- CAPÍTULO 7 -

ORIGEM DOS CAMPOS MAGNÉTICOS

Campos magnéticos existem em planetas, estrelas, e galáxias. Como eles surgiram lá?

7.1 Introdução

A astronomia moderna ensina que cada tipo de objeto foi formado em algum tempo no passado a partir de matéria pré-existente: planetas a partir da nuvem solar, estrelas a partir de nuvens moleculares interestelares, e galáxias a partir da matéria cósmica; logo, a origem do campo magnético em um objeto de um certo tipo deve ser considerada juntamente com a origem do objeto propriamente. Se MHD ideal sempre se aplica, o campo de um planeta hoje deve ser aquele carregado pela nebulosa solar que o formou, e assim por diante. Esta hipótese da origem de campos magnéticos pode ser criticada. Na ausência de algum mecanismo regenerador não especificado, todos os campos tendem a decair devido a dissipação da corrente que os suporta. De (1.35):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;=\; \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{7.1}$$

nós podemos derivar uma estimativa do tempo de decaimento resistivo;

$$t_D \;=\; \frac{L^2}{\nu_M} \tag{7.2}$$

onde L é o tamanho do objeto. Do fato de que $\nu_M = \frac{\eta c^2}{4\pi}$ (eq. 1.34) e $\eta \simeq cteT^{-3/2}$ (eq. 1.22), ν_M varia somente de um fator de 10^6 do objeto mais frio ($10^3 K$) para o mais quente ($10^7 K$) de nossa lista, enquanto L^2 varia de um fator 10^{26} dos planetas para as galáxias. Verifica-se numericamente que para a terra, $t_D << $ idade, enquanto que para a Galáxia, o oposto é verdade. Para o sol e as estrelas, t_D é comparável à idade deles (veja abaixo no entanto).

O sol e as estrelas apresentam um caso interessante. Acredita-se que quando um glóbulo de gás colapsa gravitacionalmente dentro das nuvens moleculares, ele leva o campo

magnético com ele. Esse campo transmite momento angular de um glóbulo para o meio circundante à medida que o glóbulo tende a aumentar sua rotação enquanto contrai, sobrepujando, portanto, a barreira centrífuga a qual de outro modo impediria a continuação da contração. Entretanto, à medida que a densidade cresce, a fração ionizada de gás decai, e o "stress" magnético crescente torna-se mais e mais eficaz em forçar os poucos pares de íons que restaram através das partículas neutras. Este processo é denominado "difusão ambipolar". Por esse processo a maior parte do fluxo magnético é removido de uma protoestrela em contração; do contrário, campos magnéticos maiores que os observados seriam previstos para as estrelas.

Além do mais, Parker (1979) acredita que como as estrelas passam por uma fase inteiramente convectiva em seu caminho para a sequência principal, a maior parte do campo magnético restante sofre empuxo o bastante (veja Instabilidade de Parker no Cap. 3), para levantar até a superfície e escapar (mas veja também Borra et al. 1982). Logo, poder-se-ia esperar que o sol e as estrelas teriam apenas campos bem pequenos. Esta previsão está tão fora quanto aquela devido a MHD ideal. Como algumas estrelas que agora são radiativas possuem campos magnéticos que parecem ser fósseis de uma fase anterior, isso sugere que algum campo magnético deve sobreviver à fase protoestelar. Por outro lado, estrelas que são convectivas em suas superfícies hoje possuem campos bem fortes localizados que variam com o tempo, sugerindo uma origem contemporânea. Para sumarizar, congelamento de fluxo perfeito não se aplica, certamente, todo o tempo, desde a origem da estrela a partir da nuvem, até o seu presente estado. Além do mais, algumas daquelas estrelas que não liberam campos por empuxo são observados possuir campos que bem poderiam ser campos fósseis interestelares, enquanto aquelas estrelas que deviam ter liberado todo seu campo por efeitos de empuxo possuem de fato campos que variam no tempo e no espaço, sugerindo algum mecanismo operando atualmente para regenerá-los. Logo, campos magnéticos estelares possuem histórias complexas.

Campos em escalas galácticas poderiam ser fósseis, desde que $t_D >>$ tempo de Hubble. Mas, esta aparentemente simples conclusão tem sido grandemente debatida. Por uma razão muito simples, se campos magnéticos antecedem as galáxias, de onde eles vieram? Esta questão leva a um número de sugestões dentro do contexto cosmológico, algumas das

quais são bem especulativas. Por outro lado, Parker acredita que na escala de galáxias, a dissipação turbulenta é ordens de magnitude mais eficaz que a dissipação resistiva de campos magnéticos, de modo que nem mesmo campos galácticos são fósseis. Sumarizando, Parker argumenta que nenhum dos campos observados em planetas, estrelas, ou galáxias são fósseis da sua origem, e algum mecanismo deve estar gerando-os. Todo mundo concorda que esse é o caso da terra, e provavelmente, pelo menos de estrelas parcialmente convectivos, mas há desacordo significativo sobre as galáxias.

7.2 Mecanismos para Geração de Campos

Um mecanismo possível poderia ser rotação diferencial. Afinal, a equação de indução magnética completa (1.32) contém um termo de advecção e um termo de difusão, então (se $\vec{v}_e = \vec{v}$ e se omitimos a pilha de Biermann):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nu_M \nabla^2 \vec{B} \tag{7.3}$$

Se $\vec{v}$ representa uma rotação diferencial ($v = v(R)$), nós demonstramos no problema (p. 14) que, se $\nu_M = 0$:

$$\frac{\partial B_R}{\partial t} = 0 \tag{7.4}$$

Tal que a componente radial do campo permanece constante enquanto que se $\nu_M = 0$:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = 2AB_R \tag{7.5}$$

Onde $A = Rd\Omega/dR$ e Ω é a velocidade angular, de modo que a componente azimutal B_ϕ do campo cresce em consequência do "esticamento" das linhas do campo. Mais geralmente se um sistema está em rotação diferencial axissimétrica, podemos separar o campo em componentes com respeito ao eixo de rotação - uma componente toroidal $\vec{B}_\phi$ e uma componente poloidal $\vec{B}_p = B_R\vec{e}_R + B_\theta\vec{u}_\theta$. Pode-se então demonstrar que $\vec{B}_p$ permanece constante enquanto B_ϕ cresce. Provavelmente isto é relevante para a Galáxia, onde $\vec{B}$ é observado ser predominantemente toroidal.

Mas, o esticamento das linhas do campo realmente representa geração de campo magnético? Não, porque se resistividade finita é incluída, a componente poloidal satisfaz

$$\frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t} = -\nu_M \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_p) \tag{7.6}$$

e $\vec{B}_p$ decai sem nenhum mecanismo de regeneração atuando; portanto, B_ϕ, o qual depende

de B_R, também decai. Logo, o esticamento por rotação diferencial não pode ser si só gerar um campo, apesar de que, como veremos, ela tem papel importante no mecanismo gerador. No Cap. 1, nós chamamos a atenção para o termo da Bateria de Biermann,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mid_{BB} = -\frac{c}{n_e^2 e}\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} p_e = -\frac{c k_B}{n_e e}\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} T \tag{7.7}$$

Num objeto não girante, não há razão para ocorrer desvios da simetria esférica, e ambos $\vec{\nabla} n_e$ e $\vec{\nabla} p_e$ são radiais de modo que (7.7) se anula. Se por outro lado, o objeto está girando, a equação de movimento (2.5), com somente um campo fraco pode ser resolvida em condições de estado estacionário em uma componente radial (cilíndrica):

$$-R\omega^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R} \tag{7.8}$$

e uma componente z:

$$0 = -\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{7.9}$$

Podemos eliminar o potencial gravitacional ψ calculando a derivada $\partial/\partial z$ de (7.8) e subtraindo $\partial/\partial R$ de (7.9), dando

$$-R\frac{\partial}{\partial z}(\omega^2) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial R} - \frac{\partial \rho}{\partial R}\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho^2}(\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla} p)_\phi = \frac{1}{\rho^2}\left[\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\big(\frac{k_B}{\bar{m}}\rho T\big)\right]_\phi$$

$$= \frac{k_B}{\bar{m}\rho}\big(\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla} T\big)_\phi$$

$$= \frac{k_B}{\bar{m} n_e}\big(\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} T\big)_\phi \tag{7.10}$$

