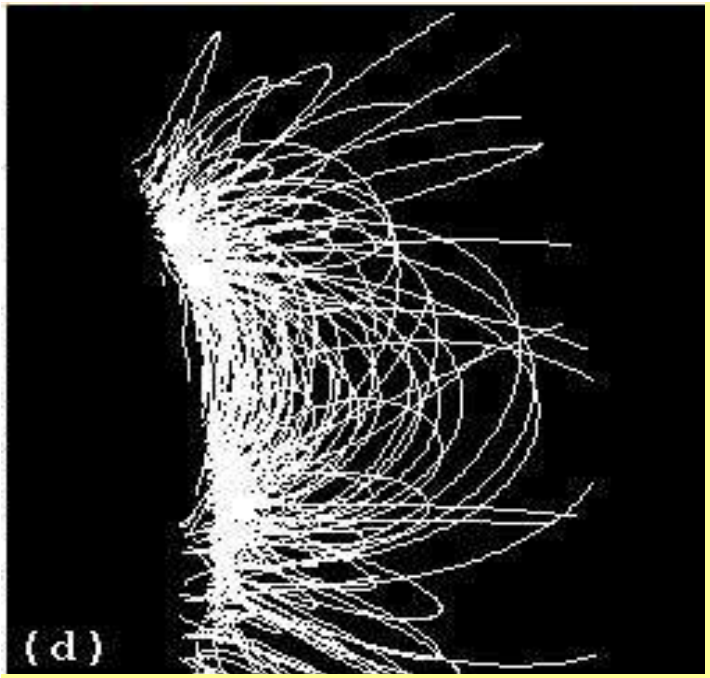
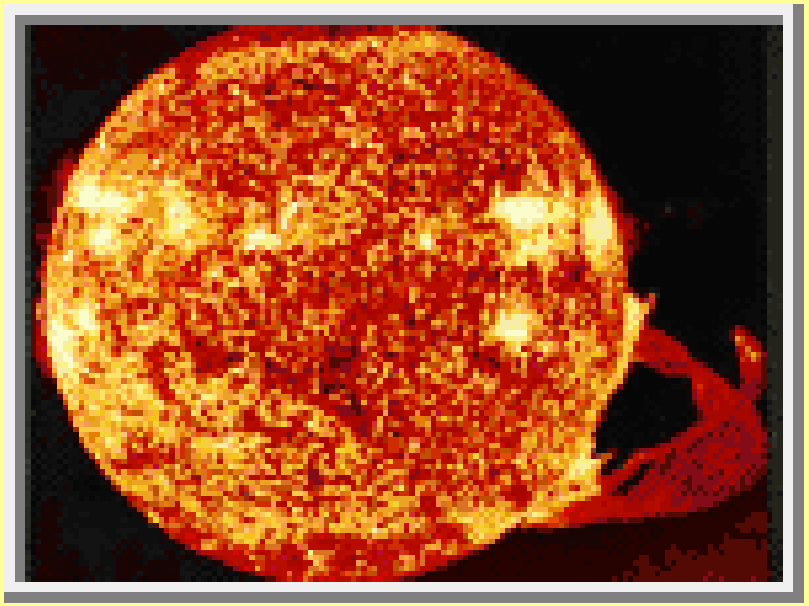
Origem dos Campos Magneticos - Dinamo

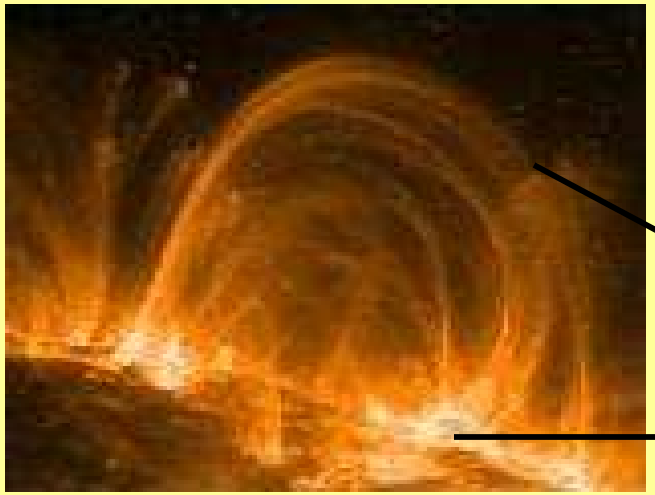
ElisaBete M. de Gouveia Dal Pino
IAG-USP

Escola CBPF, julho 2008



Solar Magnetic Fields





In corona (2 x 10^6 K):

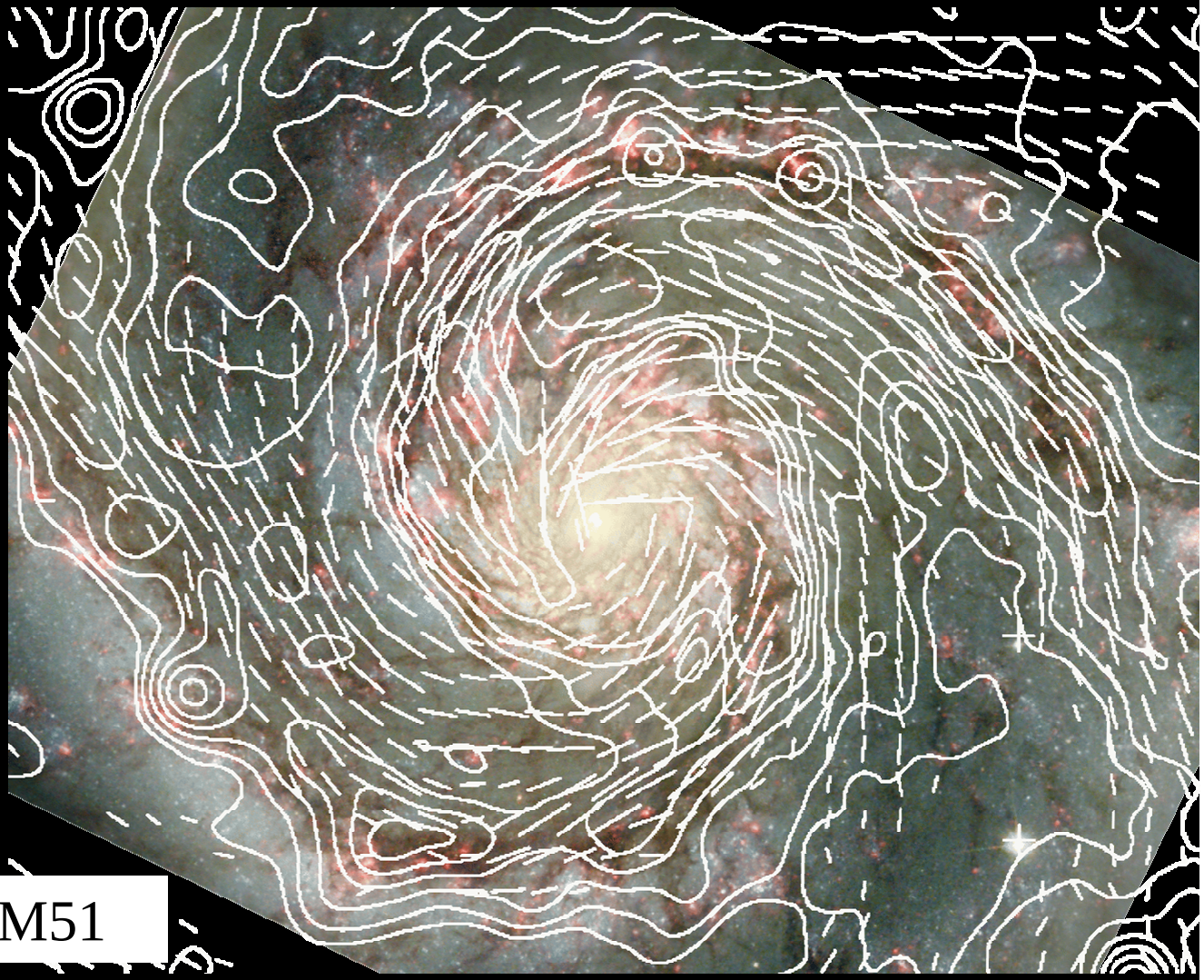
Magnetic arcs **(30-100 x 10^4 km)**

Sunspots **(B = 100-2000 G)**

Magnetic fields in Galaxies

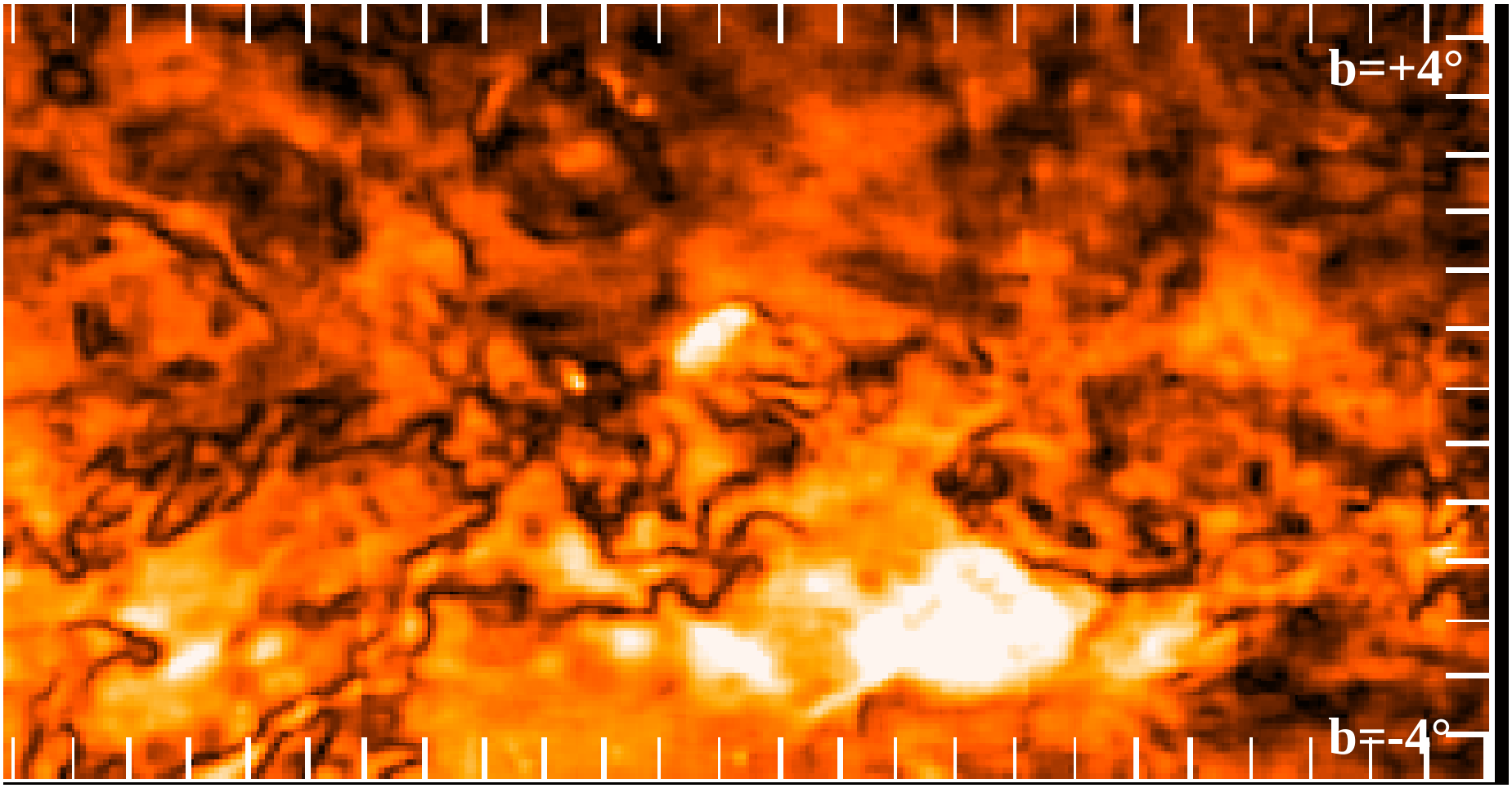
Spiral patterns of regular B observed in

Grand-design galaxies



M51

ISM 21cm Emission from Perseus - Auriga



l=166° l=150°

Polarized emission

Effelsberg 21cm (Reich et al 2003)

A Origem dos Campos Magneticos Cosmicos

A astronomia moderna ensina que cada tipo de objeto foi formado em algum tempo no passado a partir de materia pre-existente:

planetas a partir da nuvem solar,
estrelas a partir de nuvens moleculares interestelares,
galaxias a partir da condensacao da materia cosmica.

