TEORIA DA GRAVITAÇÃO

Colber G. Oliveira

Departamento de Física - Universidade de Brasília

ÍNDICE

pág.

1 - *NOÇÕES DE RELATIVIDADE RESTRITA*

Historicamente a teoria da relatividade restrita teve início como um resultado das tentativas feitas no século 19 para estender a teoria de Maxwell de modo a englobar fenômenos eletromagnéticos que se passavam em meios em movimento. Essas tentativas foram insatisfatórias, em grande parte isso foi devido a que os físicos da época estavam certos que a mecânica newtoniana explicava todos os fenômenos físicos que necessitassem de conceitos dinâmicos.

De acordo com esse ponto de vista, as equações da eletrodinâmica deveriam ser ou invariantes para as transformações de Galileu, ou então serviriam para a determinação de um sistema de referência absoluto — vamos chamálo S_{em}.

Como uma tentativa de substanciar a 1ª alternativa, H. Hertz (1890) e O. Heaviside, na mesma época, propuzeram uma formulação teórica que entretanto estava em desacordo com algumas experiências de importância (Ex.: experiências óticas associadas à hipótese de Fresnel (ver Whittaker - "A history of theories of Aether and Electricity - 1, p. 328-331. 403-404 - Harper & Brothers, N.Y. 1960). A teoria de Hertz referia os fenômenos eletromagnéticos a um "corpo em movimento", em unidades Gaussianas:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho \quad , \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{rot}\,\vec{E}^* = -1/c\,\dot{\vec{B}} \quad ,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}^* = 1/c(\dot{\vec{D}} + 4\pi j^*)$$

onde,

$$\vec{E}^* = \vec{E} + 1/c\,\vec{v} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{H}^* = \vec{H} - 1/c\,\vec{v} \times \vec{D}$$

$$\vec{J}^* = \vec{J} + \rho\vec{v}$$

Observar que $\vec{E}^*$, $\vec{H}^*$, $\vec{J}^*$ são quantidades referidas ao sistema associado ao corpo em movimento, enquanto $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$ são referidos a um referencial em repouso. Se passa de um referencial ao outro por uma transformação de Galileu do Tensor $F_{\alpha\beta}$ com

$$F_{oi} = E_i \quad e \quad F_{ij} = \epsilon_{ijs}\, B_s$$

$\vec{v}$ é a velocidade relativa do corpo em movimento em relação ao qual as equações são válidas. Essas equações de campo são invariantes sob transformações de Galileu.

A 2ª alternativa tinha um apelo muito grande pois dessa forma se poderia associar a S_{em} o sistema de referência absoluto da teoria de Newton. De fato, poderíamos tomar S_{em} como o "eter" luminoso que desde os dias de Descartes já era muito predito por Hooke e Huyghens — como o meio dentro do qual os distúrbios óticos se propagavam. Isto era substanciado pelo fato qûe Hertz (1884 - 1894) tinha determinado experimentalmente a identidade entre fenômenos luminosos e ondas eletromagnéticas de alta frequência (fato este predito teoricamente por Maxwell).

Até a metade do século 18, quando o método da "ação-a-distância" ganhou proeminência geral, a maioria dos físicos segundo Leibnitz e Huyghens favoreciam algum tipo de "ação de Contato", a qual era imaginada tomar lugar através de um meio universal que a propagasse. Esse meio sendo capaz de sustentar vibrações longitudinais representando luz, em analogia às vibrações elásticas associadas às ondas sonoras num meio material. O "eter" retornou a ser de importância no século 19 com o advento da teoria ondulatória da luz de Young e Fresnel, a des coberta que essas ondas luminosas eram vibrações transversais conduziu à introdução de um modelo de eter perfeitamente rígido e elástico segundo a teoria da elasticidade então descoberta por Navier, Cauchy e Stokes. Apesar disso, restava a aparente contradição desse meio ser absolutamente rígido e ao mesmo tempo perfeitamente transparente à luz e a todos os corpos (completa penetrabilidade).

