- CAPÍTULO 1 -

PLASMA EM ASTROFÍSICA

Introdução

Plasma é um gás que contém suficiente número de partículas livres carregadas para que seu comportamento dinâmico seja dominado por forças eletromagnéticas. Mesmo baixos graus de ionização são suficientes para um gás exibir propriedades eletromagnéticas. Com cerca de um por cento de ionização, a condutividade elétrica é próxima à de um gás completamente ionizado.

Grande parte da matéria no universo acha-se sob a forma de plasma. Precisamos portanto, de física de plasmas para compreender adequadamente a atividade solar e estelar, formação de estrelas, pulsares, NAG's, jatos supersônicos, física do meio interestelar, etc. Neste curso, estudaremos os conceitos de física de plasma úteis na compreensão desses fenômenos.

CONGELAMENTO DO CAMPO MAGNÉTICO

Esse conceito, introduzido por Alfvén, estabelece que as linhas de força movem-se com o plasma. Campos magnéticos armazenam energia que pode ser usada para acelerar partículas e também exercem forças que afetam o movimento da matéria no espaço. O congelamento do campo magnético permite predizer a configuração magnética futura a partir do valor no presente e é, portanto, fundamental na compreensão de fenômenos dinâmicos.

Do fato de que o congelamento não parece permitir a criação de um novo fluxo, poder-se-ia inferir que campos magnéticos cósmicos são primordiais. A opinião geral é que os campos não são primordiais, mas são criados por processos que violam o congelamento de um modo especial. Portanto, o conceito de congelamento das linhas do campo deve ser usado com cuidado e critério.

1.1 O movimento de partículas carregadas

Vamos nos concentrar primeiro no movimento de uma partícula carregada de massa m e carga q. Na ausência de outras interações, a partícula obedee a eq. de força de Lorentz:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \tag{1.1}$$

Onde q = Ze para os íons e "-e" para os elétrons.

a) Consideremos $\vec{E} = 0, \vec{B} = cte.$

A solução de (1.1) é:

$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} \tag{1.2}$$

Onde $v_{//}$ é uma constante e $v_{\perp}$ corresponde à velocidade de giração (ou circulação) em torno do campo $\vec{B}$ com uma frequência:

$$\omega_B = \frac{\mid q \mid B}{mc} \tag{1.3}$$

E o raio de circulação

$$r_B = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \tag{1.4}$$

Para valores de B e $v_{\perp}$ encontrados em Astronomia, ω_B é grande comparado ao inverso das escalas de tempo típicas, e r_B é pequeno comparado a escalas de distâncias típicas. Portanto, assumir que $\vec{B}$ é constante e é em geral razoável. Além disso, parece ser razoável que se uma linha de força move-se, partículas carregadas movem-se com ela, isso é o "congelamento"!

b) Consideremos agora $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Vamos definir

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} c \tag{1.5}$$

e transformar do referencial de laboratório k para um referencial k' movendo-se com respeito a k a uma velocidade v_D, então

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_D t \tag{1.6}$$

e

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_D \tag{1.7}$$

Portanto, a partir de (1.1):

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}) = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}' \times \vec{B}}{c} + \frac{\vec{v}_D}{c} \times \vec{B}) \tag{1.8}$$

E uma vez que

$$\frac{v_D}{c} \times \vec{B} = \frac{1}{B^2}[(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}] = -\vec{E} \tag{1.9}$$

Verificamos que

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = q\frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{B} \tag{1.10}$$

Porque $\vec{E}.\vec{B} = 0$ por hipótese.

Vemos assim que $\vec{E}' = 0$ e em k' a partícula executa uma giração pura com o mesmo ω_B (eq. 1.3), mas com amplitude $\mid \vec{v} - \vec{v}_D \mid$. Note que $\vec{v}_D$ é o mesmo para todas as partículas, seja qual for sua massa ou carga, de modo que o plasma inteiro está se movendo junto. Segue das equações acima que o fato de o plasma estar movendo através do campo é

equivalente ao fato de haver um campo elétrico normal no referencial de laboratório k, desde que não haja outras forças de interação.

Mas, na realidade há outras interações, incluindo gravidade, pressão, e colisões com outras partículas. No entanto, a conclusão acima é aproximadamente verdadeira quase que em geral; conforme se verá abaixo, ela é equivalente ao congelamento do fluxo de $\vec{B}$ com o plasma.

