- CAPÍTULO 2 -

FORÇA MAGNÉTICA

Campos magnéticos armazenam energia de acordo com a equação de densidade de energia

$$U_M = \frac{B^2}{8\pi} \tag{2.1}$$

e liberam essa energia realizando trabalho sobre o plasma, ou ganham energia quando o plasma realiza trabalho sobre o campo. É esse processo de troca que dá origem à atividade solar, aos jatos magnetizados, etc.

Já a densidade de energia armazenada pelo campo elétrico, $U_E = E^2/8\pi$, é, em plasmas cósmicos, em geral, não importante. Isso se deve ao fato de que o termo $\frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c}$ na eq. (1.58) é em geral pequeno. Mas, em regiões de reconexão, onde o termo $\frac{\eta c}{4\pi}\nabla \times B$ de (1.58) é não desprezível, $\vec{E}$ e portanto, U_E serão significativos também.

2.1 Equação de movimento do plasma e o stress magnético

Tal como fizemos para os elétrons, podemos escrever uma equação de movimento aproximada para os íons:

$$n_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla} p_i + n_i m_i \vec{g} + Z e n_i \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B} \right) + \vec{P}_{ie} \tag{2.2}$$

(2.2) pode ser simplificada utilizando-se o fato de que, de acordo com a 2^a lei de Newton, $P_{ie} = -P_{ei}$, o qual, de acordo com a eq. (1.12) é dado por (desprezando-se a aceleração dos elétrons):

$$\vec{P}_{ie} = -\vec{P}_{ei} = -\vec{\nabla} p_e + n_e m_e \vec{g} - n_e e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B} \right) \tag{2.3}$$

substituindo (2.3) em (2.2):

$$n_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla}(p_i + p_e) + (n_e m_e + n_i m_i)\vec{g} + (Zen_i - en_e)\vec{E} +$$

$$+\frac{1}{c}(Zen_i\vec{v}_i - en_e\vec{v}_e) \times \vec{B} \tag{2.4}$$

Devido à neutralidade de carga podemos desprezar o termo em $\vec{E}$. O coeficiente do termo $\vec{B}$ é simplesmente a densidade de corrente $\vec{J}$ (eq. 1.17), e o coeficiente do termo em $\vec{g}$ é ρ. Ou seja:

$$Zen_i \simeq en_e \qquad \text{(neutralidade da carga)}$$
$$Zen_i\vec{v}_i - en_e\vec{v}_e = \vec{J} \simeq Zen_i(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$
$$\rho = n_e m_e + n_i m_i \simeq n_i m_i \qquad \text{(desde que } m_e << m_i)$$

Nós também já vimos anteriormente que $\vec{v}_i \simeq \vec{v}$, a velocidade média do plasma, desse modo d/dt em (2.4), o qual segue os íons, pode ser tomado como seguindo o plasma como um todo. Portanto, (2.4) pode ser escrita como:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B} \tag{2.5}$$

Onde

$$p = p_e + p_i = (n_e + n_i)kT = (Z+1)n_i kT$$

$$p = (Z+1)\rho kT/m_i = \rho kT/\bar{m}$$

onde assumimos que elétrons e ions alcançam o equilíbrio térmico rapidamente de modo que $T_e \simeq T_i = T$, e onde introduzimos a massa efetiva por partícula, $\bar{m} = m_i/(1+Z)$. Note-se que nos meios astrofísicos o hidrogênio é em geral o elemento mais abundante e desta forma, em muitos problemas pode-se assumir simplesmente $m_i \simeq m_H$. Note-se também que no caso de um plasma de gás de hidrogênio puro completamente ionizado: $Z = 1$ e $\bar{m} = m_H/2$.

Podemos também escrever a equação de continuidade para ρ:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\vec{\nabla}.\vec{v} \tag{2.6}$$

e note-se que as eqs. (1.38), (2.5) e (2.6) quando suplementadas por uma equação de energia para atualizar a pressão p, permitem-nos atualizar $\vec{B}, \vec{v}$ e ρ e portanto resolver um problema em que os valores iniciais são conhecidos. Falaremos da equação de energia mais tarde, após examinarmos outras formas da densidade de força magnética sobre o plasma $\vec{J} \times \vec{B}/c$ na eq. (2.5).

Usando a lei de Ampère (eq. 1.30):

$$\frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \tag{2.7}$$

Para interpretarmos o 1^o termo de (2.7), vamos escrever

$$\vec{B} = B\vec{u} \tag{2.8}$$

Onde $\vec{u}$ é o vetor unidade ao longo de $\vec{B}$. Então

$$(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B} = B\frac{d}{ds}(B\vec{u}) = B^2\frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{u}B\frac{dB}{ds}$$

$$= B^2\frac{\vec{n}}{\lambda} + \vec{\nabla}_{//}\left(\frac{1}{2}B^2\right) \tag{2.9}$$

Onde $\vec{n}$ é o vetor unitário direcionado para o centro local de curvatura da linha de força e λ e o raio local da curvatura. Substituindo (2.9) em (2.7), obtemos

$$\frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{B}) = \frac{B^2}{4\pi}\frac{\vec{n}}{\lambda} + \vec{\nabla}_{//}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

$$= \frac{B^2}{4\pi}\frac{\vec{n}}{\lambda} - (\vec{\nabla} - \vec{\nabla}_{//})\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

$$= \frac{B^2}{4\pi}\frac{\vec{n}}{\lambda} - \vec{\nabla}_{\perp}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) \tag{2.10}$$

Onde $\vec{\nabla}_{\perp}$ é a componente do gradiente $\perp$ a $\vec{B}$. Ambos os termos do lado direito de (2.10) são $\perp$ a $\vec{B}$, assim como $\vec{J} \times \vec{B}$; o mesmo não é verdade de (2.7). Estamos agora prontos para interpretar (2.10): o 1^o termo do lado direito mostra que o campo magnético tende a resistir ao encurvamento, como as cordas de um violão, esse termo de força age no sentido de diminuir a curvatura ou a tensão aplicada sobre a linha de força; esse termo é por isso denominado de tensão magnética. Já, o 2^o termo da direita indica que o campo tende a expandir na direção perpendicular devido a um gradiente de pressão. Este é portanto denominado o termo de gradiente de pressão magnética. Um exemplo interessante é o campo magnético de dipolo. Trata-se de uma configuração em equilíbrio onde as forças de tensão (voltadas para o centro de curvatura) e de pressão (apontando para fora) em cada ponto se cancelam mutuamente, de modo que $(\vec{J} \times \vec{B})/c$ é perfeitamente nula. Note-se também que para uma configuração de campo magnético onde as linhas de força são paralelas, ou seja, tem curvatura nula ($\lambda = infinito$), o termo de tensão é nulo.

