- CAPÍTULO 3 -

ONDAS E INSTABILIDADES

Fluidos compressíveis comuns suportam ondas acústicas, e há também um número de instabilidades, como Rayleigh-Taylor, Kelvin-Helmholtz, e instabilidades térmicas nas quais a energia livre associada com densidades ou velocidades não uniformes é liberada. As mesmas instabilidades persistem de forma modificada em plasmas. Além destas, em plasmas surgem também modos de ondas conhecidos como ondas Alfvén. Tanto as instabilidades, como as ondas podem ser estudadas facilmente no regime linear, quando as perturbações são assumidas pequenas. Ondas correspondem a frequências reais, enquanto instabilidades correspondem a frequências complexas com a parte imaginária negativa.

3.1 Relação de Dispersão

As equações básicas são:
A equação de indução (com $\vec{v}_e = \vec{v}$):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0 \tag{3.1}$$

de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{3.2}$$

e de movimento:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{k_B}{\overline{m}\rho}\vec{\nabla}(\rho T) + \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} -$$

$$-\nu\left[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0 \tag{3.3}$$

As quais são suficientes para evoluir $\vec{B}$, ρ e $\vec{v}$ se T é conhecido. Em (3.3), nós denotamos $\xi/\rho = \nu$, sendo ν a viscosidade cinemática. Também substituímos $p = \rho k_B T/\overline{m}$. Para determinar T, precisamos da equação de calor (2.39) ou de conservação de energia (2.45). Aqui usaremos (2.39) e escreveremos S em termos de T e ρ usando a forma geral de (2.46), tal que:

$$S = \frac{k_B}{\overline{m}} ln\left(\frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho}\right) = \frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{1}{\gamma-1} lnT - ln\rho\right) \tag{3.4}$$

Onde γ é a razão entre os calores específicos $\gamma = c_p/c_v$. Para gás ideal monoatômico $\gamma = 5/3$, conforme temos utilizado até o momento. Mas γ pode ser, obviamente, diferente. Usando (3.4), (2.39) pode ser reescrita como:

$$\frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{1}{\gamma-1}\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\gamma-1}\rho\vec{v}.\vec{\nabla}T - T\frac{\partial \rho}{\partial t} - T\vec{v}.\vec{\nabla}\rho\right) -$$

$$-K\vec{\nabla}^2 T - \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 - \frac{c^2\eta}{(4\pi)^2}(\vec{\nabla}\times\vec{B})^2 + \rho\mathcal{L}(\rho,T) = 0 \tag{3.5}$$

Se $\vec{B}$, ρ, $\vec{v}$ e T são tomados constantes em toda parte, estas equações podem ser satisfeitas em todos os tempos com aqueles mesmos valores constantes. Indiquemos estes valores com subíndice 0. A equação de calor, no entanto, requer que $\mathcal{L}(\rho_o, T_o) = 0$; essa é a condição para que, para qualquer densidade pré-estabelecida, T_o ajuste-se para que as perdas radiativas igualem os ganhos. Em qualquer sistema astrofísico real $\vec{\nabla}\psi$ não se anula; para atingir um estado estático como aquele que desejamos discutir, a gravidade deve ser balanceada por forças de pressão ou magnéticas, as quais requerem gradientes, contrários à hipótese de quantidades constantes no estado não perturbado. Neste ponto, nós simplesmente assumimos que estes gradientes são pequenos e, portanto, nós podemos desprezar $\vec{\nabla}\psi$ também. Isso limita nosso estudo a perturbações com comprimentos de onda $<<$ que o tamanho do sistema (estrelas, galáxias, etc.) em estudo.

Assim, vamos considerar um estado de "ordem-zero", $(\vec{B}_o, \rho_o, \vec{v}_o, T_o)$ o qual é uniforme, e estudar perturbações desse estado do tipo

$$f(\vec{x},\psi) = f_o + f_1(\vec{x},t) + f_2(\vec{x},t) + ... \tag{3.6}$$

Onde f_1 é a perturbação de 1^a ordem, e nós vamos ignorar todas as perturbações de ordem superior, como $f_1^2, f_2, g_2^2, g_2, f_1 g_1$, etc. Uma vez que podemos tomar $\vec{v}_o = 0$ sem perda de generalidade, nós denotamos $\vec{v}_1$ simplesmente por $\vec{v}$. Se substituímos (3.6) em (3.1), (3.2), (3.3), e (3.5) e mantemos somente os termos que não se anulam ou são não desprezíveis, nós encontramos que:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - (\vec{B}_o.\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{B}_o(\vec{\nabla}.\vec{v}) - \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B}_1 = 0 \tag{3.7}$$

Note-se que o termo $(\vec{v}_o.\vec{\nabla})\vec{B}_1$ anula-se porque $\vec{v}_o = 0$. Similarmente, as outras equações tornam-se:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_o \vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{k_B}{\overline{m}}\vec{\nabla}T_1 + \frac{kT_o}{\overline{m}\rho_o}\vec{\nabla}\rho_1 + \frac{1}{4\pi\rho_o}\vec{B}_o \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) - \nu\left[\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right] = 0 \tag{3.9}$$

e

$$\frac{k_B}{\overline{m}}\left(\frac{\rho_o}{\gamma - 1}\frac{\partial T_1}{\partial t} - T_o\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) + \rho_o(\mathcal{L}_\rho \rho_1 + \mathcal{L}_T T_1) - K\nabla^2 T_1 = 0 \tag{3.10}$$

onde

$$\mathcal{L}_\rho \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}\right)_{T_o} \tag{3.11}$$

$$\mathcal{L}_T \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}\right)_{\rho_o} \tag{3.12}$$

Ambos avaliados para $(\rho, T) \equiv (\rho_o, T_o)$. $\mathcal{L}\rho$ e $\mathcal{L}_T$ são simplesmente valores característicos do estado de ordem-zero. Os valores de ν_M, ν, e K são também avaliados no estado de ordem-0. Ou seja, todos os coeficientes das equações acima são valores constantes pois são de ordem-0. Note-se que na equação de energia (3.10), nem o termo de dissipação viscosa ($\frac{1}{2\xi}\sigma'^2$), nem o termo de dissipação resistiva ($\alpha\eta(\vec{\nabla} \times \vec{B})^2$) entram porque são termos de 2^a ordem em $\vec{v}$ e $\vec{B}$, respectivamente, apesar de a viscosidade estar presente na equação de momentum em 1^a ordem e a dissipação resistiva entrar na equação de indução em 1^a ordem.

Do fato de que as eqs. (3.7) - (3.10) possuem coeficientes constantes, suas soluções são exponenciais da forma:

$$f_1(\vec{x}, t) = f_1 exp(nt + i\vec{k}.\vec{x}) \tag{3.13}$$

Ao escrever isto, estamos focalizando uma componente única de comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ da representação de Fourier de $f_1(\vec{x})$ válida em qualquer tempo, e estamos olhando implicitamente por valores positivos reais da "taxa-de-crescimento" n para representar uma instabilidade. No entanto, n pode ser imaginário, representando uma onda de amplitude constante, ou um complexo, representando uma onda amortecida ou crescente. Se f_1 é citado sem um argumento, então f_1 é a amplitude (complexa).