Onde usamos a lei de gás ideal $\vec{\nabla}\rho/\rho = \vec{\nabla} n_e/n_e$, a qual aplica-se a um plasma sem carga líquida. Notamos que (7.10) é a componente ϕ de (7.7), então

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mid_{BB} = -\frac{ck_B}{e}\left\{\frac{\bar{m}}{k_B}\left[-R\frac{\partial}{\partial z}(\omega^2)\right]\vec{e}_\phi\right\}$$

$$= \frac{\bar{m}c}{e}R\frac{\partial}{\partial z}(\omega^2)\vec{e}_\phi \tag{7.11}$$

Logo, a bateria de Biermann cria uma força eletromotriz a qual faz com que um campo toroidal $\vec{B}_\phi$ cresça linearmente com o tempo. Quando se injetam estimativas de gradientes reais de ω, o resultado não é desencorajante, e parece que campos de $\sim 10^3 G$ poderiam crescer durante a vida de uma estrela. Notamos, no entanto, que a estrela deve manter uma rotação diferencial e, conforme ressaltado por Mestel e Roxburgh (1982), mesmo um campo poloidal fraco envolveria esticamento das linhas na direção toroidal, a energia para tal viria da rotação diferencial, causando portanto, uma diminuição da mesma (apesar de que evidência recente sobre a rotação interna do sol mostra que ω é constante em cones e portanto, $\partial\omega/\partial z$ é diferente de 0). A discussão rapidamente fica complicada (Borra et al. 1982), mas, pelo menos a bateria de Biermann é capaz de gerar algum campo, violando o teorema do congelamento do fluxo de MHD ideal. Este campo poderia servir como um "campo semente" para um processo de dínamo, que discutiremos em seguida.

Muitos autores atribuem os campos localizados e variáveis no tempo observados em estrelas parcialmente convectivas como o sol à ação de dínamo auto excitado. Explicaremos este conceito com maior detalhe posteriormente, mas por ora basta saber que ele significa "um padrão de movimentos em um fluido condutor (e.g., um plasma) capaz de ampliar qualquer campo magnético pequeno presente". O assunto tem uma longa história e uma formulação matemática encontrada, por exemplo, em Moffatt (1978) e Parker (1979).

A discussão começou com a percepção de que em um gerador elétrico prático, o campo magnético através do qual os enrolamentos da armadura passam a fim de gerar voltagem (de acordo com a lei de Faraday) pode ser criado por correntes as quais são induzidas pela própria voltagem que a máquina está gerando. Não é necessário excitar o campo por uma voltagem externa. Ao invés, um gerador sem vida com um circuito de auto-excitação irá reviver se girado rápido o bastante, mesmo que não haja nenhuma corrente ou campo para começar. Tal dispositivo é chamado "dínamo auto-excitado".

Como isso se aplica à astronomia? Bem, geradores práticos são construídos de condutores que podem ser deslocados. Uma vez que um plasma é um bom condutor, devemos ser capazes de girá-lo de modo tal que um dínamo auto excitado possa ser possível. Logo, em uma certa velocidade crítica, o sistema gerador poderia ganhar vida e, tanto correntes como campos magnéticos seriam gerados, dragando sua energia dos movimentos fundamentaos subjacentes. Muitos trabalhos têm sido realizados baseados na teoria do "dínamo cinemático" no qual vários padrões de movimento são ou assumidos (como rotação) ou induzidos por forças externas (como convicção térmica guiada por forças de empuxo), mas a reação de resposta no sistema devido à força magnética é desprezada. Isto é certamente adequado nas primeiras fases da formação dos campos magnéticos, quando os mesmos ainda são fracos. Numa teoria dinâmica completa, o efeito das forças magnéticas no padrão de movimento deve ser levado em conta para um modelo auto-consistente ser encontrado.

Há um mecanismo específico, atribuído a Harrison (1970), que depende da presença de uma radiação de corpo negro cósmica intensa em todas as épocas do plasma cósmico. Essa radiação é espalhada, por efeito Thomson, por elétrons, e verifica-se que qualquer elétron não em repouso no referencial no qual o campo de radiação é isotrópico é rapidamente desacelerado. O resultado é que os fótons e elétrons formam um fluido estreitamente acoplado, e somente fracamente acoplado aos prótons através de colisões Coulombianas. Sob estas condições, considere uma proto-galáxia, a qual assumiremos ter começado a condensar a partir do gás de fundo e a girar sob a ação de forças de maré exercidas por proto-galáxias vizinhas.

A situação parece paradoxal. Se assumimos que os íons giram mas os elétrons não, há uma grande corrente elétrica toroidal, e portanto um campo magnético poloidal igualmente grande (Lei de Ampère). Mas, sabemos que o crescimento de tal campo magnético é limitado pela "força eletromotriz (FEM) de reação" associada com a lei de Faraday. Logo, a situação real é diferente. Se um campo elétrico toroidal se estabelece, a FEM associada é dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \oint \vec{E}.d\vec{s} \tag{7.12}$$

ou

$$\pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t} \sim 2\pi RcE \tag{7.13}$$

de modo que

$$B \sim \frac{2c}{R} \int E dt \tag{7.14}$$

O que estabelece E? Evidentemente, a exigência de que a força elétrica resultante nos elétrons mantenha-os rodando com os íons apesar da fricção deles com a radiação. Isto dá

$$E = \frac{4}{3} \frac{\omega R \sigma_T U}{ec} \tag{7.15}$$

onde σ_T é a secção de choque de Thomson, U é a densidade de energia da radiação, e ω é a velocidade angular da proto-galáxia. Colocando isto em (7.14) obtemos:

$$B \sim \frac{8}{3} \frac{\sigma_T}{e} \int U \omega dt \tag{7.16}$$

O valor da integral depende de como as proto-galáxias devem girar. Como aproximação grosseira, assumimos que elas alcançaram suas presentes velocidades de rotação quando o redshift era ~ 10 (ou $t \sim 10^{16}$ s), ponto em que $U \sim 4 \times 10^{-9}$ erg cm^{-3}. Isto resulta $B \sim 10^{-22} G$, um número assustadoramente pequeno. Modelos mais detalhados resultam valores um pouco maiores, mas ainda bem menores que os observados.

Muitos autores apelam para o efeito Harrison para produzir campos sementes que então são amplificados por um processo de dínamo agindo em galáxias. Para chegar ao valor presentemente observado, $B \sim 10^{-6} G$, requer um fator $10^{15} \sim e^{35}$ de amplificação. Normalmente, quando se considera um sistema instável, isto não é uma exigência muito dura, mas no caso das galáxias, pode ser!

A razão disso segue abaixo. Se concentramos nossa atenção na vizinhança solar da nossa Galáxia, sabemos que $\sim 10^{-6} G$ é o máximo que o campo pode atingir de um ponto

de vista dinâmico. Se ele fôsse maior, a componente z do "stress" magnético seria tão grande que a gravidade não seria capaz de segurar o gás na escala de altura observada, considerando sua densidade observada (veja eq. 3.68). Logo, mesmo se o campo foi criado pelo crescimento linear de uma instabilidade a uma taxa n no passado, ela não poderia estar mais atuando, e nós concluímos que $n > 35/t$, onde t é a idade da Galáxia, 10^{10} anos. Logo, n^{-1}, o tempo de crescimento, deve ser $< t/35 = 3 \times 10^8$ anos.