1.2 Movimento dos Elétrons e a Lei de Ohm

Consideremos a componente eletrônica do Plasma, a qual por ser bem mais leve que os íons, possui propriedades especiais. Uma vez que precisamos tratar muitas partículas carregadas e suas interações, devemos em princípio considerar distribuições de partículas em posição e velocidade. A evolução de tais distribuições pode ser descrita de forma acurada pela equação de Boltzmann (Spitzer; Boyd & Sanderson (Cap.I)), mas aqui vamos utilizar uma aproximação mais intuitiva que levará também à resposta correta. Caracterizamos a distribuição de elétrons por sua densidade local, n_e, sua velocidade média local, $\vec{v}_e$, e uma distribuição de velocidade Maxwelliana, a qual é caracterizada, por sua vez, por uma velocidade de dispersão $v_{th} = \left(\frac{3kT_e}{m_e}\right)^{1/2}$, dessa forma, a pressão eletrônica será:

$$p_e = n_e k T_e \tag{1.11}$$

A eq. de Boltzmann mostra que, em geral, a distribuição de velocidades não é isotrópica, e portanto p_e é na verdade um tensor; e também a distribuição não tem que ser Maxwelliana e portanto, T_e não estaria definido. Mas, poderíamos falar de relaxação do sistema para uma distribuição Maxwelliana através de colisões e interações partícula-onda. Isso naturalmente envolveria uma longa discussão que caberia num capítulo a parte e que, pelo menos por ora, omitiremos.

Considerando então as hipóteses acima, nós podemos escrever a equação para aceleração dos elétrons da seguinte forma

$$n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\vec{\nabla} p_e + n_e m_e \vec{g} - n_e e(\vec{E} + \frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B}) + \vec{P}_{ei} \tag{1.12}$$

Onde $\vec{P}_{ei}$ é a taxa de transferência de momento dos íons para os elétrons por colisões elásticas e $\vec{g}$ é a aceleração gravitacional. Na ausência de $\vec{P}_{ei}$, $\vec{g}$ e p_e, a eq. (1.12) reduz-se a (1.1). Desejamos simplificar essa equação. O primeiro passo é usar o fato de que os elétrons são leves ($m_e << m_i$) e desprezar o termo $n_e m_e d\vec{v}_e/dt$, o que implica, por sua vez, em assumir que em qualquer instante todas as forças no lado direito da eq. estão em equilíbrio. Isso claramente não pode ser verdadeiro para os íons, do contrário o plasma nunca poderia ser acelerado como um todo; é por isso que nossa hipótese só é válida se $m_e << m_i$, como de fato ocorre. Se dividirmos a equação resultante por $n_e e$, (1.12) pode ser reescrita na forma

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B} + \frac{m_e}{e}\vec{g} - \frac{1}{n_e e}\vec{\nabla} p_e + \frac{\vec{P}_{ei}}{n_e e} \tag{1.13}$$

Agora precisamos de uma expressão para $\vec{P}_{ei}$.

Após uma colisão com um íon, um elétron fica em repouso (em média) no centro de massa do sistema movendo-se com a velocidade

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{m_e \vec{v}_e + m_i \vec{v}_i}{m_e + m_i} \tag{1.14}$$

Onde $\vec{v}_i$ é a velocidade média dos íons. Assim, a variação no momento do elétron é

$$m_e(\overline{\mathbf{v}} - \vec{v}_e) = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i}(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

$$\simeq m_e(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \tag{1.15}$$

Como cada elétron colide $\nu_c = n_i v_{th} \sigma_{ei}$ vezes por segundo, onde σ_{ei} é a secção de choque da colisão elástica, então a força/volume de fricção devido às colisões e-íon, $P_{ei} \equiv n_e \Delta P/\Delta t$ será:

$$\vec{P}_{ei} = m_e(\vec{v}_i - \vec{v}_e)v_c n_e$$

$$= n_e n_i v_{th} \sigma_{ei} m_e(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \tag{1.16}$$

Essa equação está relacionada à densidade de corrente:

$$\vec{J} = Zen_i\vec{v}_i - en_e\vec{v}_e$$

$$= Zen_i(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \tag{1.17}$$

se fazemos a hipótese, a ser justificada mais tarde, de que em todo os instantes ocorre a NEUTRALIDADE DA CARGA:

$$Zen_i = en_e \tag{1.18}$$

Combinando (1.16) e (1.17), verificamos que

$$\vec{P}_{ei} = \frac{n_e v_{th} \sigma_{ei} m_e}{Ze}\vec{J} \tag{1.19}$$

E substituindo em (1.13)