Logo, **a origem do campo magnetico** em um objeto de um certo tipo deve ser considerada juntamente com a origem do objeto propriamente.

Se MHD ideal sempre se aplica, o campo de um planeta hoje deve ser aquele carregado pela nebulosa solar que o formou, e assim por diante.

Esta hipotese da origem de campos magneticos: **irrealista** pois na ausencia de algum mecanismo regenerador, todos os campos tendem a **decair devido a dissipacao da corrente que os suporta.**

Da eq. de inducao, temos que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{7.1}$$

nós podemos derivar uma estimativa do tempo de decaimento resistivo;

$$t_D = \frac{L^2}{\nu_M} \tag{7.2}$$

onde L é o tamanho do objeto. Do fato de que $\nu_M = \frac{\eta c^2}{4\pi}$ (eq. 1.34) e $\eta \simeq cteT^{-3/2}$ (eq. 1.22), ν_M varia somente de um fator de 10^6 do objeto mais frio $(10^3 K)$ para o mais quente $(10^7 K)$ de nossa lista, enquanto L^2 varia de um fator 10^{26} dos planetas para as galáxias.

Verifica-se que:

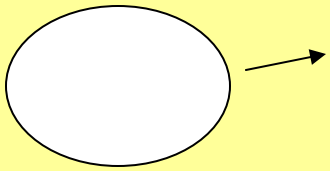
Terra: t_D << idade,

Galaxia: t_D >> idade

Sol e as estrelas, t_D ~ idade

Sobre o Sol e Estrelas

Quando um globulo de gas colapsa gravitacionalmente dentro das nuvens moleculares, ele leva campo magnetico do meio com ele.



$n \sim 10^4$ cm^{-3}, $B_{MIS} \sim 10^{-4}$ -10^{-5} G

Esse campo transmite momento angular do globulo para o meio evitando que globulo aumente demais sua rotacao do cotrario, esta poderia parar o colapso:
se $L_* = \Omega^2$ R=cte $\longrightarrow$ se R diminui $\longrightarrow$ Ω(R) aumenta $\longrightarrow$ $L_* \propto R^{-1/2}$ aumenta

` A medida que a densidade cresce: a fracao ionizada de gas decai, e o "stress" magnetico crescente forca pares de ıons que restaram atraves das particulas neutras: "difusao ambipolar".

$\longrightarrow$ Por esse processo: **a maior parte do fluxo magnetico e' removido da proto-estrela em contracao.**

Do contrario: **se valesse MHD ideal**: B estrela seria >> observado:

$B_{final} \sim B_{MIS} (R_{inicial}/R_{final})^2 \sim 2 \times 10^9$ G >> que observados (10^3 G) !

Parker (1979) :

estrelas passam por fase convectiva rumo `a SP

conveccao levanta B para a superficie em loops e ventos e este pode escapar ainda mais $\longrightarrow$ estrelas e **Sol deveriam ter B's bem pequenos se nao houvesse algum mecanismo de regeneracao**

Mas ha outros casos: estrelas RADIATIVAS (ex. Estrelas A magneticas): convectivamente estaveis e B parece **FOSSIL** da fase proto-estelar

$\longrightarrow$ **nem todo o B da fase proto-estelar e' transportado para fora da estrela**

Estrelas CONVECTIVAS hoje: **B's intensos e variaveis com t** $\longrightarrow$ sugerindo origem CONTEMPORANEA !

CONCLUSAO: congelamento perfeito de B $\longrightarrow$ NAO se aplica todo t `a estrela desde a nuvem ate o estado atual: origem de B – historias complexas com dissipacao, transporte e regeneracao

Sobre as escalas Galacticas

Como t_D >> idade: poderiam ser FOSSEIS

Mas, se campos magneticos antecedem as galaxias, de onde eles vieram?

Parker acredita que dissipacao turbulenta >> dissipacao resistiva:

$$\nu_{M,\,turbulento} >> \nu_M$$

Se tamanho dos turbilhoes **l<<L**:

$$t_{turbulento} \sim l^2/\nu_{M,\,turbulento} < t_{idade} \longrightarrow \textbf{B's NAO-FOSSEIS}$$

$\longrightarrow$ **estrelas, galaxias e planetas**: e' provavel que nenhum deles possua campos FOSSEIS desde sua origem

Mecanismos de Geracao de campos Mageticos

- Rotacao Diferencial
- Pilha de Biermann
- Dinamo ✓

A eq. de inducao na sua forma completa:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) + \frac{\eta c^2}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{c}{n_e^2 e} \vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} p_e$$

adveccao

difusao

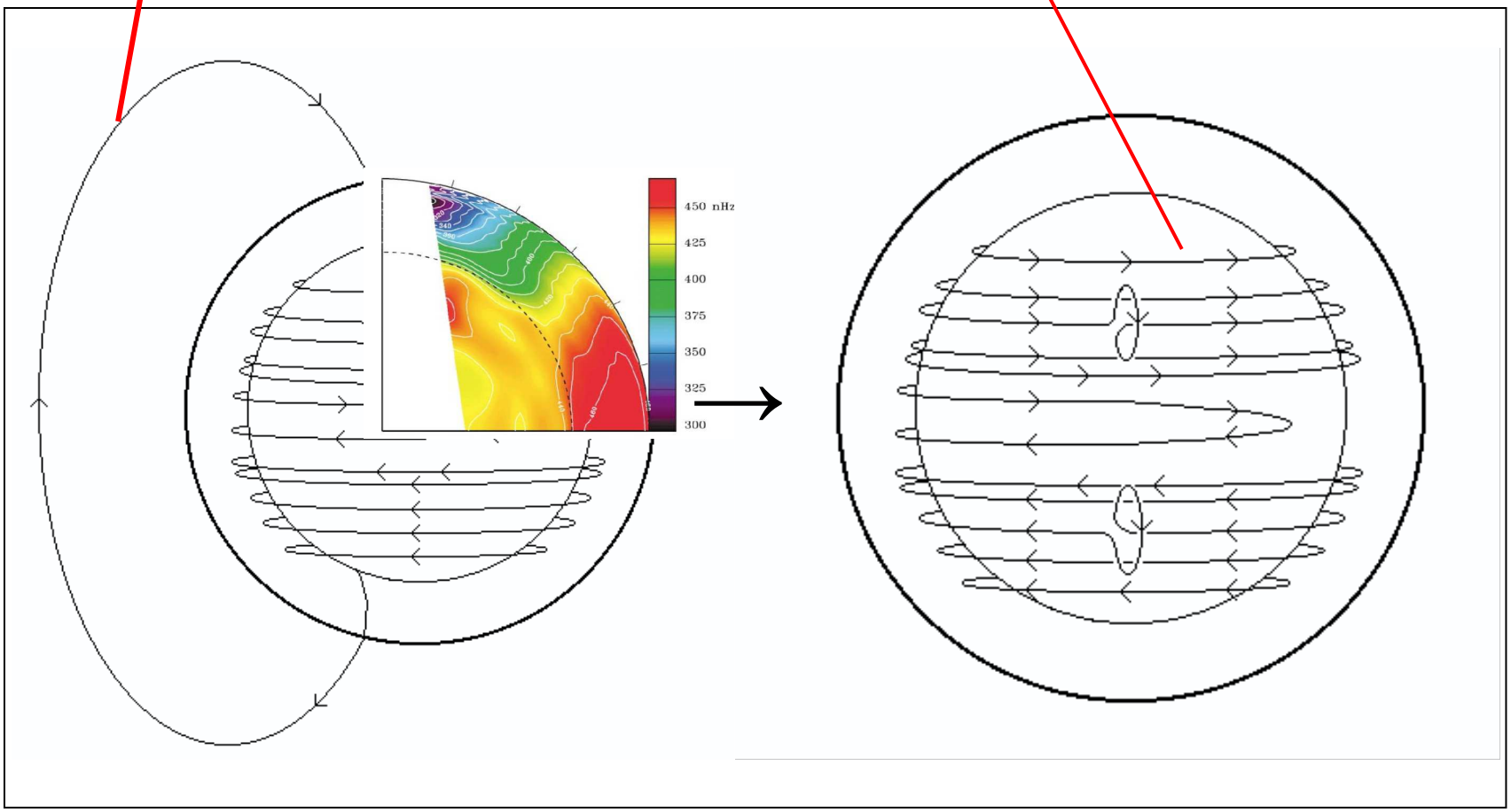
Pilha de Biermann

No termo de adveccao:

se v= v rotacao diferencial = v(R) $\longrightarrow$ um campo poloidal (Bp) sera esticado na direcao azimutal amplificando campo azimutal (Bφ)

Campo Poloidal (Bp)

Campo azimutal (Bφ)



Rotacao diferencial no dinamo estelar

A eq. de inducao na sua forma completa:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) + \frac{\eta c^2}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{c}{n_e^2 e} \vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} p_e$$

adveccao

difusao

Pilha de Biermann

O termo da bateria de Biermann:

Num objeto não girante, não há razão para ocorrer desvios da simetria esférica, e ambos $\vec{\nabla} n_e$ e $\vec{\nabla} p_e$ são radiais de modo que ( ) se anula.

Ja num referencial girante: $\vec{\nabla} n_e$ e $\vec{\nabla} p_e$ nao precisam ser //: termo serve para gerar campos B

Pode-se demonstrar que num sistema girante com rotacao diferencial, usando coordenadas cilindricas:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} |_{BB} = -\frac{c k_B}{e}\left\{\frac{\bar{m}}{k_B}\left[-R\frac{\partial}{\partial z}(\omega^2)\right]\vec{e}_\phi\right\}$$

$$= \frac{\bar{m}c}{e} R\frac{\partial}{\partial z}(\omega^2)\vec{e}_\phi \qquad (7.11)$$

A bateria de Biermann cria forca eletromtriz que faz com que Bφ(t) cresca LINEARMENTE com o tempo

Para $\frac{\partial}{\partial z}(\omega^2)$ realistas: Bφ(t) pode crescer ate 10^3 G durante a vida da estrela, mas rotacao diferencial ω(z) deve ser mantido constante

Bateria de Biermann: parece pouco eficaz: em geral invocado como gerador de campos B **sementes para o dinamo**

Dinamo Estelar

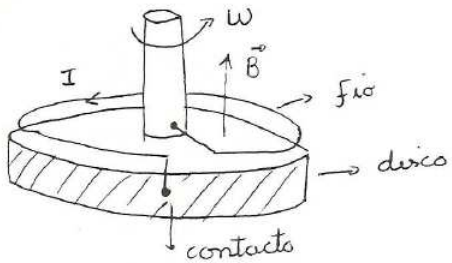
Acredita-se que B's localizados e variaveis no tempo observados em estrelas parcialmente **convectivas** (ex. O SOL): deve-se `a acao de DINAMO auto excitado:

$\longrightarrow$"um padrao de movimentos em um fluido condutor (e.g., um plasma) capaz de ampliar qualquer campo magnetico pequeno presente".

$\longrightarrow$ Mesmo principio do gerador eletrico:

Possui armadura de enrolamentos: B atraves desses enrolamentos pode ser criado por correntes induzidas por voltagem que a maquina esta gerando: lei de Faraday:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$



Mas nao e' necessario excitar o campo por voltagem externa. Um gerador sem vida ira reviver se girado rapido o bastante: DINAMO AUTO-EXCITADO

Como se aplica esse dinamo `as estrelas?

Estrelas giram (padrao de movimento)

Possuem fluido condutor (plasma) para gerar correntes



Ingredientes basicos para processo de DINAMO

Varias teorias propostas: mas o processo de dinamo ainda nao completamente compreendido para estrelas ou galaxias.

