- CAPÍTULO 4 -

ONDAS DE CHOQUE E ACELERAÇÃO DE PARTÍCULAS

4.1 Física das Ondas de Choque em Gases

No capítulo anterior discutimos a teoria de pequenas perturbações em torno do estado de equilíbrio. Em astronomia a perturbação de velocidade é com frequência grande no sentido de que v excede de muito v_S ou v_A. Os exemplos são vários: explosões de supernovas, acresção de material numa estrela, impacto de um vento supersônico em um planeta, passagem de uma onda de densidade espiral em uma galáxia, colisões de "nuvens" em um meio multifásico, movimentos que se seguem à liberação de energia magnética em um processo de reconexão em um "solar flare", jatos galácticos e extragalácticos. Logo, vamos procurar compreender ondas de amplitude finita.

Uma característica distinta de tais ondas é a "quebra" de onda. Pensemos sobre ondas no mar, as quais são ondas de gravidade superficiais à medida que se movem na direção da praia. Em águas profundas, a velocidade característica de ondas de gravidade é grande, e do fato de que as velocidades das partículas são muito menores do que essa velocidade, um tratamento perturbativo é suficiente. Mas, em águas rasas (próximo à praia), a velocidade característica da onda cai, e a velocidade das partículas aproxima-se e eventualmente excede a velocidade da onda. As partículas tendem a ultrapassar a onda, e a onda então "quebra". A energia é canalizada para um movimento turbulento e finalmente para calor.

Do mesmo modo, uma onda sonora irá "quebrar" se a velocidade do plasma aproximar-se de v_S. A razão disso não é difícil de enxergar. Suponha que temos uma onda de amplitude de densidade ρ_1. Se as perdas de calor são desprezíveis (isto é, $\alpha = 1$ na eq. 3.19), podemos usar a relação adiabática entre a temperatura e a densidade para encontrar (assumindo $\gamma = 5/3$):

$$\frac{T_1}{T_o} = \frac{2}{3}\frac{\rho_1}{\rho_o} \tag{4.1}$$

Mas, a velocidade do som adiabática é dada por (3.50) como

$$v_\phi = \left(\frac{\gamma k_B T}{\overline{m}}\right)^{1/2} \tag{4.2}$$

Logo, há uma variação de 1^a ordem em v_ϕ à medida que a onda evolui:

$$\frac{\delta v_\phi}{v_\phi} = \frac{1}{2}\frac{T_1}{T_o} = \frac{1}{3}\frac{\rho_1}{\rho_o} \tag{4.3}$$

No limite $\rho_1 \to 0$ que tratamos no Cap. 3, esse efeito é desprezível, e todas as partes da onda prosseguem na mesma velocidade, v_ϕ. Como resultado, a onda continua a ter forma senoidal. Mas, se ρ_1 é finito, (4.3) mostra que a onda viaja mais rápido quando ρ_1 é grande. O efeito sobre a onda é que ela fica mais "aguda" à medida que se move. Podemos estimar quanto tempo leva para a onda crescer substancialmente, fazendo $t\delta v_\phi$ igual a $\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}v_\phi P$, onde P é o período da onda. Usando (4.3), vemos que

$$\frac{t}{P} = \frac{v_\phi}{2\delta v_\phi} = \frac{3}{2}\frac{\rho_o}{\rho_1} \tag{4.4}$$

Isto é consistente com a existência do regime linear tratado no Cap. 3, para $\rho_1 \to 0$ o tempo de crescimento da onda $\to \infty$.

No entanto, se ρ_1 é finito, o tempo de crescimento pode ser pequeno. Em uma onda na água, a superfície encurva-se como mostrado na figura. A onda "quebra" quando a aceleração gravitacional da camada superior da água a atrai para baixo. Numa onda acústica descrita pelas equações de fluido, as variáveis devem conservar um valor macroscópico comum a todas partículas. No entanto, se examinássemos a situação em um microscópio, veríamos algo bastante semelhante ao que ocorre com a onda na água. As partículas na onda aguda movem-se adiante sobre as partículas à sua frente, transmitindo a estas, momento por colisões, através de alguns livres-caminhos médios. Na parte mais aguda (cume) da onda, devemos esperar que as velocidades das partículas apresentem uma distribuição anômala, constituindo-se de uma mistura de partículas lentas à frente da parte aguda da onda com partículas rápidas atrás da parte aguda.

A viscosidade nos permite descrever este fenômeno para uma onda acústica. Lembremos que o efeito da viscosidade é normalmente desprezível, mas torna-se importante onde a velocidade do fluido possui grandes gradientes. Aqui temos exatamente essa situação. Logo, vamos retomar à equação de movimento incluindo a viscosidade (eq. 2.18). Se ignoramos forças gravitacional e magnética e usamos (2.20) para descrever os efeitos da viscosidade em um fluido unidimensional ao longo de x, obtemos;

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} + \xi\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]$$

$$= -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\xi\frac{d^2v}{dx^2} \tag{4.5}$$

Vemos na figura abaixo que o termo viscoso é negativo nas proximidades do pico de velocidade do fluido na onda, logo esse termo alí tende a desacelerar o fluido; o gradiente de pressão, por sua vez, está tentando acelerar o fluido. A razão entre a força amortecedora

e a força de crescimento do pico é:

$$\frac{\mid \frac{4}{3}\xi\frac{d^2v}{dx^2} \mid}{\mid \frac{dp}{dx} \mid} \sim \frac{\frac{\xi v}{(\Delta x)^2}}{\frac{p}{\Delta x}} = \frac{\xi v}{p\Delta x} \tag{4.6}$$

A viscosidade é importante quando esta razão se aproxima de 1, ou

$$\Delta x = \frac{\xi v}{p} = \frac{\rho\nu v}{\rho v_S^2} \sim \frac{\nu}{v_S} \tag{4.7}$$

Onde usamos que $\xi = \rho\nu$ e usamos o fato de que v aproxima-se de v_S quando a onda torna-se aguda. O número de Reynolds correspondente

$$R_e \sim \frac{v_S \Delta x}{\nu} \sim 1 \tag{4.8}$$

Mais importante, uma vez que v é um coeficiente de difusão, temos

$$\nu = mfp \times v_S \tag{4.9}$$

Onde mfp é o livre-caminho-médio ("mean-free-path") para troca de momento entre as partículas do gás. Segue-se então de (4.7) que forças viscosas tornam-se importantes quando

$$\Delta x \sim mfp \tag{4.10}$$

Isso confirma nossa afirmação anterior de que o mecanismo pelo qual a onda acústica "quebra" é a interação colisional de partículas rápidas de detrás da onda com partículas

lentas da frente e esse processo só pode ocorrer quando os dois conjuntos de partículas estão afastadas entre si somente alguns livres-caminhos-médios. Segue-se que a teoria de fluido pode dizer-nos em que ponto a onda sonora "quebra", mas por causa que a teoria deixa de ser válida em escalas $\sim mfp$, ela não pode descrever o que acontece em detalhe. Felizmente, como veremos, nós não precisamos saber. Uma vez que tenhamos nos convencido de que uma camada de intensa dissipação (uma frente de choque) tenha se formado, podemos usar nossas leis de conservação para dizer-nos como as condições bem atrás dessa camada dependem daquelas bem à frente. O único parâmetro que precisamos é a força do choque ou velocidade, indicada pelo número de Mach

$$M = \frac{v_1}{\gamma^{1/2} v_S} \tag{4.11}$$

Onde v_1 é a velocidade do choque com respeito ao fluido adiante e $\gamma^{1/2} v_S$ é a velocidade do som adiabática à frente do choque.

Todas as idéias acima aplicam-se a um "choque colisional", definido como um choque no qual a termalização do feixe de partículas através do choque é causada por colisões entre partículas. Nos plasmas, em oposição a gases neutros, podemos ter "choques acolisionais", nos quais a termalização tem lugar através de interações partícula-onda. Um exemplo é a instabilidade de dois feixes eletrônicos ("electron two-stream instability"), na qual os elétrons de detrás da frente de choque penetram através do feixe de elétrons à frente com a velocidade do choque. Se essa velocidade excede a velocidade térmica dos elétrons, os elétrons do contra fluxo são instáveis à formação de "agrupamentos" a uma taxa $\sim w_p$.

Os elétrons ajuntam-se e então espalham partículas carregadas a uma taxa bem maior que a taxa de colisões partícula-partícula (simplesmente porque o ajuntamento de elétrons pode ter um grande número de elétrons), e a termalização processa-se mais rapidamente. Esse mecanismo é aplicável até se o plasma não é magnetizado e também para propagação de choques ao longo de campos magnéticos.

Se o plasma é magnetizado, outros modos de onda participam. À medida que as partículas carregadas de detrás do choque movem-se no campo magnético em frente da onda, elas

são defletidas e uma corrente se forma na frente de choque. Esta corrente pode tornar-se instável e, novamente, as partículas são espalhadas pelas ondas resultantes. Conforme discutido por Boyd & Sanderson (p.131), a espessura do choque é da ordem do raio de circulação do íon em torno da linha de campo, neste caso.

O resultado líquido é que as interações partícula-onda termalizam os movimentos em uma frente de choque tal como as colisões o fariam. Tanto quanto o nosso interesse concentra-se nas propriedades gerais do fluido, não faz realmente diferença se o choque é colisional ou não-colisional.