Como veremos, isso dificulta um pouco as coisas. Um período associado com a Galáxia, à distância do sol de 10 kpc, é o período de rotação, $\sim 2.5 \times 10^8$ anos. A exigência acima pode então ser estabelecida, "a Galáxia deve ser instável à ação de dínamo, e o tempo de crescimento não pode exceder significativamente o período de rotação". Este, como veremos, é quase uma ordem de magnitude. O efeito de Harrison e o mecanismo de dínamo ficam prejudicados se tentamos explicar campos magnéticos em galáxias em grandes "redshifts", cujas idades são menores por um fator 5 - 10. A evidência de que campos magnéticos existem em tais objetos é bem mais fraca, mas se verdadeira, constituem um problema.

Vamos voltar ao efeito Harrison. A essência dele é haver movimento rotacional no plasma cósmico, o qual ao interagir via espalhamento de elétrons com a radiação cósmica de fundo, resulta um efeito de bateria, dB/dt. Vilenkin e Vachaspati (1992) e outros autores propuseram que o movimento rotacional poderia ser induzido por "cordas cósmicas" (cosmic strings) antes das galáxias serem formadas. As "cordas cósmicas" são estruturas especulativas que poderiam ter sobrado do universo jovem. Se acreditamos que as "cordas" existem, elas têm efeitos interessantes à medida que se movem através do plasma cósmico aproximadamente à velocidade da luz. Elas exercem um impulso gravitacional na matéria à medida que a atravessam, acelerando-a a velocidades supersônicas, causando uma onda de choque-em-arco (ou "bow-shock", semelhante àquele que se forma à frente da terra no vento solar ou à frente dos jatos supersônicos astrofísicos). A força do choque decresce fora da corda, e conforme demonstrado no Landau e Lifshitz (Mecânica os Fluidos), isto gera vorticidade no gás atrás do choque. Esta vorticidade então governa o efeito Harrison e, voila, um campo magnético cresce.

Se o que vimos acima é especulativo, outras teorias são ainda mais. Em um trabalho

clássico, Turner e Widrow (1988) chamaram a atenção para o fato de que durante a inflação (se ela realmente ocorreu!), partículas carregadas, como toda a matéria, são varridas para fora do horizonte de partículas, deixando um vácuo dominado por um campo escalar. Logo, não há partículas carregadas para diminuir campos elétricos, MHD ideal é então violado e campos magnéticos podem ser criados. Eles propuseram vários acoplamentos que modificariam a eletrodinâmica ordinária e dariam origem a um campo magnético crescente, tal como um acoplamento do espaço tempo à curvatura de Riemann, ou a algum campo escalar que deve estar presente juntamente com o campo responsável pela inflação. Outros autores perseguiram essa idéia posteriormente, mas verificaram que um número de hipóteses artificiais têm que ser impostas mesmo para obter campos semente, sem falar em campos como aqueles que observamos hoje (veja, e.g., Grasso & Rubinstein, Physics Reports, 2001, 348, 163).

Em suma, há diferentes mecanismos propostos que podem gerar campos magnéticos. O mais convencional, o mecanismo de Harrison, não é controverso, mas resulta apenas um campo semente na escala galáctica. Mecanismos para geração de campos antes das galáxias formarem-se invocam nova física e são portanto, pouco convincentes ainda. Poderia ser que os campos que vemos nas galáxias hoje foram produzidos pelo mecanismo de dínamo operando no campo magnético semente gerado pelo mecanismo de Harrison. Em qualquer caso, não conhecemos nenhum outro modo de produzir campos magnéticos em estrelas convectivas que não seja o dínamo.

7.3 Tipos de Dínamos

O problema mais desafiador é determinar um padrão de movimento que irá funcionar. Aqui, discutiremos apenas três tipos de dínamos, deixando exemplos mais realistas para uma discussão posterior.

Um dínamo homopolar é um dispositivo cuja simplicidade ajuda a entender o processo físico (veja figura 7.2 abaixo)

Vamos imaginar uma pequena corrente fluindo no fio em "loop", a qual cria um campo $\vec{B} = B\vec{u}_z$ cujas linhas são atravessadas pelo eixo girante, dando um campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = -\frac{\omega R B(R)}{c} \vec{e}_R \tag{7.17}$$

A força eletromotriz entre os contactos (FEM) é dada por

$$\int \vec{E}.d\vec{s} = -\frac{\omega}{c} \int RB(R)dR = -\frac{\omega\phi}{2\pi c} \tag{7.18}$$

Essa FEM induz uma corrente contra a resistência (a qual corresponde a uma voltagem $= Ir$) e contra a auto-indutância do circuito (voltagem $= LdI/dt$), logo

$$L\frac{dI}{dt} + rI - \frac{\omega\phi}{2\pi c} = 0 \tag{7.19}$$

Agora, ϕ é proporcional a I; a constante de proporcionalidade é c multiplicado pela auto-indutância M, então

$$\frac{\phi}{c} = MI \tag{7.20}$$

e

$$\frac{dI}{dt} + \frac{r}{L}I - \frac{M\omega}{2\pi L}I = 0 \tag{7.21}$$

cuja solução é um exponencial e^{nt} com taxa de crescimento

$$n = \frac{1}{L}\left(\frac{\omega M}{2\pi} - r\right) \tag{7.22}$$

O dínamo homopolar é, portanto instável à geração espontânea de fluxo magnético se

$$\omega > \frac{2\pi r}{M} \tag{7.23}$$

Se $M \simeq L$, a taxa de crescimento n é $\sim \omega/2\pi$.

A equação (7.21) é análoga à equação de indução magnética em MHD:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nu_M \nabla^2 \vec{B} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \tag{7.24}$$

Suponhamos que o fluido para o qual aplicamos (7.24) tem escala D de comprimento. Vamos definir

$$\xi = \frac{x}{D} \tag{7.25}$$

e lembremos que a indutância de uma região de tamanho D é

$$L \sim \frac{D}{c^2} \tag{7.26}$$

Então (7.24) pode ser escrita como

$$\frac{D}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{D}{c^2}\left(\frac{\eta c^2}{4\pi}\right)\frac{1}{D^2}\nabla_\xi^2 \vec{B} - \frac{D}{c^2}\vec{\nabla}_\xi \times \left[(\vec{\omega} \times \vec{\xi}) \times \vec{B}\right] =$$

$$= L\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\eta}{4\pi D}\nabla_\xi^2 \vec{B} - L\vec{\nabla}_\xi \times \left[(\vec{\omega} \times \vec{\xi}) \times \vec{B}\right] = 0 \tag{7.27}$$

Onde $\vec{v}$ é tomado como sendo uma velocidade de rotação:

$$\vec{v} = \vec{\omega}(\vec{x}) \times \vec{X} \tag{7.28}$$

tal como num dínamo homopolar. A analogia a (7.21) é aparente quando percebemos que a resistência de uma região de tamanho D é $r \sim \eta/4\pi D$, o coeficiente do segundo termo em (7.21).

Assim como em (7.21), o termo resistivo é estabilizante (uma vez que $\vec{\nabla}^2$ é geralmente negativo para modos que são localizados), e instabilidade ocorre somente se o último termo é positivo e grande o bastante. A segunda exigência é fácil, basta crescer ω até o ponto em que o termo de advecção supera o termo resistivo, tal como no dínamo homopolar. O que é difícil é conseguir $\omega(R)$ tal que o último termo seja positivo. Claramente, uma simples rotação diferencial não irá fazê-lo. Nós precisamos de algo (em astrofísica) que emule os fios no dínamo homopolar.

O segundo exemplo é o dínamo de Herzenberg (1958), mostrado na Fig. 7.3.

C é feito de um condutor sólido; B e A são esferas condutoras que mantém contacto elétrico com C via um fluido condutor. Eles são gerados a taxas ω_A e ω_B. Herzenberg previu teoricamente que o sistema se tornaria instável quando R_{eM} (definido a partir dos ω's e de η) excedesse 200, e isso foi verificaado experimentalmente em 1968). Um pequeno campo magnético em A leva a uma FEM na esfera em rotação A, a qual conduz corrente, e portanto, campo, através de C e B. A rotação de B no campo de B gera uma FEM adicional, a qual conduz corrente e, portanto, campo magnético em A, e o circuito é fechado.