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}_e}{c} \times \vec{B} + \frac{m_e}{e}\vec{g} - \frac{1}{n_e e}\vec{\nabla} p_e + \eta\vec{J} \tag{1.20}$$

Onde introduzimos a resistividade elétrica

$$\eta = \frac{m_e v_{th} \sigma_{ei}}{Ze^2} \tag{1.21}$$

Uma vez que $v_{th} \sim T^{1/2}$ e $\sigma_{ei} \sim Z^2 T^{-2}, \eta \sim ZT^{-3/2}$, ou seja (ver e.g, Boyd & Sanderson):

$$\eta = 8\pi\, n_i n_e^{-1} m_e^{1/2} e^2 (kT)^{-3/2} Z^2 ln\Lambda$$

A fórmula exata para o gás de hidrogênio puro (onde $Zn_i = n_e$, e $Z = 1$) é:

$$\eta = \frac{7 \times 10^{-9}}{T^{3/2}} ln\Lambda \quad s \tag{1.22}$$

Onde $ln\Lambda$ é 1 fator tabelado por Spitzer (p. 128) que leva em conta a razão entre os efeitos de várias deflexões pequenas e os efeitos das deflexões de 90^o. Em astronomia, $ln\Lambda$ está usualmente na faixa de 20 a 30. A eq. (1.20) é a Lei de Ohm.

1.2.1 Neutralidade da Carga

Ao derivar a lei de Ohm, nós desprezamos as acelerações dos elétrons e desvios da neutralidade da carga. Para ver se isso é válido, vamos considerar os efeitos causados ao se violar ambas as condições, mas ignorando os outros efeitos ($p_e, \vec{g}$ e $\vec{P}_{ei}$). O fenômeno resultante é denominado oscilação eletrônica do plasma.

Consideremos movimentos dos elétrons paralelos a $\vec{B}$ os quais resultam em uma concentração local de carga de uma quantidade δn_e (é razoável assumir que os íons permaneçam fixos porque a frequência que iremos encontrar é alta e a mobilidade dos íons comparada à dos elétrons é muito menor, veja abaixo). A densidade de carga líquida será então

$$\delta\rho = -e\delta n_e \tag{1.23}$$

Da lei de Coulomb temos:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_{//}}{\partial x} = 4\pi\delta\rho = -4\pi e\delta n_e \tag{1.24}$$

Onde x é a coordenada ao longo de $\vec{B}$. Seja ξ o deslocamento médio dos elétrons, então δn_e satisfará à equação de continuidade (ver eq. 2.6, Cap. 2; ou eq. 3.2, Cap. 3) válida

para $n = n_e + \delta n_e$, onde $\delta n_e << n_e$ e n_e é constante. Após simples álgebra desprezando-se os termos de segunda ordem da equação de continuidade, sua integração resultará:

$$\frac{\delta n_e}{n_e} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{1.25}$$

Combinando (1.24) e (1.25) vemos que

$$E_{//} = 4\pi e n_e \xi \tag{1.26}$$

Esse campo elétrico $E_{//}$ superpõe ao movimento térmico randônico dos elétrons um pequeno fluxo com velocidade $v_{//}$.

Da eq. (1.1) implica que

$$\frac{dv_{//}}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{e}{m_e} E_{//} = -\frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \xi \tag{1.27}$$

Decorre da eq. acima que ξ, e portanto, $v_{//}$, $E_{//}$ e δn_e executam movimento harmônico simples com a forç a Coulombiana agindo como forç a restauradora, com a frequência eletrônica do plasma:

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \right)^{1/2} \simeq 5.6 \times 10^4 n_e^{1/2} \quad s^{-1} \tag{1.28}$$

Os íons oscilam com frequência menor:

$$\omega_{pi} = \left(\frac{Z m_e}{m_i} \right)^{1/2} \omega_{pe} \tag{1.28}$$

Ou seja, permanecem praticamente imóveis relativamente aos elétrons já que $m_e << m_i$, justificando pois a hipótese feita acima.

A frequência ω_{pe} define uma frequência de oscilação natural do plasma. Verifica-se que ω_{pe} é grande, de modo que nas escalas de tempo tipicamente astronômicas, a média resultante de $E_{//}$ é zero, restando apenas os campos DC requeridos pela lei de Ohm (1.20).