Nosso objetivo agora será determinar a relação de dispersão", $n(k)$. Considerando (3.13), podemos escrever.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(\vec{x}, t) = n f_1(\vec{x}, t) \tag{3.14}$$

$$\vec{\nabla} f_1(\vec{x}, t) = i\vec{k} f_1(\vec{x}, t) \tag{3.15}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{f_1}(\vec{x}, \vec{t}) = i\vec{k}.\vec{f_1}(\vec{x}, t) \tag{3.16}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f_1}(\vec{x}, t) = i\vec{k} \times \vec{f_1}(\vec{x}, t) \tag{3.17a}$$

$$\nabla^2 f_1(\vec{x}, t) = -k^2 f_1(\vec{x}, t) \tag{3.17b}$$

Substituíndo (3.13) - (3.17) na equação de calor (3.10), obtemos que:

$$\frac{T_1}{T_o} = \frac{\rho_1}{\rho_o}\left[\frac{\frac{k_B n}{\overline{m}} - \frac{\rho_o}{T_o}\mathcal{L}_\rho}{\frac{k_B n}{\overline{m}(\gamma-1)} + \mathcal{L}_T + \frac{Kk^2}{\rho_o}}\right] \tag{3.18}$$

Lembrando (para não fazer confusão) que:

k_B: cte de Boltzmann

K: coeficiente de condutividade térmica

k: número de onda que aparece em (3.13)

Tal que

$$\frac{p_1}{p_o} = \frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{T_1}{T_o} = \gamma\frac{\rho_1}{\rho_o}\left[\frac{\frac{k_B n}{\overline{m}(\gamma-1)} + \frac{1}{\gamma}(\mathcal{L}_T - \frac{\rho_o}{T_o}\mathcal{L}_\rho) + \frac{Kk^2}{\gamma\rho_o}}{\frac{k_B n}{\overline{m}}\frac{1}{\gamma-1} + \mathcal{L}_T + \frac{Kk^2}{\rho_o}}\right] \equiv \gamma\frac{\rho_1}{\rho_o}\alpha(n,k)$$

Ou seja,

$$\frac{p_1}{p_o} \equiv \gamma\alpha(n,k)\frac{\rho_1}{\rho_o} \tag{3.19}$$

onde usamos a equação de estado $p = \frac{\rho k_B T}{\overline{m}}$ e diferenciamos para obter os termos de 1^a ordem $T_1 = dT$ e $\rho_1 = d\rho$. Em (3.19) vemos que se $\mathcal{L}_\rho = \mathcal{L}_T = K = 0$, $\alpha(n,k) = 1$ para todos os n e k; isto é o que às vezes é chamado de caso adiabático, no qual $p \propto \rho^\gamma$ ou $lnp \propto \gamma ln\rho$. De (3.5), vemos que tais perturbações envolvem nenhuma variação de entropia (daí, o fluido ser adiabático). Examinamos α com mais detalhe abaixo. Note-se que, uma vez que α é uma função de n e de k, nenhuma solução do sistema completo de

equações para n pode ser obtida se não escrevermos todas as equações da mesma forma, isto é, usando (3.13) - (3.17). As outras equações ficam então (3.7 - 3.9):

$$n\vec{B}_1 - i(\vec{k}.\vec{B}_o)\vec{v} + i\vec{B}_o(\vec{k}.\vec{v}) + \nu_M k^2 \vec{B}_1 = 0 \tag{3.20}$$

$$n\frac{\rho_1}{\rho_o} + i\vec{k}.\vec{v} = 0 \tag{3.21}$$

e

$$n\vec{v} + i\gamma\frac{p_o}{\rho_o}\alpha\vec{k}\frac{\rho_1}{\rho_o} + \frac{i}{4\pi\rho_o}\vec{B}_o \times (\vec{k} \times \vec{B}_1) + \nu\big[k^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{k}(\vec{k}.\vec{v})\big] = 0 \tag{3.22}$$

Onde (3.19) foi usada para substituir T_1 em (3.9). Se eliminamos ρ_1 e B_1 de (3.22), usando (3.20) e (3.21), obtemos uma equação somente para $\vec{v}$:

$$n\vec{v} + \frac{\gamma\alpha v_s^2}{n}\vec{k}(\vec{k}.\vec{v}) - \frac{1}{4\pi\rho_o(n+\nu_M k^2)}\vec{B}_o \times \big[(\vec{k}\times\vec{v})(\vec{k}.\vec{B}_o) -$$

$$-(\vec{k}.\vec{v})(\vec{k}\times\vec{B}_o)\big] + \nu\big[k^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{k}(\vec{k}.\vec{v})\big] = 0 \tag{3.23}$$

onde definimos

$$v_s = \left(\frac{p_o}{\rho_o}\right)^{1/2} = \left(\frac{k_B T_o}{\overline{m}}\right)^{1/2} \tag{3.24}$$

Essa é, como veremos, a velocidade do som quando as perturbações são tais que possuem uma temperatura constante (velocidade do som isotérmica).

A eq. (3.23) é na verdade três equações para as três componentes de $\vec{v}$, nas quais as várias componentes são acopladas pelo campo magnético. É útil analisá-las em um sistema de coordenadas no qual o plano 1 - 3 contenha $\vec{k}$ e $\vec{B}_o$, com $\vec{k}$ ao longo do eixo 1 e o eixo 2 na direção de $\vec{k} \times \vec{B}_o$, como mostrado na figura.

Se θ é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{B}_o$, as quantidades que aparecem em (3.23) são:

$$\vec{k}.\vec{v} = kv_1 \tag{3.25}$$

$$\vec{k} \times \vec{v} = k(\hat{u}_3 v_2 - \hat{u}_2 v_3) \tag{3.26}$$

$$\vec{k}.\vec{B}_o = kB_o cos\theta \tag{3.27}$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_o = -kB_o sen\theta \hat{u}_2 \tag{3.28}$$

Para simplificar as coisas, é conveniente introduzirmos a velocidade "Alfvén":

$$v_A = \frac{B_o}{(4\pi\rho_o)^{1/2}} \tag{3.29}$$

(consistente com a notação do problema P2.1). Nós discutiremos logo o significado de v_A. Considerando as eqs. (3.25) - (3.29) acima, as três componentes (1, 2 e 3) da eq. (3.23) podem ser escritas como:

$$nv_1 + \frac{\gamma\alpha v_s^2 k^2}{n} v_1 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} sen\theta(-cos\theta v_3 + sen\theta v_1) +$$

$$\frac{4}{3}\nu k^2 v_1 = 0 \tag{3.30}$$

$$nv_2 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} cos^2\theta v_2 + \nu k^2 v_2 = 0 \tag{3.31}$$

$$nv_3 + \frac{k^2 v_A^2}{n + \nu_M k^2} cos\theta(cos\theta v_3 - sen\theta v_1) + \nu k^2 v_3 = 0 \tag{3.32}$$

Uma vez que estas equações são homogêneas, há soluções somente se o determinante dos coeficientes for nulo. O resultado corresponde à "relação de dispersão" a qual nos dá n em

função de k e de outros parâmetros. A seguir vamos estudar casos especiais da relação de dispersão.