2 classes de modelos:

Cinematico: padroes de movimentos (rotacao e conveccao) amplificam B semente, sem levar em conta efeitos dinamicos do campo sobre o sistema (valido para 1as. Fases da geracao de B) ✓

Dinamico: leva em conta esses efeitos sobre o sistema

Dinamo de Parker

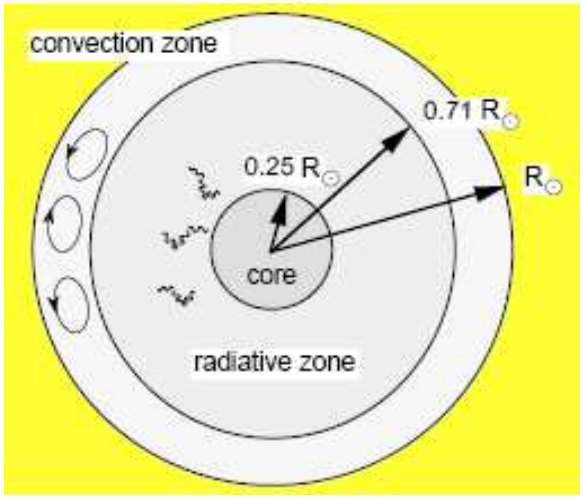
Parker (1955) concentrou-se em objetos convectivos, (ex., interior da terra, do sol e das estrelas em geral).

Ja se sabia na epoca: rotacao diferencial pode produzir B toroidal (Bφ) a partir de um poloidal (Bp),

Problema: como regenerar Bp (que tende a decair com t)?

Parker: necessario mecanismo para transformar parte do Bφ (crescente) de volta em campo Bp:

Estrelas com conveccao: movimentos convectivos para "cima" ou para "baixo" ao longo da direcao radial (gradiente de temperatura radial).



Convvecao com rotacao (como no Sol): conveccao ciclonica (Fig. b):

Similar a furacao na Terra: ar gira mais rapido `a medida que se move para olho do furacao conservando momento angular

Quando ar para cima: rotacao mais rapida

Quando ar para baixo: rotacao mais lenta

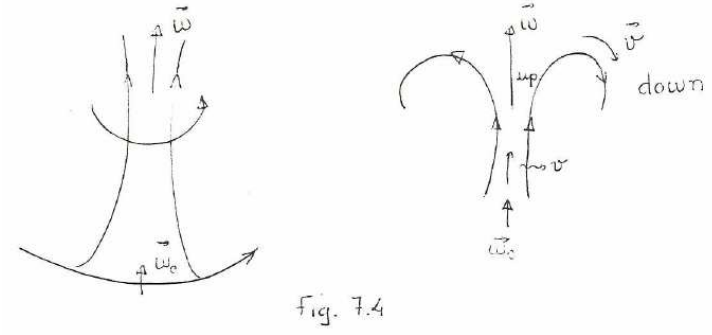


Fig. 7.4

Ha correlacao entre **v** do gas e seu spin **ω=∇xv**: se spin e' up (como no hem. norte da Terra):

na subida $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o).\vec{v} > 0$

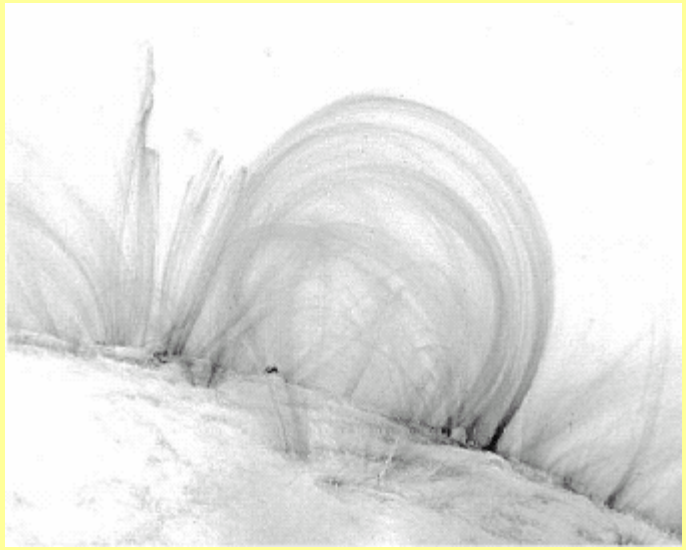
na descida: $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o)$ e $\vec{v}$ tem sinal contrário na descida, $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o).\vec{v} > 0$ também

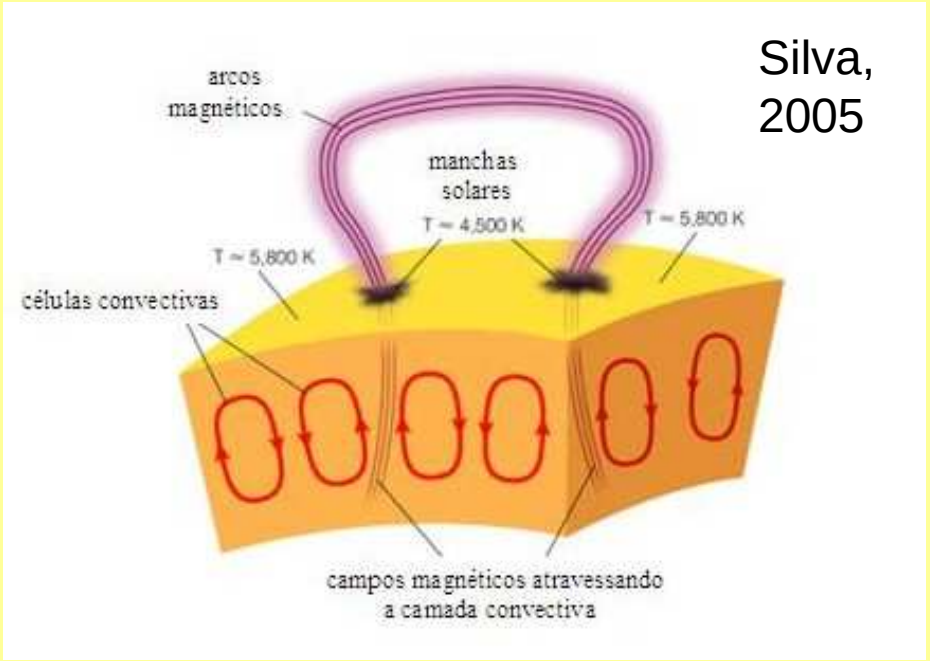
Helicidade cinetica media >0: helicidade crucial para a operacao do dinamo

Conveccao ciclonica 2 efeitos:

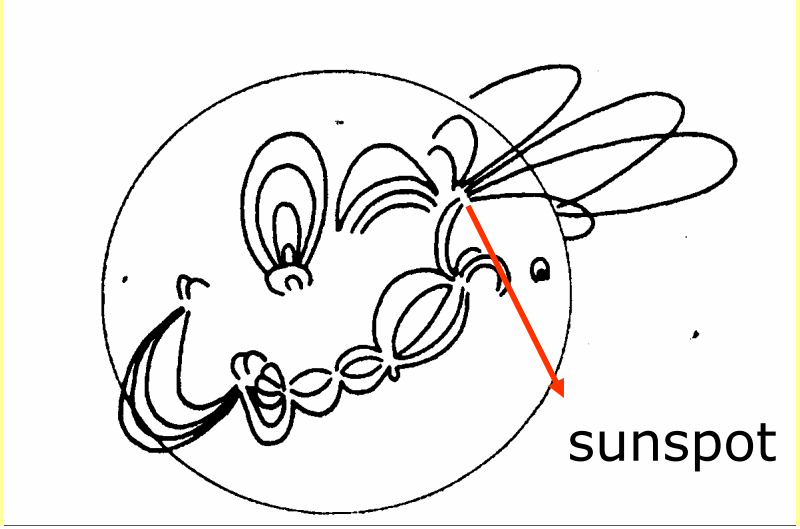
levanta B em loops poloidais e torce o loops na mesma direcao $\longrightarrow$ loops poloidais de mesmo sinal (ou seja, com rotacao diferencial todas as linhas levantadas por conveccao vao cair para mesma direcao mantendo sinal dos loops).

Solar Magnetic Fields



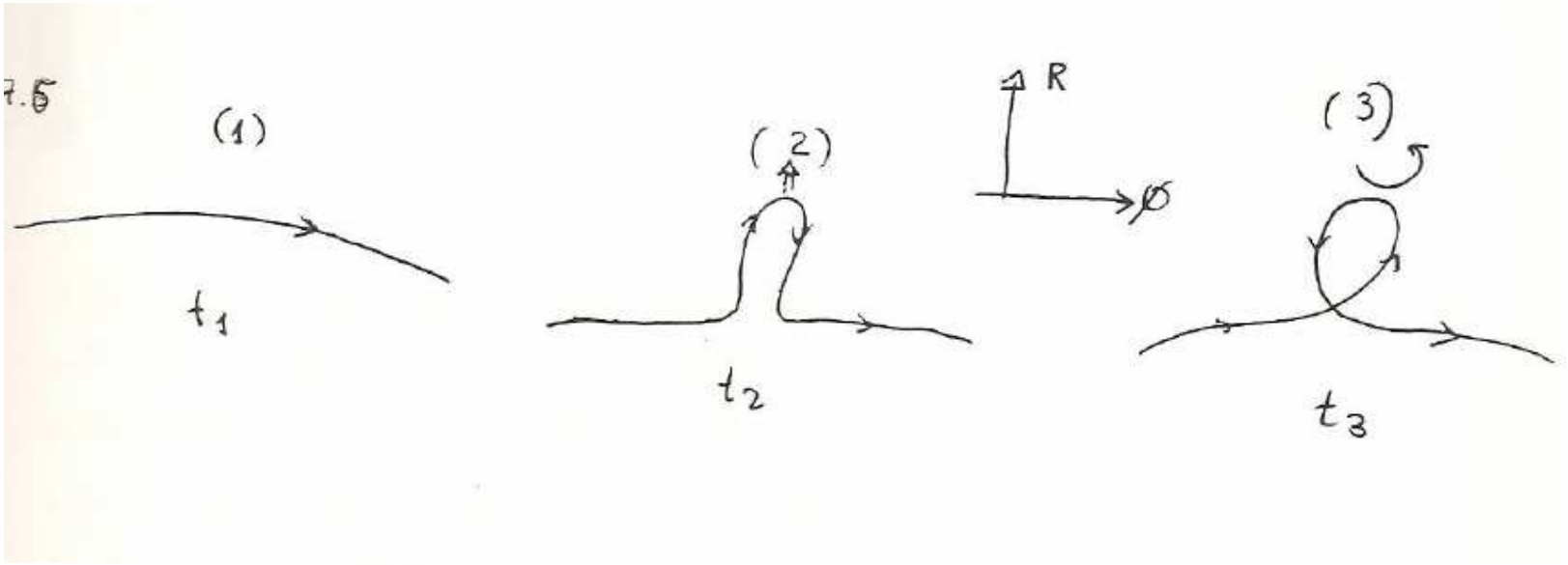


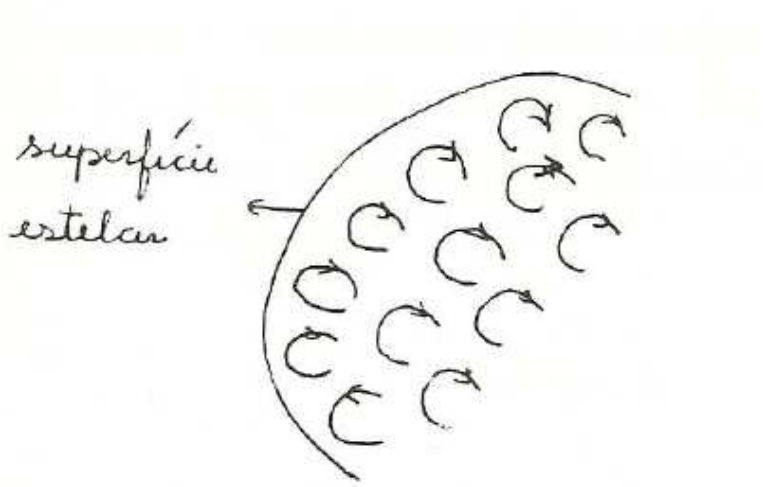
Silva, 2005



Magnetic arcs: rise by buoyancy due to convective motions (Parker-Rayleigh-Taylor instability)

Conveccao + rotacao ciclonica





Conveccao ciclonica 2 efeitos:

levanta B em loops poloidais e torce o loops na mesma direcao $\longrightarrow$ loops poloidais de mesmo sinal (ou seja, com rotacao diferencial todas as linhas levantadas por conveccao vao cair para mesma direcao mantendo sinal dos loops).



Esse efeito da rot. Ciclonica + conveccao que cria loops poloidais $\longrightarrow$ **EFEITO-α**

Junto com o **EFEITO-Ω** = efeito da rot. diferencial esticando Bp para criar Bφ



Dinamo α-Ω

Uma vez que as células convectivas são bem menores que o raio do sol, tudo o que fizemos foi produzir um grande número de "loops" poloidais. Todos eles possuem o mesmo sinal, e portanto a corrente necessária para suportá-los, a qual está na direção toroidal, possui também o mesmo sinal. O resultado líquido é um campo magnético poloidal geral de baixa ordem como um campo de dipolo.