O terceiro exemplo é o dínamo de Zel'dovich tipo "estica-torce-dobra" (Fig. 7.4).

Aqui um único "loop" de fluxo ϕ é esticado e torcido em um ponto, e o novo "loop" se forma ao lado do antigo. Se o congelamento do fluxo se aplica, ambos ϕ e $M = \rho AL$ são conservados. Se ρ é constante, $\phi/AL = B/L$ é conservado, onde A é a secção transversal e L o comprimento. Logo, se L é dobrado, então B também é. Repetindo o processo, podemos amplificar B tanto quanto queremos. O padrão do fluido é contínuo, mas o mecanismo ainda parece improvável em um sistema real. Veremos que elementos desse mecanismo persistem em teorias realísticas de dínamos.

Finalmente, temos o dínamo de Parker, o qual será descrito qualitativamente aqui

e quantitativamente na próxima sessão. Parker (1955) concentrou-se especificamente em objetos convectivos, como o interior da terra, do sol e das estrelas em geral. Já naquela época era sabido que a rotação diferencial pode produzir um forte campo toroidal a partir de um poloidal, conforme vimos anteriormente, o problema era como regenerar o campo poloidal em vista de sua tendência a decair (veja eq. 7.6). Parker percebeu que era necessário um mecanismo para transformar parte do campo toroidal (crescente) de volta em campo magnético na direção poloidal, isto é, em planos meridionais em relação ao eixo de rotação. Em uma estrela convectiva há movimentos convectivos os quais podem fazer isso. Esses movimentos são dominantemente para "cima" ou para "baixo" ao longo da direção radial uma vez que são guiados pelo gradiente de temperatura radial.

Entretanto, em um objeto em rotação como o sol, a convecção deve ser "ciclônica", tal como na atmosfera da terra. Por exemplo, em um furacão, o movimento do ar para cima alimenta o ar que está se movendo para os "olhos" (do furacão) em uma direção horizontal. Devido à rotação na base, o ar gira cada vez mais rápido à medida que se move para o centro do furacão, conservando seu momento angular, e portanto, gira a uma velocidade angular maior do que aquela do fluido médio na base, e na mesma direção. (É exatamente esse movimento rotacional que experimentamos quando o vento do furacão passa sobre nós). À medida que o ar executa o movimento para cima ("up" na fig. abaixo), ele gira à mesma taxa alta (ω). Quando ele atinge o topo, ele deve mover-se para fora novamente

para completar a circulação, e quando ele o faz, o processo se inverte ("down") e o ar passa a girar mais lentamente que a velocidade angular média e migra para baixo.

Em tal fluido convectivo, há uma correlação entre a velocidade $\vec{v}$ do gás e seu spin, ω. Se o spin da terra é "up", como no hemisfério norte, $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o).\vec{v} > 0$ na subida. Então, do fato de que tanto $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o)$ e $\vec{v}$ tem sinal contrário na descida, $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o).\vec{v} > 0$ também na descida, e portanto, esta quantidade, chamada helicidade cinética, possui uma média > 0. Veremos mais tarde que helicidade cinética finita é crucial para a operação do dínamo.

Aplicado a um fluido condutor tal como aquele na terra ou no sol, Parker notou que se um campo magnético toroidal está presente, então convecção ciclônica teria dois efeitos, tal como no modelo de Zel'dovich. À medida que o plasma se desloca para cima, o campo é erguido, ou esticado, na direção radial, formando um "loop" (veja figura 7.6 abaixo) (2). Do fato de que a convecção é ciclônica, ela também torce o "loop" na direção poloidal, conforme mostrado na figura (3), formando uma componente poloidal do campo, o que é exatamente o que Parker pretendia.

Uma vez que todos os deslocamentos para cima (de plasma) giram na mesma direção, a torção das linhas irá sempre resultar um loop poloidal orientado na mesma direção. Além do mais, uma vez que os deslocamentos para baixo têm $\vec{v}$ e $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o)$ invertidos, eles contribuem para "loops" poloidais de mesmo sinal. Este é o chamado "efeito - α" de Parker, para contrastar com o efeito devido à rotação diferencial, às vezes denominado

"efeito - Ω".

Uma vez que as células convectivas são bem menores que o raio do sol, tudo o que fizemos foi produzir um grande número de "loops" poloidais. Todos eles possuem o mesmo sinal, e portanto a corrente necessária para suportá-los, a qual está na direção toroidal, possui também o mesmo sinal. O resultado líquido é um campo magnético poloidal geral de baixa ordem como um campo de dipolo. Este campo poloidal é então esticado pelo efeito - Ω, e assim temos os ingredientes essenciais de um "dínamo $\alpha - \Omega$". Precisamos, no entanto, livrar-nos das componentes de pequena escala do campo, geradas pela convecção ciclônica, para evitar que as mesmas cresçam até o ponto em que inibam os movimentos convectivos que guiam o fluido. Aqui, Parker sugere que a difusão turbulenta irá se livrar das componentes de pequena escala mais rápido do que se poderia esperar usando apenas a viscosidade magnética. Ele notou que o padrão de campos poloidais na Fig. 7.6 envolve lençóis neutros de corrente onde $\vec{B} = 0$, onde as componentes de pequena escala irão aniquilar-se por fusão magnétia (reconexão, veja Cap. 6).

À difusividade correspondente ele batizou de β. Mostraremos abaixo que o dínamo "$\alpha - \beta - \Omega$" é de fato instável à produção de um campo magnético de larga escala. Primeiro, discutiremos a teoria matemática do processo, conhecida como teoria eletrodinâmica do campo médio.

7.4 Eletrodinâmica de Campo Médio

O formalismo apropriado para discutir o dínamo de Parker é denominado eletrodinâmica de campo médio (Stunbeck, Krause, e Rädller 1966). Este formalismo aplica-se se a escala dos movimentos convectivos l é $<<$ que o tamanho do sistema, L. Devido a isso, podemos escolher uma escala intermediária λ tal que

$$l << \lambda << L \tag{7.29}$$

e formar uma média espacial para o ponto $\vec{x}$ (a qual só tem sentido realmente na larga escala L) através da avaliação da média de uma dada função sobre todas as pequenas escalas $\mid \xi \mid < \lambda$:

$$< \psi(\vec{x},t) >_\lambda = \frac{3}{4\pi\lambda^3} \int_{|\xi|<\lambda} \psi(\vec{x}+\xi,t) d^3\xi \tag{7.30}$$

Note-se que o tempo t é mantido constante na média espacial. É também útil considerar uma média no tempo. A fim de fazê-la, precisamos definir uma escala de tempo intermediária τ. Por um lado, τ tem que ser muito menor do que a escala de tempo T que descreve como o sistema evolui como um todo (por exemplo, o ciclo de 11 anos do campo magnético solar), e muito maior do que o tempo que o fluido leva para atravessar uma única célula convectiva. Se $\vec{v}'$ é a velocidade convectiva, a última escala de tempo que citamos é dada por l/v'. Logo,

$$\frac{l}{v'} << \tau << T \tag{7.31}$$

E a média apropriada no tempo será:

$$< \psi(\vec{x},t) >_\tau = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \psi(\vec{x},t+t') dt' \tag{7.32}$$

onde t deve ser compreendido como tendo sentido somente na grande escala de tempo T. Assumiremos então (sem prova) que

$$< \psi(\vec{x},t) >_\lambda = < \psi(\vec{x},t) >_\tau \tag{7.33}$$

e o valor de cada qual é o mesmo que teríamos obtido fazendo a média sobre um conjunto de sistemas. O valor comum dessas quantidades é então denotado por <> ou por uma barra sobre a função.

Desvios da média são flutuações periódicas e são denotadas por "linhas":

$$\psi'(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) - \bar{\psi}(\vec{x},t) \tag{7.34}$$

De modo que

$$< \psi' >= 0 \tag{7.35}$$

para todas as quantidades ψ.