A interpretação acima é confirmada dando-se uma olhada em uma das componentes da força $\vec{J} \times \vec{B}/c$:

$$\frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{B})_i = \frac{1}{4\pi}B_j\partial_j B_i - \frac{1}{8\pi}\partial_i(B^2)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\partial_j(B_iB_j) - \partial_j\big(\delta_{ij}\frac{1}{2}B^2\big)\right]$$

$$= -\partial_j\left[-\frac{1}{4\pi}B_iB_j + \frac{1}{8\pi}\delta_{ij}B^2\right] \tag{2.11}$$

(veja Jackson p. 605), Jackson mostra que a expressão nos colchetes

$$T_{ij} = \delta_{ij}\frac{B^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi}B_iB_j \tag{2.12}$$

é o tensor de stress do campo eletromagnético com $\vec{E} = 0$. Lembre-se que força/vol. = div (stress) porque este último é na verdade o fluxo de momentum. T_{ij} representa o fluxo de momentum i na direção j. Logo, o 2^o termo de (2.11) representa um "stress" positivo e isotrópico, i.e., uma pressão. Para vermos o significado do 1^o termo, vamos adotar um sistema de coordenadas tal que $\vec{B} = (B, 0, 0)$. Nesse caso, a única componente não nula de $B_i B_j$ é 11, resultando para T_{11}:

$$T_{11} = \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B^2}{4\pi} = -\frac{B^2}{8\pi}$$

O que significa que uma tensão $B^2/4\pi$ ao longo das linhas de força é duas vezes a pressão naquela direção. Esta interpretação é bem consistente com a eq. (2.11). Vamos usar ambas as interpretações nos problemas. Notamos que, embora o tensor tenha componente não nula ao longo de $\vec{B}$ (i.e., T_{11}), a componente da forç a de Lorentz na direção de $\vec{B}$ é nula, conforme esperado, em concordância com a eq. (2.11).

2.2 Equação de energia ou Equação de calor

O ponto de partida para esta discussão é o teorema de Poynting, o qual é derivado diretamente das equações de Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \nabla.\left[\frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})\right] = -\vec{J}.\vec{E} \tag{2.13}$$

O lado esquerdo de (2.13) corresponde à forma "standard" de conservação de energia. Apesar de o lado direito não parecer corresponder a uma condição de conservação, veremos que em MHD ele realmente corresponde. No processo de demonstração desse fato, encontraremos uma equação de energia que nos permitirá obter a evolução da temperatura e, portanto, da pressão, no tempo. Isso aliás é necessário já que o lado direito da equação de movimento depende do conhecimento da pressão.

O cálculo é longo, mas tanto quanto eu saiba, não costuma aparecer em muitos livros. Usando a eq. (1.20):

$$\vec{J}.\vec{E} = \vec{J}.\Big[-\frac{1}{c}(\vec{v}_e \times \vec{B}) - \frac{1}{n_e e}\vec{\nabla} p_e + \eta \vec{J}\Big] \tag{2.14}$$

Onde omitimos $m_e\vec{g}/e$ porque é um termo da ordem de m_e. No 1^o termo do lado direito podemos escrever (veja 1.17 e 1.44):

$$\vec{v}_e = \vec{v}_i - (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \simeq \vec{v} - \frac{\vec{J}}{n_e e} \tag{2.15}$$

De modo que

$$-\frac{1}{c}\vec{J}.(\vec{v}_e \times \vec{B}) = -\frac{1}{c}\vec{J}.(\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{n_e e c}\vec{J}.(\vec{J} \times \vec{B}) \tag{2.16}$$

O 2^o termo em (2.16) se anula e o primeiro termo pode ser escrito como $\vec{v}.[(\vec{J} \times \vec{B})/c]$.

Logo

$$\vec{J}.\vec{E} = \vec{v}.\big(\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c}\big) - \frac{\vec{J}.\vec{\nabla} p_e}{n_e e} + \eta J^2 \tag{2.17}$$

Agora, precisamos da eq. de movimento dos íons (2.5) para eliminar $(\vec{J} \times B)/c$. Antes, porém, para generalizar (2.5) vamos incluir nela os efeitos de viscosidade (cinemática), então:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p - \rho\vec{\nabla}\psi + \frac{1}{2}(\vec{J} \times \vec{B}) + \vec{F}_\nu \tag{2.18}$$

Onde

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\psi \tag{2.19}$$

E ψ é o potencial gravitacional independente do tempo. E

$$\vec{F_\nu} = \xi\big[\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\big] \tag{2.20}$$

é a densidade de força viscosa (Landau e Lifshitz, p. 45) expressa em termos do coeficiente de viscosidade dinâmica ξ (estamos usando um símbolo não convencional para a viscosidade a fim de não confundí-lo com η, a resistividade elétrica). A eq. (2.18) nos permite tratar ondas de choque nas quais as forças viscosas são muito importantes.

Resolvendo (2.18) para $(\vec{J}\times\vec{B})/c$ e injetando a equação resultante em (2.17):

$$\vec{J}.\vec{E} = \vec{v}.\left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\psi - \vec{F_\nu}\right) - \frac{\vec{J}.\vec{\nabla}p_e}{n_e e} + \eta J^2$$

$$= \rho\frac{d}{dt}\big(\frac{1}{2}v^2\big) + \vec{v}.\vec{\nabla}p + \rho\vec{v}.\vec{\nabla}\psi - \vec{v}.\vec{F_\nu} - \frac{\vec{J}.\vec{\nabla}p_e}{n_e e} + \eta J^2 \tag{2.21}$$

Para prosseguir, necessitamos do lema que estabelece que para qualquer função f:

$$\rho\frac{df}{dt} = \rho\frac{\partial f}{\partial t} + \rho\vec{v}.\vec{\nabla}f = \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) - f\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}f) - f\vec{\nabla}.(\rho\vec{v})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}f) \tag{2.22}$$

Uma vez que:

$$-f\frac{\partial\rho}{\partial t} - f\vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = -f\big[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v})\big] = 0$$

Onde o termo nos colchetes corresponde à eq. de continuidade da densidade e é, portanto, identicamente nulo. Vamos aplicar (2.22) ao 1^o termo de (2.21) e também escrever o segundo termo como:

$$\vec{v}.\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}.(\vec{v}p) - p\vec{\nabla}.\vec{v} = \vec{\nabla}.(\vec{v}p) + \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\vec{v}.\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}.(\vec{v}p) - \rho p\frac{dV}{dt} \tag{2.23}$$

Onde $V = \frac{1}{\rho}$ é o volume específico e onde usamos o fato de que $\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$. Vamos também usar o lema (2.22) no 3^o termo de (2.21) para escrever

$$\rho\vec{v}.\vec{\nabla}\psi = \rho\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}\psi) \tag{2.24}$$

Onde a 1^a igualdade é válida porque $\partial\psi/\partial t = 0$. Logo, substituindo as eqs. acima em (2.21):

$$\vec{J}.\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{p}{\rho}\right)\right] - \rho p\frac{dV}{dt} -$$

$$-\vec{v}.F_\nu - \frac{\vec{J}.\vec{\nabla}p_e}{n_e e} + \eta J^2 \tag{2.25}$$

Agora, da 1^a e 2^a leis da termodinâmica,

$$p\frac{dV}{dt} = T\frac{dS}{dt} - \frac{dU}{dt} \tag{2.26}$$

onde T é a temperatura, S é a entropia por unidade de massa e U é a energia interna por unidade de massa. Novamente, usando (2.22), encontramos

$$\vec{J}.\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + U\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + H\right)\right] - \rho T\frac{dS}{dt} -$$

$$-\vec{v}.\vec{F}_\nu - \frac{\vec{J}.\vec{\nabla}p_e}{n_e e} + \eta J^2 \tag{2.27}$$

Onde $H = U + \frac{p}{\rho}$ é a entalpia por unidade de massa.