Fig.

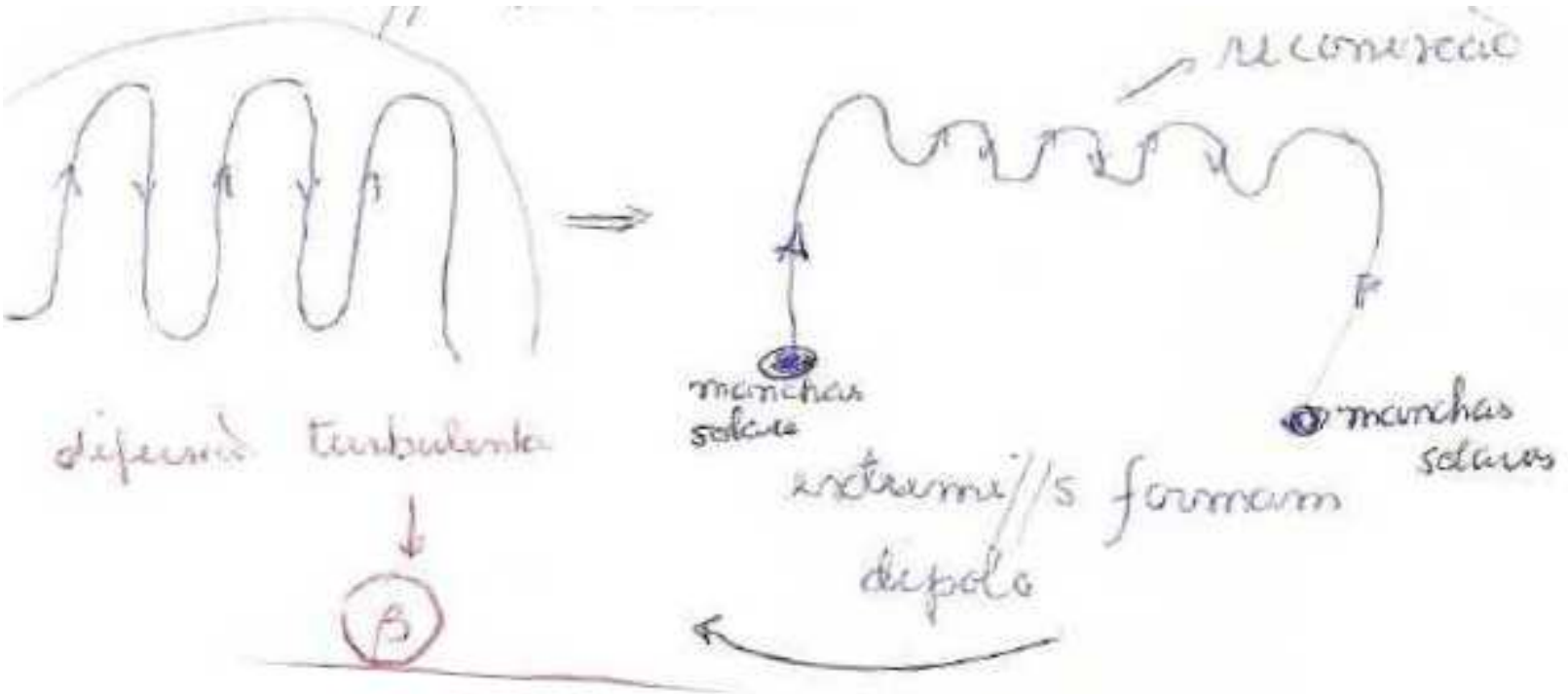
POREM: precisamos nos livrar dos B's de pequena escala gerados na conveccao ciclonica para evitar que crescam demais e inibam os movimentos convectivos do fluido

Parker sugeriu: difusao turbulenta rapida na pequena escala para eliminar esses campos de pequena escala

↓

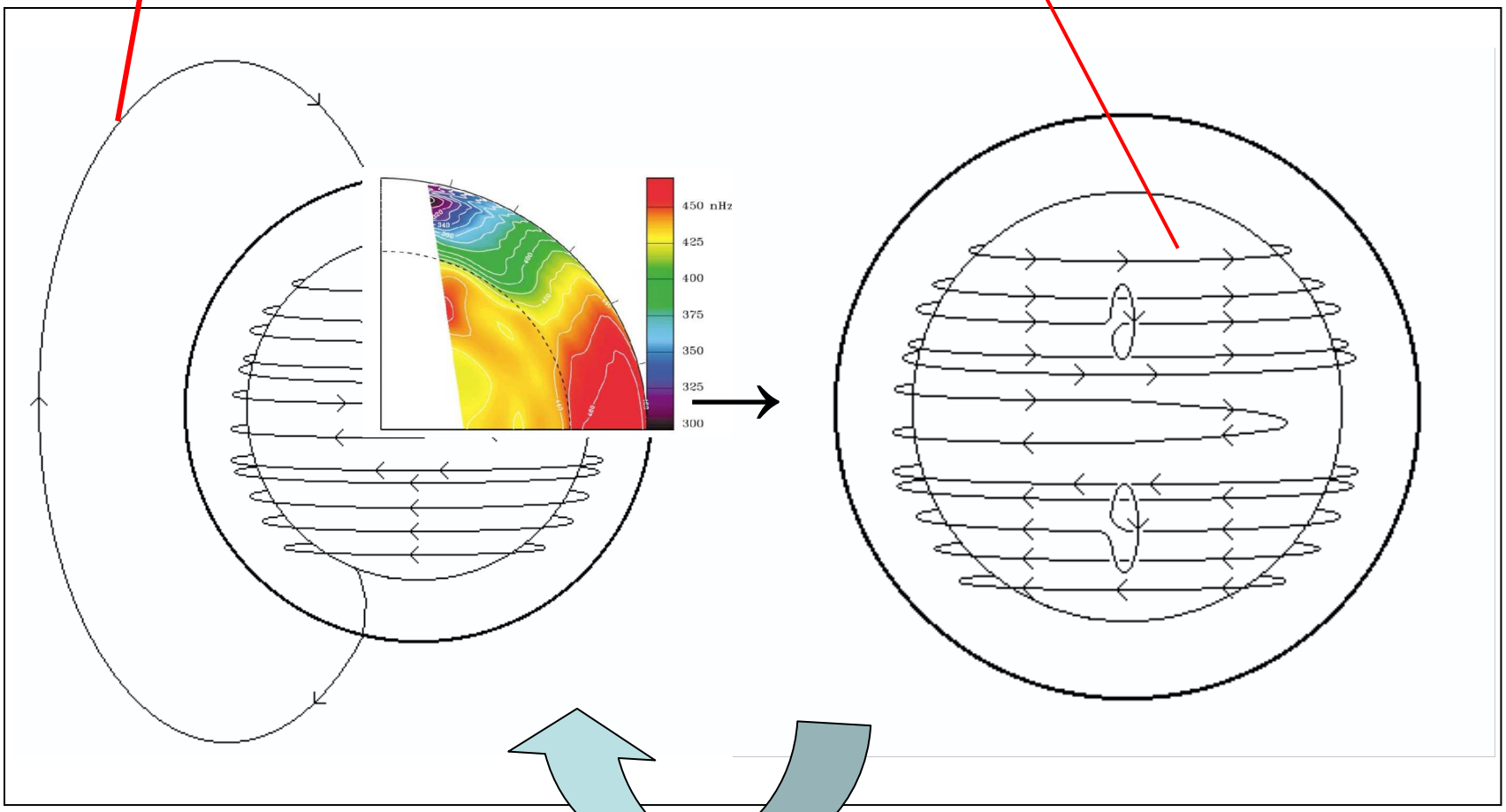
Essa difusividade: efeito β $\longrightarrow$ DINAMO α-β-Ω

Reconexao dos loops: para formar Bp em larga escala



Campo Poloidal (Bp)

Campo azimutal (Bφ)



Matematica do Dinamo de Parker: teoria do campo medio

O formalismo apropriado para discutir o dínamo de Parker é denominado eletrodinâmica de campo médio (Stunbeck, Krause, e Rädller 1966). Este formalismo aplica-se se a escala dos movimentos convectivos l é $<<$ que o tamanho do sistema, L. Devido a isso, podemos escolher uma escala intermediária λ tal que

$$l << \lambda << L \tag{7.29}$$

e formar uma média espacial para o ponto $\vec{x}$ (a qual só tem sentido realmente na larga escala L) através da avaliação da média de uma dada função sobre todas as pequenas escalas $| \xi | < \lambda$:

$$< \psi(\vec{x}, t) >_\lambda = \frac{3}{4\pi\lambda^3} \int_{|\xi|<\lambda} \psi(\vec{x} + \xi, t) d^3\xi \tag{7.30}$$

considerar uma média no tempo. A fim de fazê-la, precisamos definir uma escala de tempo intermediária τ. Por um lado, τ tem que ser muito menor do que a escala de tempo T que descreve como o sistema evolui como um todo (por exemplo, o ciclo de 11 anos do campo magnético solar), e muito maior do que o tempo que o fluido leva para atravessar uma única célula convectiva. Se $\vec{v}'$ é a velocidade convectiva, a última escala de tempo que citamos é dada por l/v'. Logo,

$$\frac{l}{v'} << \tau << T \tag{7.31}$$

E a média apropriada no tempo será:

$$< \psi(\vec{x},t) >_\tau = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \psi(\vec{x},t+t')dt' \tag{7.32}$$

onde t deve ser compreendido como tendo sentido somente na grande escala de tempo T.

Assumiremos então (sem prova) que

$$< \psi(\vec{x},t) >_{\lambda} = < \psi(\vec{x},t) >_{\tau} \qquad (7.33)$$

Principio ERGOTICO:

valor medio do sistema no tempo (valor mais provavel) = valor (medio) obtido sobre grande numero de sistemas em dado instante

Desvios da média são flutuações periódicas e são denotadas por "linhas":

$$\psi'(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) - \bar{\psi}(\vec{x},t) \qquad (7.34)$$

De modo que

$$< \psi' > = 0 \qquad (7.35)$$

para todas as quantidades ψ.

Dinamo Cinematico:

Estas idéias são então aplicadas à equação de indução na forma de (1.35) com $\vec{v}_e = \vec{v}$.

Uma vez que $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ de (7.34), a equação de indução pode então ser escrita:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathrm{B}} + \vec{B}') = \vec{\nabla} \times \left[(\bar{\mathrm{v}} + \vec{v}') \times (\bar{\mathrm{B}} + \vec{B}') \right] + \nu_M \nabla^2 (\bar{\mathrm{B}} + \vec{B}') \qquad (7.36)$$

Se tomamos a média de (7.36), todos os termos contendo uma quantidade flutuante de primeira ordem se anulam devido a (7.35) e ficamos apenas com termos de ordem -0 e de segunda ordem:

Se tomamos a média de (7.36), todos os termos contendo uma quantidade flutuante de primeira ordem se anulam devido a (7.35) e ficamos apenas com termos de ordem -0 e de segunda ordem:

$$\frac{\partial \vec{\bar{B}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} + < \vec{v}' \times \vec{B}' >) + \nu_M \vec{\nabla}^2 \bar{\mathbf{B}} \qquad (7.37)$$

dissipativo do campo medio

Campo medio

Campo advectado pela v media: dara lugar ao efeito-Ω (rotacao diferencial na grande escala com $\bar{v} \neq 0$)

$$\vec{E}_{eff} = -\frac{1}{c} < \vec{v}' \times \vec{B}' >$$

Campo eletrico efetivo originado dos movimentos convectivos na camada turbulenta inferior do Sol:

$\nabla \times E_{eff}$ = FEM TURBULENTA

responsavel pelos efeitos α-β (sera calculado por modelo estatistico da conveccao)

calcular E_{eff} de um modelo estatístico da convecção. O primeiro passo é obter uma equação de evolução para $\vec{B}'$. Para tal, vamos subtrair (7.37) de (7.36). O resultado é

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\bar{\mathbf{v}} \times \vec{B}' + \vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}} \right] + \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B}' + \vec{\nabla} \times \left[\vec{v}' \times \vec{B}' - < \vec{v}' \times \vec{B}' > \right] \tag{7.39}$$

Aqui, faremos uma aproximação crucial, a de que $B' << \bar{\mathbf{B}}$, nesse caso os últimos dois termos de (7.39) são desprezíveis com respeito a $\vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}}$. Esta hipótese é denominada "aproximação suavizante de 1^a ordem". Veremos mais tarde que a mesma é controversa. Se a fazemos no entanto, (7.39) pode ser escrita na forma

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu_M \vec{\nabla}^2 - \vec{\nabla} \times (\bar{\mathbf{v}} \times) \right] \vec{B}' = \vec{\nabla} \times (\vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}}) \tag{7.40}$$

Permite calcular B' conhecendo v e B medios para qualquer v'

as soluções de (7.40) para $\vec{B}'$ dependem linearmente de $\bar{\mathbf{B}}$, de modo que para qualquer $\vec{v}'$ prescrito, a FEM turbulenta $<\vec{v}' \times \vec{B}'>$ também depende linearmente do valor local de $\bar{\mathbf{B}}$. Lembremos que ambos são quantidades médias tomadas sobre uma amostra ou conjunto.