Estas idéias são então aplicadas à equação de indução na forma de (1.35) com $\vec{v}_e = \vec{v}$. Uma vez que $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ de (7.34), a equação de indução pode então ser escrita:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{B}} + \vec{B}') = \vec{\nabla} \times \left[(\bar{\mathbf{v}} + \vec{v}') \times (\bar{\mathbf{B}} + \vec{B}')\right] + \nu_M \nabla^2 (\bar{\mathbf{B}} + \vec{B}') \tag{7.36}$$

Se tomamos a média de (7.36), todos os termos contendo uma quantidade flutuante de primeira ordem se anulam devido a (7.35) e ficamos apenas com termos de ordem -0 e de segunda ordem:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} + < \vec{v}' \times \vec{B}' >) + \nu_M \vec{\nabla}^2 \bar{\mathbf{B}} \tag{7.37}$$

Assim, o campo magnético médio da amostra $\bar{\mathbf{B}}$ é advectado pela velocidade média $\vec{\mathbf{v}}$ (abrindo caminho para o efeito Ω devido à rotação diferencial de grande escala com $\bar{\mathbf{v}} \neq 0$) e é também afetado pelo campo elétrico efetivo adicional

$$\vec{E}_{eff} = -\frac{1}{c} < \vec{v}' \times \vec{B}' > \tag{7.38}$$

Este campo, uma vez que ele origina-se da convecção da camada inferior, e uma vez que pode ter rotacional não nulo, é às vezes denominado "FEM turbulenta". Ainda que $\vec{v}'$ e

$\vec{B}'$ tenham médias nulas, a FEM turbulenta não irá anular-se se $\vec{B}'$ está correlacionado com $\vec{v}'$ conforme mostramos ser possível no modelo de dínamo de Parker (efeito α).
Até aqui, meramente estabelecemos o óbvio. O elemento surpresa é que se pode realmente calcular E_{eff} de um modelo estatístico da convecção. O primeiro passo é obter uma equação de evolução para $\vec{B}'$. Para tal, vamos subtrair (7.37) de (7.36). O resultado é

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\bar{\mathbf{v}} \times \vec{B}' + \vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}} \right] + \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B}' +$$

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{v}' \times \vec{B}' - < \vec{v}' \times \vec{B}' > \right] \tag{7.39}$$

Aqui, faremos uma aproximação crucial, a de que $B' << \bar{\mathbf{B}}$, nesse caso os últimos dois termos de (7.39) são desprezíveis com respeito a $\vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}}$. Esta hipótese é denominada "aproximação suavizante de 1^a ordem". Veremos mais tarde que a mesma é controversa. Se a fazemos no entanto, (7.39) pode ser escrita na forma

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu_M \vec{\nabla}^2 - \vec{\nabla} \times (\bar{\mathbf{v}} \times) \right] \vec{B}' = \vec{\nabla} \times (\vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}}) \tag{7.40}$$

De modo que se conhecemos $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$, podemos calcular $\vec{B}'$ para qualquer velocidade flutuante $\vec{v}'$. Veremos mais tarde como Parker e outros fizeram isso para movimentos convectivos. Em primeiro lugar, no entanto, mostraremos como os parâmetros α e β entram em uma base fenomenológica.

O argumento depende do fato de que as soluções de (7.40) para $\vec{B}'$ dependem linearmente de $\bar{\mathbf{B}}$, de modo que para qualquer $\vec{v}'$ prescrito, a FEM turbulenta $< \vec{v}' \times \vec{B}' >$ também depende linearmente do valor local de $\bar{\mathbf{B}}$. Lembremos que ambos são quantidades médias tomadas sobre uma amostra ou conjunto. Aqui usaremos o fato de que se $g(\vec{x})$ depende linearmente do valor local de $f(\vec{x})$, a forma mais geral da dependência é:

$$g = \alpha f + \beta_k \partial_k f + \gamma_{kl} \partial_k \partial_l f + ... \tag{7.41}$$

Aqui, ambos $g =< \vec{v}' \times \vec{B}' >$ e $f = \bar{\mathbf{B}}$ são vetores, logo α é um tensor de 2^a ordem e β um de 3^a ordem, etc. Logo

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \alpha_{ij}\bar{B}_j + \beta_{ijk}\partial_k \bar{B}_j + \gamma_{ijkl}\partial_k\partial_l \bar{B}_j + ... \tag{7.42}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma...$ dependem das características estatísticas da convecção. Se fazemos a hipótese de que $\vec{v}'$ é distribuído isotropicamente, α e β devem ser invariantes sob rotação, porquanto

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij} \tag{7.43}$$

$$\beta_{ijk} = \beta\varepsilon_{ijk} \tag{7.44}$$

Onde ε_{ijk} é o tensor de alternância. Substituindo isso em (7.42), verificamos que

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >= \alpha\bar{\mathbf{B}} - \beta\vec{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}} + ... \tag{7.45}$$

Esta é a expressão ordinariamente usada, negligenciando-se derivadas de ordem superior. Pode-se depreender algo considerando-se o comportamento de (7.45) através de uma reflexão espacial da coordenada do sistema (transformação de paridade). Uma vez que sob transformação de paridade $\vec{v}$ é ímpar (i.e., $\vec{v}(-\vec{x}) = -\vec{v}(\vec{x})$) ($\vec{v}$ é um pseudo vetor ou vetor polar), enquanto que $\vec{B}$ é par ($\vec{B}(-\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x})$) (ou seja, $\vec{B}$ é um vetor verdadeiro ou vetor axial), então $< \vec{v}' \times \vec{B}' >$ é ímpar. Segue-se daí que α deve ser ímpar sob transformação de paridade ($\alpha(-\vec{x}) = -\alpha(\vec{x})$), e portanto, α é um pseudo-escalar. Uma vez que $\vec{\nabla}\times$ muda a paridade, $\vec{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}$ é ímpar, e β é par sob transformação de paridade ($\beta(-\vec{x}) = \beta(\vec{x})$) e portanto, um verdadeiro escalar. Agora consideremos a convecção. Se ela é estatisticamente invariante sob reflexão R, $\alpha_R = \alpha$, mas do fato de que α é um pseudo-escalar, $\alpha_R = -\alpha$ e concluímos que $\alpha = 0$. Segue-se que $\alpha \neq 0$ se e somente se α não é invariante sob reflexão. Lembre-se que isto é verdadeiro para o dínamo de Parker, onde a torção do campo toroidal em poloidal (medida por $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, um vetor axial) está correlacionado com $\vec{v}$ (um vetor polar). Isto pode ocorrer somente se o fluxo não é simétrico sob reflexão.

7.5 Computando α

Para computar α devemos resolver (7.39) na aproximação suavizante de 1^a ordem (i.e., desprezando os dois últimos termos, etc.). Se também desprezamos ν_M e eliminamos $\vec{v}$ trabalhando localmente em um referencial no qual $\bar{\mathbf{v}}$ se anula, então (7.39) resulta

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}' \times \bar{\mathbf{B}}) = (\bar{\mathbf{B}}.\vec{\nabla})\vec{v}' - (\vec{v}'.\vec{\nabla})\bar{\mathbf{B}} \tag{7.46}$$

onde assumimos por simplicidade que o fluido é incompressível, e então $\vec{\nabla}.\vec{v}' = 0$. Logo,

$$\vec{B}'(\vec{x},t) = \vec{B}'(\vec{x},-\infty) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} dt'$$

$$= \vec{B}'(\vec{x},-\infty) + \int_{-\infty}^{t} \left[(\bar{\mathbf{B}}.\vec{\nabla})\vec{v}'(\vec{x},t') - \vec{v}'(\vec{x},t').\vec{\nabla}\bar{\mathbf{B}}\right] dt' \tag{7.47}$$

De modo que a FEM turbulenta é

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' > = < \vec{v}'(\vec{x},t) \times \vec{B}'(\vec{x},-\infty) > +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} < \vec{v}'(\vec{x},t) \times \left[(\bar{\mathbf{B}}.\vec{\nabla})\vec{v}'(\vec{x},t') - \vec{v}'(\vec{x},t').\vec{\nabla}\bar{\mathbf{B}}\right] > dt' \tag{7.48}$$