Em outras palavras, qualquer campo $\vec{E}$ externo aplicado com frequência $\omega < \omega_{pe}$ não pode penetrar no plasma uma vez que as rápidas oscilações do plasma (ω_{pe}) neutralizam o $\vec{E}$ aplicado. Logo, o plasma é opaco à radiação eletromagnética com $\omega < \omega_{pe}$, ou $\lambda > \lambda_D$. Onde $\lambda_D = v_{th}/\omega_{pe}$ é denominado o comprimento de Debye. λ_D dá a escala de distância através da qual estende-se o E aplicado criando a separação de cargas, e num plasma é tipicamente bem menor que a dimensão do sistema (L), $\lambda_D << L$:

$$\lambda_D = \frac{v_{//}}{\omega_{pe}} \simeq \frac{v_{th}}{\omega_{pe}} \simeq \left(\frac{KT_e}{4\pi n_e e^2}\right)^{1/2}$$

As oscilações do plasma (com frequência ω_{pe}) constituem oscilações periódicas das cargas e portanto violam a neutralidade de carga na extensão em que atuam. Logo, podemos concluir que a hipótese da *neutralidade da carga* será válida somente para escalas de cumprimento $\lambda > \lambda_D$, ou equivalentemente, para escalas de tempo $\tau > \omega_{pe}^{-1}$, o que pode ser facilmente conseguido para fenômenos e variações eletromagnéticas de escalas astrofísicas.

Por outro lado, para escalas de comprimento dentro de uma esfera de raio λ_D, a neutralidade da carga não é mais válida e oscialações eletrostáticas com $\lambda \leq \lambda_D$ penetrarão na esfera e sentirão os efeitos coletivos das cargas, sendo fortemente amortecidas pelo efeito denominado de amortecimento Landau. Neste curso, esse efeito não será estudado, pois nos limitaremos aqui a investigar fênomenos no regime em que a quase neutralidade é válida (o regime magnetohidrodinâmico).

Antes porém de concluir esta discussão sobre λ_D, cabe mencionar também que o mesmo define um comprimento de interação eletrostática efetiva entre as partículas carregadas do plasma. Isto é, pode-se demonstrar que o campo potencial efetivo de uma carga no plasma tem sua ação blindada (ou parcialmente bloqueada) pela nuvem de cargas ao seu redor, de modo que o potencial resultante é dado por:

$$\phi(r) = \frac{-en_1}{r}\, e^{-r/\lambda_D}$$

O qual decai muito mais rápido que o potencial Coulombiano de uma carga no vácuo. Nessa eq., n_1 denota a densidade de cargas dentro da esfera de Debye. Vemos que o comprimento de Debye (λ_D) dá uma medida da extensão do campo de uma carga no plasma. Para distâncias $<<$ que λ_D o potencial efetivo é essencialmente o Coulombiano, já para distâncias $>>$ que λ_D, o potencial efetivo decai exponencialmente.

1.3 Uma equação de evolução para $\vec{B}$

A lei de Ohm leva ao congelamento do fluxo de $\vec{B}$. Na teoria eletromagnética a evolução de $\vec{B}$ é governada pela lei de Faraday de indução, a qual, sob a luz da eq. (1.20) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (v_e \times \vec{B}) - \frac{m_e c}{e}\vec{\nabla} \times \vec{g} -$$

$$-\frac{c}{{n_e}^2 e}\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} p_e - c\eta\vec{\nabla} \times \vec{J} \tag{1.29}$$

Agora, $\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$ (e essa é a razão pela qual mantivemos esse termo até agora, apesar de o mesmo ser proporcional a m_e) e $\vec{J}$ pode ser eliminado utilizando-se a lei de Ampère:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{1.30}$$

e a lei de Gauss

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{1.31}$$

para escrevermos (1.29) como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) + \frac{\eta c^2}{4\pi}\vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{c}{n_e^2 e}\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} p_e \tag{1.32}$$

O último termo, denominado bateria (ou "pilha") de Biermann, é normalmente negligenciado em discussões elementares. Nós vamos deixá-lo de lado por ora e retornar a

ele mais tarde no curso. (Note-se que esse termo se anula se p_e depende apenas de n_e). Os outros termos de (1.32) indicam que $\vec{B}$ pode ser evoluído conhecendo-se apenas seu valor no presente e a velocidade $\vec{v}_e$.

