{\perp,i}/\Omega_i$	4.9 mm	4.9 cm	71 km	4.9 m
	plasma frequency	$\omega_{\mathrm{p},e}\equiv\sqrt{ne^2/(\epsilon_0 m_e)}$	$5.7\times10^{11}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$5.7\times10^{9}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$1.8\times10^{5}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$	$5.7\times10^{6}\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$
		$\omega_{\mathrm{p},e}/(2\pi)$	91 GHz	0.91 GHz	29 kHz	0.91 MHz
	electron skin depth	$\delta_e\equiv c/\omega_{\mathrm{p},e}$	0.53 mm	5.3 cm	1.7 km	53 m
	Debye length	$\lambda_D\equiv\sqrt{\epsilon_0 kT/(ne^2)}$	0.07 mm	0.7 mm	7 m	7 cm

	Physical quantity	*Symbol/definition*	**Tokamak**	**Coronal loop**	**Solar wind**	**Magnetosphere**
⇒	width	a	$1\,\mathrm{m}$	$10\,000\,\mathrm{km}$	$1.5\times10^{6}\,\mathrm{km}$	$6\times10^{3}\,\mathrm{km}$
⇒	length	L	$20\,\mathrm{m}\,(=2\pi R)$	$100\,000\,\mathrm{km}$	$1.5\times10^{8}\,\mathrm{km}$	$4\times10^{4}\,\mathrm{km}$
⇒	particle density	n	$10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$	$10^{16}\,\mathrm{m}^{-3}$	$10^{7}\,\mathrm{m}^{-3}$	$10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$
⇒	magnetic field	B	$3\,\mathrm{T}$ (30 kG)	$0.03\,\mathrm{T}$ (300 G)	$6\times10^{-9}\,\mathrm{T}$	$3\times10^{-5}\,\mathrm{T}$
⇒	temperature	T	$10^{8}\,\mathrm{K}$ ($\approx10\,\mathrm{keV}$)	$10^{6}\,\mathrm{K}$ ($\approx100\,\mathrm{eV}$)	$10^{5}\,\mathrm{K}$	$10^{4}\,\mathrm{K}$
	density*	$\rho\equiv(A/Z)nm_p$	$1.7\times10^{-7}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$	$1.7\times10^{-11}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$	$1.7\times10^{-20}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$	$1.7\times10^{-17}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
	pressure	$p\equiv nkT$	$1.4\times10^{5}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$	$0.14\,\mathrm{N/m^{2}}$	$1.4\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$	$1.4\times10^{-9}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$
	'plasma beta'	$\beta\equiv2\mu_0p/B^2$	0.04	0.0004	1	4×10^{-6}
	sound speed*	$v_s\equiv\sqrt{\gamma p/\rho}$	$1.2\times10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$120\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$37\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$12\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
	Alfvén speed*	$v_A\equiv B/\sqrt{\mu_0\rho}$	$6.5\times10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$6500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$41\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$6500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
	Alfv. transit time	$\tau_A\equiv L/v_A$	$3\,\mu\mathrm{s}$	$15\,\mathrm{s}$	42 days	$6\,\mathrm{s}$
	times of interest	τ	seconds	days	months	hours
	resist. decay time	$\tau_d\equiv\mu_0a^2/\eta$	16 min	$3.2\times10^{6}\,\mathrm{yrs}$	$1.7\times10^{9}\,\mathrm{yrs}$	$1.2\times10^{3}\,\mathrm{yrs}$
	Spitzer resistivity*)	$\eta_\parallel=65\,Z\ln\Lambda T_e^{-3/2}$	$1.3\times10^{-9}\,\Omega\,\mathrm{m}$	$1.2\times10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$	$5.2\times10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m}$	$1.2\times10^{-3}\,\Omega\,\mathrm{m}$
	magn. Reynolds nr.	$R_m\equiv\mu_0av_A/\eta_\parallel$	6.3×10^{9}	6.8×10^{13}	1.5×10^{12}	4.1×10^{10}

	radius (km)	*mass* (kg)	*rotation per.* (d)	*distance to Sun* (AU)	*orbital eccentr.*	*orbital per.* (y)
Sun	7.0×10^5	2.0×10^{30}	25–27	–	–	–
Mercury	2.4×10^3	3.3×10^{23}	58.6	0.39	0.206	0.241
Venus	6.1×10^3	4.9×10^{24}	243.0	0.72	0.007	0.615
Earth	6.4×10^3	6.0×10^{24}	1.0	1.0 (def.)	0.017	1.0
Mars	3.4×10^3	6.4×10^{23}	1.03	1.52	0.093	1.88
Jupiter	7.1×10^4	1.9×10^{27}	0.42	5.20	0.048	11.9
Saturn	6.0×10^4	5.7×10^{26}	0.43	9.54	0.056	29.5
Uranus	2.6×10^4	8.7×10^{25}	0.72	19.2	0.047	84.0
Neptune	2.5×10^4	1.0×10^{26}	0.75	30.1	0.009	164.8
Pluto	1.8×10^3	1.0×10^{22}	6.4	39.4	0.249	248.6

$R_\odot = 6.96 \times 10^5$ km,
1 AU $= 1.496 \times 10^8$ km $= 215\, R_\odot$,
1 light-year $= 9.46 \times 10^{12}$ km $= 6.32 \times 10^4$ AU,
1 pc $= 3.09 \times 10^{13}$ km $= 3.26$ light-years $= 2.06 \times 10^5$ AU.