Sejam: $g =< \vec{v}' \times \vec{B}' >$ e $f = \bar{\mathbf{B}}$

Aqui usaremos o fato de que se $g(\vec{x})$ depende linearmente do valor local de $f(\vec{x})$, a forma mais geral da dependência é:

$$g = \alpha f + \beta_k \partial_k f + \gamma_{kl} \partial_k \partial_l f + ... \qquad (7.41)$$

Aqui, ambos $g =< \vec{v}' \times \vec{B}' >$ e $f = \bar{\mathbf{B}}$ são vetores, logo α é um tensor de 2^a ordem e β um de 3^a ordem, etc. Logo

Logo:

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \alpha_{ij}\bar{B}_j + \beta_{ijk}\partial_k \bar{B}_j + \gamma_{ijkl}\partial_k\partial_l \bar{B}_j + ... \qquad (7.42)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma...$ dependem das características estatísticas da convecção. Se fazemos a hipótese de que $\vec{v}'$ é distribuído isotropicamente, α e β devem ser invariantes sob rotação, porquanto

=1 se ij,k permutacoes ciclicas

=-1 se nao-ciclicas

=0 se 2 indices =s

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij} \qquad (7.43)$$

$$\beta_{ijk} = \beta\varepsilon_{ijk} \qquad (7.44)$$

Onde ε_{ijk} é o tensor de alternância. Substituindo isso em (7.42), verificamos que

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >= \alpha\bar{\mathbf{B}} - \beta\vec{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}} + ... \qquad (7.45)$$

Nota:

Pode-se depreender algo considerando-se o comportamento de (7.45) através de uma reflexão espacial da coordenada do sistema (transformação de paridade). Uma vez que sob transformação de paridade $\vec{v}$ é ímpar (i.e., $\vec{v}(-\vec{x}) = -\vec{v}(\vec{x})$) ($\vec{v}$ é um pseudo vetor ou vetor polar), enquanto que $\vec{B}$ é par ($\vec{B}(-\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})$) (ou seja, $\vec{B}$ é um vetor verdadeiro ou vetor axial), então $< \vec{v}' \times \vec{B}' >$ é ímpar. Segue-se daí que α deve ser ímpar sob transformação de paridade $(\alpha(-\vec{x}) = -\alpha(\vec{x}))$, e portanto, α é um pseudo-escalar. Uma vez que $\vec{\nabla}\times$ muda a paridade, $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}$ é ímpar, e β é par sob transformação de paridade $(\beta(-\vec{x}) = \beta(\vec{x}))$ e portanto, um verdadeiro escalar. Agora consideremos a convecção. Se ela é estatisticamente invariante sob reflexão R, $\alpha_R = \alpha$, mas do fato de que α é um pseudo-escalar, $\alpha_R = -\alpha$ e concluímos que $\alpha = 0$. Segue-se que $\alpha \neq 0$ se e somente se α não é invariante sob reflexão. Lembre-se que isto é verdadeiro para o dínamo de Parker, onde a torção do campo toroidal em poloidal (medida por $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, um vetor axial) está correlacionado com $\vec{v}$ (um vetor polar). Isto pode ocorrer somente se o fluxo não é simétrico sob reflexão.

Computando α e β

Para computar α devemos resolver (7.40)

desprezamos ν_M e eliminamos $\vec{v}$

trabalhando localmente em um referencial no qual $\bar{\mathbf{v}}$ se anula, então

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}}) = (\bar{\mathbf{B}}.\vec{\nabla})\vec{v}' - (\vec{v}'.\vec{\nabla})\bar{\mathbf{B}} \qquad (7.46)$$

onde assumimos por simplicidade que o fluido é incompressível, e então $\vec{\nabla}.\vec{v}' = 0$. Logo,

$$\vec{B}'(\vec{x},t) = \vec{B}'(\vec{x},-\infty) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} dt'$$

Conveccao turbulenta: regime subssonico

$$= \vec{B}'(\vec{x},-\infty) + \int_{-\infty}^{t} \left[(\bar{\mathbf{B}}.\vec{\nabla})\vec{v}'(\vec{x},t') - \vec{v}'(\vec{x},t').\vec{\nabla}\bar{\mathbf{B}}\right] dt' \qquad (7.47)$$

Substituindo na FEM turbulenta:

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >=< \vec{v}'(\vec{x},t) \times \vec{B}'(\vec{x},-\infty) > +$$

$$+\int_{-\infty}^{t} < \vec{v}'(\vec{x},t) \times \left[(\bar{\mathbf{B}}.\vec{\nabla})\vec{v}'(\vec{x},t') - \vec{v}'(\vec{x},t').\vec{\nabla}\bar{\mathbf{B}}\right] > dt' \qquad (7.48)$$

Uma vez que $\vec{v}'(t)$ não pode estar correlacionado com $\vec{B}'(-\infty)$, o primeiro termo se anula.

Usando notação com índices, (7.48) pode ser escrito como

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk} \int_{-\infty}^{t} \Big[< \vec{v}'_j(\vec{x},t)\vec{B}_n \partial_n v'_K(\vec{x},t') -$$

$$-v'_j(\vec{x},t)\vec{v}'_n(\vec{x},t')\partial_n \bar{B}_k > \Big] dt' \qquad (7.49)$$

Do fato de que $\bar{\mathbf{B}}$ não varia na escala de tempo turbulenta, ele pode ser retirado da integral

e

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk} \left[\bar{B}_n \int_{-\infty}^{t} < v'_j(\vec{x},t) \partial_n v'_k(\vec{x},t') > dt' - \right.$$
$$\left. - \partial_n \bar{B}_k \int_{-\infty}^{t} < v'_j(\vec{x},t) v'_n(\vec{x},t') > dt' \right] \qquad (7.50)$$

mostrando, conforme esperado de (7.42), que a FEM é uma combinação linear de $\bar{\mathbf{B}}$ e suas derivadas, com coeficientes dependendo da estatística da turbulência. É útil introduzir

$$t'' = t - t' \qquad (7.51)$$

De modo que t" vai de 0 até ∞.

Entao, chamando:

$$\omega_{jnk} \equiv \int_o^\infty < v'_j(\vec{x},t)\partial_n v'_k(\vec{x},t-t'') > dt'' \qquad (7.52)$$

e

$$z_{jn} \equiv \int_o^\infty < v'_j(\vec{x},t)v'_n(\vec{x},t-t'') > dt'' \qquad (7.53)$$

Podemos escrever (7.50) na forma

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk}\omega_{jnk}\bar{B}_n - \varepsilon_{ijk}z_{jn}\partial_n\bar{B}_k \qquad (7.54)$$

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk}\omega_{jnk}\bar{B}_n - \varepsilon_{ijk}z_{jn}\partial_n\bar{B}_k \tag{7.54}$$

Então, se nós consideramos $i = 1$, o 1^o termo contribui com uma quantidade

$$\varepsilon_{1jk}\omega_{jnk}\bar{B}_n = (\omega_{2n3} - \omega_{3n2})\bar{B}_n \tag{7.55}$$

para $(\vec{v}' \times \vec{B}')_1$. Mas para turbulência isotrópica, nós mostramos em (7.43) que $< \vec{v}' \times \vec{B}' >_1$ depende somente de $\vec{B}_1$, logo para tal turbulência nós devemos ter

$$\omega_{223} - \omega_{322} = \omega_{233} - \omega_{332} = 0 \tag{7.56}$$

para assumir que não há nenhuma dependência com $\bar{B}_2$ ou $\bar{B}_3$. Além do mais, comparando com 7.45, encontramos que

$$\alpha = \omega_{213} - \omega_{312} \tag{7.57}$$

Do mesmo modo:

Se fazemos $i = 2$ e então 3 em (7.55), também encontramos que

$$\alpha = \omega_{321} - \omega_{123} \tag{7.58}$$

e

$$\alpha = \omega_{132} - \omega_{231} \tag{7.59}$$

De modo que se desejarmos, podemos escrever

$$\alpha = \frac{1}{3}(\omega_{213} - \omega_{312} + \omega_{321} - \omega_{123} + \omega_{132} - \omega_{231}) \tag{7.60}$$

Mas de (7.52) sabemos que:

$$\omega_{jnk} = L(v'_j \partial_n v'_k) \tag{7.61}$$

Onde L é o operador definido em (7.52). Logo,

$$\alpha = \frac{1}{3} L(v'_2 \partial_1 v'_3 - v'_3 \partial_1 v'_2 + v'_3 \partial_2 v'_1 - v'_1 \partial_2 v'_3 + v'_1 \partial_3 v'_2 - v'_2 \partial_3 v'_1)$$

$$= \frac{1}{3} L\big[- v'_1 (\partial_2 v'_3 - \partial_3 v'_2) - v'_2 (\partial_3 v'_1 - \partial_1 v'_3) - v'_3 (\partial_1 v'_2 - \partial_2 v'_1)\big]$$

$$\alpha = -\frac{1}{3} L(\vec{v}'.\vec{\nabla} \times \vec{v}')$$

$$= -\frac{1}{3} \int_o^\infty dt'' < \vec{v}(\vec{x}, t).\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}, t - t'') > \tag{7.62}$$

Usando o mesmo tipo de argumento em (7.53), verifica-se que β, definido por (7.45) é

$$\beta = \frac{1}{3}\int_o^\infty dt'' < \vec{v}'(\vec{x},t).\vec{v}'(\vec{x},t-t'') > \qquad (7.63)$$

Se assumimos que a correlação em velocidade acaba em um tempo $\sim l/v'$, podemos escrever

$$\alpha \sim -\frac{1}{3} < \vec{v}'.\vec{\nabla} \times \vec{v}' > \frac{l}{v'} \tag{7.64}$$

e

$$\beta \sim \frac{1}{3} < v'^2 > \frac{l}{v'} \sim \frac{1}{3} l v' \tag{7.65}$$

De modo que β é uma viscosidade turbulenta baseada na velocidade turbulenta v' e na escala l da turbulência como um livre-caminho médio. Note que a razão da viscosidade magnética ν_M para β é

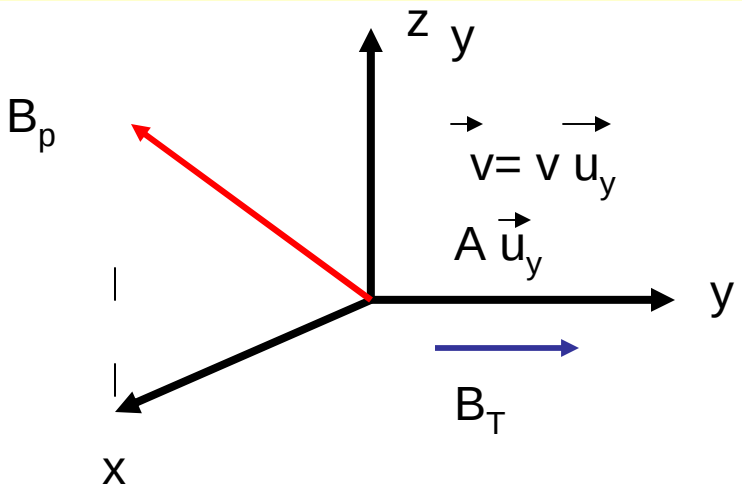
$$\frac{\nu_M}{\beta} = \frac{3\nu_M}{lv'} = \frac{3}{R_{eM}} \tag{7.66}$$

O qual é pequeno se o número de Reynolds magnético da turbulência é grande. Assumimos de saída que isso é verdadeiro.