4.2 Relações de Rankine-Hugoniot

É instrutivo "trabalhar" as implicações da conservação de massa, momento e energia em um choque. A seguir, estudamos o caso particular de um choque propagando-se em uma direção perpendicular a $\vec{B}$. O caso da propagação paralela a $\vec{B}$ pode ser obtido fazendo-se $\vec{B} = 0$ nas equações , uma vez que movimentos ao longo de $\vec{B}$ não o afetam e nem são afetados por ele e, portanto não trocam energia com o campo.

Neste ponto, precisamos das equações de conservação na forma padrão (lembremos como tivemos que dar duro para obter a equação de energia nessa forma!). As equações apropriadas são

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v_i) = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \partial_j(\pi_{ij} + T_{ij}) = 0 \tag{4.13}$$

(veja problema 2.4); e de (2.45):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{3}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right)\right] + \partial_i\left[\frac{B^2}{4\pi}v_i - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}B_i +\right.$$

$$\left. + \frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J}\times\vec{B})_i + \rho v_i\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \left(\vec{v}.\sigma'\right)_i -\right.$$

$$-\frac{J_i}{n_e}\int\frac{dp_e}{n_e}+Q_i+R_i\Big]=0 \tag{4.14}$$

Onde

$$\pi_{ij}=p\delta_{ij}+\rho v_i v_j-\sigma'_{ij}=p\delta_{ij}+\rho v_i v_j-\xi\big(\partial_i v_j+\partial_j v_i-\frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}.\vec{v}\big) \tag{4.15}$$

$$T_{ij}=\frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij}-\frac{1}{4\pi}B_iB_j \tag{4.16}$$

Nas equações acima colocamos $\vec{v}_e=\vec{v}$, mas as equações são exatas.

Vamos assumir que o fluxo é estacionário, de modo que $\frac{\partial}{\partial t}=0$. Vamos desprezar gravidade; vamos adotar um sistema de coordenadas em repouso no referencial do choque. O plasma à frente do choque flui a uma velocidade v_1 com respeito ao choque. Tomaremos a direção da propagação do choque ao longo de $-x$ e a direção de $\vec{B}$ como sendo y.

A única componente de π_{ij} que não se anula é

$$\pi_{xx}=p+\rho v^2-\sigma'_{xx}=p+\rho v^2-\xi\big(2\partial_x v-\frac{2}{3}\partial_x v\big)$$

$$=p+\rho v^2-\frac{4}{3}\xi\partial_x v \tag{4.17}$$

Enquanto

$$T_{xx} = \frac{B^2}{8\pi} \tag{4.18}$$

Integramos então (4.12) a (4.14) pelo volume de uma caixa com lados paralelos a x e faces perpendiculares a x. Convertemos a integral no volume em uma integral de superfície, usando o teorema da divergência, para obter

$$\int_{\partial V} \rho\vec{v}.d\vec{S} = 0 \tag{4.19}$$

$$\int_{\partial V} (\pi_i + T_i).d\vec{S} = 0 \tag{4.20}$$

$$\int_{\partial V} \left[\frac{B^2}{4\pi}\vec{v} - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}\vec{B} + \frac{c\eta}{4\pi}(J \times \vec{B}) + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \right.$$

$$\left. -(\vec{v}.\vec{\sigma}) - \frac{\vec{J}}{n_e}\int \frac{dp_e}{n_e} + \vec{Q} + \vec{R}\right].d\vec{S} = 0 \tag{4.21}$$

Em (4.19), $\vec{v}$ é paralelo aos lados da caixa, então obtemos:

$$\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2 = 0 \tag{4.22}$$

Onde ρ_1 e v_1 referem-se a um ponto suficientemente distante da frente de choque do lado pré-shock (ou antes da frente de choque: "upstream"), e ρ_2 e v_2 referem-se a um ponto suficientemente distante da frente de choque do lado pós-choque (ou seja, atrás do choque: "downstream"). A condição "distante o bastante" é apenas para garantir que o gás alí já esteja completamente termalizado. Se denotamos os saltos na variável A por $[A] = A_1 - A_2$, (4.22) torna-se:

$$\big[\rho v\big] = 0 \tag{4.23}$$

De (4.17) e (4.18), as únicas componentes que não se anulam de π_i e T_i são aquelas para $i = x$; logo novamente os lados y e z da caixa não contribuem e encontramos que

$$\left[p + \rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{4}{3}\xi\partial_x v\right] = 0 \tag{4.24}$$

Aplicando procedimento similar à equação de energia, o processo é um pouco mais trabalhoso. Prosseguindo e fazendo termo por termo, notamos que $B^2\vec{v}/4\pi$ contribui somente nas faces extremas perpendiculares a x, enquanto que $\vec{B}.\vec{v} = 0$. Por simetria, $\vec{J} = c(\vec{\nabla} \times \vec{B})/4\pi$ está na direção de z, logo $\vec{J} \times \vec{B}$ está na direção x, e portanto, contribui somente nas faces perpendiculares a x da caixa. O termo $\rho\vec{v}(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}})$ contribui somente nas faces perpendiculares também. O vetor $\vec{v}.\sigma'$ tem somente uma componente x, $\frac{4}{3}\xi v\partial_x v$. Por simetria, tanto $\vec{Q}$ como $\vec{R}$ têm somente componentes x.

A bateria de Biermann $(\vec{J}/n_e)\int dp_e/n_e$ é um pouco mais complicada. (Note-se que por causa que ambos n_e e p_e dependem somente de x, (2.33) é satisfeita e a colocação do termo dentro da divergência, como fizemos, é legítima no presente caso.)

Note que $\vec{J}$ está na direção de z, e poderia em princípio contribuir para a integral através dos lados da nossa caixa paralelos a x. No entanto, uma vez que $\int dp_e/n_e$ é uma função de x somente, a conservação de corrente então implica que as contribuições dos lados da caixa cancelam-se.

O resultado das considerações acima é que:

$$\left[\frac{B^2}{4\pi}v + \frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J} \times \vec{B})_x + \rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{2}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right) - \frac{4}{3}\xi v\partial_x v - K\partial_x T + R_x\right] = 0 \tag{4.25}$$

Onde usamos (2.36).

Agora (veja 2.7 ou 4.13 e 4.16):

$$\frac{c\eta}{4\pi}(\vec{J} \times \vec{B})_x = \frac{c^2\eta}{16\pi^2}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}B^2\right) - \vec{B}.\vec{\nabla}\vec{B}\right]_x = \frac{c^2\eta}{16\pi^2}B\partial_x B \tag{4.26}$$

Agora fazemos a hipótese de que longe o bastante da frente de choque, todas as quantidades se ajustaram aos seus valores no estado estacionário, de modo que as derivadas espaciais se anulam, eliminado os termos em η, ξ, e K; isso também se aplica a (4.24). Ainda nos resta $[R_x]$, o qual representa o fluxo radiativo dirigido na direção "upstream" no lado do pré-choque (1) mais o fluxo radiativo dirigido "downstream" no lado do pós-choque (2). Nossa prescrição para nos livrarmos de R_x é a seguinte: usemos o fato de que normalmente as partículas termalizam através de colisões elásticas (ou processos acolisionais) bem antes de poderem emitir sua energia como radiação . Se definimos o choque como "não incluindo radiação ", de modo que o ponto no pós-choque ("downstream") é definido estar antes da região em que o resfriamento tem lugar, podemos então desprezar $[R_x]$ e a condição sobre a energia se reduz a

$$\left[\rho v\left(\frac{B^2}{4\pi\rho}+\frac{1}{2}v^2+\frac{5}{2}\frac{k_BT}{\overline{m}}\right]=0 \tag{4.27}$$

ou, sob a luz de (4.23):

$$\left[\frac{B^2}{4\pi\rho}+\frac{1}{2}v^2+\frac{5}{2}\frac{k_BT}{\overline{m}}\right]=0 \tag{4.28}$$

Como sempre, precisamos de uma condição mais, suprida pela equação de indução magnética

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v})+\nu_M\nabla^2\vec{B}=0 \tag{4.29}$$

Uma vez que $\partial_t=0$ e $\vec{B}.\vec{\nabla}=B\partial_y=0$ e $\vec{\nabla}.\vec{v}=\partial_x v$, a componente y de (4.29) resulta:

$$-v\partial_xB-B\partial_xv+\nu_M\partial_x^2B=\partial_x(-vb+\nu_M\partial_xB)=0 \tag{4.30}$$

De modo que pelo mesmo procedimento aplicado anteriormente

$$[-vB+\nu_M\partial_xB]=-[vB]=0 \tag{4.31}$$

Desde que $\partial_x B = 0$ nos pontos extremos (nas faces perpendiculares a x da caixa), como os demais gradientes.