3.2 Ondas Alfvén

De (3.31), v_2 não está acoplada às outras duas componentes de velocidade. Uma vez que v_2 é finito, seu coeficiente em (3.31) deve anular-se, logo temos a relação de dispersão:

$$n^2 + n(\nu + \nu_M)k^2 + k^2 v_A^2 cos^2\theta + \nu\nu_M k^4 = 0 \tag{3.33}$$

a qual é uma equação quadrática para n com soluções

$$n = \pm ikv_A cos\theta \left[1 - \frac{k^2(\nu_M - \nu)^2}{4v_A^2 cos^2\theta}\right]^{1/2} - \frac{1}{2}(\nu + \nu_M)k^2 \tag{3.34}$$

No limite que $k\nu << v_A$ e $k\nu_M << v_A$, (3.34) reduz-se a:

$$n = \pm ikv_A cos\theta \tag{3.35}$$

Desde que a dependência de v_2 (e das outras perturbações) é

$$exp(nt + i\vec{k}.\vec{x}) = exp(nt + ikx_1) = exp\left[ik(\pm v_A cos\theta t + x_1)\right] \tag{3.36}$$

(3.36) corresponde a ondas cujas velocidades de fase ao longo de $\vec{x}_1$ são ($v_\phi = \pm in/k$):

$$v_\phi = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_\phi = \mp v_A cos\theta = \mp \frac{B_o}{\sqrt{4\pi\rho_o}} cos\theta \tag{3.37}$$

Este modo, pela primeira vez descrito por Alfvén em 1953, é denominado de onda Alfvén. O movimento é transversal a ambos $\vec{k}$ e $\vec{B}_o$. Devido ao fato de ser transversal a $\vec{k}$, não há nenhuma compressão, logo nenhuma variação de pressão está associada a esse modo (de fato, como $\nabla.\vec{v} = i\vec{k}.\vec{v}_2 = 0$ nesse caso, isso implica que o fluido é incompressível para

essa solução). E devido ao fato de o movimento ser transversal a $\vec{B}$, as linhas de força são curvadas pelo movimento do plasma e haverá, portanto, uma força restauradora é exercida pelas linhas devido à tensão magnética (veja P. 3). Nesse caso, $v_\phi \propto v_A = (B_o^2/4\pi\rho)^{1/2}$ reforça a interpretação de que há analogia entre tensão magnética e tensão de uma corda: uma vez que $B_o^2/4\pi$ é a tensão da linha de campo e ρ_o a densidade de massa, do mesmo modo, sabemos que em uma corda tracionada a velocidade da onda é dada pela raiz quadrada da tensão dividido pela densidade de massa (por unidade de comprimento, ao invés de por unidade de volume se consideramos uma corda com secção de choque nula) (e.g., Shu, pg. 305).

Note que as ondas Alfvén são não dispersivas; v_ϕ é independente de k, tal como ondas acústicas. Entretanto, v_ϕ depende da direção; uma vez que apenas a componente de $\vec{B}$ ao longo de $\vec{k}$ é afetada, $v_\phi \propto cos\theta$.

Os termos em ν e ν_M representam amortecimento por viscosidade do fluido e magnética, respectivamente. Uma vez que o único comprimento no problema é

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

e a única velocidade é a v_A, podemos formular números de Reynolds característicos:

$$R_e = \frac{v_A \lambda}{\nu} = \frac{2\pi v_A}{k\nu} \tag{3.38}$$

e

$$R_{eM} = \frac{v_A \lambda}{\nu_M} = \frac{2\pi v_A}{k\nu_M} \tag{3.39}$$

O critério previamente estabelecido para se ignorar efeitos de amortecimento da onda (na eq. 3.34) pode então ser estabelecido na forma: $R_e >> 1$ e $R_{eM} >> 1$. A última condição traduz simplesmente a aproximação MHD ideal, enquanto que a primeira é a condição para um fluido não viscoso. De acordo com Spitzer (1962), pode-se mostrar que

$$\frac{\nu_M}{\nu} \sim 10^{29} \frac{\rho}{T^4} \tag{3.40}$$

Essa expressão pode ser $>> 1$ (como no caso da fotosfera solar) ou $<< 1$ (como na coroa solar), logo, não há nenhuma generalização fácil sobre qual termo é dominante.

Ondas Alfvén são de grande importância. Elas foram observadas em laboratório, na magnetosfera da Terra e no vento solar e, sem dúvida, têm um papel relevante em plasmas astrofísicos magnetizados em geral, como as coroas do sol e das estrelas. Alguns autores (e.g., Arons e Max) têm proposto que elas têm um papel relevante no suporte de nuvens interestelares contra o colapso gravitacional. Talvez o mais importante é que elas têm um papel chave na transmissão de forças, tal como as ondas acústicas o fazem em gases não-magnetizados. Assim, o fluido ao redor de um obstáculo, como um campo magnético planetário será completamente diferente, dependendo do fato de ele ser um fluido sub-Alfvénico ($v < v_A$) ou super-Alfvénico ($v > v_A$). No primeiro caso, as ondas Alfvén podem "avisar" o plasma vindouro de que um obstáculo está se aproximando, de modo que o fluido desvia ligeiramente. No último caso, as ondas não podem "avisar", e ondas de choque se formam. Note-se que a pressão magnética pode ser escrita como

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \tag{3.41}$$

enquanto que a força de curvatura em (2.10) fica:

$$\frac{B^2}{4\pi}\frac{\hat{n}}{\lambda_{cur}} = \rho v_A^2 \frac{\hat{n}}{\lambda_{cur}} \tag{3.42}$$

3.3 Ondas Magneto-acústicas

Vamos agora considerar movimentos nas direções 1 - 3 (veja Fig. da p. 7), os quais, em geral, possuem componentes de velocidade ao longo de $\vec{k}$ (e portanto envolvem compressão)

e através de $\vec{B}$ (e portanto o "stress" magnético está envolvido). Logo, devemos esperar um comportamento híbrido de onda magnética e acústica.

Ao contrário de ondas Alfvén puras, nas quais não havia compressão, e portanto, a temperatura era irrelevante, agora temos que lidar com compressão; pelo menos no caso adiabático, isso significa perturbação em temperatura. Para manter as coisas o mais simples possível, vamos assumir que os parâmetros são tais que não há quantidades significativas de calor sendo ganhas ou perdidas durante um período de onda, e portanto a entropia é conservada, e podemos colocar $\alpha = 1$ em (3.30).

Faremos também $\nu = \nu_M = 0$. Logo, (3.30) e (3.32) podem ser escritos como

$$(n^2 + \gamma k^2 v_S^2 + k^2 v_A^2 sen^2\theta)v_1 - k^2 v_A^2 sen\theta cos\theta v_3 = 0 \tag{3.43}$$

e

$$(n^2 + k^2 v_A^2 cos^2\theta)v_3 - k^2 v_A^2 sen\theta cos\theta v_1 = 0 \tag{3.44}$$

O anulamento do determinante dos coeficientes requer que a seguinte relação de dispersão seja satisfeita:

$$n^4 + k^2 n^2 (v_A^2 + \gamma v_S^2) + \gamma k^4 v_A^2 v_S^2 cos^2\theta = 0 \tag{3.45}$$

Esta é uma equação quadrática na qual $B^2 - 4AC > 0$, logo as raízes de n^2 são reais. Devido ao fato de que os coeficientes em (3.45) são todos positivos, as raízes de n^2:

$$n^2 = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

são ambas < 0. Logo, n é imaginário puro, o que significa que temos ondas! Escrevendo

$$v_\phi = \pm i\frac{n}{k} \tag{3.46}$$

para a velocidade de fase, v_ϕ satisfaz:

$$v_\phi^4 - (v_A^2 + \gamma v_S^2)v_\phi^2 + \gamma v_S^2 v_A^2 cos^2\theta = 0 \tag{3.47}$$

Vamos considerar os casos especiais:

(i) $\theta = 0$ $(\vec{k}//\vec{B}_o)$

Nesse caso, a relação de dispersão (3.47) pode ser fatorada em

$$(v_\phi^2 - v_A^2)(v_\phi^2 - \gamma v_S^2) = 0 \tag{3.48}$$

De modo que uma das raízes é:

$$v_\phi = \pm v_A \tag{3.49}$$

correspondendo a ondas Alfvén propagando ao longo da linha de campo. (3.49), que é também a solução de 3.44 (com $\vec{v} = \vec{v}_3$) representa um modo no qual o movimento é perpendicular a ambos $\vec{k}$ e $\vec{B}$ e com $\vec{k}//\vec{B}_o$. Trata-se de uma solução semelhante a (3.37), só que em (3.37) $\vec{k}$ e $\vec{B}_o$ não eram paralelos entre si e somente a componente de $\vec{B}_o$ ao longo de $\vec{k}$, i.e., $B_o\, cos\theta$, era afetada. De um modo geral então, para que haja o surgimento de uma onda Alfvén, é necessário que haja pelo menos uma componente do movimento do plasma perpendicular a $\vec{k}$ e uma componente de $\vec{B}_o//\vec{k}$.