Uma vez que $\vec{v}'(t)$ não pode estar correlacionado com $\vec{B}'(-\infty)$, o primeiro termo se anula. Usando notação com índices, (7.48) pode ser escrito como

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk} \int_{-\infty}^{t} \Bigg[< \vec{v}'_j(\vec{x},t)\vec{B}_n \partial_n v'_K(\vec{x},t') -$$

$$- v'_j(\vec{x},t)\vec{v}'_n(\vec{x},t')\partial_n \bar{B}_k > \Bigg] dt' \tag{7.49}$$

Do fato de que $\bar{\mathbf{B}}$ não varia na escala de tempo turbulenta, ele pode ser retirado da integral e

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk} \Bigg[\bar{B}_n \int_{-\infty}^{t} < v'_j(\vec{x},t)\partial_n v'_k(\vec{x},t') > dt' -$$

$$-\partial_n \bar{B}_k \int_{-\infty}^{t} < v'_j(\vec{x},t) v'_n(\vec{x},t') > dt' \Big] \tag{7.50}$$

mostrando, conforme esperado de (7.42), que a FEM é uma combinação linear de $\bar{\mathbf{B}}$ e suas derivadas, com coeficientes dependendo da estatística da turbulência. É útil introduzir

$$t'' = t - t' \tag{7.51}$$

De modo que t" vai de 0 até ∞. Então, com

$$\omega_{jnk} \equiv \int_o^{\infty} < v'_j(\vec{x},t) \partial_n v'_k(\vec{x}, t - t'') > dt'' \tag{7.52}$$

e

$$z_{jn} \equiv \int_o^{\infty} < v'_j(\vec{x},t) v'_n(\vec{x}, t - t'') > dt'' \tag{7.53}$$

Podemos escrever (7.50) na forma

$$< \vec{v}' \times \vec{B}' >_i = \varepsilon_{ijk} \omega_{jnk} \bar{B}_n - \varepsilon_{ijk} z_{jn} \partial_n \bar{B}_k \tag{7.54}$$

Então, se nós consideramos $i = 1$, o 1^o termo contribui com uma quantidade

$$\varepsilon_{1jk} \omega_{jnk} \bar{B}_n = (\omega_{2n3} - \omega_{3n2}) \bar{B}_n \tag{7.55}$$

para $(\vec{v}' \times \vec{B}')_1$. Mas para turbulência isotrópica, nós mostramos em (7.43) que $< \vec{v}' \times \vec{B}' >_1$ depende somente de $\vec{B}_1$, logo para tal turbulência nós devemos ter

$$\omega_{223} - \omega_{322} = \omega_{233} - \omega_{332} = 0 \tag{7.56}$$

para assumir que não há nenhuma dependência com $\bar{B}_2$ ou $\bar{B}_3$. Além do mais, comparando com (7.43), encontramos que

$$\alpha = \omega_{213} - \omega_{312} \tag{7.57}$$

Se fazemos $i = 2$ e então 3 em (7.55), também encontramos que

$$\alpha = \omega_{321} - \omega_{123} \tag{7.58}$$

e

$$\alpha = \omega_{132} - \omega_{231} \tag{7.59}$$

De modo que se desejarmos, podemos escrever

$$\alpha = \frac{1}{3}(\omega_{213} - \omega_{312} + \omega_{321} - \omega_{123} + \omega_{132} - \omega_{231}) \tag{7.60}$$

Agora

$$\omega_{jnk} = L(v'_j \partial_n v'_k) \tag{7.61}$$

Onde L é o operador definido em (7.52). Logo,

$$\alpha = \frac{1}{3} L(v'_2 \partial_1 v'_3 - v'_3 \partial_1 v'_2 + v'_3 \partial_2 v'_1 - v'_1 \partial_2 v'_3 + v'_1 \partial_3 v'_2 - v'_2 \partial_3 v'_1)$$

$$= \frac{1}{3} L\big[- v'_1(\partial_2 v'_3 - \partial_3 v'_2) - v'_2(\partial_3 v'_1 - \partial_1 v'_3) - v'_3(\partial_1 v'_2 - \partial_2 v'_1)\big]$$

$$= -\frac{1}{3} L(\vec{v}'.\vec{\nabla} \times \vec{v}')$$

$$= -\frac{1}{3} \int_o^\infty dt'' < \vec{v}(\vec{x}, t).\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}, t - t'') > \tag{7.62}$$

Usando o mesmo tipo de argumento em (7.53), verifica-se que β, definido por (7.45) é

$$\beta = \frac{1}{3} \int_o^\infty dt'' < \vec{v}'(\vec{x}, t).\vec{v}'(\vec{x}, t - t'') > \tag{7.63}$$

Se assumimos que a correlação em velocidade acaba em um tempo $\sim l/v'$, podemos escrever

$$\alpha \sim -\frac{1}{3} < \vec{v}'.\vec{\nabla} \times \vec{v}' > \frac{l}{v'} \tag{7.64}$$

e

$$\beta \sim \frac{1}{3} < v'^2 > \frac{l}{v'} \sim \frac{1}{3} l v' \tag{7.65}$$

De modo que β é uma viscosidade turbulenta baseada na velocidade turbulenta v' e na escala l da turbulência como um livre-caminho médio. Note que a razão da viscosidade magnética ν_M para β é

$$\frac{\nu_M}{\beta} = \frac{3\nu_M}{lv'} = \frac{3}{R_{eM}} \tag{7.66}$$

O qual é pequeno se o número de Reynolds magnético da turbulência é grande. Assumimos de saída que isso é verdadeiro.

7.6 Aplicação à Rotação Diferencial no Sol e Estrelas

Aqui vamos mostrar que quando a equação de indução é aplicada a um fluido convectivo com rotação diferencial, incluindo os efeitos α e β, um campo magnético surge espontaneamente. Para simplificar, vamos representar o fluido médio como um fluido com cizalhamento na direção y, com as variáveis dependendo apenas de x e z. (Isto corresponde à rotação estelar na direção ϕ, com simetria axial).

Devemos resolver a equação de evolução para o campo médio $\bar{\mathbf{B}}$, (7.37), usando a equação (7.45) para a FEM. (Daqui por diante omitiremos a barra sobre $\vec{v}$ e $\vec{B}$, uma vez que não mencionaremos mais $\vec{v}'$ e $\vec{B}'$ nesta sessão, não podemos, no entanto, nos esquecer do verdadeiro significado de $\vec{v}$ e $\vec{B}$.) Isto resulta:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v} \times \vec{B} + \alpha \vec{B} - (\nu_M + \beta)\vec{\nabla} \times \vec{B}\right] \tag{7.67}$$

Conforme explicado acima, podemos desprezar ν_M comparado com β, e faremos isso daqui por diante. Separaremos cada campo vetor, tal como $\vec{B}$, em uma componente "toroidal" ou componente y e uma "poloidal" ou componente $x - z$,

$$\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P \tag{7.68}$$

Aqui a terminologia é derivada de sistemas axissimétricos. Então

$$\vec{B}_T = B\vec{u}_y \tag{7.69}$$

onde simplesmente escrevemos $B_y = B$ daqui por diante e podemos também escrever:

$$\vec{B}_P = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{7.70}$$

A vantagem em se usar (7.70) vem do fato de que aplicando $\vec{v}\times$ ou $\vec{\nabla}\times$ a um vetor converte uma componente poloidal em uma toroidal e vice-versa. Segue-se de (7.70) que $\vec{A}$ é toroidal:

$$\vec{A} = A\vec{u}_y \tag{7.71}$$

De modo que

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \times (A\vec{u}_y) = (\vec{\nabla}A) \times \vec{u}_y$$

$$= \vec{u}_x(-\partial_z A) + \vec{u}_z(\partial_x A) \tag{7.72}$$

Logo

$$\vec{B} = B\vec{u}_y + (\vec{\nabla}A) \times \vec{u}_y \tag{7.73}$$

é descrito por duas funções escalares A e B. Note que $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ requer que $\vec{B}$ seja independente de y.