À luz da eq. (4.23), podemos reescrever (4.31) como:

$$\left[(\rho v)\frac{B}{\rho}\right] = [\rho v]\left[\frac{B}{\rho}\right] = 0 \tag{4.32}$$

Se escrevemos p em termos de T e generalizamos o $5/2$ de (4.28) para $\gamma/(\gamma-1)$, podemos escrever (4.23), (4.32), (4.24) (onde tiramos $\partial_x v$) e (4.28), respectivamente, na forma

$$[\rho v] = 0 \tag{4.33}$$

$$\left[\frac{B}{\rho}\right] = 0 \tag{4.34}$$

$$\left[\rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}\right] = 0 \tag{4.35}$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k_B T}{\overline{m}}\right] = 0 \tag{4.36}$$

É costume denotar-se os valores à frente do choque (pré-choque) por (1) e os valores atrás do choque por (2) (pós-choque). Nesse caso (4.33) - (4.36) podem ser vistas como 4 eqs. com 4 incógnitas ρ_2, v_2, B_2 *e* T_2

em termos de $\rho_1, v_1, B_1, e\ T_1$. É costume definir-se:

$$M = \frac{v_1}{\left(\frac{\gamma k_B T_1}{\overline{m}}\right)^{1/2}} = \frac{v_1}{\gamma^{1/2} v_{S1}} \tag{4.37}$$

O qual é o número de Mach no qual o plasma entra no choque

$$x = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \text{crescimento de pressão} \tag{4.38}$$

$$y = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{crescimento de densidade} \tag{4.39}$$

Note que $\gamma^{1/2} v_{s1}$ é a velocidade do som adiabática à frente do choque (no pré-choque). Em adição , do fato de que estamos considerando um caso no qual o campo magnético $B_1 \neq 0$, definimos, como no Cap. 3:

$$\beta = \frac{B_1^2}{8\pi p_1} \tag{4.40}$$

Para resolver (4.33) - (4.36), eliminamos v_2 e B_2 em favor de ρ_2 usando (4.33) e (4.34), de modo que (4.35) torna-se

$$\rho_2 v_2^2 + \frac{B_2^2}{8\pi} + p_2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \frac{B_1^2}{8\pi} + p_2$$

$$= \frac{1}{y}\rho_1 v_1^2 + y^2 \frac{B_1^2}{8\pi} + p_2 = \rho_1 v_1^2 + \frac{B_1^2}{8\pi} + p_1 \tag{4.41}$$

ou

$$\rho_1 v_1^2 (1 - y^{-1}) = \frac{B_1^2}{8\pi}(y^2 - 1) + p_2 - p_1 \tag{4.42}$$

enquanto (4.36) torna-se

$$\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{B_2^2}{4\pi\rho_2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{B_1^2}{4\pi\rho_1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_2}{\rho_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}v_1^2 + y\frac{B_1^2}{4\pi\rho_1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{1}{y}\frac{p_2}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{B_1^2}{4\pi\rho_1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} \tag{4.43}$$

ou

$$\rho_1 v_1^2 (1 - y^{-2}) = \frac{B_1^2}{8\pi}[4(y - 1)] + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{y} - p_1\right) \tag{4.44}$$

Se eliminamos $\rho_1 v_1^2$ entre (4.42) e (4.44) obtemos:

$$\frac{1-y^{-2}}{1-y^{-1}} = 1+y^{-1} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{B_1^2}{8\pi}[4(y-1)] + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{y} - p_1\right)}{\frac{B_1^2}{8\pi}(y^2-1) + p_2 - p_1} \tag{4.45}$$

Se dividimos numerador e denominador por p_1, obtemos

$$\frac{y+1}{y} = \frac{4\beta(y-1) + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}{\beta(y^2-1) + x - 1} \tag{4.46}$$

Então

$$\beta(y^3+y^2-y-1) + x(y+1) - y - 1 = \beta(4y^2-4y) + \frac{2\gamma}{\gamma-1}x - \frac{2\gamma}{\gamma-1}y \tag{4.47}$$

e

$$\beta(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) = \beta(y-1)^3 =$$

$$x\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1 - y\right) - y\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1\right) + 1$$

$$= x\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y\right) - y\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) + 1 \tag{4.48}$$

Então, resolvendo para x:

$$x = \frac{y\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} - 1 + \beta(y-1)^3}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y} \tag{4.49}$$

O que resulta no crescimento em densidade em termos do crescimento em pressão para qualquer número de Mach do choque. Note que para obter $y(x)$ tem-se que resolver uma equação cúbica.

É útil encontrar x como função de M. Para esse fim, nós dividimos (4.42) por $p_1 = \rho_1 v_{S1}^2$ para obter

$$\frac{v_1^2}{v_{S1}^2}(1 - y^{-1}) = \gamma M^2(1 - y^{-1}) = \beta(y^2 - 1) + x - 1 \tag{4.50}$$

Tal que substituindo x de (4.49):

$$\gamma M^2(1 - y^{-1}) - \beta(y^2 - 1) = x - 1 =$$

$$= \frac{y\frac{(\gamma+1)}{\gamma-1} - 1 + \beta(y-1)^3 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} + y}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y}$$

$$= \frac{(y-1)\big(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + 1\big) + \beta(y-1)^3}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y}$$

$$= \frac{(y-1)\big[\frac{2\gamma}{\gamma-1} + \beta(y-1)^2\big]}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y} \tag{4.51}$$

O termo $y - 1$ pode ser cancelado, restando

$$\frac{\gamma M^2}{y} - \beta(y+1) = \frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1} + \beta(y-1)^2}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y} \tag{4.52}$$

Multiplicando por $y\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y\right)$, obtemos

$$\big[\gamma M^2 - \beta(y^2 + y)\big]\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - y\right) = \frac{2\gamma}{\gamma-1}y + \beta(y^3 - 2y^2 + y) \tag{4.53}$$

Os termos em y^3 cancelam-se e somos deixados com uma equação quadrática que pode ser escrita como

$$2(2-\gamma)\beta y^2 + \gamma\big[(\gamma-1)M^2 + 2(1+\beta)\big]y - \gamma(\gamma+1)M^2 = 0 \tag{4.54}$$

Então, para o valor prescrito de M, podemos resolver (4.54) para y, e encontrar x de (4.49).

Interessantemente, a dependência cúbica com y em (4.49) não persiste em (4.54)...

4.3 Choques com $\vec{B} = 0$

Este caso aplica-se se B é fraco ou se a propagação é $//a\ \vec{B}$.
Então (4.54) é prontamente resolvida para y (tomando- se $\alpha = 0$):

$$y = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2} \tag{4.55}$$

e o resultado injetado em (4.49) dá:

$$x = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \tag{4.56}$$

Então, $M = 1$ implica $x = y = 1$, correspondendo a um choque bem fraco ou, o que dá na mesma, uma onda acústica viajando com a velocidade de fase $\gamma^{1/2} v_S$.

Frequentemente, o caso interessante em astronomia é $v_1 >> \gamma^{1/2} v_S$, descrevendo movimento fortemente supersônico, como em uma explosão de supernova ou flares. Então $M >> 1$, e

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = y \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ (= 4\ para\ \gamma = 5/3) \tag{4.57}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = x \rightarrow \frac{2\gamma}{\gamma+1}M^2\ \left(= \frac{5}{4}M^2\ para\ \gamma = \frac{5}{3}\right) \tag{4.58}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}M^2\ \left(= \frac{5}{16}M^2\ para\ \gamma = \frac{5}{3}\right) \tag{4.59}$$

A última equação nos permite escrever

$$T_2 = \frac{2(\gamma-1)\overline{m}v_1^2}{(\gamma+1)^2 k_B} \qquad \left(= \frac{3}{16}\frac{\overline{m}v_1^2}{k_B} \; para \; \gamma = \frac{5}{3}\right) \tag{4.60}$$

para choques fortes. Então, o crescimento de densidade é sempre limitado por ≤ 4 à medida que a força do choque cresce, mas a temperatura no pós-choque T_2 cresce indefinidamente com v_1^2, tornando-se independente de T_1. Poder-se-ía imaginar intuitivamente que a termalização da energia do fluxo que alcança a frente de choque, $1/2v_1^2$ por grama, resultaria uma entalpia $H_2 = \frac{5}{2}\frac{k_B T_2}{\bar{m}} = \frac{1}{2}v_1^2$ ou $T_2 = \frac{1}{5}\frac{\bar{m}v_1^2}{k_B}$, porém vemos em (4.60) que o valor obtido para T_2 é na realidade menor.

De acordo com (4.36) o valor real é menor porque 1/16 da energia vai para a energia cinética de pós-choque, $\frac{1}{2}v_2^2$. (Isto ocorre porque $v_2^2/v_1^2 = (\rho_1/\rho_2)^2 = 1/16$).

É extremamente importante ter-se em mente que desprezamos o resfriamento radiativo no pós-choque no desenvolvimento acima. Se consideramos os efeitos do resfriamento no gás do pós-choque, efeitos dramaticamente diferentes ocorrem e serão discutidos adiante.

4.4 Choques com $\vec{B} \neq 0$

Não temos espaço para discutir os resultados para valores gerais de β e M. No entanto, podemos discutir casos especiais.
Começaremos com o critério para um choque fraco, $y = 1$.
De (4.54) isso requer que:

$$2(2-\gamma)\beta + \gamma(\gamma-1)M^2 + 2\gamma(1+\beta) - \gamma(\gamma+1)M^2 = 0 \tag{4.61}$$

ou

$$\gamma M^2 = \gamma + 2\beta \tag{4.62}$$

ou

$$v_1^2 = \gamma v_S^2 + v_A^2 \tag{4.63}$$

O qual, notamos é a fórmula da velocidade de fase de uma onda magnetossônica em (3.52). Logo, $y = 1$ é a extensão das relações de choques fracos para choques que se propagam atravé de $\vec{B}$. Segue que se B é finito, M tem que exceder 1 por um valor finito para excitar ondas de choque através de B (pois agora $v_1^2 \geq \gamma v_s^2 + v_A^2$)!