1.1 - *As Equações Relativísticas de Lorentz*

Lorentz considerou fenômenos óticos em corpos em movimento num meio absolutamente estacionário (eter) contra as idéias de Stokes (1845) que envolviam a hipótese de arrastamento do eter pelos corpos massivos em movimento. Foi devido a essas diferentes teorias que Michelson imaginou seu interferômetro (1881) que foi mais tarde melhorado por ele e por Morley (1887). O resultado negativo da experiência (detecção do movimento da Terra em relação ao eter) poderia ser interpretado como uma confirmação da teoria de Stokes, pois obviamente nenhuma experiência ótica feita na Terra pode ser afetada por seu movimento se esse movimento arrasta consigo o meio ótico de propagação (eter). Entretanto, Lorentz estava convencido da fraqueza lógica da teoria de Stokes e que todas as sugestões para melhorá-la conduziam a conclusões erradas(*). Devido a isso,ele introduziu o que chamou "eter de Fresnel" e tentou introduzir

(*) Seus trabalhos nesse sentido iniciaram em 1886 e terminaram em 1904 , ano em que propos suas equações de transformação.

outros conceitos de forma a explicar o resultado nulo da experiência de Michelson. A seguir tratamos dessas idéias resumidamente. A teoria dos "elétrons" de Lorentz é baseada nas equações de Maxwell para o vácuo agregadas à presença de cargas e densidade de correntes geradas por distribuições de elétrons , juntamente com a equação dando a força por unidade de carga de origem eletromagnética. Em unidades gaussianas:

$$\text{rot } \vec{E} = -1/c\,\dot{\vec{B}} \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \text{rot } \vec{B} = 1/c(\dot{\vec{E}}+4\pi\rho\vec{u}) \tag{2}$$

$$\vec{f} = \vec{E} + \vec{u}/c \times \vec{B} \tag{3}$$

Essas equações eram assumidas verdadeiras relativas a S_{em}. Com o fim de explicar os resultados experimentais citados (Michelson) que envolvessem fator da ordem de v/c onde v é a velocidade de um corpo em movimento em relação a S_{em} retendo a idéia de Fresnel de um eter imóvel, Lorentz foi conduzido a considerar:

(a) associar ao corpo em movimento um referencial S';
(b) procurar as equações de transformação entre S_{em}, S';
(c) elas devem ser tais que as equações acima são formas invariantes, até pelo menos em termos da ordem de v/c, com isso se explicaria porque a experiência de Michelson dava mesmo resultado de interferência se a Terra estivesse em repouso ou em movimento através do eter com velocidade v (no caso v = 0 seria o sistema de equações S_{em}, e para $v \neq 0$ seria o sistema de equações para S', e o ítem (c) explica porque se obtém os mesmos padrões de interferência em am -

bos os casos)

Para obter esses resultados, Lorentz verificou que as coordenadas espaciais se transformavam de acordo com a lei de Galileu:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \tag{4}$$

porém a lei t' = t (tempo absoluto) teria que ser corrigida para

$$t' = t - (1/c)^2\vec{v}.\vec{x} \tag{5}$$

e os campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ deveriam se transformar como:

$$\vec{E}' = \vec{E} + (\vec{v}/c) \times \vec{B} \quad , \quad \vec{B}' = \vec{B} - (\vec{v}/c) \times \vec{E} \tag{6}$$

Com essas hipóteses e desprezando termos de ordem superior a v/c e u/c as equações transformadas assumem a mesma forma que as equações iniciais. Aqui S_{em} essencialmente é o eter de Fresnel (ao longo do qual são marcadas três direções x, y, z e relógios medindo o tempo <u>t</u>) e S' é o referencial ligado à Terra que se move em relação a S_{em} com velocidade v, tal que $(v/c)^2$ já é desprezível.