Agora, consideremos $\vec{v}.\vec{F}_\nu$. Nesse caso, é útil introduzirmos o tensor de stress viscoso σ'_{ij} (Landau e Lifshitz, p. 45),

$$\sigma'_{ij} = \xi(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}.\vec{v}) \tag{2.28}$$

Tomando o divergente desse tensor para obter uma densidade de força, verificamos que é exatamente o $\vec{F}_\nu$ definido em (2.20):

$$\partial_j \sigma'_{ij} = \xi(\partial_i \vec{\nabla}.\vec{v} + \vec{\nabla}^2 v_i - \frac{2}{3}\partial_i \vec{\nabla}.\vec{v})$$

$$= \xi\left[\nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})\right]_i = \vec{F}_{\nu i} \tag{2.29}$$

Então

$$\vec{v}.\vec{F}_\nu = v_i \partial_j \sigma'_{ij} = \partial_j(v_i \sigma'_{ij}) - (\partial_j v_i)\sigma'_{ij}$$

$$= \vec{\nabla}.(\vec{v}.\sigma') - \frac{1}{2\xi}(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}) \tag{2.30}$$

onde σ' é o tensor (σ_{ij}) e a prova do último passo de (2.30) é deixada para o leitor como exercício.

Então (2.27) torna-se:

$$\vec{J}.\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + U\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + H\right) - \vec{v}.\sigma'\right] +$$

$$-\rho T\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 + \eta J^2 - \frac{\vec{J}.\vec{\nabla}p_e}{n_e e} \tag{2.31}$$

Quando injetamos a eq. acima em (2.13):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + U\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}) + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + H\right) - \vec{v}.\sigma'\right]$$

$$= \rho T \frac{dS}{dt} - \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 - \eta J^2 + \frac{\vec{J}.\vec{\nabla} p_e}{n_e e} \tag{2.32}$$

O último termo é o resultado da inclusão da pressão eletrônica na lei de Ohm (eq. 1.20; veja também 2.17). Na circunstância especial de que a bateria de Biermann em (1.32) se anula

$$\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} p_e = 0 \tag{2.33}$$

(de modo que as superfícies de nível de n_e e p_e coincidem), então p_e é uma função somente de n_e (o gás de elétrons e "barotrópico" nesse caso) e, nesse caso, o último termo de (2.32) pode ser escrito como uma divergência:

$$\frac{\vec{J}.\vec{\nabla} p_e}{n_e e} = \frac{1}{e}\vec{J}.\vec{\nabla} \int \frac{dp_e}{n_e} = \vec{\nabla}.\left[\frac{\vec{J}}{e}\int \frac{dp_e}{n_e}\right] \tag{2.34}$$

Uma vez que $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$ (eq. 1.30). Então (2.34) pode ser colocada no lado esquedo de (2.32), dando

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + U\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}) +\right.$$

$$\left. +\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + H) - \vec{v}.\sigma' - \frac{\vec{J}}{e}\int \frac{dp_e}{n_e}\right] =\right.$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} - \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 - \eta J^2 \tag{2.35}$$

Dois efeitos dissipativos, viscosidade e resistividade, estão incluídos no lado direito da equação. Mais duas outras formas de dissipação irreversíveis podem ser incluídas. Se

$$\vec{Q} = -K\vec{\nabla} T \tag{2.36}$$

é o fluxo de calor condutivo, onde K é o coeficiente de condutividade térmica, a contribuição correspondente para o termo $\rho T dS/dt$ é

$$-\vec{\nabla}.\vec{Q} = K\nabla^2 T \tag{2.37}$$

Se a profundidade óptica do elemento de plasma ao infinito é pequena, a contribuição da perda de energia por calor radiativo para $\rho T dS/dt$ pode ser escrita como

$$-\vec{\nabla}.\vec{R} = -\rho\mathcal{L}(\rho, T) \tag{2.38}$$

Onde $\mathcal{L}$ corresponde à taxa de perda radiativa por unidade de massa e $\vec{R}$ é o vetor fluxo radiativo. Agora estamos prontos para escrever a eq. de calor

$$\rho T\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2\xi}(\sigma')^2 + \eta J^2 + k\nabla^2 T - \rho\mathcal{L}(\rho, T) \tag{2.39}$$

Se injetarmos a eq. (2.39) em (2.35), e usarmos (2.37) e (2.38) para escrevermos a condução de calor e o termo radiativo como divergências, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + U\right) + \vec{\nabla}.\left[\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}) + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2} + \psi + H\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\vec{v}.\sigma' - \frac{\vec{J}}{e}\int\frac{dp_e}{n_e} + \vec{Q} + \vec{R}\right]\right] = 0 \tag{2.40}$$

E nossa equação de conservação de energia está provada. Note-se no entanto que (2.40) vale estritamente somente se o termo da pilha de Biermann se anula. Não é claro como a conservação de energia seria modificada se o termo de Biermann fôsse incluído; talvez haja um termo correspondente de produção de entropia que deva ser incluído. Na prática, essa distinção não é em geral importante, pois notamos que a razão entre o termo em $\vec{J}$ e o em $\vec{v}p$ (contido em $H = U + p/\rho$, na eq. 2.40):

$$\frac{\frac{\vec{J}p_e}{n_e e}}{vp} = \frac{\mid \vec{v} - \vec{v}_e \mid p_e}{vp} \sim \frac{\mid \vec{v} - \vec{v}_e \mid}{v} \tag{2.41}$$

uma vez que $p_e = O(p)$. Conforme vimos antes $\mid \vec{v} - \vec{v}_e \mid << \vec{v}$, em geral, e portanto, o termo em $\vec{J}$ pode ser desprezado.