O outro modo em (3.48) envolve movimentos compressivos ao longo de $\vec{k}$ ($\vec{v} = \vec{v}_1$, veja 3.43). Uma vez que neste caso especial (onde $\theta = 0$) os movimentos são também ao longo de $\vec{B}$, não há nenhum acoplamento com $\vec{B}_o$, e temos apenas uma onda acústica ordinária (adiabática) com

$$v_\phi = \pm\gamma^{1/2} v_S = \pm\left(\frac{\gamma k_B T}{\overline{m}}\right)^{1/2} \tag{3.50}$$

Sumarizando, para $\theta = 0$, há uma onda acústica com velocidade de perturbação ($\vec{v}_1$) ao longo da polarização $\vec{k}$, e duas ondas Alfvén com $\vec{k}$ paralelo a $\vec{B}$ em direções ortogonais (isto é, com velocidades de perturbação, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_2$, perpendiculares a $\vec{B}$).

(ii) $\theta = \pi/2 (\vec{k} \perp \vec{B}_o)$

Nesse caso, podemos fatorar a relação de dispersão (3.47) em:

$$v_\phi^2 \left[v_\phi^2 - (v_A^2 + \gamma v_S^2) \right] = 0 \tag{3.51}$$

Uma raiz é (veja também eq. 3.43):

$$v_\phi = \pm (v_A + \gamma v_S^2)^{1/2} \tag{3.52}$$

A qual representa uma onda magnetossônica (ou magneto-acústica). Se escrevemos

$$p_{tot} = \frac{B^2}{8\pi} + p \tag{3.53}$$

e avaliamos

$$\left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S = \left(\gamma \frac{p_o}{\rho_o}\right) + \frac{2}{8\pi} B_o \frac{\partial B}{\partial \rho} \tag{3.54}$$

e usamos (1.48) para dizer que $B/\rho = \text{cte}$, neste caso, porque $\vec{B}_o . \vec{k} = 0$, então

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{B_o}{\rho_o} \tag{3.55}$$

Então

$$\left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S = \gamma v_S^2 + \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o} = \gamma v_S^2 + v_A^2 \tag{3.56}$$

De modo que (3.52) pode ser escrito como

$$v_\phi = \left(\frac{\partial p_{tot}}{\partial \rho}\right)_S^{1/2} \tag{3.57}$$

A onda magnetoacústica então representa uma onda acústica na qual os movimentos compressivos encontram resistência não apenas da pressão térmica mas também da pressão magnética associada com a compressão perpendicular às linhas magnéticas.

O modo restante, com $\vec{v}_\phi = 0$ (3.51) (veja também 3.44 para $cos\theta = 0$), parece estranho até que se perceba que movimentos transversais a $\vec{k}$ mas paralelos a $\vec{B}$ ($\vec{v} = \vec{v}_3$) não experimentam qualquer força restauradora!

Agora, vamos discutir as velocidades de fase dos modos magneto-acústicos para $\underline{\theta \text{ geral}}$. Para esse fim, vamos provar o lema seguinte: em um ângulo θ qualquer, que não seja 0 ou $\pi/2$, um modo magnetoacústico viaja mais rápido que uma onda Alfvén pura, e o outro viaja mais devagar. Para provar isto, seja $f(v_\phi) = 0$ a relação de dispersão (3.47), perguntemo-nos agora se $v_\phi = v_A cos\theta$ pode ser solução dessa equação. Encontramos que

$$f(v_A cos\theta) = -v_A^4 sen^2\theta cos^2\theta \tag{3.58}$$

O qual é < 0 para $\theta \neq 0$ ou $\pi/2$. Então, $v_A cos\theta$ não é uma solução, de modo que ou um ou ambos os modos devem viajar ou mais rápido ou mais devagar. Para decidir quais dessas possibilidades se aplicam, escrevemos a solução da relação de dispersão (3.47) como

$$2v_\phi^2 = (v_A^2 + \gamma v_S^2)\left[1 \pm \left(1 - \frac{4\gamma v_S^2 v_A^2 cos^2\theta}{(\gamma v_S^2 + v_A^2)^2}\right)^{1/2}\right] \tag{3.59}$$

E agora expandindo para pequenos $cos\theta$ (θ próximo de $\pi/2$), obtemos

$$v_\phi^2 \sim v_A^2 + \gamma v_S^2, \frac{\gamma v_S^2 v_A^2 cos^2\theta}{\gamma v_S^2 + v_A^2} \tag{3.60}$$

Há então dois modos. O 1^o modo (1) é o modo magnetoacústico que estudamos anteriormente, para o qual $v_\phi^2(1) > v_A^2 cos^2\theta \to 0$, o valor do modo Alfvén puro. O 2^o modo (2) tem

$$\frac{v_\phi^2(2)}{v_A^2 cos^2\theta} \sim \frac{\gamma v_S^2}{\gamma v_S^2 + v_A^2} \leq 1 \tag{3.61}$$

De modo que, o modo (1) é mais rápido e o modo (2) é mais lento que o modo Alfvén para $\theta \to \pi/2$. Uma vez que $v_\phi(\theta)$ nunca pode igualar $v_A cos\theta$, o valor de v_ϕ (1) deve ser maior que $v_A cos\theta$ e v_ϕ (2) deve ser menor que $v_A cos\theta$ para todo θ; isto é, há um modo rápido e um modo lento para todo θ. (Deixo como exercício em P.3 o comportamento desses modos quando $\theta \to 0$.)

3.4 Instabilidade Parker-Rayleigh-Taylor

Em mecânica dos fluidos ordinária, um fluido denso suportado por um fluido rarefeito (por ex., um copo d'água de ponta-cabeça, de modo que a água é suportada por ar comprimido) é instável. A razão para isso não é difícil de se enxergar; uma pequena perturbação da superfície permite que o fluido denso migre para baixo, reduzindo sua energia potencial, enquanto que o fluido mais rarefeito que ele desloca para cima não ganha tanta energia potencial. Essa situação ocorre em astrofísica também, por exemplo, nas camadas das supernovas mais expandidas. Por estarem bem expandidas possuem baixa densidade e são empurradas na direção do gás externo, mais denso. A aceleração de dentro para fora do envelope da supernova em expansão, é equivalente a um campo gravitacional que atua para dentro e temos então um fluido denso suportado por um de baixa densidade.

Um campo magnético pode para alguns objetivos ser visualizado como um fluido de densidade desprezível permeando um plasma e exercendo uma pressão. Portanto, se um plasma é suportado verticalmente por um campo magnético horizontal não homogêneo que exerça um gradiente de pressão vertical, podemos esperar que a Instabilidade Rayleigh-Taylor desenvolva-se sob certas condições.