Para ter uma idéia do que ocorre para vários valores arbitrários de M, consideremos o caso especial de $M = 5$ e resolvamos (4.54) para y e (4.49) para x. Os resultados são dados na Tabela 4.1.

Vemos que um B_1 relativamente modesto, digamos $\sqrt{5}$ vezes o valor de equipartição $(8\pi p_1)^{1/2}$, reduz largamente o crescimento da pressão do plasma e, portanto, da temperatura no pós-choque.

Uma vez que a elevação da temperatura é frequentemente irradiada em situações astrofísicas, isso significa que choques através do campo magnético são menos dissipativos. Para o valor particular de $M = 5$, não há choques se B é $> \sqrt{2}0$ vezes o valor de equipartição .

A razão para isso não é difícil de traçar. Voltando a (4.35), vemos que a pressão dinâmica que penetra no choque (i.e., $\rho_1 v_1^2$, ou "ram pressure") pode ser transformada em pressão magnética ou térmica (p_M ou p, respectivamente). Devido ao congelamento do fluxo, a pressão magnética p_M cresce com ρ^2, fornecendo uma "equação de estado" relativamente forte entre p_M *e* ρ. Logo, a presença de um B_1 finito permite que o stress seja absorvido pelo campo magnético com apenas um crescimento modesto de ρ, deixando apenas pequena quantidade de energia térmica. Logo, um plasma frio (como uma nuvem) contendo um campo magnético tende a ser mais "elástico" se ele colide com outras tais nuvens. Nós veremos mais adiante que os efeitos de campos magnéticos em um choque radiativo (que resfria) são mais dramáticos na limitação do crescimento da densidade.

4.5 Aceleração de Fermi

Os raios cósmicos foram descobertos em 1911-1914. Desde então, descobriu-se que eles possuem aproximadamente uma distribuição de energia que obedece a uma lei-de-potência da forma $E^{-\sigma}$, com $\sigma \sim 2.6$ até E até $10^6 GeV$. Sabe-se também que eles se acham largamente distribuídos por todo o meio interestelar de nossa galáxia e que se compõem de prótons e partículas α e são também enriquecidos em elementos pesados. Os raios cósmicos também incluem elétrons com uma distribuição de lei-de-potência. Sua densidade de energia, de 10^{-12} erg cm^{-3}, é comparável à densidade de energia do campo magnético interestelar e à densidade de energia observada nos movimentos turbulentos do gás. Logo, os raios cósmicos têm papel importante no balanceamento energético da Galáxia.

Hoje, acredita-se que eles são acelerados em ondas de choque interestelares originadas em explosões de supernovas. Cabe notar que raios cósmicos com energias superiores a 10^{15} eV, podendo chegar até 10^{21} eV, também vem sendo detectados e igualmente possuem espectros de lei de potência. Estes porém são possivelmente originados de fontes extragalácticas.

A presença de elétrons relativísticos é inferida a partir da radiação sincrotrônica emitida não apenas pelos raios cósmicos no campo magnético da nossa galáxia, mas também por "flares" solares e estelares, restos de supernovas, binárias raio-X, outros discos de galáxias, núcleos ativos de galáxias (NAG) e jatos extragalácticos. O espectro observado típico é proporcional a $\nu^{-\alpha}$, onde o α está relacionado à distribuição de energia de lei-de-potência das partículas pela equação $\alpha = (\sigma - 1)/2$.

Com α observado na faixa de 0.5 -1, inferimos a presença de espectro de energia eletrônica com $\sigma = 2 - 3$. Conclusões similares seguem da observação dos espectros de lei-de-potência em raio-X de NAGs se os raios-X são produzidos por espalhamento Compton Inverso de fótons suaves por elétrons relativísticos. Novamente, $\alpha = (\sigma - 1)/2$ (Rybicki e Lightman 1979). Nós queremos compreender como as fontes astrofísicas produzem quantidades substanciais de energia na forma de partículas relativísticas.

Uma tentativa inicial nessa direção foi feita por Enrico Fermi (1949). Para quantificar sua teoria, nós iremos retroceder um pouco e estudar a equação de Vlasov para a distribuição de momentos das partículas. Isso também será útil para outros fins ao longo do curso. Seguiremos o tratamento do trabalho de Blandford e Eichler (1987).

Considere o espaço de fase definido pela posição x_i e pelo momento p_i (relativístico). Então, uma vez que o volume de uma célula $d^3x d^3p$ e o número de partículas naquela célula

$$dN = f(x_i, p_i, t) d^3x d^3p \tag{4.64}$$

são ambos invariantes de Lorentz, f é um invariante de Lorentz. Levando em conta todos

os processos que modificam o número de partículas em uma célula, obtemos a equação de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial p_i}(F_i f) = 0 \tag{4.65}$$

Onde

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} \tag{4.66}$$

é a força sobre cada partícula. Nós excluímos a contribuição de colisões próximas entre as partículas (colisões binárias) no cômputo das forças pelas razões expostas anteriormente neste capítulo. Considerando a força de Lorentz:

$$F_i = q(E_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} v_j B_k) \tag{4.67}$$

Pode-se mostrar que

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = 0 \tag{4.68}$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \tag{4.69}$$

Se aplicamos esta equação a "colisões" entre partículas e regiões macroscópicas de interação eletromagnética, tais como, nuvens magnetizadas ou ondas Alfvén (veja abaixo), pode-se mostrar que a mudança em energia em uma "colisão" é pequena. Logo, podemos converter a eq. de Vlasov em uma eq. de Fokker-Planck. É o que faremos abaixo.

Para manter o tratamento simples, primeiro assumimos que há somente uma coordenada x, velocidade v, e momento p, e depois faremos a generalização para três componentes. Se

a probabilidade de que no tempo Δt as partículas mudam seu momento de uma quantidade Δp é dada por $\psi(p, \Delta p)$ - a qual depende apenas de seu momento no presente estado e não de toda sua história (processo de Markov) - a distribuição de momento em $t + \Delta t$ será

$$f(p, x + v\Delta t, t + \Delta t) = \int d\Delta p \psi(p - \Delta p, \Delta p) f(p - \Delta p, x, t) \tag{4.70}$$

Expandindo $f e\ \psi$ em série de Taylor;

$$f(p, x + v\Delta t, t + \Delta t) = f(p, x, t) + v\Delta t \frac{\partial f}{\partial x}(p, x, t) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x, p, t) \tag{4.71}$$

$$f(p - \Delta p, x, t) = f(p, x, t) - \Delta p \frac{\partial f}{\partial p}(p, x, t) + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(p, x, t) \tag{4.72}$$

e

$$\psi(p - \Delta\rho, \Delta p) = \psi(p, \Delta p) - \Delta p \frac{\partial \psi}{\partial p}(p, \Delta p) + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}(p, \Delta p) \tag{4.73}$$

e introduzindo em (4.70), obtemos:

$$f(x, p, t) + v\Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$= \int d\Delta p \Bigg\{ \left[f(p, x, t) - \Delta p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right] \times$$

$$\left[\psi(p, \Delta p) - \Delta p \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \right] \Bigg\}$$

$$= \int d\Delta p \Bigg\{ f\psi - f\Delta p \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{1}{2} f (\Delta p)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \Delta p \frac{\partial f}{\partial p} \psi$$

$$+ (\Delta p)^2 \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \psi \Bigg\} + O\left[(\Delta p)^3\right] \tag{4.74}$$

Uma vez que

$$\int d\Delta p \psi = 1 \tag{4.75}$$

E podemos definir

$$< \frac{\Delta p}{\Delta t} > \equiv \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta p \Delta p \psi \tag{4.76}$$

e

$$< \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > \equiv \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta p (\Delta p)^2 \psi \tag{4.77}$$

(4.74) pode ser escrito como

$$f + v\Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} = f - f\Delta t \frac{\partial}{\partial p} < \frac{\Delta p}{\Delta t} > + \frac{1}{2} f \Delta t \frac{\partial^2}{\partial p^2} < \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} >$$

$$- \frac{\partial f}{\partial p} \Delta t < \frac{\Delta p}{\Delta t} > + \frac{\partial f}{\partial p} \Delta t \frac{\partial}{\partial p} < \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \Delta t < \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > \tag{4.78}$$

Cancelando f de cada lado da equação e dividindo por Δt, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial p} \left[< \frac{\Delta p}{\Delta t} > f \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left[< \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > f \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} \left[- < \frac{\Delta p}{\Delta t} > f + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(< \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > f \right) \right] \tag{4.79}$$

Quando levamos em conta a natureza tridimensional do espaço de fase, a generalização apropriada de (4.79) é

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left[- < \frac{\Delta p_i}{\Delta t} > f + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(< \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} > f \right) \right] \tag{4.80}$$

a equação de Fokker-Planck. O 2^o termo no lado esquerdo é devido à advecção das partículas a uma velocidade v. O 1^o termo à direita corresponde ao acúmulo no espaço de momento devido a deslocamento (no espaço dos momentos) a uma velocidade $< \frac{\Delta pi}{\Delta t} >$; ele tem o mesmo papel que uma força média na eq. de Vlasov. O segundo termo à direita é um termo de difusão que tende a decrescer picos locais no espaço de momento, espalhando-os pelos momentos vizinhos.