De forma a poder também explicar experiências óticas do tipo de Michelson até termos da ordem de $(v/c)^2$, Lorentz introduziu outra hipótese, que já tinha sido inclusive proposta anteriormente por Fitzgerald e que ficou conhecida como a hipótese de <u>contração de Lorentz-Fitzgerald</u> — de acordo com ela cada corpo que se move com velocidade <u>v</u> relativa a S_{em} tem sua extensão espacial na direção do movimento contraída pelo fator $v^2/2c^2$. Em

$$S_{em} : l_0 = x_2 - x_1$$

em

$$S' : l = x'_2 - x'_1 = l_0(1-v^2/2c^2)$$

Finalmente, não satisfeito com o caráter provisório de suas hipóteses, Lorentz generalizou as equações de transformação de $S_{em} \rightarrow S'$ com o fim de garantir a invariância de forma das equações da eletrodinâmica sob forma exata sem qualquer aproximação. Essa generalização consistia nas fórmulas — para movimento relativo ao longo do eixo-x

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \qquad (7)$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad , \quad \beta = v/c \qquad (8)$$

Com elas estava associada a lei de transformação das variáveis de campo(*)

$$E'_x = E_x \quad , \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad , \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \qquad (9)$$

$$B'_x = B_x \quad , \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad , \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \qquad (10)$$

Com essas leis de transformação agregadas a fórmulas de transformação de ρ, velocidades e forças elétricas, Lorentz pôde interpretar todas as experiências óticas e eletromagnéticas então existentes. Entretanto, essas fórmulas para a transforma

---

(*) Note que essas leis de transformação foram postuladas, pois nessa época Lorentz não conhecia as propriedades geométricas dos campos $\vec{E},\vec{B}$ no espaço de Minkowaki, unicamente ele tinha o resultado que para baixas velocidades (9) e (10) deviam degenerar nas (6) anteriores.

ção de ρ, velocidades e forças não estavam inteiramente corretas, e foram mais tarde revistas por Poincaré(*) e Einstein, que deram suas formas consistentes:

$$\rho' = \gamma\rho(1 - \frac{\beta u_x}{c}) \quad , \quad \rho' u'_x = \gamma\rho(u_x - \beta c) \quad ,$$
$$\rho' u'_y = \rho u_y \quad , \quad \rho' u'_z = \rho u_z \tag{11}$$

$$F'_x = \gamma(F_x - \beta \, \frac{\vec{F}.\vec{u}}{c}) \tag{12}$$

$$F'_y = F_y \quad , \quad F'_z = F_z \; : \; \vec{F} = \text{força/unid. de volume} \tag{13}$$

Por essas fórmulas $c\rho = j^0$ se transforma como $ct = x^0$ se em lugar de $\vec{x}$ colocarmos $\vec{j}$:

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x) \quad , \quad j_x = \rho u_x$$

que é análoga a:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

ou,

$$x \leftrightarrow j_x \quad , \quad y \leftrightarrow j_y \quad , \quad z \leftrightarrow j_z \; ,$$
$$ct \leftrightarrow c\rho$$

A designação "transformação de Lorentz" é devida a Poincaré. Foi ele quem observou também que essas transformações formam um grupo, hoje chamado grupo de Lorentz. Ele também esteve perto de antecipar o tratamento quadridimensional que mais tarde

---

(*) H. Poincaré - Compte Rendus, 140, 1504 (1905).

foi proposto por Minkowski, porém não continuou suas pesquisas nesse assunto.

O conjunto de equações (7) a (13), requer somente a adição da hipótese razoável, que foi em efeito considerada por Lorentz, que não somente as forças eletromagnéticas mas todas as outras forças transformassem de acordo com as eqs. (12) , (13) sob a transformação (7). Dessa forma é possível obter-se a dinâmica da relatividade restrita.