Esta situação aparece em casos como, um disco galáctico ou um disco de acresção, onde pelo menos parte do suporte vertical contra a gravidade é suprida pela pressão magnética. Apesar de havermos mostrado no problema 1 da lista 2 (P2.1) que é possível construir um estado de equilíbrio deste tipo para um disco de acresção, não há garantia de que tal estado seja estável contra pequenas perturbações. Iremos mostrar aqui que, sob certas condições, um estado similar não é estável. Isso nos levará a explorar soluções de "loop magnético" para descrever os efeitos de campos magnéticos em discos.

Parker (1966) primeiro construiu soluções de equilíbrio para um campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{u}_z$. Seguindo seus passos, vamos descrever uma solução de equilíbrio de ordem-zero incluindo ambos pressão do gás e pressão magnética. Por simplicidade nós assumimos que a razão entre as pressões do gás e magnética é independente de z, então

$$\frac{B_o^2}{8\pi} = \beta p_o \tag{3.62}$$

onde β é independente de z, e $\vec{B}_o = B_o \hat{u}_g$ é o campo magnético horizontal. Nós também assumiremos T_o independente de z, tal que

$$p_o = \rho_o v_{So}^2 \tag{3.63}$$

onde

$$v_{So}^2 = \frac{kT_o}{\overline{m}} \tag{3.64}$$

Segue daí que

$$v_{Ao}^2 = \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o} = 2\beta\frac{p_o}{\rho_o} = 2\beta v_{So}^2 \tag{3.65}$$

A componente z da equação de momento (2.5) será

$$-\frac{d}{dz}\left(p_o + \frac{B_o^2}{8\pi}\right) - \rho_o g = -v_{So}^2(1+\beta)\frac{d\rho_o}{dz} - \rho_o g = 0 \tag{3.66}$$

Cuja solução é:

$$\rho_o = \rho_o(0)e^{-z/H} \tag{3.67}$$

onde

$$H = \frac{(1+\beta)v_{oS}^2}{g} = \frac{v_{oS}^2 + v_{Ao}^2/2}{g} \tag{3.68}$$

Mostrando que o suporte contra a força gravitacional é devido a ambas as pressões: a térmica e a magnética. Note que B_o é proporcional a $e^{-z/2H}$ e, portanto, decai mais

lentamente que $\rho_o(z)$ e, como $p_o \propto \rho_o$, $p_o \propto e^{-z/H}$. (Note-se que no presente caso, como H é maior, p e ρ decrescem mais lentamente que no caso estudado em (2.64), (2.65). Naquele caso estudamos a componente de $\vec{B}$ ao longo do campo gravitacional e vimos que naquele caso, a força gravitacional é suportada somente pelo gradiente da pressão do gás, já que não há gradiente da pressão magnética naquela direção. Já no presente caso, a presença de $\vec{B} \perp \vec{g}$, introduz gradiente de pressão magnética na direção de $\vec{g}$ e portanto, aumenta o gradiente de pressão total contra a gravidade.)

Agora, queremos estudar perturbações com movimentos no plano $y - z$, no qual o campo magnético é forçado a participar porque $\vec{v} \times \vec{B} \neq 0$. Como $\vec{B}$ está no plano $y - z$, $\vec{B}$ permanece nesse plano. Nesses casos, pode-se representar $\vec{B}$ pelos potenciais de Euler $\lambda = A$ e $\mu = x$, tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} A \times \vec{\nabla} x = \vec{\nabla} A \times \hat{u}_x = \vec{\nabla} \times (A \hat{u}_x) \tag{3.69}$$

(já que $\vec{\nabla}_x \hat{u}_x = 0$).

Logo:

$$\vec{A} = A \hat{u}_x \tag{3.70}$$

é um potencial vetor. De (3.69), vemos que:

$$\vec{B} . \vec{\nabla} A = 0 \tag{3.71}$$

e A é constante ao longo da linha de força. O seu significado físico pode ser compreendido notando-se que

$$\vec{\nabla} A = \hat{u}_x \times \vec{B} \tag{3.72}$$

de (3.69), e calculando

$$dA = \vec{\nabla} A.d\vec{\xi} = (\vec{u}_x \times \vec{B}).d\vec{\xi} = (\vec{B} \times d\vec{\xi}).\hat{u}_x = Bd\xi \tag{3.73}$$

onde ξ é uma coordenada $\perp \vec{B}$. Logo, $\vec{A}$ é o fluxo magnético por unidade de comprimento (na direção x) entre a linha de força em questão e outra linha de força.

Como em (2.80), o congelamento do fluxo é expresso na forma:

$$\frac{d_e A}{dt} = \frac{dA}{dt} = 0 \tag{3.74}$$

Onde assumimos $\vec{v}_e = \vec{v}$. Alternativamente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -(\vec{v}.\vec{\nabla})A = -\vec{v}.(\vec{u}_x \times \vec{B}) = \vec{u}_x.(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{3.75}$$

de (3.72).

Pode-se computar a força magnética em termos de A a partir de:

$$\frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{B}) = \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right] = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} A \times \vec{u}_x)\right] \times \vec{B}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}(\nabla^2 A)\vec{u}_x \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 A \vec{\nabla} A \tag{3.76}$$

Onde usamos (3.69) e (3.72). Usando esta informação e desprezando processos dissipativos, podemos escrever as equações básicas na forma

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{u}_x.(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{g} + \frac{1}{4\pi\rho}\nabla^2 A\vec{\nabla}A = 0 \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}p - \gamma\frac{p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \gamma\frac{p}{\rho}\vec{v}.\vec{\nabla}\rho = 0 \tag{3.80}$$

as quais são suplementadas por (3.69), expressando-se $\vec{B}$ em termos de A. (Devido ao fato de que $\vec{v}$ é de 1^a ordem, somente B_o entrará em (3.77).) (A equação 3.80 vem da hipótese de que $\rho T dS/dt = 0$ com S dado por 3.4).

Quando perturbamos as equações (3.77) - (3.80), emergem termos que não entravam em (3.7) - (3.9), o que se deve ao fato de que aqui o estado de ordem-zero é não-uniforme. Se denotamos H^{-1} por k_o, as derivadas das quantidades de ordem-0 ρ_o, p_o e B_o^2 satisfazem $\partial_z \rho_o = -k_o\rho_o$, etc. (veja eqs. 3.67 e 3.68). Uma vez que

$$\vec{\nabla}A_o = \vec{u}_x \times \vec{B}_o = B_o\vec{u}_z \tag{3.81}$$

Onde usamos que $\vec{B}_o = B_o\vec{u}_y$

De (3.81) temos

$$\nabla^2 A_o = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}A_o) = \frac{dB_o}{dz} = B_o\frac{dlnB_o}{dz} = -\frac{1}{2}k_o B_o \tag{3.82}$$