A importância da eq. de energia (2.40) reside no fato de que a mesma nos permite evoluir a temperatura do sistema, pois

$$U = \frac{3}{2}\frac{kT}{\overline{m}} \tag{2.42}$$

e a entalpia é dada por

$$H = U + \frac{p}{\rho} = \frac{3}{2}\frac{kT}{\overline{m}} + \frac{kT}{\overline{m}} = \frac{5kT}{2\overline{m}} \tag{2.43}$$

Em MHD ideal, desprezamos $E^2/B^2 \sim v_e^2/c^2$ (veja eq. 1.51) e podemos reescrever o vetor de Poynting na forma:

$$\frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{4\pi}\Big[- (\vec{v}_e \times \vec{B}) \times \vec{B} + c\eta \vec{J} \times \vec{B}\Big] =$$

$$= \frac{B^2}{4\pi}\vec{v}_e - \frac{\vec{v}_e.\vec{B}}{4\pi}\vec{B} + \frac{c\eta}{4\pi}\vec{J} \times \vec{B} \tag{2.44}$$

Então, (2.40) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{3kT}{2\overline{m}}\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\frac{B^2}{4\pi}\vec{v}_e - \frac{\vec{v}_e.\vec{B}}{4\pi}\vec{B} + \frac{c\eta}{4\pi}\vec{J} \times \vec{B} + \right.$$

$$\left. + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + \frac{5kT}{2\overline{m}}\right) - \vec{v}.\sigma' - \frac{\vec{J}}{e}\int \frac{dp_e}{n_e} + \vec{Q} + \vec{R}\right] = 0 \tag{2.45}$$

As quatro variáveis fundamentais são B, ρ, v e T. A inspeção do termo de divergência mostra que ele pode ser avaliado em qualquer instante se essas variáveis são conhecidas

em toda parte do sistema. Exceções aparentes são: $\vec{v}_e$, o qual pode ser encontrado a partir de $\vec{v}$ e $\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{B}$ (eq. 1.44); ψ, o potencial gravitacional que assumimos ser dado; σ', que pode ser computado a partir das derivadas de $\vec{v}$ (eq. 2.28); $p_e = n_e kT \approx Z\rho kT/m_i$; $\vec{Q} = -k\vec{\nabla}T$; e $\vec{R}$, mas só precisamos realmente do $\vec{\nabla}.\vec{R} = \rho\mathcal{L}(\rho, T)$, o qual é também conhecido a priori.

Similarmente, todas as derivadas temporais implícitas no 1^o termo de (2.45) podem ser avaliadas de outras equações: $\partial\vec{B}/\partial t$ da eq. de indução, $\partial\rho/\partial t$ da eq. de continuidade, e $\partial\vec{v}/\partial t$ da eq. de movimento. Logo, $\partial T/\partial t$ pode ser resolvido a partir de (2.45) e temos quatro equações para evoluir $\vec{B}, \rho, \vec{v}$ e T, como queríamos!

Há um outro modo de se resolver $\partial T/\partial t$. Lembremos que a entropia por unidade de massa de um gás ideal é

$$S = \frac{k}{\overline{m}} ln\left(\frac{T^{3/2}}{\rho}\right) \tag{2.46}$$

Logo, uma vez que o lado direito da equação de calor (2.39) também pode ser avaliado a partir dos valores correntes de $\rho, \vec{v}, T$ e $\vec{B}$, podemos ver essa equação também como uma equação para $\partial T/\partial t$. Veremos mais tarde que, no tratamento de ondas de choque, ambas as equações, isto é, a eq. de calor (2.39) e a eq. de energia (2.46) são necessárias.

2.3 Campos Potenciais e Campos "Force-Free"

Suponha que em uma região, a densidade de corrente $\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{B}$ se anule, então

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \tag{2.47}$$

E $\vec{B}$ pode então ser escrito como

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\phi \tag{2.48}$$

naquela região, ou seja, $\vec{B}$ é um campo potencial nesse caso. Configurações de campo potencial possuem a menor energia magnética de todas as configurações de campo possíveis satisfazendo as mesmas condições de contorno! Para ver para QUAIS condições de contorno essa afirmação é verdadeira, vamos considerar um campo potencial $\vec{B}_o = \vec{\nabla}\phi$ e um campo arbitrário $\vec{B}$.

Consideremos

$$\int_v (\vec{B} - \vec{B}_o)^2 d^3x = \int_V (B^2 - 2\vec{B}.\nabla\phi + \vec{B}_o.\vec{\nabla}\phi) d^3x \tag{2.49}$$

Usando que $\vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{B}_o = 0$, calculemos a divergência de:

$$\vec{\nabla}.\left[\left(2\vec{B} - \vec{B}_o\right)\phi\right] = \vec{\nabla}\phi.(2\vec{B} - \vec{B}_o) + \phi\vec{\nabla}.(2\vec{B} - \vec{B}_o)$$

onde o 2^o termo se anula.

Substituindo a igualdade acima em (2.49) (2^o membro):

$$\int_V B^2 d^3x - \int_V \vec{\nabla}\phi.(-\vec{B}_o + 2\vec{B}) d^3x = \int_V B^2 d^3x - \int_V \vec{\nabla}.\left[(2\vec{B} - \vec{B}_o)\phi\right] d^3x$$

Aplicando o teorema da divergência no 2^o termo do 2^o membro da equação acima, encontramos que (2.49) pode ser reescrita como:

$$\int_V (\vec{B} - \vec{B}_o)^2 d^3x = \int_V B^2 d^3x - \int_S \phi(2\vec{B} - \vec{B}_o).d\vec{S} \tag{2.50}$$

Onde S é a superfície fechada que envolve o volume V. É neste ponto que entram as condições de contorno! Se estipulamos que $\vec{B}$ e $\vec{B}_o$ têm a mesma componente normal de S, então $\vec{B}.d\vec{S} = \vec{B}_o.d\vec{S}$ e

$$(2\vec{B} - \vec{B}_o).d\vec{S} = \vec{B}_o.d\vec{S} \tag{2.51}$$

E

$$\int_V (\vec{B} - \vec{B}_o)^2 d^3x = \int_V B^2 d^3x - \int_S \phi \vec{B}_o . d\vec{S} = \int_V B^2 d^3x - \int_V \vec{\nabla} . (\vec{B}_o \phi) d^3x \qquad (2.52)$$

onde usamos o teorema da divergência novamente. Mas,

$$\vec{\nabla} . (\vec{B}_o \phi) = \vec{B}_o . \vec{\nabla} \phi = B_o^2 \qquad (2.53)$$

Logo

$$\int_V (\vec{B} - \vec{B}_o)^2 d^3x = \int_V (B^2 - B_o^2) d^3x \qquad (2.54)$$

Embora o 1^o e 2^o membros pareçam ser similares, eles são, na verdade, radicalmente diferentes. O lado direito de (2.54) é

$$\int_v (B^2 - B_o^2) d^3x = 8\pi (M - M_o) \qquad (2.55)$$

Onde M é a energia magnética (integrada no volume V) de qualquer configuração de campo $\vec{B}$ e M_o é a energia magnética do campo potencial $\vec{B}_o$ com a mesma componente normal na fronteira! Uma vez que o lado esquerdo de (2.54) é uma quantidade positiva, i.é. $\int_V (\vec{B} - \vec{B}_o)^2 d^3x \geq 0$, então

$$8\pi (M - M_o) \geq 0 \Rightarrow M \geq M_o \qquad (2.56)$$

Como queríamos demonstrar, ou seja, a configuração de campo magnético potencial possui a menor energia magnética de todas as configurações sob as mesmas condições de contorno! Em consequência, todas as configurações de campo magnético, exceto a de campo potencial, possuem energia livre, disponível para exercer trabalho sobre o plasma, desde que a componente normal do campo na fronteira fique fixada. Um exemplo muito importante e

interessante do que acabamos de ver ocorre em "coroas magnéticas" (como a coroa solar), as quais são regiões de baixa densidade, situadas na parte externa da atmosfera de estrelas ou discos densos de gás, e das quais emergem fluxos de campo $\vec{B}$.