Entretanto nos referimos ao trabalho de Lorentz como sendo as "equações relativísticas de Lorentz", e não como a teoria da relatividade de Lorentz, pois ele, em verdade, não considerou sua teoria como sendo uma indicação de relatividade do espaço e do tempo, porém aderiu estritamente em suas investigações ao conceito de um eter universal que lhe permitia pensar num referencial absoluto, em repouso, através da qual se determinava movimentos absolutos e medidas absolutas de comprimento e tempo. A contração de Fitzgerald para ser explicada, nessa base, requeria uma explicação em termos da estrutura da matéria, em última análise da estrutura eletrônica da barra. Para a dilatação do tempo

$$\Delta t' = \Delta t(1-v^2/c^2)^{1/2} = \text{tempo medido por relógio em repouso em } S'$$

ele julgou tratar-se de um artifício matemático, ele chama $\Delta t'$ intervalo de tempo local, porém somente Δt teria significado pois era o intervalo de "tempo universal" referente ao S_{em} absoluto.

Essas idéias de Lorentz foram aparentemente compartilhadas por outras pessoas e marcantemente por Poincaré que, em

1904, apresentou uma conferência no Congresso de St. Louis de Artes e Ciências. Apesar disso, nessa conferência ele esteve perto de se libertar dos preconceitos da época pois disse literalmente: Talvez pudéssemos construir uma nova mecânica, da qual no momento só sabemos alguns detalhes, onde inércia aumenta com a velocidade, e a velocidade da luz seria um limite impassável.

1.2 - *Relatividade Restrita*

Aquilo que veio a ser conhecido como a Teoria da Relatividade Restrita, teve seu início no trabalho de A.Einstein "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento" (Ann. Physik, 17, 891 (1905)). A resolução por Einstein das dificuldades relacionadas às experiências sobre detecção da existência do eter é baseada no trabalho anterior de Lorentz. Entretanto, ele se difere do trabalho de Lorentz em dois detalhes:

(a) as transformações de Lorentz não são introduzidas ad hoc como uma adivinhação, mas são derivadas a partir dos postulados básicos;

(b) o que é mais significativo, uma interpretação fundamentalmente nova é dada para o conteúdo físico dessas equações de transformação.

Inicialmente, Einstein abandona a *existência* de um eter absoluto, ou equivalente de um S_{em} pois como foi visto, sua retenção implicava numa explicação atomística da contração da barra em movimento.

Um dos postulados da Mecânica de Newton é que existem sinais que propagam com velocidade infinita, o qual implica na velocidade infinita de propagação das interações. Einstein rejeita esse postulado e em seu lugar coloca:

i - Em cada sistema inercial existe um limite superior finito para a propagação de sinais.

Os outros postulados são:

ii - A velocidade da luz no vazio referida a um sistema inercial é independente da velocidade da fonte;

iii - Todos os referenciais inerciais no espaço-tempo são completamente equivalentes à formulação das leis físicas.

A derivação das equações de transformações de Lorentz a partir desses postulados, pode ser vista assim:de acordo com o postulado ii a velocidade da luz no vazio referida a um referencial inercial tem a mesma magnitude c independentemente da direção de propagação e deve satisfazer

$$c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{x} = 0 \qquad (14)$$

em qualquer referencial inercial pois aí está contido que ela independe da velocidade da fonte (supondo, é claro, fontes se deslocando com velocidades constantes). As transformações de Lorentz são então o conjunto de transformações que mantêm (14) forma invariantes. Além disso essas transformações têm que ser lineares, pois o único parâmetro envolvido é a velocidade relativa v entre os referenciais inerciais. Invocando a homogeneidade e isotropia do espaço físico e introduzindo a notação:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \quad x^0 = ct \quad , \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

a equação (14) assume a forma

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = 0 \quad , \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag.}\ (+1, -1, -1, -1) \tag{15}$$

considerando transformações lineares no espaço-tempo

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \quad , \quad L^{\mu}{}_{\nu} = f^{\mu}{}_{\nu}(v, \xi_i)$$

onde ξ_i são outros possíveis parâmetros que possam aparecer , tal que no novo referencial se tenha

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x'^{\mu}\Delta x'^{\nu} = 0$$

vem

$$\eta_{\mu\nu}L^{\mu}{}_{\rho}L^{\nu}{}_{\alpha}\Delta x^{\rho}\Delta x^{\alpha} = 0$$