(onde usamos o fato de que $B_o(z) \propto e^{-z/2Ho}$). Uma vez que os coeficientes nas equações de perturbação dependem de z e somente z, podemos fazer análise de Fourier em y mas não em z. As equações correspondentes a (3.77) - (3.80) serão:

$$nA_1 + v_z B_o = 0 \tag{3.83}$$

$$n\rho_1 - k_o\rho_o v_z + \rho_o(ik_y v_y + \partial_z v_z) = 0 \tag{3.84}$$

$$n\rho_o v_y + ik_y p_1 - \frac{ik_o k_y}{8\pi} B_o A_1 = 0 \tag{3.85}$$

$$n\rho_o v_z + \partial_z p_1 + \rho_1 g + \frac{B_o}{4\pi}\bigg[-\frac{1}{2}k_o\partial_z A_1 + (\partial_z^2 - k_y^2)A_1\bigg] = 0 \tag{3.86}$$

$$np_1 - k_o p_o v_z - n\gamma\frac{p_o}{\rho_o}\rho_1 + \gamma k_o p_o v_z = 0 \tag{3.87}$$

Pode-se eliminar v_z entre (3.83) e (3.87) para encontrar

$$\frac{p_1}{p_o} = \gamma\frac{\rho_1}{\rho_o} + (\gamma - 1)\frac{k_o}{B_o}A_1 \tag{3.88}$$

e injetar esse resultado em (3.85) e (3.86) para obter equações contendo somente v_y, v_z, ρ_1, $A_1, e\ v_z$ pode ser eliminado de (3.84), (3.85), e (3.86) para obter três equações em ρ_1, v_y, e A_1. Uso repetido de (3.83) é exigido. Seguindo Parker, vamos escolher nossas variáveis como sendo $\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1$, $B_o v_y$, e A_1. Logo, (3.84), (3.85) e (3.86) podem ser escritas como

$$n\bigg(\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1\bigg) + ik_y(B_o v_y) - n(\partial_z - \frac{1}{2}k_o)A_1 = 0 \tag{3.89}$$

$$ik_y\gamma\bigg(\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1\bigg) + \frac{n}{v_S^2}(B_o v_y) - ik_o k_y(1 + \beta - \gamma)A_1 = 0 \tag{3.90}$$

$$\bigg[(1+\beta)k_o + \gamma(\partial_z - \frac{1}{2}k_o\bigg)\bigg]\bigg(\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1\bigg) +$$

$$+\bigg[-\frac{n^2}{v_S^2} - k_o\beta\partial_z + 2\beta(\partial_z^2 - k_y^2) + (\gamma - 1)k_o(\partial_z - \frac{1}{2}k_o)\bigg]A_1 = 0 \tag{3.91}$$

Onde $v_S^2 \equiv v_{So}^2$ é definido por (3.24). Remarcavelmente, Parker descobriu que os coeficientes nessas equações descrevendo $\frac{B_o}{\rho_o}\rho_1, B_o v_y$, e A_1 são constantes, logo há soluções exponenciais para eles da forma $exp(ik_z z)$, então $\partial_z = ik_z$. A relação de dispersão que resulta estabelecendo-se que o determinante dos coeficientes do sistema acima seja nulo, é

$$n^4 + n^2 v_S^2(\gamma + 2\beta)(k^2 + \tfrac{1}{4}k_o^2) + k_y^2 v_S^4\{2\beta\gamma k^2 + \left[\gamma(1 + \tfrac{3}{2}\beta) - (1+\beta)^2\right]k_o^2\} = 0 \qquad (3.92)$$

Onde

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2 \qquad (3.93)$$

Se agora consideramos o caso $g = 0,\ k_o = H^{-1} = g/v_S^2(1+\beta) = 0$, a eq. (3.92) reduz-se a (3.45) que descreve ondas MHD polarizadas no plano $y - z$, com θ sendo o ângulo entre $\vec{k} = (k_y, k_z)$ e $\vec{B}_o = (B_y, 0)$. Logo, na ausência de gravidade ($g = 0$) há somente soluções estáveis (as ondas MHD).

No outro extremo, podemos considerar uma atmosfera isotérmica com $B_o = 0$. Então (3.92) reduz-se a:

$$n^4 + \gamma v_S^2(k^2 + \frac{1}{4}k_o^2)n^2 + (\gamma - 1)k_o^2 k^2 v_S^4 cos^2\theta = 0 \qquad (3.94)$$

(onde fizemos $k_y = kcos\theta$) onde θ é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{u}_y$. Este problema clássico (puramente hidrodinâmico) foi discutido por Lamb (1945); coisas interessantes acontecem quando $\vec{k} \sim \vec{k}_o$, ou $\lambda \sim H$, pois nesse caso o período da onda

$$P = \frac{\lambda}{v_S} \sim \frac{H}{v_S} = \frac{v_S}{g} \qquad (3.95)$$

e a aceleração da gravidade em um período, gP, é comparável a v_S. No limite $k >> k_o$ ($\lambda << H$) as duas raízes de (3.94) são

$$n^{'} = \pm i\,\gamma^{1/2} k v_S \qquad (3.96)$$

correspondendo a uma onda acústica de alta-frequência que é pouco afetada pela gravidade, e

$$n^{''} = \pm i\left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{g}{H}\right]^{1/2} cos\theta \tag{3.97}$$

a qual é uma oscilação localizada cujo significado não é tão óbvio. A frequência em (3.97) é denominada de Brunt-Viasäla e é independente de k. Podemos entender o que ela representa por meio de uma análise aproximada.

Considere uma pequena porção de gás em equilíbrio de pressão com suas vizinhanças, consistente com a hipótese de que k é grande. Se essa parcela for deslocada para baixo de uma distância ξ, a pressão externa correspondente (nessa nova posição) será

$$\Delta p = p\frac{\xi}{H} \tag{3.98}$$

Como o equilíbrio de pressão é prontamente estabelecido através da pequena porção (ou parcela), a densidade na porção cresce, portanto, de

$$\delta\rho = \frac{1}{\gamma}\rho\frac{\Delta p}{p} = \frac{\rho}{\gamma}\frac{\xi}{H} \tag{3.99}$$

A densidade fora da porção é maior (se $\gamma > 1$):

$$\Delta\rho = \rho\frac{\xi}{H} \tag{3.100}$$

A força de empuxo para cima por unidade de volume é então

$$g(\Delta\rho - \delta\rho) = g\rho\frac{\xi}{H}(1-\frac{1}{\gamma}) = g\rho\frac{\xi}{H}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \tag{3.101}$$

Igualando (3.101) a $-\rho\ddot{\xi}$ dá:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{g}{H}\xi \tag{3.102}$$

cuja solução é o movimento harmônico simples com a frequência de Brunt-Viasäla dada por (3.97). (o $cos\theta$ não é explicado nessa aproximação, porque a perturbação foi aqui assumida paralela ao movimento).

Note-se que temos assumido de um modo geral tacitamente que $\gamma > 1$. Se $\gamma < 1$, então a oscilação (3.97) cresceria exponencialmente e a atmosfera seria conecnvectivamente instável. Apesar de para gases ordinários $\gamma > 1$, notamos, a partir da natureza da derivação feita, que o "1" vem do fato de que a atmosfera perturbada foi assumida isotérmica, com um γ efetivo, definido como $dlogp/dlog\rho$, na atmosfera, igual a 1. Portanto, esperamos que se o mesmo cálculo fosse feito para um caso mais geral onde o valor local de $\frac{dlogp}{dlog\rho}$ não fosse arbitrariamente assumido como = 1, mas ao invés, calculado a partir da estrutura térmica da atmosfera, o que é, por sua vez, usualmente determinado do aquecimento do fluido, o critério geral para a estabilidade seria

$$\gamma > \frac{dlogp}{dlog\rho} \tag{3.103}$$

o qual é reconhecido como o critério de Schwarzchild para a estabilidade da atmosfera contra convecção térmica (Clayton 1983, p. 253). Devido ao fato de que em nosso problema $dlogp/dlog\rho = 1$ por hipótese, a atmosfera é convectivamente estável se $\gamma > 1$, ou seja, para todos os valores realísticos de γ. (E será instável se (3.103) não valer, ou no nosso estudo, se $\gamma < 1$, pois nesse caso, a eq. (3.102) leva a um crescimento exponencial da perturbação.) Concluímos então que se $B_o = 0$, mas $g \neq 0$, a atmosfera é estável em geral. Uma vez que anteriormente mostramos que se $g = 0$, mas $B_o \neq 0$, a atmosfera também é estável, podemos tentar adivinhar que se $g \neq 0$ e $B_o \neq 0$, a atmosfera também será estável. Isso não é verdade, como veremos!