Mas, como isso ocorre? O campo será "force-free", isto é, $\vec{J} \times \vec{B} = 0$ (veja abaixo), mas $\vec{J}$ não será necessariamente nulo (como veremos), então $M > M_o$, de acordo com o teorema acima (eq. 2.56). Dissipação de $\vec{B}$ em lençóis de corrente poderá fazer com que o campo se reduza a $\vec{B}_o$, o campo potencial com a mesma componente B_n na superfície (fronteira) do sistema. A forma dessa dissipação (aquecimento Joule, ondas de choque, aceleração de partículas, etc.) será discutida adiante, mas sabemos que ela ocorre porque a coroa solar é observada emitir energia na forma de radiação e calor conduzido para a fronteira inferior da coroa, denominada cromosfera. O ponto que desejamos destacar aqui é que isso deve ocorrer sem a mudança de B_n. A razão disso vem de um exame da equação de indução aplicada ao campo na base da coroa (na fronteira com a cromosfera), no lado denso do gás. Apliquemos a equação de indução na forma (1.45):

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}) \tag{2.57}$$

ao movimento do gás denso na base da coroa e consideremos a componente normal à base (fronteira), B_n. Se a fronteira for uma superfície equipotencial gravitacional, a densidade do gás será estratificada normalmente a ela. Desse modo, qualquer velocidade na fronteira, normal à mesma, v_n, será inibida pela ação do campo gravitacional. Em outras palavras, v_n deverá ser $v_n << v_t$, onde v_t é a componente da velocidade tangencial à superfície. Parece então razoável fazermos $v_n \simeq 0$. Se os movimentos do gás denso são sub-sônicos, eles tendem a ser incomprensíveis, então $\vec{\nabla}.\vec{v} \simeq 0$. Logo, de (2.57) obtemos que $dB_n/dt = 0$, o que significa que a componente normal de $\vec{B}$ é dragada com o plasma denso sem mudar de magnitude. A redistribuição de fluxo magnético acontece lentamente,

em uma escala de tempo de horas ou dias. Note-se que $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ assegura a continuidade de B_n. Logo, B_n na coroa será o mesmo que B_n no gás denso, no outro lado da fronteira. Na coroa, por outro lado, a densidade é baixa por hipótese, e desse modo o gás é prontamente acelerado a altas velocidades de modo que, em princípio, a energia magnética até pode ser liberada. Logo, é uma aproximação razoável esperar que a configuração do campo magnético na coroa pode se reajustar enquanto B_n na base permanece constante. Portanto, estamos lidando precisamente com a situação descrita no teorema: a energia magnética de diferentes configurações, todas possuindo o mesmo B_n!

Podemos estudar essa situação usando a eq. de energia (2.45), assumindo por simplicidade $\sigma' = \eta = J/n_e ev = 0$,

tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + U\right)\right] + \vec{\nabla}.\left[\frac{B^2}{4\pi}\vec{v} - \frac{\vec{v}.\vec{B}}{4\pi}\vec{B} + \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + H\right) + \right.$$

$$\left. + \vec{Q} + \vec{R}\right] = 0 \tag{2.58}$$

Onde fizemos $\vec{v}_e \simeq \vec{v}$ conforme já discutido e onde usamos $\vec{J} \times \vec{B} = 0$ por hipótese. Integrando (2.58) sobre o volume da coroa e avaliando a média no tempo, o resultado fornece uma equação que relaciona $\vec{Q}$ e $\vec{R}$ na fronteira à taxa com que o trabalho do stress magnético está sendo realizado na fronteira. Os detalhes disso são deixados para o leitor como exercício (veja lista 2 de exercícios).

2.3.1 Magnetostática

Uma importante aplicação da equação de movimento do plasma (2.5) faz-se para configurações estáticas nas quais as forças se acham em equilíbrio. Pondo $d\vec{v}/dt = 0$ em (2.5) obtemos a eq. "magnetohidrostática de movimento"

$$-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \frac{1}{4\pi}(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) = 0 \tag{2.59}$$

onde usamos (2.7) para escrever $\vec{J} \times \vec{B}/c$. Usando

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\psi \tag{2.60}$$

E tomando a equação (2.59) na direção de $\vec{B}$, isto é, calculando $\vec{B}$ (eq. 2.59):

$$\vec{B}.\vec{\nabla}p + \rho\vec{B}.\vec{\nabla}\psi = B\left[\frac{dp}{ds} + \rho\frac{d\psi}{ds}\right] = 0 \tag{2.61}$$

Onde usamos que $\vec{B}.(\vec{J} \times \vec{B}) = 0$ e onde s é o comprimento do arco ao longo da linha de força local. A eq. (2.61) implica que

$$\frac{dp}{ds} + \rho\frac{d\psi}{ds} = 0 \tag{2.62}$$

E uma vez que

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{cos\theta}\frac{d}{ds}$$

exceto para $\theta = \pi/2$, onde θ é o ângulo entre $-\vec{g}$ e $\vec{B}$, então (2.62) implica que:

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \tag{2.63}$$

Onde $g = -g_z$, a qual é a equação de equilíbrio hidrostático usual encontrada para atmosferas com $\vec{B} = 0$. Ou seja, numa atmosfera em equilíbrio magnetostático, a componente do gradiente de pressão térmica ao longo do campo $\vec{B}$ obedece à equação de equilíbrio hidrostático e independe de $\vec{B}$. Esse resultado pode ser compreendido fazendo-se a seguinte analogia: cada tubo de fluxo magnético infinitesimal pode ser pensado como um tubo de vidro rígido e o fluido (o plasma) irá se acomodar de modo a "achar seu próprio nível", independente da forma do tubo de vidro confinante.