Pode-se demonstrar que se o recuo pode ser desprezado em cada "colisão" (o que normalmente se justifica porque o conjunto de partículas com o qual uma dada partícula está colidindo tem uma massa muito maior que a partícula), então

$$\psi(p_i, -\Delta p_i) = \psi(p_i - \Delta p_i, \Delta p_i) \tag{4.81}$$

Novamente, restringindo a uma dimensão e expandindo em Δp, obtemos (como em 4.73):

$$\psi(p_i - \Delta p) = \psi(p, \Delta p) - \Delta p \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} \tag{4.82}$$

Integrando através de Δp, e multiplicando e dividindo por Δt, obtemos:

$$1 = 1 - \Delta t \frac{\partial}{\partial p} < \frac{\Delta p}{\Delta t} > + \Delta t \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} < \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > \tag{4.83}$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[< \frac{\Delta p}{\Delta t} > - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} < \frac{(\Delta p)^2}{\Delta t} > \right] = 0 \tag{4.84}$$

e generalizando para 3 dimensões temos:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[< \frac{\Delta p_i}{\Delta t} > - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_j} < \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} > \right] = 0 \tag{4.85}$$

Se integramos esta expressão de $0\, a\, p_i$ e usamos o fato de que os coeficientes de Fokker-Planck anulam-se quando $p_i \to 0$ (de acordo com Blandford e Eicher, 1987),

$$< \frac{\Delta p_i}{\Delta t} >= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_j} < \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} > \tag{4.86}$$

E (4.80) simplifica para

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left\{ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_j} < \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} > f + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_j}\left[< \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} > f \right] \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_i}\left(D_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \tag{4.87}$$

Onde

$$D_{ij} = \frac{1}{2} < \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} > \tag{4.88}$$

Nós agora estamos em posição de discutir a teoria de Fermi (1949) de aceleração dos raios-cósmicos. Ele percebeu que um campo magnético de $10^{-6} - 10^{-5} G$ era necessário para confinar os raios cósmicos da Galáxia (isso foi depois verificado observacionalmente). Ele concebeu irregularidades no campo magnético interestelar associadas com a distribuição, em nuvens, da matéria interestelar inferida pelos astrônomos. Se B fosse relativamente grande dentro das regiões mais densas que chamaremos de nuvens, porém mais fraco nas partes externas, um raio cósmico movendo-se ao longo de uma linha de força magnética tenderia a refletir ao aproximar-se de uma dessas nuvens. Para ver porque isso ocorre, notamos que a força magnética $(q/c)(\vec{v} \times \vec{B})$ é dirigida para o centro do círculo no qual a partícula está girando. Como é uma força central, ela não muda o momento angular (lembrar sessão 1.1):

$$L = \gamma m v_\perp r = \frac{\gamma m v_\perp^2}{\omega_B} = \frac{\gamma^2 m^2 c v_\perp^2}{qB} \tag{4.89}$$

Onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ é o fator de Lowntz.

A força também não pode mudar a energia da partícula γmc^2, porque ela é perpendicular a v. Segue-se que

$$\frac{v_\perp^2}{B} = v^2 \frac{sen^2\alpha}{B} \tag{4.90}$$

é constante, onde α é o ângulo entre $\vec{v}$ *e* $\vec{B}$ (ângulo "pitch"). (Devido ao fato de que o momento magnético da partícula é $\pi q w_B r^2 = \pi q v_\perp^2 / w_B$, ele é proporcional a L, e portanto também constante). Novamente, do fato de que v é constante, $sen\alpha$ é proporcional a $\sqrt{B}$, e se atinge o valor 1 (ângulo "pitch" 90^o), a partícula não pode mais mover-se ao longo da linha de campo ($v_{//} = 0$ e $v = v_\perp$) e é refletida. Aplicando essa idéia, Fermi argumentou que sempre que uma partícula se aproxima de uma nuvem ela deve ser refletida dela. Agora, as nuvens são observadas moverem-se com velocidade $V \sim 10km/s$. Então, apesar de a energia da partícula ser conservada no referencial da nuvem, ela cresce (se a nuvem está se aproximando) ou decresce (se está se afastando) no referencial da Galáxia. Melrose (1980, p.67) demonstra que para esse caso:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} < \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{\Delta t} >= \frac{< V^2 > p^2}{3Lc} \delta_{ij} \tag{4.91}$$

se as partículas são relativísticas, onde p é o momento das mesmas (E/c), V é a velocidade média das nuvens e L é o livre-caminho-médio entre os espalhamentos. Logo, a equação de Fokker-Planck torna-se:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{< V^2 > p^2}{3Lc} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) = \frac{< V^2 >}{3Lc} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(p^2 \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \tag{4.92}$$

De acordo com Blandford e Erchler (1987), a mesma equação é verdadeira mesmo se $v \neq c$ (movimento não relativístico), de modo que c pode ser substituído por v em (4.92).

Fermi idealizou o campo magnético interestelar como uma caixa vazante da qual partículas de todas as energias eventualmente escapam em um tempo dt com probabilidade dt/τ_e, onde $\tau_e \sim 2 \times 10^7$ anos é deduzido da abundância de $^{10}B_e$ (instável) nos raios cósmicos.

Podemos incluir escape na eq. (4.92); adicionando o termo $-f/\tau_e$ ao lado direito da equação . Na eq. (4.92), na ausência dos gradientes espaciais e de momento, a presença somente do termo $-f/\tau_e$ no lado direito resultaria uma solução do tipo e^{-t}/τ_e, tal como se esperaria com o conceito de "caixa vazante".

Na presença dos outros termos, podemos escrever (4.92) na forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{< V^2 >}{3Lv} \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p^2 \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) - \frac{f}{\tau_e} \tag{4.93}$$

Fermi procurou soluções independentes do tempo para (4.93) assumindo ausência de gradientes espaciais. Uma vez que as colisões com nuvens interestelares são isotrópicas, ele assumiu $f(p_i)$ dependendo apenas de $p = (p_i p_i)^{1/2}$. No regime relativístico, $v = c$, e $< V^2 > /Lv =< V^2 > /Lc$ é uma constante, independente de p. Uma vez que essa igualdade tem dimensões de seg^{-1}, ela pode ser denotada como τ_a^{-1}, onde τ_a é o tempo de aceleração . Logo, devemos resolver:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(p^2 \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 3\frac{\tau_a}{\tau_e} f \tag{4.94}$$

Esta pode ser simplificada fazendo-se uso do fato de que:

$$\frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p_i}\left[p_j p_j\right]^{1/2} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{p_j}{p}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \frac{p_i}{p}\frac{\partial f}{\partial p} \tag{4.95}$$

onde usamos, na última passagem o fato de que $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij}$.

Vamos usar agora (4.95) para escrever o termo de difusão como

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(p^2 \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_i p \frac{\partial f}{\partial p}\right) = 3p\frac{\partial f}{\partial p} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p\frac{\partial f}{\partial p}\right)$$

$$= 3p\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{p_i p_i}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \left(3 + p\frac{\partial}{\partial p}\right)(pf')$$

$$= p^{-2}\left[\frac{\partial p^3}{\partial p} + p^3\frac{\partial}{\partial p}\right](pf') = p^{-2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^4\frac{\partial f}{\partial p}\right) \tag{4.96}$$

Uma vez $4\pi p^2 f(p)dp = N(p)dp$ é a densidade de partículas em dp, (4.94) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[p^4\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{N}{p^2}\right)\right] = 3\frac{\tau_a}{\tau_e}N \tag{4.97}$$

Essa equação tem solução de lei-de-potência:

$$N \sim p^{-\sigma} \tag{4.98}$$

Onde

$$\sigma^2 + \sigma - 2 - \frac{3\tau_a}{\tau_e} = 0 \tag{4.99}$$

De modo que

$$\sigma = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{4\tau_a}{3\tau_e}\right)^{1/2} \tag{4.100}$$

A solução é uma lei-de-potência, em concordância com as observações de raios cósmicos. No entanto, o valor numérico de σ é muito desencorajador! Nós estimamos que o livre-caminho-médio para colisões com nuvens interestelares é $L = 100pc = 3 \times 10^{20}$ cm, e que as velocidades das nuvens são $V = 10km/s = 10^6 cm/s$. Logo, com $\tau_e = 2 \times 10^7 anos = 6 \times 10^{14} segs.$:

$$\frac{\tau_a}{\tau_e} = \frac{3 \times 10^{20} cm \times 3 \times 10^{10} cm/s}{10^{12} cm^2/s \times 6 \times 10^{14} s} \simeq 1.5 \times 10^4 \tag{4.101}$$

Então, de (4.100):

$$\sigma = 200 \tag{4.102}$$

que pode ser comparado com o valor observado de 2.6!
A aceleração é muito mais lenta do que o necessário. Isso provém do fato de que τ_a^{-1} é proporcional a $< V^2 >$ ao invés de $< V^2 >^{1/2}$. Esta dependência de "segunda-ordem" em V/c é devido ao fato de que colisões com nuvens que se aproximam, as quais são um efeito de 1^a ordem, são aproximadamente canceladas por colisões com nuvens que se afastam, deixando somente um efeito de 2^a ordem.