Isso manterá a forma da equação (15) se e só se

$$\eta_{\mu\nu}L^{\mu}{}_{\rho}L^{\nu}{}_{\alpha} = \eta_{\rho\alpha}$$

ou

$$L^{T}\cdot\eta\cdot L = \eta \tag{16}$$

tomando movimento relativo na direção comum-x a ambos os referenciais ($x'^2 = x^2$, $x'^3 = x^3$) é possível verificar que uma matriz local L, tal que x' = L.x e que satisfaz à condição (16) é do tipo:

$$L(v) = \begin{pmatrix} L^{0}{}_{0} & L^{0}{}_{1} & 0 & 0 \\ L^{1}{}_{0} & L^{1}{}_{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que é idêntica às equações de transformação (7). Evidentemente, essas transformações ainda poderiam ser multiplicadas por um fator comum $\lambda(v)$ pois a expressão (15) está igualada a zero : tanto serve $L^{\mu}{}_{\nu}$ quanto $\lambda(v)L^{\mu}{}_{\nu}$.

Chamando $\mathcal{L}^{\mu}{}_{\nu}(v) = \lambda(v)L^{\mu}{}_{\nu}(v)$ e notando que essas transformações formam um grupo, o que está implicitamente contido no postulado iii, vem:

$$\mathcal{L}^{\mu}{}_{\nu}{}^{-1}(v) = \mathcal{L}^{\mu}{}_{\nu}(-v) = \lambda(-v)L^{\mu}{}_{\nu}(-v)$$

vem

$$\lambda(v)\lambda(-v)L(v).L(-v) = 1_4$$

como $L(v).L(-v) = 1_4$, tem-se $\lambda(v)\lambda(-v) = 1$, por outro lado $\lambda(v)$ deve depender só de $|\vec{v}|$ através termos em $\beta = |\vec{v}|/c$, daí $\lambda(-v) = \lambda(v)$ e decorre que $\lambda^2(v) = 1$, ou seja, $\lambda(v) = \pm 1$, e as equações de Lorentz decorrem da escolha $\lambda(v) = +1$. A escolha $\lambda(v) = -1$ implica no produto de uma transformação de Lorentz por uma inversão do espaço-tempo, o que matematicamente é permissível.

Vamos generalizar a expressão (15) de modo a introduzir o intervalo Δs^2 dado por

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} \qquad (17)$$

O lugar dos pontos onde $\Delta s^2 \to 0$ é dito Cone de luz e conduz à eq. (15). O grupo de simetria da expressão (17) é o conjunto de transformações satisfazendo (16). Essas transformações formam o chamado grupo próprio de Lorentz com seis parâmetros reais. Sua forma infinitesimal sendo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \quad , \quad \varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\varepsilon^{\rho}{}_{\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

Para nossas transformações de Lorentz ao longo do eixo comum-x se tem:

$$\varepsilon_{10} = v/c \quad , \quad \varepsilon_{20} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{30} = 0 \quad .$$

Ainda se tem as transformações de simetria de Δs^2:

$$x'^{i} = x^{i} + \varepsilon^{i}{}_{j}x^{j} \quad , \quad x'^{0} = x^{0}$$

que são rotações espaciais através de ângulos infinitesimais $\varepsilon_{ij} = e_{ijk}\,\delta\theta_k$ onde aqui e_{ijk} é o símbolo de permutações a três dimensões.

Ainda se pode ter inversões (espaciais ou temporais ou espaço-temporais) como simetrias de Δs^2, o conjunto de transformações de simetria que incluem inversões é dito grupo impróprio de Lorentz. As simetrias de Δs^2 podem ainda ser generalizadas se incluirmos translações no espaço-tempo, quando teremos o grupo de Poincaré, cuja parte própria contém 10 parâmetros reais.