Se $p = nkT$, com $n = n_i + n_e$ e T uma constante, então $p = \rho kT/\overline{m}$, onde $\overline{m}$ é a massa média por partícula, a solução de (2.63) é a lei barométrica usual:

$$p \ \alpha \ e^{-z/H} \tag{2.64}$$

Onde a escala de altura H é

$$H = \frac{kT}{\overline{m}g} \tag{2.65}$$

Ou seja, considerando-se a equação de movimento ao longo de $\vec{B}$, em equilíbrio magnetostático, a pressão não é afetada pelo campo $\vec{B}$ e segue a lei do equilíbrio hidrostático.

Com isso em mente, devemos esperar que o 2^o termo de (2.59) seja da mesma ordem do primeiro, $\vec{\nabla}p$, mesmo para as componentes $\perp$ ao campo $\vec{B}$. Podemos então tomar a razão entre o 1^o termo e o último ($\vec{\nabla}(B^2/8\pi)$ que é o gradiente de pressão magnética), para obter

$$\frac{\mid \vec{\nabla}p \mid}{\mid \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)} \sim \frac{8\pi p}{B^2} \equiv \beta \tag{2.66}$$

A quantidade β é $<< 1$ na coroa e muda, por ordens de magnitude, para $\beta >> 1$ no fluido denso das camadas mais internas, porque a pressão cae exponencialmente de acordo com (2.64) nas camadas mais externas, enquanto que $\vec{B}$ cae mais lentamente, por exemplo,

decai com (distância)$^{-3}$ no caso de um campo de dipolo (o qual é uma boa aproximação para uma região de campo magnético bipolar, como é o caso da coroa solar). Logo, no sol $\beta >> 1$ na fotosfera e $\beta << 1$ na coroa.

Numa região em que $\beta << 1$, podemos desprezar os termos $\vec{\nabla}p$ e $\rho\vec{g}$ na equação (2.59), obtendo

$$\frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} = 0$$

Tal situação é denominada de "force-free" no sentido de que a força/volume $\vec{J} \times \vec{B}/c$ é "pequena" uma vez que não há outra força para se opor a ela. Ela realmente não se anula literalmente, porque se assim fôsse não haveria plasma movendo-se ($\rho d\vec{v}/dt = 0$), e na verdade o mesmo é observado em movimento. Mas, essa força é potencialmente tão maior em comparação com as outras forças que poderiam opor-se a ela, que o campo correspondente pode ser avaliado como se $\vec{J} \times \vec{B}$ fosse de fato $\simeq 0$.

2.3.2 Campos "Force-free"

Assim, um campo "force-free" satisfaz:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0 \tag{2.67}$$

Logo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha\vec{B} \tag{2.68}$$

Uma vez que

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B}.\vec{\nabla}\alpha + \alpha(\vec{\nabla}.\vec{B}) = 0 \tag{2.69}$$

Portanto, a função α é uma constante ao longo das linhas de campo. Da equação (2.68) vê-se que α é dada pela razão entre $(\vec{\nabla} \times \vec{B})_{//}$, a corrente alinhada com o campo, e o campo B, ou

$$\alpha = \frac{\mid (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \mid ds}{\mid \vec{B} \mid ds} \propto \frac{\text{fluxo de densidade de corrente}}{\text{fluxo de B}} = cte$$

Onde o numerador representa o fluxo de $\vec{J}$ e o denominador, o fluxo de $\vec{B}$ ao longo de um tubo de fluxo. Ou seja, uma vez que ambos os fluxos são constantes ao longo de um tubo de fluxo, a razão entre eles também é constante e explica a constância de α ao longo das linhas de força, constância esta mostrada matematicamente pela equação (2.69). Às vezes α é tomada como constante para um conjunto finito de linhas de força. Nesse caso, o campo "force-free" correspondente é dito "linear" ou campo force-free de "α constante". Entretanto, conforme veremos adiante, não se pode deixar $\alpha =$ constante em toda parte sem violar o teorema do virial.

Note-se que o campo potencial que vimos nas eqs. (2.47) e (2.48) é um tipo particular de campo "force-free" onde $\alpha = 0$.

Um tubo de força retorcido pode ser campo "force-free". A razão física para isso é que uma corrente alinhada com o campo cria um campo secundário o qual, de acordo com a lei de Ampère circula em volta do campo original, tal que o campo total é torcido. É isso o que a equação (2.68) nos diz. Agora, a tendência para o tubo expandir devido à pressão do campo é contraposta pela força de curvatura exercida pelas linhas torcidas, e o campo é "force-free". Para vermos melhor como isso funciona, consideremos um sistema axissimétrico no qual o campo seja independente de z, ou seja, $\vec{B}$ dependa apenas de r, e tal que $\vec{B} = \vec{B}(r) = (0, B_\phi, B_z)$, onde r, ϕ, z são as coordenadas cilíndricas. Se α é constante, a equação (2.68) em coordenadas cilíndricas nos dá que:

$$\frac{dB_z}{dr} = -\alpha B_\phi \tag{2.70}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\phi) = \alpha B_z \tag{2.71}$$

Eliminando B_ϕ entre as duas equações, verificamos que B_z satisfaz:

$$r^2\frac{d^2B_z}{dr^2} + r\frac{dB_z}{dr} + \alpha^2 r^2 B_z = 0 \tag{2.72}$$

Cuja solução (finita na origem) é $J_o(\alpha r)$. E substituindo em (2.70), obtemos que

$$B_\phi = J_1(\alpha r) \tag{2.73}$$

J_1 e J_o são as funções de Bessel cuja representação gráfica pode ser esboçada como

Esses campos são aproximações razoáveis para os campos criados em dispositivos de laboratório, como Tokamaks (onde B_z é criado por rolamentos ao redor do contorno pequeno do toróide, e B_ϕ é criado por rolamentos no contorno grande). Nesses casos, o campo é confinado em um tubo de metal o qual pode carregar correntes.

Quando tentamos aplicar o simples modelo de campo torcido acima à astronomia, deparamos-nos com uma dificuldade. Sabemos que:

$$B^2 = B_z^2 + B_\phi^2 = J_o^2 + J_1^2 \tag{2.74}$$

o qual não pode se anular em qualquer r finito. Logo, o balanceamento entre a força de curvatura das linhas espiralantes e o gradiente de pressão magnética (veja equação 2.10), o qual deve ser característico do equilíbrio "force-free" ($\vec{J} \times \vec{B}/c = 0$) não pode ser facilmente conseguido em qualquer distância finita. O que se pode fazer para contornar essa situação e assumir que o tubo de fluxo está embebido em um plasma não magnetizado com uma pressão p grande o bastante para contrabalançar $B^2/8\pi$ na fronteira entre a porçao magnetizada e a não magnetizada. Isso tem a propriedade indesejável de que a fronteira descontínua deve conter um "lençol de corrente" o qual permita a $\vec{B}$ variar descotinuamente (de $\vec{B} \neq 0$ no tubo para $\vec{B} = 0$ na porçao não magnetizada). Em um lençol de corrente a densidade de corrente $\vec{J}$ é formalmente ∞ sobre uma largura nula, de modo que a densidade de força é infinita (mas integrável). Assim, a tentativa de descrever um campo "force-free" em astronomia onde não há fronteiras reais para dominar o stress, leva a uma região onde a densidade de força é infinita! Veremos na próxima sessão porque esse paradoxo ocorre.