Vamos dar uma olhada no segundo termo do lado direito da eq. (1.32), o qual representa a difusão do vetor campo magnético. Esse termo tem várias propriedades fascinantes, mas aqui devemos enfatizar que na maior parte do tempo ele é pequeno quase em toda parte. Há uma analogia da eq. (1.32) (sem o termo de Biermann) com a equação de vorticidade em mecânica dos fluidos $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \tag{1.33}$$

Onde v (unidades $\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$) é o coeficiente de difusão denominado viscosidade cinemática. Notamos que $\eta c^2/4\pi$ também possui unidades de $\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$ e, a partir de (1.32), ele também pode ser interpretado como um coeficiente de difusão. A ele dá-se o nome de viscosidade magnética v_M:

$$\nu_M = \frac{\eta c^2}{4\pi} \tag{1.34}$$

Portanto (1.32) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) + \nu_M \vec{\nabla}^2 \vec{B} \tag{1.35}$$

Em mecânica dos fluidos, a razão entre o 1^o e o 2^o termos do lado direito de (1.33):

$$\frac{\mid \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) \mid}{v \mid \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} \mid} \sim \frac{Lv}{\nu} = R_e \tag{1.36}$$

Onde L é uma escala de comprimento que define as variações em ω no sistema e R_e é denominado o número de Reynolds. Em muitos casos (inclusive na maior parte dos casos astronômicos) $R_e >> 1$, significando que a difusão pode ser desprezada exceto em "boundary layers" bem finas onde L é pequeno. Em física de plasmas a razão

$$\frac{\mid \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) \mid}{\nu_M \mid \vec{\nabla}^2 \vec{B} \mid} \sim \frac{L v_e}{\nu_M} = R_{eM} \tag{1.37}$$

é denominada número de Reynolds magnético. Em vários dos casos astronômicos $R_{eM} >> 1$, o que significa que a difusão pode ser desprezada exceto em regiões de reconexão estreitas onde L é pequeno. Nós vamos retornar a essa situação em um capítulo posterior. Por ora, nós simplesmente vamos desprezar o termo de difusão e examinar as consequências. Essa é a situação denominada de "MHD ideal".

1.4 Congelamento do Fluxo de $\vec{B}$

Da eq. (1.35) com $\eta = 0$ obtemos:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}) \tag{1.38}$$

que pode ser chamada de eq. de indução modificada. "Modificada" porque em muitos dos tratamentos, a velocidade média do plasma $\vec{v}$ substitui $\vec{v}_e$ na eq. (1.38) e isso leva a uma importante diferença, conforme veremos. Integrando (1.38) sobre uma superfície A aberta cercada por um contorno fechado $\partial\mathcal{S}$ e usando o teorema de Stokes, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}.d\vec{A} = \int_A \vec{\nabla} \times (\vec{v}_e \times \vec{B}).d\vec{A}$$

$$= \oint_{\partial S} (\vec{v}_e \times \vec{B}).d\vec{s} = - \oint_{\partial S} (\vec{v}_e \times d\vec{s}).\vec{B} \tag{1.39}$$

De modo que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B}.d\vec{A} + \oint_{\partial S} (\vec{v}_e \times d\vec{s}).\vec{B} = 0 \tag{1.40}$$

O 1^o termo é a taxa de variação do fluxo de $\vec{B}$:

$$\phi = \int \vec{B}.d\vec{A} \tag{1.41}$$

através do contorno fixo ∂S. O 2^o termo corrige esse fluxo pelo fluxo que deve ser incluído a cada segundo se ∂S, ao invés de permanecer estacionário, está se movendo com o gás de elétrons. Portanto, (1.40) estabelece que o fluxo de campo magnético em um contorno fechado que se move com o gás de elétrons é constante (se o fluido é perfeitamente condutor). Esse é o conceito de congelamento do fluxo. Ele significa que podemos visualizar as linhas de força do campo como estando "congeladas" no gás de elétrons e, portanto, movendo-se com o gás à medida que este se move. Qualquer movimento transversal às linhas de forç a do campo magnético, transporta-as junto com o fluido. Um elemento de fluido que se move ao longo de um tubo de linhas de forç a permanece movendo-se com ele.