Vamos voltar ao caso geral, descrito pela eq. (3.92). Omitiremos a prova bem longa de que as raízes (3.92) são reais; nesse caso n^2 é ou positivo (instabilidade) ou negativo (estabilidade). Vamos escrever (3.92) na forma

$$n^4 + Bn^2 + C = 0 \tag{3.104}$$

onde $B > 0$. Desde que a soma das raízes é $-B < 0$, pelo menos uma das raízes de n^2 (o qual é real), deve ser negativa, correspondendo a uma solução estável. Desde que o produto das raízes é C, $C > 0$ implica que ambas as raízes são negativas, e o sistema é estável. Inversamente, se $C < 0$, exatamente uma raiz é positiva, e o sistema é instável. O critério para instabilidade pode ser escrito como ($C < 0$):

$$2\beta\gamma\left(k^2 + \frac{1}{4}k_o^2\right) - (1 + \beta - \gamma)(1 + \beta)k_o^2 < 0 \tag{3.105}$$

ou

$$\left(\frac{2k}{k_o}\right)^2 < \frac{2(1 + \beta - \gamma)(1 + \beta) - \beta\gamma}{\beta\gamma} = f(\beta, \gamma) \tag{3.106}$$

Note que a estabilidade do sistema a perturbações para um dado θ são independentes de θ, e também para um dado β e γ, a instabilidade é favorecida para comprimentos-de-onda extremamente grandes (ou k pequenos). Mesmo para comprimentos-de-onda extremamente grandes, a instabilidade requer $f > 0$. Para $\gamma = 5/3$, verificamos que isso requer que

$$2\beta^2 - \beta - \frac{4}{3} > 0 \quad \text{ou} \quad \beta > 1.1 \tag{3.107}$$

o que mostra que a instabilidade exige uma pressão magnética comparável à pressão térmica.

Qual a natureza da instabilidade? Imagine que em alguma área, a atmosfera em estudo expanda um pouco. Isso requer energia gravitacional, mas energia magnética é liberada à medida que as linhas de força expandem com o gás, aliviando a pressão magnética. Além do mais, o gás pode dragar as linhas do campo (na parte inferior) para lugares mais baixos, liberando energia gravitacional e permitindo que o campo magnético (na parte superior)

expanda ainda mais, tal como na instabilidade Rayleigh-Taylor clássica. Quanto mais rápido o campo expande, mais fácil será para o gás mover para baixo as linhas de campo (na parte inferior), e o processo se auto-alimenta sucessivamente, levando a um crescimento exponencial do mesmo.

Entretanto, há certas tendências contrárias: à medida que o gás expande para fora, o campo magnético associado é recurvado para baixo, logo, mais expansão irá exigir realização de trabalho contra a tensão magnética; além do mais, o gás já no fundo do vale irá resistir a mais compressão, realizando trabalho "pdv" contra ela. Ambos os efeitos são tanto mais fortes quanto menor o comprimento-de-onda, explicando porque a instabilidade é maior para comprimentos-de-onda maiores (k's menores).

3.5 O Estado para o qual tende a Instabilidade Parker-Rayleigh-Taylor

Uma vez que o plasma de uma atmosfera suportada principalmente por um campo magnético horizontal é instável, esta não será encontrada na natureza. De acordo com Parker (1979), a instabilidade por ele descrita irá formar "loops" de campo gravitacionalmente ancorado por "vales" contendo a maior parte do gás. Ele argumenta que mais instabilidade irá agir em escalas cada vez menores, até que comece a ocorrer reconexão magnética, fazendo com que o congelamento do fluxo seja violado e o fluxo de campo magnético escape então do gás. Mouschovias (1974) estudou os primeiros estágios desse processo antes de se iniciar a reconexão e descobriu estados de equilíbrio que não são instáveis de acordo com ele.

Como o método de Mouschovias é de ampla aplicabilidade para se encontrar equilíbrios magnéticos em Astronomia, vamos discutí-lo aqui; voltaremos a falar de reconexão mais adiante no curso.

O método de Mouschovias aplica-se se houver uma simetria espacial (e.g., translacional ou axial) a qual permita ignorar uma coordenada. A idéia chave é que se o congelamento do fluxo é obedecido, há sempre a mesma quantidade de massa dm associada com um elemento de fluxo magnético $d\Phi$. Uma vez que estas quantidades sejam estabelecidas,

pode-se procurar por vários estados de equilíbrio com o mesmo valor de dm associado com $d\Phi$ de um tubo de força. No contexto presente, o equilíbrio horizontalmente estratificado de (3.66) possui uma razão de dm para $d\Phi$ dada por

$$\frac{dm}{d\Phi} = \frac{\rho_o dz}{B_o dz} = \frac{\rho_o}{(8\pi\beta\rho_o v_S^2)^{1/2}} = \left(\frac{\rho_o}{8\pi\beta}\right)^{1/2} \frac{1}{v_S} = \frac{1}{v_S}\left[\frac{\rho(o)}{8\pi\beta}\right]^{1/2} e^{-z/2H} \tag{3.108}$$

Como esse equilíbrio é instável, ele evoluirá para uma outra configuração com o mesmo $dm/d\Phi$, mas estável.

Essa aproximação levanta a questão, "o que determina $dm/d\Phi$ em primeiro lugar?" Conforme discutimos antes, isso não é conhecido, pois enquanto a conservação de fluxo se aplica, $dm/d\Phi$ não pode mudar. Discutiremos esta questão em outro capítulo.

Nosso ponto de partida é a equação de congelamento do fluxo para um sistema com uma coordenada desprezível, na forma da eq. (3.74):

$$\frac{dA}{dt} = 0 \tag{3.109}$$

Onde fizemos $\vec{v}_e = \vec{v}$, e A é a magnitude da componente do potencial vetor ao longo da coordenada ignorada, no caso a coordenada x. Também sabemos de (3.71) que $\vec{B}.\vec{\nabla}A = 0$, de modo que A é constante nas linhas de força. Logo, cada linha de força é marcada com um valor diferente de A, o qual é levado com o fluido.