Sakurai (1979) inventou um modo de calcular a evolução de campo "force-free" emergindo de um plasma denso. Seu cálculo parte de um teorema de Grad e Rubin (1958), o qual demonstra que qualquer campo vetor com divergência nula ($\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$) pode ser representado por "potenciais de Euler" λ e μ através de

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu \tag{2.75}$$

O teorema é provado escolhendo-se as coordenadas λ e μ em uma superfície $S \perp \vec{B}$ e definindo λ e μ como constantes em cada linha de força. Desse modo, cada linha e força é a intersecção de uma superfície na qual λ = constante com outra superfície na qual μ = constante. Uma vez que $\vec{\nabla}\lambda$ e $\vec{\nabla}\mu$ são normais a essas superfícies, $\vec{B}$ deve então ser paralelo ao $\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu$. Logo:

$$\vec{B} = \nu\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu \tag{2.76}$$

Onde ν é uma função. Uma vez que:

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}\nu.(\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) + \nu\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) = \vec{B}.\vec{\nabla}ln\nu + \nu\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) = 0 \qquad (2.77)$$

e o último termo é

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) = \vec{\nabla}\mu.\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\lambda) - \vec{\nabla}\lambda.\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\mu) = 0 \qquad (2.78)$$

Logo, $\vec{B}.\vec{\nabla} ln\nu = 0$, e portanto, ν também é constante ao longo da linha de força e portanto, apenas uma função de μ e λ. No caso especial em que ν depende ou de μ ou de λ somente, é fácil ver como absorver ν na definição de λ (ou μ), pois

$$\nu(\lambda)\vec{\nabla}\lambda = \vec{\nabla}\int \nu d\lambda \tag{2.79}$$

O caso mais geral é tratado por Grad e Rubin e não será repetido aqui.

É fácil expressar o congelamento do fluxo com os potenciais de Euler exigindo que λ e μ sejam constantes do movimento, tal que eles são dragados com o fluxo do gás de elétrons

$$\frac{d_e\lambda}{dt} = \frac{d_e\mu}{dt} = 0 \tag{2.80}$$

Logo, cada partícula carrega um λ e um μ com ela. O congelamento do campo implica que as linhas de força possuem sempre as mesmas partículas; isto é assegurando por (2.80) e o fato de que λ e μ são constantes nas linhas de força. Podemos verificar que a equação de indução (1.38) é satisfeita pelas eqs. (2.75) e (2.80):

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) \times \vec{\nabla}\mu + \vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)$$

$$= \vec{\nabla} \times \left[\frac{\partial\lambda}{\partial t}\vec{\nabla}\mu - \frac{\partial\mu}{\partial t}\vec{\nabla}\lambda\right]$$

$$= \vec{\nabla} \times \left[(\vec{v}_e . \vec{\nabla}\mu)\vec{\nabla}\lambda - (\vec{v}_e . \vec{\nabla}\lambda)\vec{\nabla}\mu \right]$$

$$= \vec{\nabla} \times \left[\vec{v}_e \times (\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) \right] = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) \tag{2.81}$$

Que é a equação de indução (1.38) válida em MHD ideal quando há congelamento do fluxo de campo $\vec{B}$ (c.q.d.).

Agora vamos discutir um campo "force-free" cujos pontos de base estão fixados na fronteira com um plasma denso de área S. A exigência sobre os pontos de base pode ser expressa

dizendo-se que $\lambda(\vec{x})$ e $\mu(\vec{x})$ são fixados em S (veja figura ao lado), de modo que variações $\delta\lambda$ e $\delta\mu$ em um ponto fixo $\vec{x}$ se anulam se $\vec{x}$ estiver sobre S.

Uma configuração magnética de equilíbrio "force-free" pode ser encontrada variando-se o campo $\vec{B} = \vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu$ no volume V (limitado por S) e olhando a condição para a qual a variação correspondente em energia magnética seja $\delta M = 0$. Note-se que as condições de contorno são cruciais aqui; se mantivéssemos fixo B_n as invés de λ e μ na superfície S, a minimização de M levaria a um campo potencial, como já demonstramos antes. A manutenção de λ e μ fixos em S assegura que todos os pontos de S permaneçam conectados através das linhas de força a outros pontos determinados de S. Logo, percebemos que enquanto os pontos da base estão fixados, as linhas de força estão livres para deformar até que sua energia atinga o mínimo.

Para provar esse teorema, vamos escrever

$$B^2 = (\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu)^2 \tag{2.82}$$

De modo que uma variação em λ e/ou μ em um ponto fixo $\vec{x}$ resulta em:

$$\delta(B^2) = 2\vec{B}.\delta(\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu) = 2\vec{B}.(\vec{\nabla}\delta\lambda \times \vec{\nabla}\mu + \vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\delta\mu)$$

$$= 2\vec{B}.\vec{\nabla} \times (\delta\lambda\vec{\nabla}\mu - \delta\mu\vec{\nabla}\lambda)$$

$$= 2\vec{\nabla}.\left[(\delta\lambda\vec{\nabla}\mu - \delta\mu\vec{\nabla}\lambda) \times \vec{B}\right] + 2(\delta\lambda\vec{\nabla}\mu - \delta\mu\vec{\nabla}\lambda).\vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{2.83}$$

Segue daí que

$$\delta M = \frac{1}{8\pi}\int_V \delta(B^2)d^3x = \frac{1}{4\pi}\int_S [(\delta\lambda\vec{\nabla}\mu - \delta\mu\vec{\nabla}\lambda) \times \vec{B}].d\vec{s} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_V (\delta\lambda\vec{\nabla}\mu - \delta\mu\vec{\nabla}\lambda).\vec{\nabla} \times \vec{B}d^3x \tag{2.84}$$

A integral de superfície se anula porque $\delta\lambda$ e $\delta\mu$ anulam-se em S; logo a condição de que δM se anula para arbitrários $\delta\lambda$ e $\delta\mu$ em V implica em que:

$$(\delta\lambda\vec{\nabla}\mu - \delta\mu\vec{\nabla}\lambda).\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{\nabla}\lambda = (\vec{\nabla} \times \vec{B}).\vec{\nabla}\mu = 0 \tag{2.85}$$