Aplicacao `a Rotacao Diferencial no Sol e Estrelas

vamos mostrar que quando eq. de inducao e' aplicada a fluido convectivo com rotacao diferencial, incluindo os efeitos α e β: B surge espontaneamente.

Para simplificar, vamos representar o fluido medio como um fluido:
Com cizalhamento na direcao *y*,
f= f(x,z)
f independente de y (∂_y =0): equivalente a rotacao estelar na direcao φ, com simetria axial (f independente de φ)



Devemos resolver a equação de evolução para o campo médio $\bar{\mathbf{B}}$, (7.37), usando a equação (7.45) para a FEM. (Daqui por diante omitiremos a barra sobre $\vec{v}$ e $\vec{B}$, uma vez que não mencionaremos mais $\vec{v}'$ e $\vec{B}'$ nesta sessão, não podemos, no entanto, nos esquecer do verdadeiro significado de $\vec{v}$ e $\vec{B}$.) Isto resulta:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v} \times \vec{B} + \alpha \vec{B} - (\nu_M + \beta)\vec{\nabla} \times \vec{B}\right] \tag{7.67}$$

Conforme explicado acima, podemos desprezar ν_M comparado com β, e faremos isso daqui por diante. Separaremos cada campo vetor, tal como $\vec{B}$, em uma componente "toroidal" ou componente y e uma "poloidal" ou componente $x - z$,

$$\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P \tag{7.68}$$

Aqui a terminologia é derivada de sistemas axissimétricos. Então

$$\vec{B}_T = B\vec{u}_y \tag{7.69}$$

onde simplesmente escrevemos $B_y = B$ daqui por diante e podemos também escrever:

$$\vec{B}_P = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{7.70}$$

A vantagem em se usar (7.70) vem do fato de que aplicando $\vec{v}\times$ ou $\vec{\nabla}\times$ a um vetor converte uma componente poloidal em uma toroidal e vice-versa. Segue-se de (7.70) que $\vec{A}$ é toroidal:

$$\vec{A} = A\vec{u}_y \tag{7.71}$$

De modo que

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \times (A\vec{u}_y) = (\vec{\nabla} A) \times \vec{u}_y$$

$$= \vec{u}_x(-\partial_z A) + \vec{u}_z(\partial_x A) \tag{7.72}$$

Logo

$$\boxed{\vec{B} = B\vec{u}_y + (\vec{\nabla} A) \times \vec{u}_y} \tag{7.73}$$

é descrito por duas funções escalares A e B. Note que $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ requer que $\vec{B}$ seja independente de y.

Quebramos (7.67) em suas componentes poloidal e toroidal, levando em conta as regras acima. A componente poloidal é

$$\frac{\partial \vec{B}_P}{\partial t} = \left[\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})\right]_P + \alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B})_P - \beta[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})]_P$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})_T + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_T - \beta\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v}_P \times \vec{B}_P) + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_T - \beta\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_P) \qquad (7.74)$$

No caso em consideração, $\vec{v}_p = 0$, então o 1^o termo se anula. Usando (7.72) e eliminando o rotacional:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u}_y) = \alpha\vec{B}_T - \beta\vec{\nabla} \times \vec{B}_P$$

$$= \alpha B\vec{u}_y + \beta\nabla^2 A\vec{u}_y \qquad (7.75)$$

onde $\nabla^2 = \partial x^2 + \partial z^2$, já que $\partial y = 0$, então

Logo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta\nabla^2\right)A = \alpha B \qquad (7.76)$$

Mostrando que o campo poloidal $(\vec{\nabla} X \vec{A})$ é regenerado pelo efeito α agindo no campo toroidal (B).

Lembrar que:

$$\vec{B}_T = B\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_P = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

A componente toroidal de (7.67) dá:

$$\frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} = \left[\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})\right]_T + \alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B})_T + \beta(\vec{\nabla}^2 \vec{B})_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})_P + \alpha \vec{\nabla} \times \vec{B}_P + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{B}_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v}_T \times \vec{B}_P + \vec{v}_P \times \vec{B}_T) + \alpha \vec{\nabla} \times \vec{B}_P + \beta \vec{\nabla}^2 B_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v}_T \times \vec{B}_P) + \alpha \vec{\nabla} \times \vec{B}_P + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{B}_T \qquad (7.77)$$

Uma vez que $\vec{v}_p = 0$ no exemplo em questão. .

Uma vez que:

$$\vec{v}_T = v\vec{u}_y \tag{7.78}$$

$$\vec{v}_T \times \vec{B}_P = v\vec{u}_y \times \left[\vec{\nabla}A \times \vec{u}_y\right] = v\vec{\nabla}A \tag{7.79}$$

já que $\vec{u}_y.\vec{\nabla}A = \partial yA = 0$ pela hipótese de simetria axial. Logo, o 1^o termo da direita d
(7.77) é

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v}_T \times \vec{B}_P) = \vec{\nabla} \times (v\vec{\nabla}A) = \vec{\nabla}v \times \vec{\nabla}A$$

$$= \left[- (\partial_x v)(\partial_z A) + (\partial_z v)(\partial_x A)\right]\vec{u}_y \tag{7.80}$$

Similarmente, pode-se mostrar que o 2^o termo de (7.77) é:

$$\alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B}_P) = -\alpha \vec{\nabla}^2 A \vec{u}_y \tag{7.81}$$

De modo que: o campo toroidal e' dado por:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \beta \vec{\nabla}^2) B = -(\partial_x v)(\partial_z A) + (\partial_z v)(\partial_x A) - \alpha \vec{\nabla}^2 A \tag{7.82}$$

O 2^o termo no lado direito de (7.82) pode ser desprezado, porque:

$$\frac{| \alpha \vec{\nabla}^2 A |}{| (\vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} A) |} \simeq \frac{| \alpha |}{v} \tag{7.83}$$

o qual veremos mais tarde é $<< 1$, pelo menos no sol. Logo, o campo toroidal (B) é regenerado unicamente pela ação do cizilhamento no campo poloidal (A).

Se assumimos que $\partial_x v$ e $\partial_z v$ são constantes, ambas as eqs. (7.76) e (7.82) têm coeficientes constantes e então possuem soluções da forma $exp(nt + i\vec{k}.\vec{x})$. Logo, (7.76) torna-se

$$(n + \beta k^2)A - \alpha B = 0 \tag{7.84}$$

Enquanto que se α é desprezado em (7.82):

$$(n + \beta k^2)B + i(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y A = 0 \tag{7.85}$$

onde $\vec{k}$ é o número de onda.

O anulamento do determinante dos coeficientes implica que:

$$n = \left[- i\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y \right]^{1/2} - \beta k^2$$

$$= \left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2} \right]^{1/2} - i \left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2} \right]^{1/2} - \beta k^2 \qquad (7.86)$$

tal que em geral, os modos correspondem a ondas crescentes ou amortecidas, sendo a parte real de n, a taxa de crescimento, dada por:

$$Re(n) = \left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2} \right]^{1/2} - \beta k^2 \qquad (7.87)$$

$$Re(n) = \left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2}\right]^{1/2} - \beta k^2 \tag{7.87}$$

No caso simples em que $k_x = 0$ e $k = k_z$, correspondendo ao fato de que as variações de B e A ocorrem na direção z (a qual seria a latitude em uma estrela)

$$Re(n) = \left(\frac{\alpha k_z \partial_x v}{2}\right)^{1/2} - \beta k_z^2 \tag{7.88}$$

de modo que haverá instabilidade para números de onda menores que um valor crítico dado por

$$k_z < k_c = \left(\frac{\alpha \partial_x v}{2\beta^2}\right)^{1/3} \tag{7.89}$$

Diferenciando (7.88) com respeito a k_z, verifica-se que o máximo valor de $Re(n)$ ocorre para $k_z = 2^{-4/3} k_c$, em cujo ponto $Im(n) = \frac{4}{3} Re(n)$, de modo que a instabilidade é manifestada como uma onda cuja frequência é aproximadamente igual à taxa de crescimento. O máximo valor de $Re(n)$ é

$$Re(n)_{max} = \left[\alpha^2 (\partial_x v)^2 / (2^7 \beta)\right]^{1/3} \tag{7.90}$$

Podemos estimar $R \equiv Re(n)_{max}$ para o sol da seguinte maneira. Parker (1979, pp. 573-580) analisa o movimento ciclônico dentro de uma célula convectiva em uma estrela em rotação, e verifica que (eq. 15.58):

$$\alpha \sim \frac{\pi}{8}\varepsilon\Omega l \qquad (7.93)$$

Onde:
ε e' um coeficiente adimensional que ele estima ser ~0.1
Ω e' a velocidade de rotacao em grande escala da estrela
l e' o tamanho do turbilhao convectivo

Na eq. para $Re(n)_{max}$ (7.90):

substituímos $\partial_x v$ por $R\partial_R\Omega \sim \Delta\Omega$, onde $\Delta\Omega$ é a diferença entre a velocidade de rotação angular no fundo e a no topo da zona convectiva. Na eq. (7.65) verificamos que $\beta = \frac{1}{3}v'l$. Injetando estes resultados em (7.90) obtemos:

$$R = \left(\frac{3\pi^2\varepsilon^2\Omega^2(\Delta\Omega)^2 l}{2^{13}v'}\right)^{1/3} \simeq \left(\frac{0.3\varepsilon^2\Omega^4 l}{2^{13}v'}\right)^{1/3} \qquad (7.94)$$

Onde tomamos $\Delta\Omega \sim 0.1\Omega$.

Usando:

$\varepsilon \sim 0.1, \Omega = 3 \times 10^{-6}$ seg^{-1}, $l = 3 \times 10^{3}$ km e $v' = 0.1$ km/s na zona convectiva do Sol (Parker 1979, p. 762)

$$R = 9.8 \times 10^{-9} s^{-1} \tag{7.95}$$

correspondendo a um tempo de crescimento:

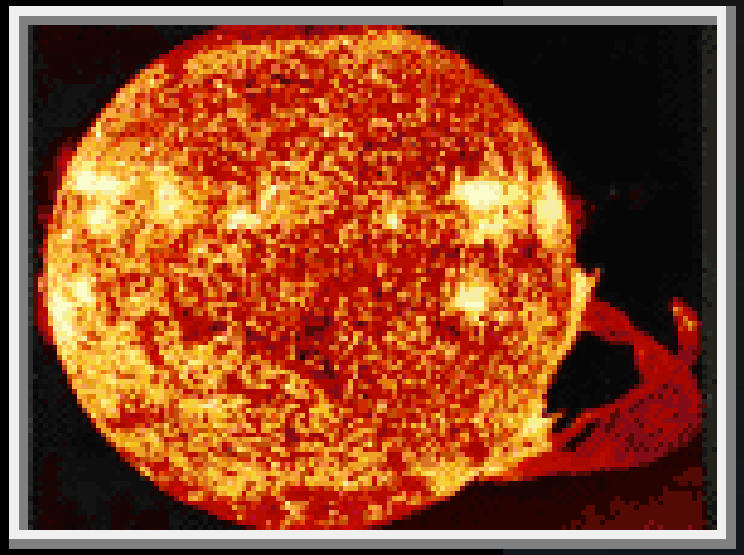
$$R^{-1} = 3.3 \ \ anos \tag{7.96}$$

logo, o dínamo solar trabalha bem rápido!

O ciclo solar seria entao devido `a natureza "ondulatoria" progressiva do campo produzido com periodo ~ acima.
As manifestacoes de superficie do campo sao interpretadas como resultado de empuxo magnetico (`a medida que o campo produzido se levanta atraves da zona convectiva para a superficie).

Dinamo de Parker: aproximacao do dinamo real

O que nos dizem as observacoes do ciclo solar e os modelos mais recentes?