O espaço-tempo com coordenadas x^{μ} associado a um referencial inercial S dotado de métrica pseudo-ortogonal (satisfazendo (16)) e definida pelo elemento de linha

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} \tag{18}$$

define o chamado espaço-tempo de Minkowski. Nesse espaço existem três diferentes tipos de vetores, que são chamados quadrivetores, devido à dimensão 4 do espaço:

a) Vetores tipo-tempo — são os que satisfazem

$$V^2 = \eta_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta > 0$$

b) Vetores tipo-espaço — satisfazem $V^2 < 0$

c) Vetores nulos — são aqueles tais que $V^2 = 0$

Existe sempre um referencial inercial no qual um vetor tipo-tempo tem componentes $V^\mu = (V^0, 0, 0, 0)$. Similarmente vetores espaciais podem ser colocados na forma $V^\mu = (0,\vec{V})$. As três regiões: dentro do cone de luz (definido por $ds^2 > 0$), sobre o cone de luz(*) e fora do cone de luz, são regiões invariantes sob transformações de Lorentz. Sobre o espaço de Minkowski pode-se definir campos tensoriais como sendo um agregado de funções $W^{\mu_1,\ldots\mu_p}_{\nu_1,\ldots\nu_k}(x)$ que sob transformações de Lorentz se transformam homogeneamente como:

$$W'^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_k}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_k}}{\partial x'^{\nu_k}} W^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_k}(x)$$

No evento de se ter um objeto $W^\mu(x)$ dizemos que temos um vetor contravariante, e se tivermos $V_\mu(x)$ teremos um vetor covariante. Sempre se tem

$$\frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\alpha_k}} = L^{\mu_k}{}_{\alpha_k} \quad , \quad \frac{\partial x^{\beta_k}}{\partial x'^{\nu_k}} = L^{-1\,\beta_k}{}_{\nu_k}$$

(*) **O cone de luz é um sub-espaço de dimensão 3, seus três vetores unitários independentes sobre o ramo positivo do eixo tempo e apontando ao longo das direções positivas dos eixos espaciais são (1,1,0,0),(1,0,1,0) e (1,0,0,1).**

Vetores covariantes estão relacionados às suas componentes contravariantes por (num mesmo referencial)

$$V_{\mu}(x) = \eta_{\mu\alpha}V^{\alpha}(x)$$

Similarmente

$$V^{\alpha}(x) = \eta^{\alpha\mu}V_{\mu}(x)$$

onde $\eta^{\alpha\mu}$ são as componentes da matriz inversa de $\eta_{\alpha\mu}$, ou seja $\eta^{\alpha\mu}\eta_{\alpha\lambda} = \delta^{\alpha}_{\lambda}$.

A covariância das equações da física sob o grupo de Lorentz está contida na imposição que essas equações devem ter "seu lado esquerdo" como uma função de tensores que definem os campos em questão. Como exemplo, as equações de Maxwell no espaço vazio são do tipo

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F^{\mu\nu} = 0 \qquad , \qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho,\sigma} = 0$$

Definindo o "lado esquerdo" das equações por

$$M^{\nu}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F^{\mu\nu} = \text{4-vetor para tr. de Lorentz}$$

teremos sob transformações de Lorentz

$$M'^{\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} M^{\alpha}(x)$$

daí $M^{\alpha}(x) = 0$ implica em $M'^{\alpha}(x') = 0$. Equações de campo, via de regra, podem ser obtidas de densidades Lagrangeanas adequadas, por exemplo, as equações de Maxwell decorrem do princípio variacional com extremos fixos

$$\delta \int_{\Omega} L \, d^4x = 0 \quad , \quad d^4x = d^3x dx^0$$

$$L = -\frac{1}{2} (c^2/8\pi) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}F^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

através das equações de Euler-Lagrange do problema

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial A^\nu_{\,,\mu}} - \frac{\partial L}{\partial A^\nu} = 0$$

juntamente com a condição que no contorno do quadri-volume Ω as variações δA_μ tendem a zero.

Via de regra, as equações mais importantes da teoria de campos relativística são lineares. A condição de linearidade é uma imposição extra que deve ser feita na escolha da densidade L, e não está contida na restrição de L ser um escalar em relação à transformação de Lorentz.