Portanto, $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ cai nas superfícies λ, μ, assim como $\vec{B}$, o que significa que $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ deve ser paralelo a $\vec{B}$ e o campo é então "force-free". Essa formulação variacional nos permite calcular $\vec{B}$ para qualquer conexão desejada de pontos da base e começando com qualquer campo, por exemplo, um campo potencial ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$), e movendo os pontos de base de uma pequena quantidade. Superfícies de λ e μ são estabelecidas em V de modo a fornecerem os λ e μ desejados na base, mas que, em geral, não correspondem ao mínimo de M. As superfícies então são movidas ligeiramente (com os pontos de base fixos) até

que dêem um mínimo M e o cálculo é repetido com os pontos de base numa nova posição e assim sucessivamente até que os pontos de base atinjam as posições desejadas. Sakurai realizou variações utilizando funções tentativas com parâmetros variáveis e mostrou que M aumenta de 27 vezes a energia magnética M_o do campo potencial inicial, após torcer o campo $\vec{B}$ entre duas manchas solares de 225^o (veja figura). O campo real na coroa solar

varia de um modo similar a esse. Devido ao movimento bem lento do plasma fotosférico, ao qual os pontos de base das linhas magnéticas de força estão atadas, o campo coronal evolui quase estaticamente (aceleração desprezível ($d\vec{v}/dt \simeq 0$))

através de uma sequência de equilíbrios "force-free ($\vec{J} \times \vec{B}/c \simeq 0$), e como resultado há um armazenamento de energia magnética na coroa!

2.4 Teorema do Virial

Vamos escrever a equação de movimento (com $\xi = 0$) na notação tensorial (equação 2.18):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \partial_i p + \partial_i \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} B_j \partial_j B_i + \rho \partial_i \psi = 0 \tag{2.86}$$

Multipliquemos por x_i, somemos sobre i e integremos num volume arbitrário V. Para o termo em p basta integrar por partes

$$\int_V x_i \partial_i p \;\; d^3x = \int_V \partial_i (x_i p) d^3x - \int_V p \partial_i x_i \;\; d^3x$$

$$= \int_S p\vec{r}.d\vec{s} - 3\int_V p \;\; d^3x \tag{2.87}$$

Já para o termo em $\vec{B}$ não é tão fácil:

$$\int_V x_i \left[\partial_i \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \partial_j (B_j B_i) \right] d^3x =$$

$$\int_S \frac{B^2}{8\pi} \vec{r}.d\vec{s} - 3\int_V \frac{B^2}{8\pi} d^3x - \int_V \partial_j \left[\frac{1}{4\pi} x_i B_i B_j \right] d^3x + \int_V \frac{1}{4\pi} B_i B_j \delta_{ij} d^3x$$

$$\int_S \left[\frac{B^2}{8\pi} \vec{r} - \frac{1}{4\pi} (\vec{r}.\vec{B})\vec{B} \right] .d\vec{s} - 3\int_V \frac{B^2}{8\pi} d^3x + 2\int_V \frac{B^2}{8\pi} d^3x \tag{2.88}$$

Note que os dois últimos termos se somam para dar:

$$-\int_V \frac{B^2}{8\pi} d^3x = -M \tag{2.89}$$

O qual é < 0; isto se deve ao fato de que o termo de pressão ($3 \times \frac{1}{8\pi}$) excede o termo de tensão ($2 \times \frac{1}{8\pi}$).

Prosseguindo de modo similar para os outros dois termos de (2.86), o termo $\rho dv_i/dt$ envolve repetidas integrações por partes e o uso da equação de continuidade, enquanto que o termo $\rho\psi$ envolve a equação de Poisson ($\nabla^2\psi = -4\pi G\rho$) uma vez que o potencial gravitacional ψ é gerado pela matéria. O resultado final é

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 2T + 2U + M + \Omega + S \tag{2.90}$$

Onde

$$I = I_{ii}, \text{ sendo } I_{ij} = \text{tensor momento de inércia} = \int_V \rho x_i x_j d^3x$$

$$U = \int_V \rho u d^3x = \int_V \frac{3}{2} p d^3x$$

$$T = \int_V \frac{1}{2}\rho v^2 d^3x = \text{energia cinética}$$

$$M = \int_V \frac{1}{8\pi} B^2 d^3x = \text{energia magnética} \tag{2.91}$$

$$\Omega = \int_V \frac{1}{2} \rho\psi d^3x = \text{energia gravitacional } (< 0)$$

E

$$S = S_T + S_U + S_M + S_G$$

onde

$$S_T = \int_S \left[\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) - \rho(\vec{r}.\vec{v})\vec{v} \right] .d\vec{s}$$

$$S_U = \int_S -p\vec{r}.d\vec{s}$$

$$S_M = \int_S \left[-\frac{B^2}{8\pi}\vec{r} + \frac{1}{4\pi}(\vec{r}.\vec{B})\vec{B} \right] .d\vec{s}$$

$$S_G = \int_S \left[\frac{1}{8\pi G}\psi\vec{g} + \frac{1}{8\pi G} g^2\vec{r} - \frac{1}{4\pi G}(\vec{r}.\vec{g})\vec{g} \right] .d\vec{s} \tag{2.92}$$

Frequentemente, o teorema do virial é aplicado a um sistema isolado como uma estrela, galáxia, ou aglomerado de galáxias ou estrelas. Nesse caso, $S \to \infty$ e todos os termos de superfície $S's$ (2.92) tendem a 0. Note que somente um termo no lado direito de (2.90) é negativo (Ω) e portanto, se estamos procurando por uma solução em estado-estacionário (não necessariamente estática), a única força que leva ao confinamento total do sistema é a gravitacional. Apesar de a tensão magnética ser < 0, ela é sobrepujada pela pressão magnética. O efeito líquido do campo magnético é invariavelmente disruptivo em astronomia!

Notamos também que, por causa que o termo em $M(\geq 0)$ foi gerado a partir da força magnética, esta última pode anular-se em toda parte (campo "force-free") se e somente se

$M = 0$, ou $\vec{B} = 0$. Portanto, nenhuma configuração magnética pode ser "force-free" em toda parte. Será que essa condição é violada por um tubo de fluxo torcido infinitamente longo do tipo que discutimos anteriormente? Para descobrirmos, vamos computar a energia por unidade de comprimento (veja eqs. 2.70 a 2.74):

$$8\pi \frac{dM}{dz} = \int_o^R (B_z^2 + B_\phi^2) 2\pi R dR \tag{2.93}$$

Agora, quando $R \to \infty$,

$$B_z^2 = J_o^2(\alpha R) \sim \frac{2}{\pi \alpha R} cos^2(\alpha R - \frac{\pi}{4}) \tag{2.94a}$$

$$B_\phi^2 = J_1^2(\alpha R) \sim \frac{2}{\pi \alpha R} sen^2(\alpha R - \frac{\pi}{4}) \tag{2.94b}$$

De modo que quando $R \to \infty$

$$8\pi \frac{dM}{dz} \sim \frac{4}{\alpha} R \to \infty$$

Ou seja, a condição acima está sendo violada no caso do tubo infinitamente longo, pois um campo "force-free" não pode ser "force-free" em toda parte!