Quebramos (7.67) em suas componentes poloidal e toroidal, levando em conta as regras acima. A componente poloidal é

$$\frac{\partial \vec{B}_P}{\partial t} = \left[\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})\right]_P + \alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B})_P - \beta[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})]_P$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})_T + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_T - \beta\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v}_P \times \vec{B}_P) + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_T - \beta\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_P) \tag{7.74}$$

No caso em consideração, $\vec{v}_p = 0$, então o 1^o termo se anula. Usando (7.72) e eliminando o rotacional:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u}_y) = \alpha\vec{B}_T - \beta\vec{\nabla} \times \vec{B}_P$$

$$= \alpha B\vec{u}_y + \beta\nabla^2 A\vec{u}_y \tag{7.75}$$

onde $\nabla^2 = \partial x^2 + \partial z^2$, já que $\partial y = 0$, então

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta\nabla^2\right)A = \alpha B \tag{7.76}$$

Mostrando que o campo poloidal ($\vec{\nabla} X \vec{A}$) é regenerado pelo efeito α agindo no campo toroidal (B).

A componente toroidal de (7.67) dá:

$$\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t} = \left[\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})\right]_T + \alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B})_T + \beta(\vec{\nabla}^2\vec{B})_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})_P + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_P + \beta\vec{\nabla}^2\vec{B}_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v}_T \times \vec{B}_P + \vec{v}_P \times \vec{B}_T) + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_P + \beta\vec{\nabla}^2 B_T$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{v}_T \times \vec{B}_P) + \alpha\vec{\nabla} \times \vec{B}_P + \beta\vec{\nabla}^2\vec{B}_T \tag{7.77}$$

Uma vez que $\vec{v}_p = 0$ no exemplo em questão. Já que:

$$\vec{v}_T = v\vec{u}_y \tag{7.78}$$

$$\vec{v}_T \times \vec{B}_P = v\vec{u}_y \times \left[\vec{\nabla}A \times \vec{u}_y\right] = v\vec{\nabla}A \tag{7.79}$$

já que $\vec{u}_y.\vec{\nabla}A = \partial yA = 0$ pela hipótese de simetria axial. Logo, o 1^o termo da direita de (7.77) é

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v}_T \times \vec{B}_P) = \vec{\nabla} \times (v\vec{\nabla}A) = \vec{\nabla}v \times \vec{\nabla}A$$

$$= \left[- (\partial_x v)(\partial_z A) + (\partial_z v)(\partial_x A)\right]\vec{u}_y \tag{7.80}$$

Similarmente, pode-se mostrar que o 2^o termo de (7.77) é:

$$\alpha(\vec{\nabla} \times \vec{B}_P) = -\alpha\vec{\nabla}^2 A\vec{u}_y \tag{7.81}$$

De modo que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta\vec{\nabla}^2\right)B = -(\partial_x v)(\partial_z A) + (\partial_z v)(\partial_x A) - \alpha\vec{\nabla}^2 A \tag{7.82}$$

O 2^o termo no lado direito de (7.82) pode ser desprezado, porque:

$$\frac{\mid \alpha\vec{\nabla}^2 A \mid}{\mid (\vec{\nabla}v \times \vec{\nabla}A) \mid} \simeq \frac{\mid \alpha \mid}{v} \tag{7.83}$$

o qual veremos mais tarde é $<< 1$, pelo menos no sol. Logo, o campo toroidal (B) é regenerado unicamente pela ação do cizilhamento no campo poloidal (A). As eqs. (7.76) e (7.82) são as eqs. (19.22) e (19.21) de Parker (1979), onde α é referido como Γ. Essas equações aplicam-se a rotação diferencial axissimétrica, mas em uma estrela real, o $\vec{\nabla}^2$ é modificado pela curvatura do sistema de coordenadas.

Se assumimos que $\partial_x v$ e $\partial_z v$ são constantes, ambas as eqs. (7.76) e (7.82) têm coeficientes constantes e então possuem soluções da forma $exp(nt + i\vec{k}.\vec{x})$. Logo, (7.76) torna-se

$$(n + \beta k^2)A - \alpha B = 0 \tag{7.84}$$

Enquanto que se α é desprezado em (7.82):

$$(n + \beta k^2)B + i(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y A = 0 \tag{7.85}$$

onde $\vec{k}$ é o número de onda.

O anulamento do determinante dos coeficientes implica que:

$$n = \left[- i\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y \right]^{1/2} - \beta k^2$$

$$= \left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2} \right]^{1/2} - i\left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2} \right]^{1/2} - \beta k^2 \tag{7.86}$$

tal que em geral, os modos correspondem a ondas crescentes ou amortecidas, sendo a parte real de n, a taxa de crescimento, dada por:

$$Re(n) = \left[\frac{\alpha(\vec{k} \times \vec{\nabla} v)_y}{2} \right]^{1/2} - \beta k^2 \tag{7.87}$$

No caso simples em que $k_x = 0$ e $k = k_z$, correspondendo ao fato de que as variações de B e A ocorrem na direção z (a qual seria a latitude em uma estrela)

$$Re(n) = \left(\frac{\alpha k_z \partial_x v}{2} \right)^{1/2} - \beta k_z^2 \tag{7.88}$$

de modo que haverá instabilidade para números de onda menores que um valor crítico dado por

$$k_z < k_c = \left(\frac{\alpha \partial_x v}{2\beta^2} \right)^{1/3} \tag{7.89}$$

Diferenciando (7.88) com respeito a k_z, verifica-se que o máximo valor de $Re(n)$ ocorre para $k_z = 2^{-4/3}k_c$, em cujo ponto $Im(n) = \frac{4}{3}Re(n)$, de modo que a instabilidade é manifestada como uma onda cuja frequência é aproximadamente igual à taxa de crescimento. O máximo valor de $Re(n)$ é

$$Re(n)_{max} = \left[\alpha^2(\partial_x v)^2/(2^7\beta)\right]^{1/3} \tag{7.90}$$

Podemos estimar $R \equiv Re(n)_{max}$ para o sol da seguinte maneira. Parker (1979, pp. 573-580) analisa o movimento ciclônico dentro de uma célula convectiva em uma estrela em rotação, e verifica que (eq. 15.58):

$$\alpha \sim \frac{\pi\varepsilon\Phi}{8}v' \tag{7.91}$$

Onde Φ é o ângulo líquido de rotação de um turbilhão convectivo em uma volta, ε é um coeficiente adimensional que ele estima ser ~ 0.1 e v' é a magnitude da velocidade convectiva. Ele estabelece que a teoria de comprimento-de-mistura da convecção resulta

$$\Phi \sim \frac{\Omega l}{v'} \tag{7.92}$$

Onde Ω é a velocidade de rotação em grande escala da estrela, e l é o tamanho do turbilhão convectivo, porquanto

$$\alpha \sim \frac{\pi}{8}\varepsilon\Omega l \tag{7.93}$$

A fim de aplicar a eq. (7.89) a um sistema em rotação diferencial, substituímos $\partial_x v$ por $R\partial_R\Omega \sim \Delta\Omega$, onde $\Delta\Omega$ é a diferença entre a velocidade de rotação angular no fundo e a no topo da zona convectiva. Na eq. (7.65) verificamos que $\beta = \frac{1}{3}v'l$. Injetando estes resultados em (7.90) obtemos:

$$R = \left(\frac{3\pi^2\varepsilon^2\Omega^2(\Delta\Omega)^2 l}{2^{13}v'}\right)^{1/3} \simeq \left(\frac{0.3\varepsilon^2\Omega^4 l}{2^{13}v'}\right)^{1/3} \tag{7.94}$$

Onde tomamos $\Delta\Omega \sim 0.1\Omega$. Com $\varepsilon \sim 0.1, \Omega = 3 \times 10^{-6}$ seg$^{-1}, l = 3 \times 10^3$ km e $v' = 0.1$ km/s na zona convectiva do Sol (Parker 1979, p. 762), (7.94) dá

$$R = 9.8 \times 10^{-9} s^{-1} \tag{7.95}$$

correspondendo a um tempo de crescimento:

$$R^{-1} = 3.3 \ \ anos \tag{7.96}$$

logo, o dínamo solar trabalha bem rápido!