Devemos notar nos resultados acima que, em princípio, $\vec{v}_e$ não é igual à velocidade média do plasma:

$$\vec{v} = \frac{n_e m_e \vec{v}_e + n_i m_i \vec{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \tag{1.42}$$

A diferença entre $\vec{v}$ e $\vec{v}_e$ é

$$\vec{v} - \vec{v}_e = \frac{n_i m_i}{n_e m_e + n_i m_i}(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \simeq \vec{v}_i - \vec{v}_e \tag{1.43}$$

Onde usamos o fato de que $m_e/m_i << 1$. Uma vez que da neutralidade de carga $n_e = Zn_i$ e considerando as eqs. (1.17), (1.30) e (1.43), encontramos que

$$\vec{v} - \vec{v}_e \simeq \vec{v}_i - \vec{v}_e = \frac{c}{4\pi n_e e}\vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{1.44}$$

Logo, se conhecemos $\vec{v}_i$ e $\vec{B}$ em qualquer instante, podemos encontrar $\vec{v}_e$ por (1.44) e usar (1.38) para calcular a evolução de $\vec{B}$. Vários textos discutem esse problema de diferentes maneiras, mas, todos eles terminam por desprezar $\vec{v}$ - $\vec{v}_e$ nesse contexto. O procedimento

mais correto é o considerado acima, mas frequentemente verifica-se em termos práticos que $\mid \vec{v} - \vec{v}_e \mid << \vec{v}$ e portanto, nenhuma correção sobre $\vec{v}_e$ é necessária nesse caso.

Nós podemos usar (1.38) ou (1.40) para expressar o congelamento de outra forma. Expandindo o produto vetorial em (1.38), obtemos

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left(\vec{v}_e.\vec{\nabla}\right)\vec{B} = \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}_e - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{v}_e) \tag{1.45}$$

Lembrando que a derivada Lagrangeana (ou "comóvel" com os elétrons) é dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e.\vec{\nabla} \tag{1.46}$$

E utilizando a equação de continuidade para os elétrons

$$\frac{dn_e}{dt} = -n_e \vec{\nabla}.\vec{v}_e \tag{1.47}$$

(1.45) pode ser escrita na forma

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v}_e - \vec{B}(\nabla.\vec{v}_e)$$

$$= (B.\vec{\nabla})\vec{v}_e + \frac{\vec{B}}{n_e}\frac{dn_e}{dt}$$

ou

$$\frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{\vec{B}}{n_e}\frac{dn_e}{dt} = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v}_e$$

$$n_e \frac{d(\vec{B}/n_e)}{dt} = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v}_e \tag{1.48}$$

Logo, qualquer campo de velocidade que não varie ao longo de $\vec{B}$ resulta em $\vec{B} \sim n_e$.

Podemos também pensar em termos da conservação do fluxo seguindo os elétrons e usar (1.40) e (1.41) para escrever

$$\frac{d}{dt}\phi = 0 \tag{1.49}$$

Onde d/dt é dado por (1.46). Ou seja, o fluxo através de um contorno fechado movendo-se com os elétrons é conservado. Essa conservação não ocorre em regiões de reconexão e também não é verdadeira no caso de dínamo (que são sistemas geradores de campo magnético). No caso do Universo primordial, se admitirmos que, por ex., na época da nucleossíntese primordial, quando $t \simeq 100s$, $\vec{B}$ era nulo, então a eq. (1.49) implicaria ϕ nulo (e portanto também $\vec{B}$ nulo) através de todos os contornos e em todas as épocas, o que contraria as observações. Isso implica que, ou $\vec{B}$ é de fato primordial (ou seja $\vec{B} \neq 0$ desde o Big Bang, por ex.) ou que o congelamento do fluxo do campo é violado de algum modo em determinadas circunstâncias, como nos casos acima citados. Essa questão tornará a ser discutida posteriormente no curso. Vemos no entanto que, num caso mais geral em que o fluido não é perfeitamente condutor (e portanto $\eta \neq 0$) a eq. que descreve a evolução de $\vec{B}$ não é mais (1.38) e sim (1.35) e portanto (1.49) não é mais válida. Nesse caso, devemos esperar que, embora as linhas de força de $\vec{B}$ ainda sejam transportadas pelo fluido em movimento, elas não estarão mais "congeladas" ao fluido, mas poderão difundir (ou "escorrer") através dele. A convicção das linhas de força dominará a difusão sempre que $Lv >> \eta$.