A existência de densidades Lagrangeanas L associadas a campos é de interesse, pois através do princípio variacional pode-se definir leis de conservação locais para esses campos, (desde que eles estejam isolados de interações externas) tal como será visto em outra sessão desse curso. Por outro lado, o formalismo Lagrangeano implica na teoria de Hamilton para esses campos, a qual é o passo inicial para a quantização canônica da teoria. Visto de outra forma o formalismo de Lagrange é um critério para a determinação da forma covariante de uma dada teoria envolvendo um certo tipo de variável de campo. Como exemplo, temos as equações de Dirac do elétron relativístico , assim como em geral quase todas as equações de onda relativísticas.

Dentro ainda do espírito da teoria da relatividade restrita, poder-se-ia introduzir transformações mais gerais que as de Poincaré, envolvendo termos quadráticos. Tais transformações envolvem 4 parâmetros de aceleração relativa constante e são chamadas de transformações conformes especiais. Agregadas às chamadas transformações de escala definidas como $x'^{\mu} = a.x^{\mu}$ elas formam um prolongamento do grupo de Poincaré com 15 parâmetros, e são chamadas de grupo de transformações conformes do espaço de Minkowski. Entretanto, o conjunto de equações de campo que são invariantes sob esse grupo é bem mais restrito que em relação ao grupo de Poincaré. Via de regra, só são invariantes as equações que se referem a partículas com massa de repouso nula (que se movem com a velocidade da luz c), como exemplo tem-se a equação de Dirac do neutrino e as equações de Maxwell no espaço vazio (fótons).

2 - *TRANSFORMAÇÕES DE SIMETRIAS PARA CAMPOS*

Nessa seção vamos considerar a invariância da densidade Lagrangeana em relação às transformações de simetria no espaço-tempo de Minkowski. Seja uma densidade Lagrangeana

$$L = L\left[q^i(x), q^i{}_{,\alpha}(x)\right] = L(x)$$

onde $q^i(x)$ é um campo genérico ($i = 1,\dots,n$). Sob transformações do grupo de Poincaré próprio L é um escalar: $L'(x') = L(x)$. Considere inicialmente uma translação infinitesimal $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. Então:

$$\delta L = L'(x') - L(x) = 0$$

daí,

$$\delta L = L'(x) - L(x) + a^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \bar{\delta} L(x) + a^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (19)$$

também,

$$\begin{aligned} \delta q^i = q'^i(x') - q^i(x) &= q'^i(x) - q^i(x) + a^\alpha q^i{}_{,\alpha}(x) = \\ &= \bar{\delta} q^i(x) + a^\alpha q^i{}_{,\alpha}(x) \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\delta q^i{}_{,\alpha} = q'^i{}_{,\alpha}(x') - q^i{}_{,\alpha}(x) = \bar{\delta} q^i{}_{,\alpha}(x) + a^\lambda q^i{}_{,\alpha\lambda}(x) \qquad (21)$$

desde que

$$\frac{\partial q'^i(x')}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial q'^i(x')}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \delta^\beta_\alpha \frac{\partial q'^i(x')}{\partial x^\beta} = \frac{\partial q'^i(x')}{\partial x^\alpha} \approx$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[q'^{i}(x) + a^{\rho} q^{i}{}_{,\rho}(x) \right] = q'^{i}{}_{,\alpha}(x) + a^{\rho} q^{i}{}_{,\rho\alpha}(x)$$

Subtraindo ambos os membros por $\partial q^{i}(x)/\partial x^{\alpha}$,

$$\frac{\partial q'^{i}(x')}{\partial x'^{\alpha}} - \frac{\partial q^{i}(x)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial q'^{i}(x)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial q^{i}(x)}{\partial x^{\alpha}} + a^{\rho} q^{i}{}_{,\rho\alpha}(x)$$

onde

$$\delta q^{i}{}_{,\alpha} = \overline{\delta} q^{i}{}_{,\alpha} + a^{\rho} q^{i}{}_{,\rho\alpha}$$