Logo, precisamos de um processo de 1^a ordem. Pode-se notar também que (4.100) é sensível aos parâmetros do processo de aceleração , enquanto que a universalidade de $\sigma = 2 - 3$ em astrofísica sugere que seja qual for o processo que está operando é universal, e portanto deve ser insensível a parâmetros locais.

4.6 Aceleração em ondas de choque

Desde 1949, tem havido inúmeras tentativas de se identificar um processo universal que teria alta eficiência para acelerar partículas até energias relativísticas. Esses esforços finalmente deram frutos em 1977-1978, quando 4 diferentes grupos simultaneamente esbarraram na idéia de que ondas de choque MHD deveriam funcionar (Axford, Leer, e Skadron 1977; Krymsky 1977; Bell 1978 a e b; e Blandford e Ostriker 1978).

Como veremos, esse mecanismo produz uma distribuição de energias de lei-de-potência com índice σ dependendo somente do crescimento em densidade no choque "y". Tal como o processo de 2^a ordem de Fermi, ele se baseia no espalhamento das partículas por irregularidades magnéticas antes e depois do choque, mas aqui as partículas sofrem reflexão nas irregularidades várias vezes, e do fato de que o choque (com suas irregularidades no pós-choque) está sempre se aproximando das irregularidades à frente do choque, a aceleração de 1^a ordem é atingida (e $\tau_a^{-1}\alpha < V >$, como veremos).
Este resultado pode ser derivado por vários argumentos diferentes, mas todos eles repousam na hipótese da existência de ondas Alfvén à frente e atrás do choque e no espalhamento das partículas energéticas por elas. Iremos primeiro descrever o espalhamento por ondas Alfvén à frente e atrás do choque e então mostraremos como elas podem ser usadas para acelerar partículas.

Sabemos que as ondas Alfvén viajam a uma velocidade:

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{4.103}$$

no plasma ambiente. Uma partícula com $v \sim c >> v_A$ irá então "ver" uma onda Alfvén como uma perturbação magnetostática de comprimento-de-onda λ. Se o raio de Larmour $r_L = \gamma mc^2/qB = pc/qB$ de uma partícula relativística é comparável com λ, sua trajetória pode ser modificada quando há ressonância entre r_L e λ. Apesar de a magnitude de p não poder mudar em um campo magnético (estático), sua direção pode. Podemos expressar essa mudança por meio do ângulo α entre $\vec{p}$ e $\vec{B}$: $\alpha = cos^{-1}\mu$, onde $\mu = \frac{\vec{p}.\vec{B}}{pB}$. Se visualizamos o campo magneético como um conjunto de ondas Alfvén de diferentes fases superpostas em um campo magnético médio $\vec{B}_o$, cada interação sucessiva partícula-onda irá mudar μ ligeiramente (se a amplitude é pequena) e μ irá realizar um percurso randômico. Quando μ alcança o valor 0, o movimento da partícula ao longo de $\vec{B}_o$ inverte e a reflexão irá levar a partícula de volta através da frente de choque.

Para calcular o coeficiente de espalhamento, utilizaremos a generalização relativística de (1.1) para um campo $\vec{B}$ puro:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{Ze}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{4.104}$$

e notemos que o ângulo de pitch é governado por

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}_o.\vec{p}}{B_o p}\right) = (B_o p)^{-1}\vec{B}_o.\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{Ze}{pc}(\vec{v}_\perp \times \vec{B}_1)_{//} \tag{4.105}$$

Onde // refere-se à projeção em $\vec{B}_o$, a qual é tomada na direção z. Note-se que usamos $(\vec{v}_{//} \times \vec{B}_1)_{//} = (\vec{v}_\perp \times \vec{B}_o)_{//} = 0$. No referencial centro-guia das partículas, se locomovendo ao longo da linha do campo com

$$z = v_{//}t = v\mu t \tag{4.106}$$

Nós vemos

$$\vec{v}_\perp = v(1-\mu^2)^{1/2}(\vec{u}_x cos\Omega t - \vec{u}_y sen\Omega t) \tag{4.107}$$

e

$$\vec{B}_1 = B_1\big[\vec{u}_x cos(kv\mu t + \psi) - \vec{u}_y sen(kv\mu t + \psi)\big] \tag{4.108}$$

Onde $\Omega = B_o Ze/\gamma mc$ *e* ψ é uma fase arbitrária. Aqui $\vec{v}_\perp$ move-se no sentido horário, como requerido para uma partícula positivamente carregada. $\vec{B}_1$ possui também mesma orientação , de modo que pode interagir ressonantemente com a partícula. Tomando a componente z de $\vec{v}_\perp \times \vec{B}_1$, (4.105) torna-se:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{Zev(1-\mu^2)^{1/2}B_1}{pc}\big[sen\Omega t\ cos(kv\mu t + \psi) - cos\Omega t\ sen(kv\mu t + \psi)\big]$$

$$= \frac{Zev(1-\mu^2)^{1/2}}{pc}B_1 sen\big[(\Omega - kv\mu)t - \psi\big] \tag{4.109}$$

Logo, depois de um tempo t:

$$\Delta\mu = \frac{Zev(1-\mu^2)^{1/2}B_1}{pc}\int_o^t dt' sen(\omega t' - \psi)$$

$$= \frac{Zev(1-\mu^2)^{1/2}B_1}{pc\omega}\big[cos\psi(1 - cos\omega t) + sen\psi sen\omega t\big] \tag{4.110}$$

Onde

$$\omega = \Omega - kv\mu \tag{4.111}$$

é a girofrequência da partícula deslocada por efeito Doppler no referencial da onda. Note-se que há uma ressonância onde $\Omega = kv\mu = \left(\frac{tan\alpha}{2\pi}\right)^{-1}\frac{v_\perp}{\lambda}$, e como $\Omega = v_\perp/r_L$, segue que $r_L \simeq ordem(\lambda)$ para haver ressonância, como sugerido anteriormente. Se calculamos o quadrado de (4.110) e tiramos a média sobre a variável randômica ψ, o resultado é

$$< (\Delta\mu)^2 >= \frac{\int_0^{2\pi}\Delta\mu^2 d\psi}{\int_0^{2\pi} d\psi}$$

$$< (\Delta\mu)^2 >= \frac{Z^2e^2v^2(1-\mu^2)B_1^2 f(\omega,t)}{p^2c^2} \tag{4.112}$$

Onde

$$f(\omega,t)=\frac{1-cos\omega t}{\omega^2}=\frac{1}{2}t^2\left[\frac{sen\left(\frac{1}{2}\omega t\right)}{\frac{1}{2}\omega t}\right]^2 \tag{4.113}$$

O valor de pico de f é $\frac{1}{2}t^2$. Sua integral sobre todas as frequências para um t fixo é:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega,t)d\omega=t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen^2x}{x^2}dx=\pi t \tag{4.114}$$

De modo que a largura de $f(w,t)$ é $\sim \pi t/\frac{1}{2}t^2 \sim t^{-1}$. Portanto, como o tempo de interação $t\to\infty$, f aproxima-se de $\pi t\delta(w)=\pi t\delta(\Omega-kv\mu)=(\pi t/v\mu)\delta(k-\frac{\Omega}{v\mu})$. Logo, $(\Delta\mu)^2$ é proporcional a t, e

$$<\frac{(\Delta\mu)^2}{\Delta t}>=\frac{\pi Z^2e^2v(1-\mu^2)B_1^2}{2p^2c^2\mu}\delta\left(k-\frac{\Omega}{v\mu}\right) \tag{4.115}$$

Agora, porque $\mu=cos\alpha$, vem que

$$\Delta\mu=-sen\alpha\Delta\alpha=-(1-\mu^2)^{1/2}\Delta\alpha \tag{4.116}$$

Então

$$\nu=<\frac{(\Delta\alpha)^2}{\Delta t}>=\frac{\pi Z^2e^2vB_1^2}{2p^2c^2\mu}\delta\left(k-\frac{\Omega}{v\mu}\right) \tag{4.117}$$

É o coeficiente de difusão para o ângulo de "pitch" entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Note-se que assumimos que a órbita muda um pouco durante Δt, logo $\Delta\alpha$ em tempos sucessivos Δt é pequeno e não correlacionado com o valor prévio; somente sua variância acumula-se linearmente com o tempo, conforme esperado para um processo de difusão. Tal cálculo, no qual órbitas não perturbadas são usadas para avaliar pequenas mudanças, é um exemplo da chamada "aproximação quase-linear" em física de plasmas (Melrose, 1980).