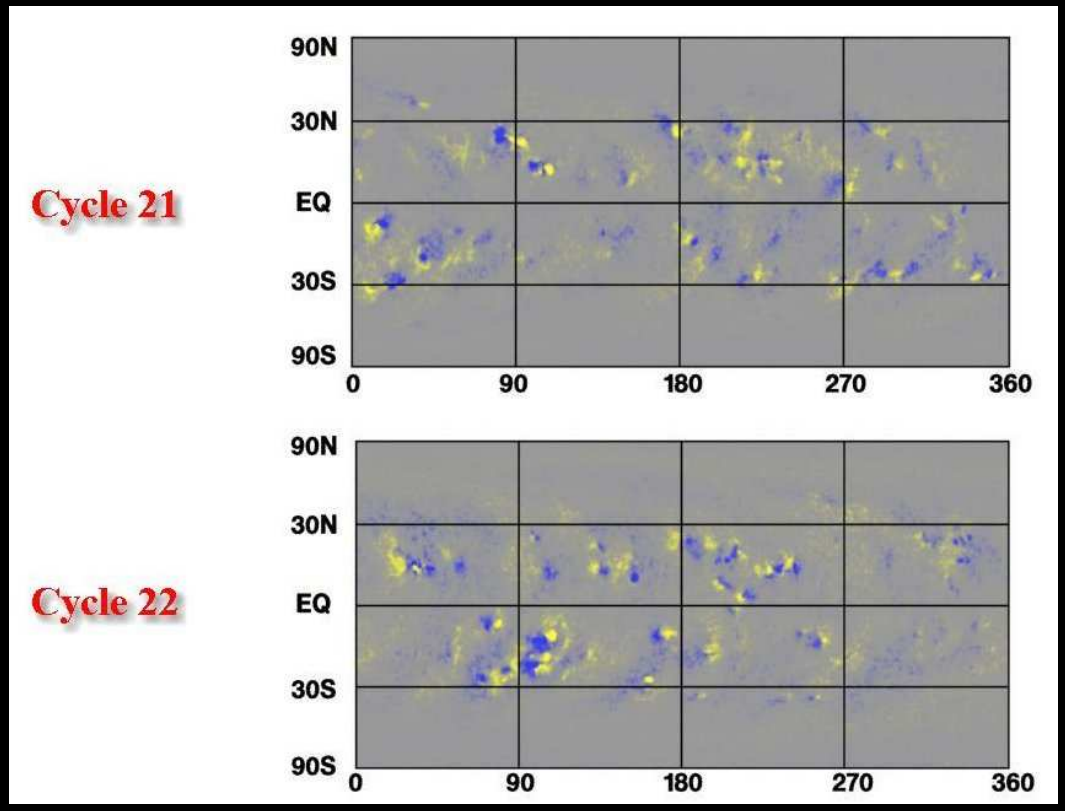




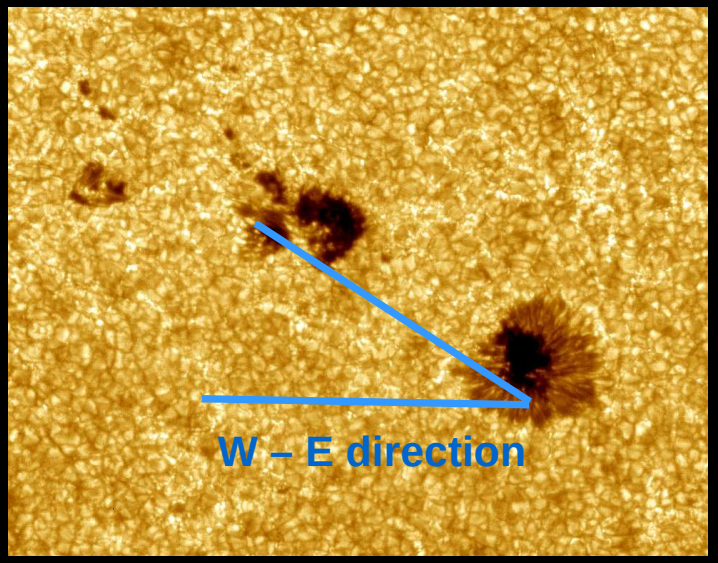
SOHO/MDI

1. SUNSPOTS at both sides of the solar equator (systematically studied since Galileo);

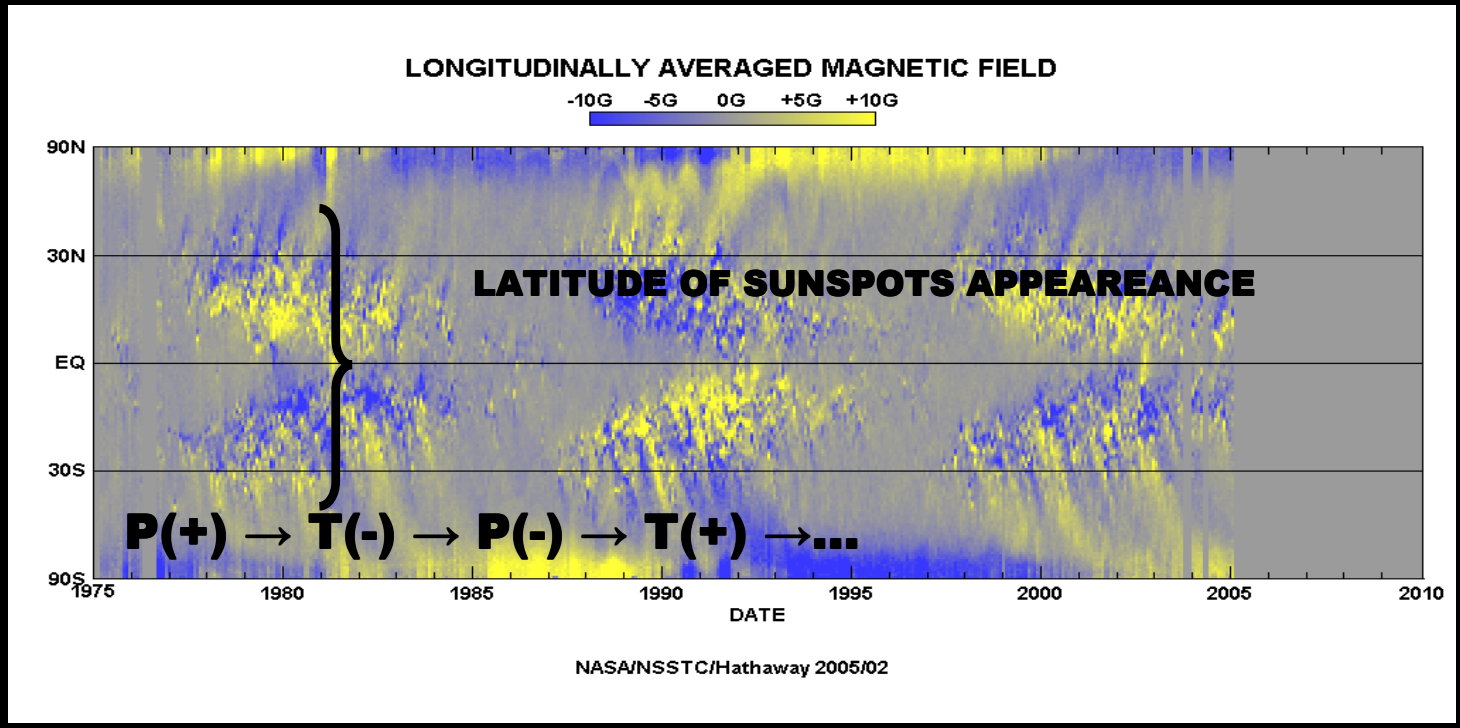
Evidences:



1. SUNSPOT appeareance at both sides of the solar equator;
2. Pairs of sunspots with opposite polarity;
3. Tilt between the spots in a pair;
4. 11-YEARS inversion cycle.



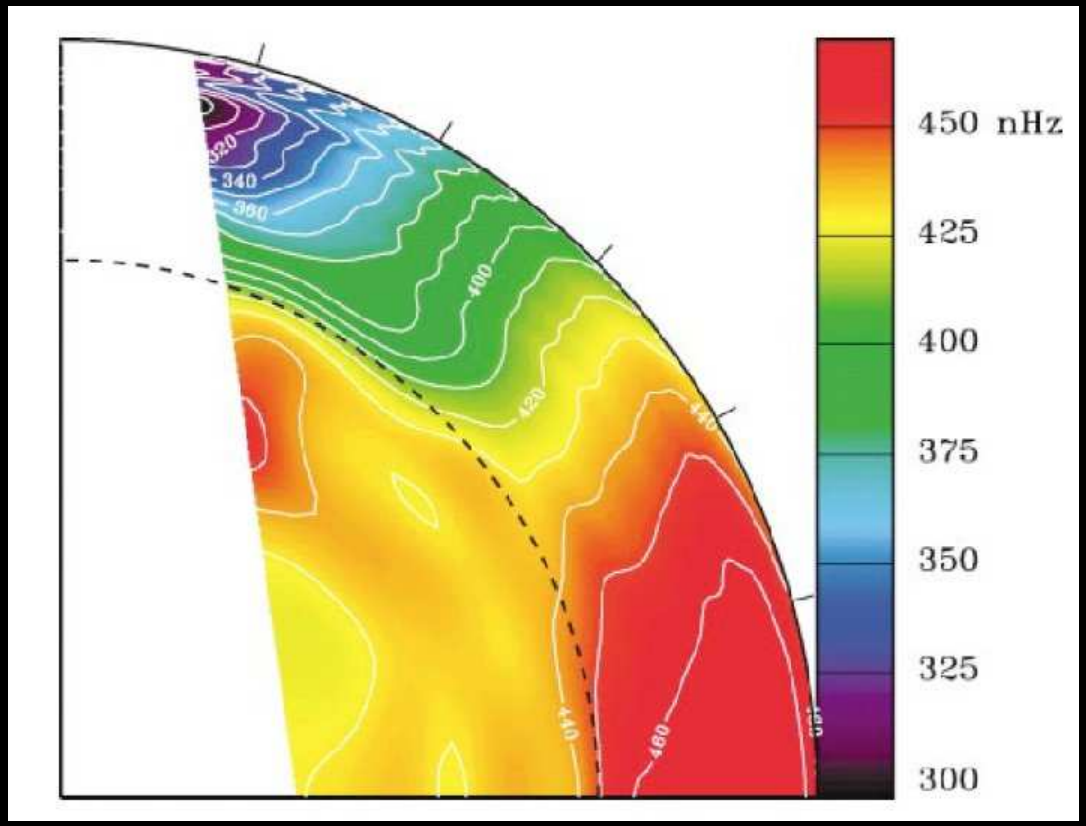
5. Toroidal – Poloidal fields phase lag,
6. Latitude of sunspot appeareance



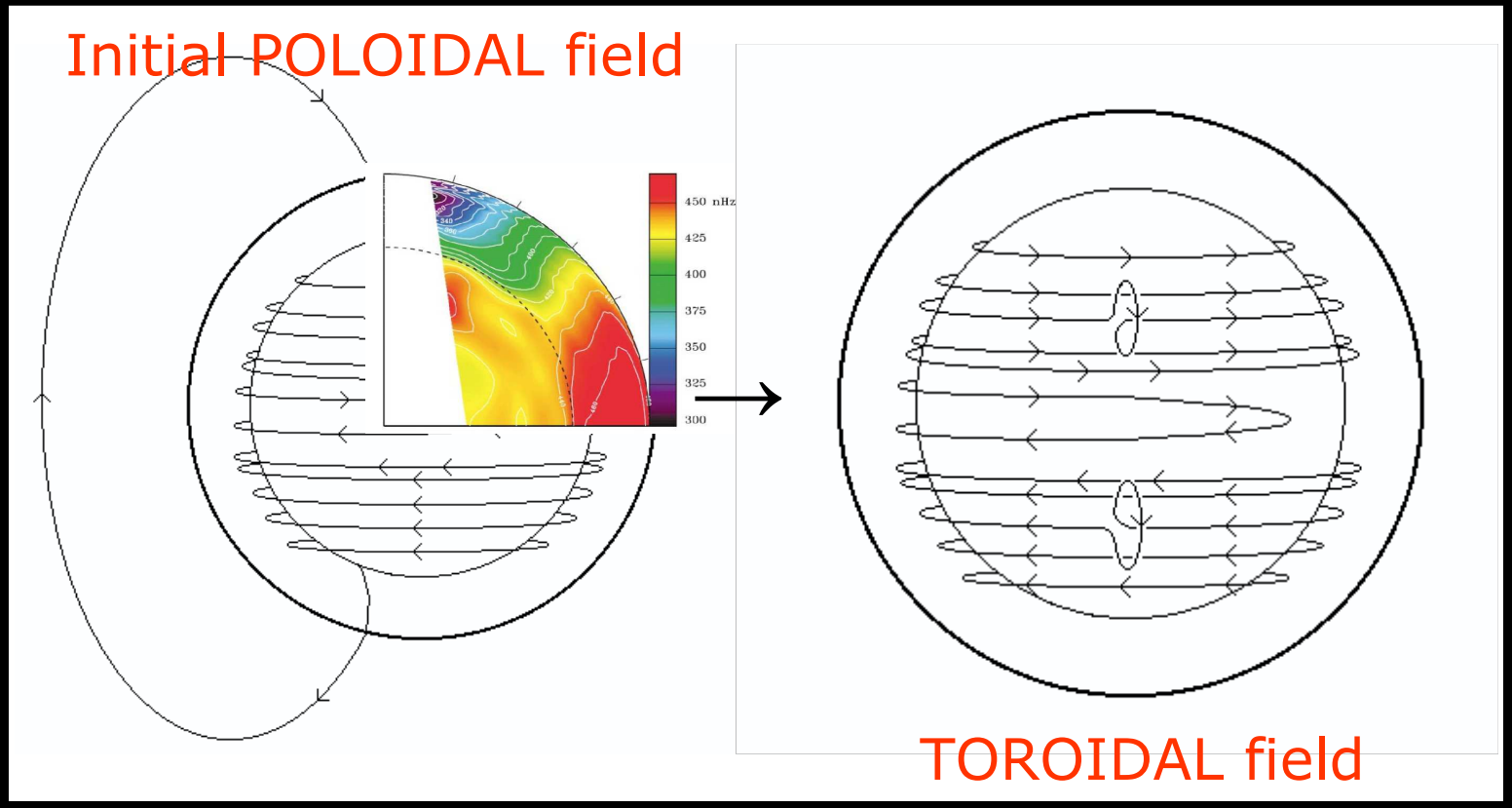
How does the dynamo operate?