1.5 Mais sobre campos elétricos

De acordo com as eqs. de Maxwell, a evolução de $\vec{E}$ é descrita por

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi\vec{J} \tag{1.50}$$

Mas em nosso tratamento até o momento, implicitamente assumimos que $\partial\vec{E}/\partial t \simeq 0$ (como na eq. 1.30). Vejamos se tal hipótese é consistente. Considerando a componente de $\vec{E}$

perpendicular ao campo $\vec{B}$, $\vec{E}_{\perp}$, podemos estimar $E_{\perp}$ a partir do termo dominante de (1.20):

$$\mid \frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t} \mid \simeq \frac{v_e B}{c\Delta t} \tag{1.51}$$

Logo, a razão desse termo com $\mid c\vec{\nabla} \times \vec{B} \mid$ em (1.50) é:

$$\frac{\frac{\partial E_{\perp}}{\partial t}}{c \mid \vec{\nabla} \times \vec{B} \mid} \simeq \frac{\frac{v_e B}{c\Delta t}}{c\frac{B}{L}} = \frac{v_e L}{c^2 \Delta t} \sim \left(\frac{v_e}{c}\right)^2 \tag{1.52}$$

Onde fizemos a hipótese de que $L/\Delta t \sim v_e$. Logo, $\partial E_{\perp}/\partial t$ é de fato desprezível em situações não-relativísticas onde $v_e << c$.

Vejamos agora a componente paralela, $\vec{E}_{//}$. Vimos anteriormente que as oscilações do plasma não favorecem a manutenção de um grande valor para $E_{//}$. Mas, podemos estimar seu valor a partir de (1.20):

$$\mid \vec{E}_{//} \mid \simeq \eta \mid \vec{J}_{//} \mid \simeq \frac{\eta c}{4\pi} \mid (\vec{\nabla} \times \vec{B})_{//} \mid \sim \frac{\eta c B}{4\pi L} cos\alpha \tag{1.53}$$

Onde utilizamos apenas o termo dominante de (1.50) para avaliar $J_{//}$ e onde α é o ângulo entre $\vec{J}$ e $\vec{B}$. (1.53) pode ser comparada a

$$\mid \vec{E}_{\perp} \mid \sim \frac{v_e B}{c} \tag{1.54}$$

De modo que a razão entre ambas

$$\frac{\mid \vec{E}_{//} \mid}{\mid \vec{E}_{\perp} \mid} \sim \frac{\eta c^2}{4\pi v_e L} cos\alpha = \frac{v_M}{v_e L} cos\alpha \sim \frac{cos\alpha}{R_{eM}} \tag{1.55}$$

Nós havíamos visto anteriormente que $R_{eM} >> 1$ em astronomia, em geral. Logo, concluímos que $\mid E_{//} \mid$ é em geral $<< \mid E_{\perp} \mid$. E, portanto, $\partial E_{//}/\partial t$ é ainda menor que

$\partial E_\perp/\partial t$ por um fator $\sim R_{eM}^{-1}$. Assim, ficamos justificados ao assumir (em situações não relativísticas) a eq. (1.50) na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{1.56}$$

como fizemos em (1.30).

Note-se que em regiões estreitas de reconexão onde R_{eM} não precisa ser muito grande, porque L é pequeno, $E_{//}$ pode ser grande e as partículas podem ser aceleradas ao longo de $\vec{B}$, como é o caso das manchas solares!

Vamos agora examinar o que ocorre com $\vec{\nabla}.\vec{E}$. Vou deixar como exercício para o leitor demonstrar que

$$\frac{\rho}{n_e e} \sim \frac{\mid \vec{v}_i - \vec{v}_e \mid}{v_e} \simeq \frac{v^2}{c^2} \tag{1.57}$$

Onde ρ é a densidade de carga líquida $\rho = Zen_i - en_e$. A eq. (1.57) nos mostra que a densidade de carga líquida é bem pequena o que é consistente com a hipótese da quase neutralidade do plasma ($\rho \simeq 0$).

Sumarizando, considerando apenas os termos dominantes de (1.20), $\vec{E}$ é dado por

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c} + \eta\vec{J} = -\frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c} + \frac{\eta c}{4\pi}\vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{1.58}$$

A eq. acima expressa o balanceamento de forças sobre os elétrons e leva a uma aproximação consistente com as características de um plasma. O 1^o termo gera um campo elétrico perpendicular a $\vec{B}$, a partir de $\vec{B}$. Já o 2^o termo gera uma componente perpendicular e uma paralela a $\vec{B}$.