Uma vez que a densidade de energia em uma onda Alfvén (incluindo cinética e magnética) é $\epsilon=\frac{B_1^2}{4\pi}$, podemos escrever:

$$\varepsilon = \int \varepsilon_k dk \tag{4.118}$$

Com

$$\varepsilon_k = \frac{B_{1k}^2}{4\pi} \tag{4.119}$$

De modo que somado sobre todas as ondas

$$\nu = \int \nu(k) dk = \int \frac{4\pi^2 Z^2 e^2 v \varepsilon_k}{2p^2 c^2 \mu} \delta\left(k - \frac{\Omega}{v\mu}\right) dk$$

$$= \frac{4\pi^2 Z^2 e^2 v \varepsilon_k \left(k = \frac{\Omega}{v\mu}\right)}{2p^2 c^2 \mu} \tag{4.120}$$

Usando

$$k\Omega = \frac{1}{v\mu}\Omega^2 = \frac{Z^2 e^2 B_o^2}{p^2 v \mu} \tag{4.121}$$

Podemos eliminar $Z^2 e^2/(p^2\mu)$ de (4.120) para obter

$$\nu = \frac{\pi}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{k\varepsilon_k}{B_o^2/8\pi}\right)\Omega \tag{4.122}$$

De modo que se $v \simeq c$ (para partículas relativísticas), ν/Ω é somente a razão entre a energia/volume sob forma de ondas Alfvén e a energia/volume do campo magnético de fundo.

Para considerarmos um exemplo particular, Ω para prótons de $\gamma = 3$ no meio interestelar é $2\times10^{-2} seg^{-1}$ se $B_o = 5\times10^{-6} G$. Considerando-se uma energia das ondas Alfvén de apenas 10^{-3} de $B_o^2/8\pi$, a taxa na qual $\Delta\alpha$ muda é dada por $\nu^{-1} \simeq 3 \times 10^4$ s, correspondendo a (ver 4.117 e 4.122):

$$\Delta\alpha \sim (\nu t)^{1/2} \sim \left(\frac{t}{3\times10^4 s}\right)^{1/2} \tag{4.123}$$

Essa taxa é extremamente rápida para escalas de tempo astronômicas.

Tal como as ondas espalham as partículas, as partículas podem gerar ondas. Blandford e Eichler mostram que tais ondas vão crescer sempre que houver um feixe de partículas relativísticas movendo-se ao longo do campo a uma velocidade média maior que a velocidade de fase da onda (no caso, v_A). A taxa de crescimento de uma onda é

$$\tau_\omega^{-1} \simeq \left(\frac{v_{drift}}{v_A} - 1 \right) \frac{n_p}{n_i} \Omega \tag{4.124}$$

Onde $n_p \sim 4\pi f p^2 dp \sim 4\pi f p^3$ é a densidade numérica de partículas relativísticas, n_i é a densidade numérica de íons térmicos, e Ω é a girofrequência das partículas relativísticas. Novamente, a taxa de crescimento é grande se n_p é uma fração mensurável de n_i.

Em um ponto típico no meio interestelar, $n_p \sim 10^{-9} cm^{-3}$, enquanto $n_i \sim 10^{-1} cm^{-3}$, então $n_p/n_i \sim 10^{-8}$, e se, por ex., $v_{drift}/v_A \sim 2$, a onda cresce em um tempo $\tau_w \sim 10^8/\Omega = 5 \times 10^9 segs. = 1.6 \times 10^2$ anos. Enquanto longo em termos absolutos, esse tempo é na verdade bem menor que a idade da Galáxia.

Esse processo foi invocado por Kulsrud e Pearce para explicar porque, apesar de sua origem em choques gerados por supernovas, os raios cósmicos parecem ser aproximadamente isotrópicos em sua distribuição de ângulo de "pitch" aqui na Terra, pois, se eles não o fôssem, eles teriam uma velocidade líquida e então, gerariam ondas Alfvén. Isso não apenas lhes custaria energia, mas também eles iriam subsequentemente espalhar tais ondas, tornando-se novamente isotrópicos. Em resumo, é uma boa regra "do polegar" em astrofísica assumir que partículas relativísticas, ainda que acolisionais, não podem fluir ao longo das linhas do campo magnético com velocidade maior que v_A.

Aplicado à discussão presente, da aceleração de partículas por ondas de choque, isso significa que as ondas Alfvén necessárias para espalhar as partículas antes e depois do choque não precisam estar presentes "de início". De fato, elas serão criadas de qualquer modo pelas partículas aceleradas à medida que elas tentam mover-se para longe do choque ao longo das linhas de força. Blandford e Eichler mostram que a combinação da geração de onda pelas partículas e o espalhamento das partículas pelas ondas na presença de um choque leva a um precursor com uma escala de comprimento definida (eq. 5.14).

4.6.1 Calculando a função de distribuição atrás do choque

Para calcular a função de distribuição atrás do choque, Blandford e Eichler notam que o espalhamento em ângulo de "pitch" pelas ondas a uma taxa ν corresponde a uma difusão espacial paralela a $\vec{B}$ com um coeficiente de difusão igual a

$$D = \frac{< v_{//}^2 >}{\nu} = \frac{v^2}{3\nu} \tag{4.125}$$

um número que decresce à medida que o nível de energia da onda Alfvén cresce, como poderíamos esperar (na eq. acima usamos que $v_{//} = v\,cos\,\alpha$ e $< cos^2\,\alpha >= 1/3$, sendo essa média tomada sobre a integral nos ângulos sólidos, isto é, $d\Omega/4\pi = sen\alpha\,d\alpha\,d\phi/4\pi$, com $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \alpha \leq \pi$).

A equação modificada para f no estado estacionário, assumindo variações somente na direção x, é então dada por

$$u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{4.126}$$

Onde nós usamos $u = u_x$ para a velocidade do plasma para evitar confusão com a velocidade da partícula v.

Tal como em nossa discussão de choques, o cálculo é efetuado no referencial do choque (logo $\partial_t = 0$), e a região à frente do choque é denotada por (1) e a região atrás por (2). A eq. (4.126) é chamada de equação de "difusão-advecção " porque o lado esquerdo descreve como a convecção (de fato adveccção) transporta partículas como um todo com o plasma à medida que elas são repetidamente espalhadas no referencial do plasma, enquanto o lado direito descreve como elas difundem em consequência do livre caminho médio finito v/ν. Não há nenhuma razão para exigir-se que D seja independente de x.

Devemos resolver

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial f}{\partial x}\right) - u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial f}{\partial x} - uf\right) = 0 \tag{4.127}$$

separadamente nas regiões (1) e (2), onde u é constante, sujeito às condições de contorno. (4.127) tem a 1^a integral

$$D\frac{\partial f}{\partial x} - uf = k(p) \tag{4.128}$$

Onde k é função somente de p. Fazendo $x = -\infty$ (região 1) onde $\partial f/\partial x$ é presumivelmente 0 porque a difusão de partículas à frente do choque atinge somente uma distância finita, vemos que

$$k(p) = -u_1 f_1 \tag{4.129}$$

Onde

$$f_1 = f(-\infty, p) \tag{4.130}$$

é uma função somente de p.

Para a região (1), (4.128) pode então ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}\big[exp\big(-\int_o^x \frac{u_1}{D}dx'\big)f\big] = -f_1\frac{u_1}{D}exp\bigg(-\int_o^x \frac{u_1}{D}dx'\bigg) \tag{4.131}$$

A qual tem a solução

$$f = f_1 + C\ exp\bigg(\int_o^x \frac{u_1}{D}dx'\bigg) \tag{4.132}$$

Onde C é uma constante de integração . Fazendo $x = 0$ mostra-se que

$$C = f_o(p) - f_1(p) \tag{4.133}$$

Onde $f_o(p)$ é a distribuição de momentos em $x = 0$. Logo

$$f(x,p) = f_1(p) + \big[f_o(p) - f_1(p)\big]exp\bigg(\int_o^x \frac{u_1}{D}dx'\bigg)\ ;\ (x < 0) \tag{4.134}$$

Uma solução similar para $x > 0$ explode em $x = \infty$ a menos que $f(x,p)$ seja simplesmente uma constante que podemos chamar $f_2(p)$. A continuidade através da frente de choque

então implica que $f_2(p)$ é o mesmo que o valor avaliado em (4.134) em $x = 0$, isto é, $f_o(p)$, portanto:

$$f(x,p) = f_2(p) = f_o(p)\ ;\ (x > 0) \tag{4.135}$$

Podemos assumir que o espectro inicial $f_1(p)$ seja dado. Ainda precisamos de uma condição mais para fixar $f_2(p)$. Blandford e Eichler obtém isso impondo que o fluxo de partículas seja contínuo através do choque para todos os p's.