Three main stages:

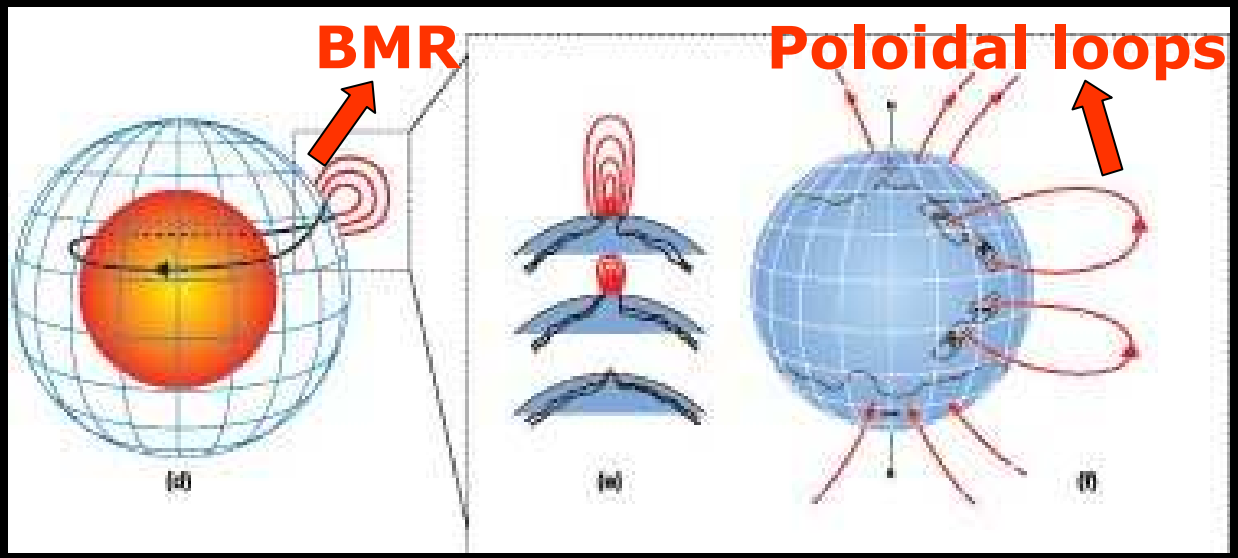
A. Poloidal $\rightarrow$ Toroidal Field – Differential Rotation
Ω effect :



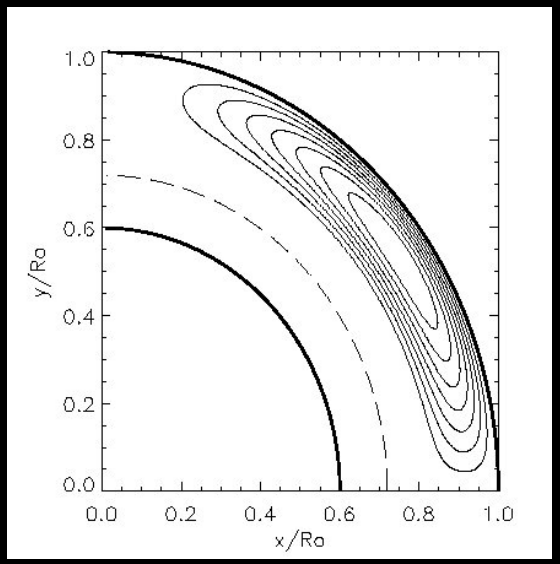
1. Tachocline: negative radial shear layer
2. Bulk of the convective zone: latitudinal shear
3. Upper 50 Mm: positive radial shear


Initial POLOIDAL field
450 nHz
425
400
375
350
325
300
TOROIDAL field

C. TOROIDAL → POLOIDAL: α effect



MERIDIONAL FLOW



- Poloidal loops reconnect at the surface until annihilate the old poloidal field and form a new one with the opposite polarity.
- A downward transport mechanism is required.

Kinematic Mean Field Models

Mean field MHD ind. Equation: $\mathbf{B_{real}} = \mathbf{B} + \mathbf{B'}$

Meridional flow

Shear term

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathcal{E} - \eta_T \nabla \times \mathbf{B}],$$

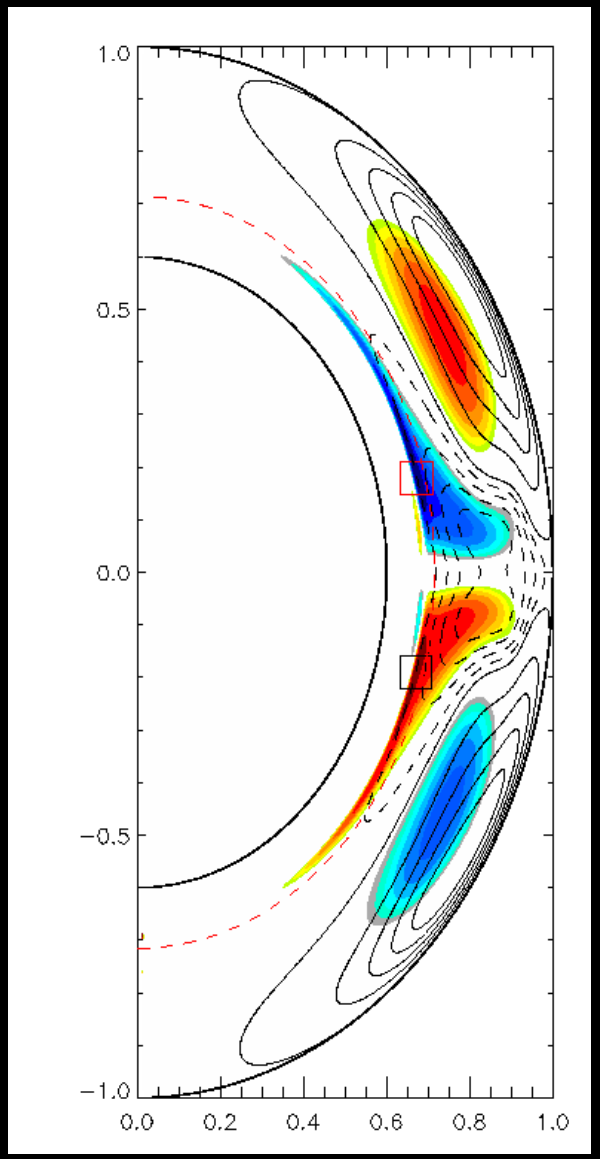
Magnetic diffusivity

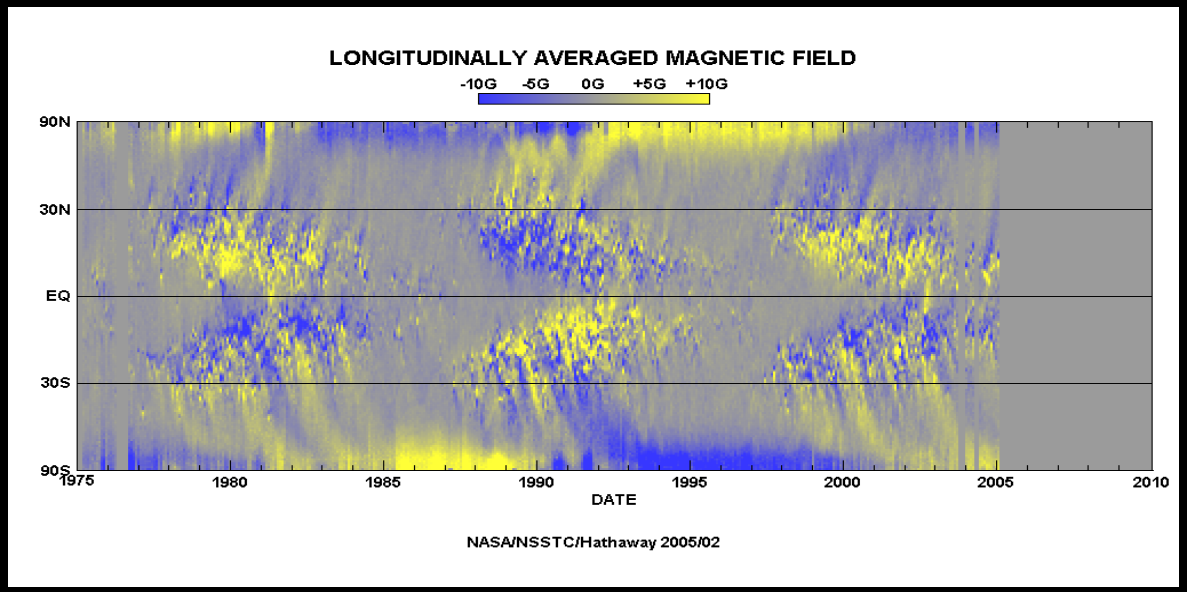
Electromotive Force

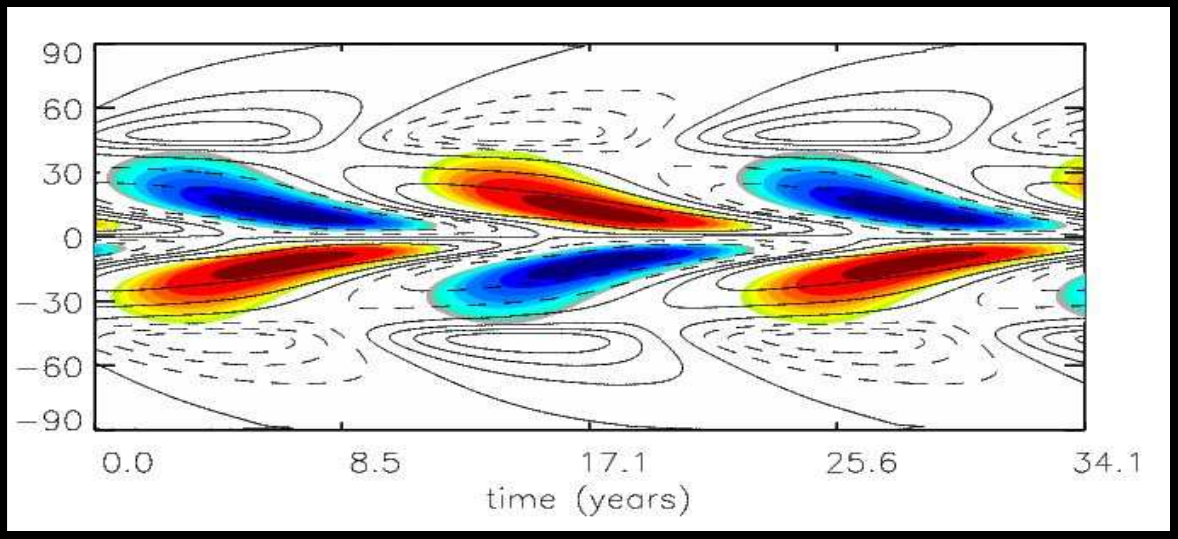
α effect (?)

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{B} + \gamma \times \mathbf{B},$$

Magnetic pumping







Guerrero & de Gouveia Dal Pino 2008