Podemos escrever a equação de equilíbrio em termos de A a partir de (3.79):

$$\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\psi + \frac{1}{4\pi}\nabla^2 A\vec{\nabla}A = 0 \tag{3.110}$$

O equilíbrio original era descrito por (3.81) por

$$\vec{\nabla}A_o = \vec{u}_x \times \vec{B}_o = \vec{u}_x \times (B_o\vec{u}_y) = B_o\vec{u}_z \tag{3.111}$$

De modo que da componente z dessa equação,

$$\frac{dA_o}{dz} = B_o = B_o(o)e^{-z/2H} \tag{3.112}$$

Integrando

$$A_o = \int_z^\infty B_o dz = -2HB_o(o)e^{-z/2H} \tag{3.113}$$

onde impusemos a condição $A(\infty) = 0$. (3.113) nos permite calcular A para qualquer linha de força na configuração inicial, e devido ao fato de que A é conservado, a linha de força será sempre descrita pelo mesmo valor de A. De (3.111) vemos que

$$\nabla^2 A = \vec{\nabla}.(B_o\hat{u}_z) = \frac{dB_o}{dz} \tag{3.114}$$

De modo que no estado inicial, a componente z de (3.110) será:

$$\frac{d}{dz}\left(p_o + \frac{B_o^2}{8\pi}\right) + \rho_o g = 0 \tag{3.115}$$

em concordância com (3.66). Então, a solução para $\rho_o(z)$ é (3.67), e para $B_o(z)$ é (3.112), onde

$$B_o = (8\pi\beta p_o)^{1/2} \tag{3.116}$$

Agora, voltamos para a solução de (3.110) em circunstâncias mais gerais, e olhamos para um novo estado de equilíbrio que postulamos existir se o estado original é instável. Desde que $\vec{B}.\vec{\nabla}A = 0$, vemos que

$$\vec{B}.\vec{\nabla}p + \rho\vec{B}.\vec{\nabla}\psi = \rho(\frac{1}{\rho}\vec{B}.\vec{\nabla}p + \vec{B}.\vec{\nabla}\psi) = 0 \tag{3.117}$$

Para progredir um pouco, precisamos especificar como p depende de ρ. Continuaremos a assumir a relação isotérmica

$$p = \rho v_S^2 \tag{3.118}$$

Onde v_S é uma constante que não varia ao longo da evolução do estado inicial para o final. Logo $p = p(\rho)$ e

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\int\frac{dp}{\rho} \tag{3.119}$$

Então (3.117) pode ser escrito

$$\vec{B}.\vec{\nabla}(\int\frac{dp}{\rho} + \psi) = 0 \tag{3.120}$$

mostrando que $\int\frac{dp}{\rho} + \psi$ é constante nas linhas de força no equilíbrio. Uma vez que A é uma constante nas linhas de força em todos os instantes,

$$\int\frac{dp}{\rho} + \psi = \text{função}(A) \tag{3.121}$$

No caso isotérmico, $\int\frac{dp}{\rho} = v_S^2 ln\rho$, então se escrevemos a função de A como $v_S^2 lnq(A)$, teremos

$$v_S^2 ln\rho + \psi = v_S^2 lnq(A) \tag{3.122}$$

Logo

$$q(A) = \rho exp(\psi/v_S^2) \tag{3.123}$$

Se injetamos (3.122) em (3.110), obtemos

$$\vec{\nabla}(v_S^2 ln\rho + \psi) = \frac{1}{\rho}(\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\psi) = -\frac{1}{4\pi\rho}\nabla^2 A\vec{\nabla}A \tag{3.124}$$

$$= v_S^2\frac{\vec{\nabla}q(A)}{q} = v_S^2\frac{1}{q}\frac{dq}{dA}\vec{\nabla}A$$

Logo, de (3.123):

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi\rho v_S^2}{q}\frac{dq}{dA} = -4\pi v_S^2 exp\big(-\frac{\psi}{v_S^2}\big)\frac{dq}{dA} \tag{3.125}$$

Uma equação não-linear para A que pode ser resolvida para uma dada função $q(A)$.

Como encontrar $q(A)$? Vamos nos referir ao equilíbrio inicial pelo sub-índice 0:

$$q(A) = \rho_o e^{\psi/v_S^2} = \rho_o(o)e^{-z/H}e^{(gz/v_S^2)} \tag{3.126}$$

Onde

$$H = (1+\beta)\frac{kT}{\overline{m}g} = (1+\beta)\frac{v_S^2}{g} \tag{3.127}$$

Então

$$q(A) = \rho_o exp\big[-z/H + (1+\beta)z/H\big]$$

$$= \rho_o(0)exp(\beta z/H) \tag{3.128}$$

Desde que A é dado por (3.113):

$$exp\left(\frac{z}{H}\right) = \left(\frac{2HB_o(0)}{A}\right)^2 \tag{3.129}$$

e

$$q(A) = \rho_o(o)\left[\frac{2HB_o(0)}{A}\right]^{2\beta} \tag{3.130}$$

Para resolver (3.125), Mouschovias "chutou" $A(y,z)$ que correspondia a um campo magnético periódico em y, avaliou $q(A)$ de (3.130), e calculou dq/dA. Ele usou um

resolvedor de Poisson para obter uma nova estimativa de $A(y, z)$ de (3.125). Naturalmente, a segunda estimativa não concordava normalmente com a primeira, de modo que ele tomava uma média ponderada da 1^a estimativa e da 2^a, e continuava a iteração até que o valor de "output" de A diferisse por menos de 1% do "input".

Seus resultados estão esquematizados na figura acima. Ele verificou que seu "chute" inicial de A tinha um comprimento-de-onda em y que podia ser instável de acordo com (3.106), o novo equilíbrio diferia do original, possuindo uma estrutura de "loop-vale", enquanto que se ele tivesse um comprimento-de-onda que fosse estável de acordo com (3.106), o novo equilíbrio era simplesmente o velho equilíbrio, suportando a visão de que o método estava encontrando o equilíbrio estável. Nenhuma evidência foi observada de que a estrutura de "loop-vale" que ele encontrou fosse realmente instável.

O método é ligeiramente mais geral do que indicamos. Suponha que o sistema seja limitado por uma caixa finita na direção y, digamos $-\lambda/2 < y < \lambda/2$. Então, a massa por unidade de comprimento na direção x entre as linhas de força A e $A + dA$ é

$$dm = \int_{y=-\lambda/2}^{y=\lambda/2} \rho ds d\xi = dA \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{\rho}{B} ds \tag{3.131}$$

Onde ξ é uma coordenada $\perp \vec{B}$ e usamos (3.73); s é o comprimento do arco ao longo da linha de força. Agora, usando (3.72) e (3.123), isso pode ser escrito

$$\frac{dm}{dA} = q(A) \int_{y=-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{exp(-\psi/v_S^2)}{\mid \vec{\nabla} A \mid} ds \tag{3.132}$$

Isto pode ser avaliado para cada valor de A para uma dada configuração qualquer, e $q(A)$ calculado em termos de dm/dA.

Finalmente, um comentário sobre energia. Vamos usar (2.45) com $v_e = v = \eta = \sigma' = Q = R = 0$ e o termo da pilha de Biermann nulo. Se a fronteira inferior $z = 0$ no problema de Parker é caracterizado por $v_n = B_n = 0$, podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[T + U + M + \Omega\big] = 0 \tag{3.133}$$

tal que a energia total

$$E = T + W \tag{3.134}$$

onde $W = U + M + \Omega$ é uma energia potencial efetiva que depende somente do estado presente, e não da velocidade, e é conservada. Segue-se que se T_o, a energia cinética inicial no estado inicial é 0, então T_1 no estado final será

$$T_1 = W_o - W_1 \tag{3.135}$$

Logo, a evolução para um estado final pode ocorrer ($T_1 > 0$) somente se

$$W_1 < W_o \tag{3.136}$$

e a energia potencial do estado final for menor que aquela do estado inicial, ou, em outras palavras, se há liberação de energia. Mouschovias (1974) verificou que este era o caso para todas as situações nas quais o estado inicial era instável à formação do estado final. Uma vez que o mesmo argumento pode ser aplicado ao estado (1), ele pode ser instável à formação de outro estado (2), se $W_2 < W_1$.