O ciclo solar é então interpretado como devido à progressiva natureza "ondulatória" do campo produzido, o qual possui um período da mesma ordem que R^{-1}. As manifestações de superfície do campo são interpretadas como resultado de empuxo magnético, à medida que o campo produzido se levanta através da zona convectiva para a superfície. Acredita-se largamente que a teoria de dínamo descrita acima é a explicação provável para os campos magnéticos do sol e outras estrelas com zonas convectivas.

7.7 O Campo Magnético da Galáxia

Conforme dissemos anteriormente, Parker estava convencido de que uma teoria similar explicaria o campo magnético da Galáxia. Embora atualmente existam na literatura versões mais elaboradas do modelo de dínamo para a Galáxia, nos limitaremos aqui a discutir a aplicação dos resultados acima à nossa Galáxia. Parker notou que o termo β, representando o coeficiente de difusão turbulenta para o campo médio, é muito grande: $\beta = \frac{1}{3} v' l$, então com $v' \sim 10$ km/s = 10 pc / 10^6 anos (conforme observado para nuvens interestelares), e $l \sim 100$ pc (o livre-caminho-médio para colisões nuvem-nuvem), $\beta = 300$ pc^2 / 10^6 anos (ou 10^{26} cm^2 s^{-1}). Uma vez que o tempo para um campo originalmente em $z = 0$ difundir para uma altura $z = h$ acima do plano galáctico é $t_D = h^2/2\beta = (3/2)(h/l^2)(l/v') = 1.5 \times 10^7$ anos, o qual é $<<$ que a idade da Galáxia, qualquer campo primordial, então, já se difundiu a muito tempo atrás. Um campo relativamente intenso de $3 \times 10^{-6} G$, tal como o observado, possui uma densidade de energia aproximadamente igual àquela armazenada no meio interestelar como energia cinética dos movimentos caóticos, $\frac{1}{2}\rho v^2$ (correspondendo a uma condição de equipartição). Sob estas condições, Parker argumenta, o escape de campo ocorre ainda mais rápido, devido ao

empuxo magnético, conforme observado no sol. Logo, o campo primordial poderia ter durado $\lesssim 10^8$ anos no máximo, e somos forçados a procurar em outro lugar a origem do campo Galáctico.

Qualitativamente, o meio interestelar parece que poderia suportar um dínamo. É pelo menos parcialmente ionizado em toda parte, e portanto, pode carregar uma corrente e formar um campo. Está em rotação diferencial, com $v(R) = \Omega R = cte$, logo $\Omega' R = \mid \Omega \mid = 10^{-15}$ s^{-1}. Movimentos caóticos são observados, permitindo a estimativa de $\beta = 10^{26}$ cm^2 s^{-1}. Há algum efeito α? Parker argumenta que explosões de supernovas aquecem o gás; levantando-o do plano galáctico, tal como a energia nuclear guia a convecção no sol. Devido à rotação da galáxia, a circulação resultante na direção z deveria ser ciclônica. Parker estima que $\alpha \sim \pi\varepsilon\Omega l/8 = 0.04\Omega l$, onde l é o tamanho de um turbilhão (célula turbulenta), convencionalmente tomado como sendo ~ 100 pc.

Parker (1971) mostrou que um dínamo irá operar em um disco fino, tanto quanto irá funcionar em uma concha esférica (tal como uma zona de convecção estelar). Anteriormente, calculamos a taxa de crescimento em uma região infinitamente extensa para um valor arbitrário de k_z, e mostramos que haveria crescimento para $k_z < k_c \sim (\alpha\partial_x v/2\beta^2)^{1/3}$, o qual torna-se $(\alpha\Omega/2\beta^2)^{1/3}$ para um disco em rotação diferencial com $v = cte$. Em um disco de espessura 2 h, verifica-se que os modos, encontrando-se as condições de contorno apropriadas nas extremidades do disco, têm $k_z > 0(h^{-1})$, logo, uma amplificação requer que $\alpha\Omega/\beta^2 > 0(h^{-3})$, ou, posto de outra forma, que um número de dínamo adimensional D deve exceder um valor crítico:

$$D = \frac{\alpha\Omega h^3}{2\beta^2} > D_c \tag{7.97}$$

Onde $D_c = 6.4$ é o valor crítico derivado da solução do problema de contorno ("boundary value problem"). Introduzindo expressões para α e β, encontramos que o dínamo galáctico irá funcionar se

$$\frac{0.04\Omega^2 l h^3}{2(0.2vl)^2} = \frac{\Omega^2 h^3}{2 \times 3v_1^2 l} > 6.4 \tag{7.98}$$

onde $v_1 = \frac{v}{\sqrt{3}}$ é a velocidade "turbulenta unidimensional e onde utilizamos a estimativa

de Parker de $0.2vl$ ao invés de $0.33vl$ para β para obter a máxima chance de o dínamo galáctico funcionar. Uma vez que $\Omega = 10^{-15}s^{-1}, v_1 = 6 \times 10^5 cm/s$ e $l = 3 \times 10^{20} cm$ das observações, nós então vemos que:

$$h > \left(\frac{2 \times 6.4 \times 3 v_l^2 \ell}{\Omega^2} \right)^{1/3} = 500pc \tag{7.99}$$

A escala de altura real do gás no disco é observada mais próxima de 100 pc. Como isso iria resultar um D o qual é somente 1/64 do valor requerido, é questionável se o dínamo galáctico realmente funciona afinal.

Em uma série de trabalhos posteriores, Kulsrud (1988, 1989, 1990) levantou objeções à física assumida para o dínamo galáctico. Ele se concentrou, tal como o fêz Piddington antes dele (1970, 1972ab, 1975ab), no comportamento das perturbações $\vec{B}'$ do campo magnético, as quais assumimos serem $<<$ $\bar{\mathbf{B}}$ em (7.40). Se houver um espectro de tamanhos dos turbilhões, extendendo-se desde o tamanho dominante até valores menores, o campo se torce em escalas pequenas, e $< B'^2 >$ pode tornar-se maior que $\bar{B}^2$ rapidamente. Parker presume que tais componentes de pequena escala são destruídas por reconexão, mas ele não demonstra como isso ocorreia em detalhes. Kulsrud argumenta que por causa do fato de que no meio interestelar a componente de massa dominante é principalmente neutra, o campo magnético, amarrado somente à pequena fração que é ionizada, é empurrado na rotação somente indiretamente via a fricção do plasma com o gás neutro. Isso funciona se B é fraco ($< 10^{-10}G$), mas se ele fica mais intenso do que aquele campo mesmo das pequenas escalas, o stress magnético associado é suficiente para sobrepujar a fricção exercida pelo gás neutro nas pequenas escalas em questão e o plasma não é afetado pelos movimentos de cizilhamento do gás neutro. O resultado é que o dínamo cessa de funcionar quando $B \sim 10^{-10}G$, somente 10^{-4} do campo de equipartição ($\sim 10^{-6}G$) esperado (e observado).

Por causa desse problema, Kulsrud reacendeu a idéia de que talvez o campo galáctico seja um campo primordial esticado por rotação diferencial até sua intensidade ser suficiente para forçá-lo a difundir através do gás neutro por difusão ambipolar à mesma taxa que está sendo esticado por rotação diferencial. Remarcavelmente, Kulsrud mostra que este balanceamento ocorre para um campo de $2 \times 10^{-6}G$, próximo, portanto ao valor observado. Anteriormente neste curso, falamos do profundo significado que a existência de um campo

primordial teria sobre a cosmologia. Logo, seria importante sabermos se Parker ou Kulsrud (ou ambos) está(ão) certo(s)!