Em nossa discussão até o momento, nós temos feito a hipótese de que o espalhamento partícula-onda mantém $f(p)$ isotrópico no referencial do plasma. No entanto, uma distribuição isotrópica no referencial do plasma é anisotrópica no referencial do choque, devido à transformação de Lorentz de velocidades. Nós desejamos escrever o momento no referencial K do plasma em termos do momento no referencial do choque K', o qual está se movendo na direção x à velocidade u com respeito a K. Isso é conseguido, para a menor ordem em u, pela transformação de Lorentz das componentes de $\vec{p}$:

$$p_x = \gamma m v_x = \gamma' m(v'_x - u)$$

$$p_\perp = \gamma m v_\perp = \gamma' m v'_\perp \tag{4.136}$$

Onde usamos o fato de que $\gamma = \gamma'$ na menor ordem em u/c e ignoramos termos da ordem u/c. Então

$$p^2 = (\gamma m v_x)^2 + (\gamma m v_\perp)^2 = (\gamma' m)^2(v'^2_x - 2v'_x u + u^2) + (\gamma' m v'_\perp)^2$$

$$= p'^2 - 2(\gamma' m)^2 v'_x u \tag{4.137}$$

Onde omitimos termos da ordem de u/v' ou maior porque assumimos que v' é relativístico e u não. Agora:

$$v'_x = v'\mu = \frac{v'^2\mu}{v'} \tag{4.138}$$

Onde $\mu = cos$ (ângulo entre $\vec{v}$ e a direção x), então:

$$p^2 = p'^2 - 2(\gamma' m v')^2 \frac{u\mu}{v'} = p'^2\big(1 - 2\frac{u\mu}{v'}\big) \tag{4.139}$$

Logo, para a ordem mais baixa em u/v':

$$p = p'\big(1 - \frac{u\mu}{v'}\big) = p' - \frac{p'u\mu}{v'} \tag{4.140}$$

Agora nós avaliamos o fluxo convectado no momento p em ambos os lados do choque, no referencial K' do choque. Temos

$$F_C(\vec{p}') = \frac{1}{4\pi}\int f'(\vec{p}')v'\mu d\Omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f'(\vec{p}')v'\mu d\mu \tag{4.141}$$

Onde $d\Omega = sen\alpha\, d\alpha\, d\phi$, com $0 \leq \phi \leq 2\pi$, e $0 \leq \alpha \leq \pi$. Uma vez que $f(\vec{p})$ é um invariante de Lorentz (como vimos anteriormente) e f é isotrópica no referencial do plasma K, nós concluímos que

$$f'(\vec{p}') = f(\vec{p}) = f(p) = f\big(p' - \frac{p'u\mu}{v'}\big) \tag{4.142}$$

Onde usamos (4.140). Expandindo (4.142) na menor ordem em u/v', temos

$$f'(\vec{p}') = f(p') - \frac{p'u\mu}{v'}\frac{\partial f}{\partial p'} \tag{4.143}$$

Logo, substituindo em (1.141):

$$F_C(p') = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{p'u\mu}{v'}\frac{\partial f}{\partial p'}v'\mu d\mu \tag{4.144}$$

Uma vez que o primeiro termo em (4.143) tem contribuição nula para o fluxo. A integral sobre $\mu^2 d\mu$ resulta 2/3 e

$$F_C(p') = -\frac{1}{3} u p' \frac{\partial f}{\partial p'} \tag{4.145}$$

Daqui por diante, retiraremos as "linhas", uma vez que todas as quantidades agora referir-se-ão ao referencial do choque.
Adicionamos o fluxo devido à difusão para obter o fluxo total:

$$F(p) = F_D + F_C = -D\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{3} u p \frac{\partial f}{\partial p} \tag{4.146}$$

Agora vamos ajustar esses fluxos em ambos os lados do choque. De (4.134), a qual se aplica à região (1), encontramos que:

$$F_1 = -D\left[(f_2 - f_1)\frac{\partial}{\partial x} exp\left(\int_o^x \frac{u_1}{D} dx'\right)\right]_{x=0} - \frac{1}{3} u_1 p (f_2' - f_1') e^{(\int_o^x \frac{u_1}{D} dx')_{x=0}}$$

$$-\frac{1}{3} u_1 p f_1' \tag{4.147}$$

Onde $f' = \partial f / \partial p$ ou:

$$F_1 = -u_1(f_2 - f_1) - \frac{1}{3} u_1 p (f_2' - f_1') - \frac{1}{3} u_1 p f_1'$$

$$= -u_1(f_2 - f_1 + \frac{1}{3} p f_2') \tag{4.148}$$

já que a exponencial = 1 em $x = 0$. Na região (2):

$$F_2 = -\frac{1}{3} u_2 p f_2' \tag{4.149}$$

Seguindo a literatura de aceleração em choques, denotaremos o crescimento em densidade ou razão de compressão por r:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = y = \frac{u_1}{u_2} = r \tag{4.150}$$

Fazendo $F_2 = F_1$ e

$$z = ln(p^q) \; ; \; q = \frac{3r}{r-1} \tag{4.151}$$

Implica uma equação diferencial para f_2:

$$\frac{df_2}{dz} + f_2 = f_1 \tag{4.152}$$

Para a qual a solução é

$$f_2 = e^{-z} \int e^{z'} f_1(z') dz' = qp^{-q} \int_o^p (p')^{q-1} f_1(p') dp' \tag{4.153}$$

uma expressão que pode ser avaliada para qualquer função de distribuição assumida no pré-choque, $f_1(p')$. Por exemplo, se

$$f(p') = A\delta(p' - p'_*) \tag{4.154}$$

Então

$$f_2 = 0 \; , \; p < p_*$$

$$f_2 = Aqp_*^{q-1} p^{-q} \; , \; p > p^* \tag{4.155}$$

O resultado importante é que, independentemente da natureza precisa da função de entrada, o processo de aceleração no choque tende a produzir uma distribuição de momento de lei- de-potência. O índice da lei-de-potência é

$$q = \frac{3r}{r-1} \tag{4.156}$$

Se o choque é fraco, $r \to 1$ e q é grande, correspondendo a relativamente pouca aceleração. Se o choque é forte, $r = y \to 4$ (veja eq. 4.57) e $q = 4$. Tenhamos em mente que o espectro de energia $N(E)$ difere do espectro de momentos porque $E = pc$ somente para partículas relativísticas, e porque há um fator do espaço de fase $4\pi p^2$. Então para partículas relativísticas:

$$N(E) = 4\pi p^2 f(p) \propto 4\pi A q p_*^{q-1} E^{2-q} \tag{4.157}$$

A qual tem a mesma forma de (4.98), com:

$$\sigma = q - 2 = \frac{r+2}{r-1} \tag{4.158}$$

Novamente, σ é previsto ser grande para choques fracos, e

$$\sigma \to 2 \tag{4.159}$$

quando o número de Mach $\to \infty$ *e* $r \to 4$. Enquanto não em exata concordância com as observações de raios-cósmicos ($\sigma = 2.6$), a equação acima é independente dos detalhes do mecanismo e é numericamente bem mais próxima do que a previsão da aceleração de Fermi de 2^a ordem ($\sigma = 200$). A aceleração por choque é portanto, um candidato razoável para a produção de partículas relativísticas em Astrofísica.

Apesar da derivação que fizemos, o leitor pode ainda ter dúvidas sobre o que está ocorrendo. A derivação alternativa esquematizada abaixo e derivada por Bell (1978 a,b) pode ser de ajuda. Primeiro, considere a probabilidade P de que uma partícula tendo cruzado uma vez o choque não irá retornar. Seja n_o o número de partículas com velocidade v, no choque. Elas estão sendo convectadas para longe do choque a uma velocidade líquida u_2, logo o

fluxo líquido para longe do choque é $n_o u_2$. Por outro lado, o fluxo total de partículas que atinge o choque é $\frac{1}{4} n_o v$ (uma vez que $< |v_x| >= \frac{1}{4} v$). Então

$$P = \frac{n_o u_2}{\frac{1}{4} n_o v} = \frac{4u_2}{v} = \frac{4u_1}{rv} \tag{4.160}$$

Cada partícula que cruza o choque experimenta um crescimento em momento quando ela troca dos espalhadores no pré-choque para os espalhadores no pós-choque. Tal como em (4.140), podemos demonstrar que:

$$\Delta p = -\frac{p\mu}{v} \Delta u = -\frac{p\mu}{v}(u_2 - u_1)$$

$$= \frac{p\mu u_1}{v}(1 - r^{-1}) \tag{4.161}$$

para cada cruzamento do choque. (É daqui que vem a natureza de 1^a ordem do processo). Então

$$\Delta lnp = \frac{\mu u_1}{v}(1 - r^{-1}) \tag{4.162}$$

Se avaliamos a média sobre todos os μ apropriados para o fluxo,

$$< \Delta lnp >= \frac{u_1}{v}(1 - r^{-1}) \frac{\int_o^1 \mu^2 d\mu}{\int_o^1 \mu d\mu} = \frac{2u_1(1 - r^{-1})}{3v} \tag{4.163}$$

para cada cruzamento de choque. Agora, lnp cresce estocasticamente com o número de cruzamentos pelo choque. Uma vez que ele cresce por um fator $2(< \Delta lnp >)$ para cada cruzamento completo de ida e volta, a mudança esperada em lnp após n cruzamentos completos é $2n < \Delta lnp >$.

Consideremos o que ocorre a N partículas injetadas no lado do pré-choque ("upstream"). Em n tentativas de cruzar o choque, a fração

$$-\frac{dN}{N} = nP \tag{4.164}$$

atravessa e é varrida fluxo abaixo no pós-choque ("downstream").

A mudança correspondente em $dlnp$ é

$$dlnp = 2n < \Delta lnp > \tag{4.165}$$

Eliminando n com a ajuda de (4.164), temos

$$\frac{dlnN}{dlnp} = -\frac{P}{2 < \Delta lnp >} \tag{4.166}$$

Então, usando (4.160) e (4.163), o espectro inteiro tem uma inclinação dada por

$$\sigma - 1 = \frac{P}{2 < \Delta lnp >} = \frac{\frac{4u_1}{rv}}{\frac{4}{3}\frac{u_1}{v}(1 - r^{-1})} = \frac{3}{r-1} \tag{4.167}$$

$$\sigma = \frac{3}{r-1} + 1 = \frac{r+2}{r-1} \tag{4.168}$$

Em concordância com (4.158).