Tomando a variação $\overline{\delta}$ teremos,

$$\overline{\delta} L(x) = \frac{\partial L}{\partial q^{i}(x)} \overline{\delta} q^{i}(x) + \frac{\partial L}{\partial q^{i}{}_{,\alpha}(x)} \overline{\delta} q^{i}{}_{,\alpha}(x)$$

Por (19), (20) e (21), vem

$$- a^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial q^{i}(x)} (\delta q^{i} - a^{\alpha} q^{i}{}_{,\alpha}(x)) + \frac{\partial L}{\partial q^{i}{}_{,\alpha}(x)} (\delta q^{i}{}_{,\alpha} - a^{\lambda} q^{i}{}_{,\alpha\lambda}(x))$$

Por outro lado se tem

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^{i}(x)} \delta q^{i} + \frac{\partial L}{\partial q^{i}{}_{,\alpha}(x)} \delta q^{i}{}_{,\alpha} = 0$$

portanto,

$$a^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial q^{i}(x)} a^{\alpha} q^{i}{}_{,\alpha}(x) + \frac{\partial L}{\partial q^{i}{}_{,\alpha}(x)} a^{\lambda} q^{i}{}_{,\alpha\lambda}(x) \qquad (22)$$

Pelas equações de movimento,

$$\frac{\partial L}{\partial q^i(x)} = \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \quad \frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\lambda}(x)} \qquad ,$$

logo se tem em (22)

$$a^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = a^\alpha q^i{}_{,\alpha} \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \quad \frac{\partial L}{\partial q^i{}_\lambda} + a^\alpha q^i{}_{,\alpha\lambda} \frac{\partial L}{\partial q^i{}_\lambda} =$$

$$= a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[q^i{}_{,\alpha} \frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\lambda}} \right]$$

ou

$$a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[\delta^\lambda_\alpha L - q^i{}_{,\alpha} \frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\lambda}} \right] = 0 \, .$$

Definindo

$$T^\lambda{}_\alpha = \delta^\lambda{}_\alpha L - q^i{}_{,\alpha} \frac{L}{\partial q^i{}_{,\lambda}} \tag{23}$$

e levando em consideração que a^α são constantes arbiprārias , se tem

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} T^\lambda{}_\alpha = 0 \quad . \tag{24}$$

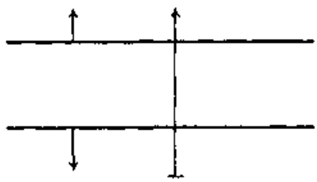
O tensor definido por (23) ē chamado tensor de Momentum-Energia do Campo, o qual define quatro leis de conservação, de energia e momentum, por (24). De fato, pelo teorema de Gauss aplicado numa região Ω do espaço-tempo com contorno Σ

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^{\lambda}{}_{\alpha}\, d^4x = \oint_{\Sigma} T^{\lambda}{}_{\alpha}\, n_{\lambda}\, d\sigma$$

supondo que o campo q'(x) caia a zero suficientemente rápido ao longo de direções espaciais, se tem:

$$\oint_{\Sigma} T^{\lambda}{}_{\alpha} n_{\lambda} d\sigma = \int_{\Sigma_1} T^{\lambda}{}_{\alpha} n^{(1)}_{\lambda}\, d\sigma - \int_{\Sigma_2} T^{\lambda}{}_{\alpha} n^{(2)}_{\lambda}\, d\sigma$$

onde Σ_1 e Σ_2 são duas hipersuperfícies espaciais



com normais $n^{(1)}$ e $n^{(2)}$. Portanto

$$\int_{\Sigma_1} T^{\lambda}{}_{\alpha} n^{(1)}_{\lambda}\, d\sigma = \int_{\Sigma_2} T^{\lambda}{}_{\alpha}\, n^{(2)}_{\lambda}\, d\sigma$$

com Σ_1, Σ_2 são inteiramente arbitrárias isso implica que

$$P_{\alpha} = \int_{\Sigma} T^{\lambda}{}_{\alpha}\, n_{\lambda}\, d\sigma$$

independe da superfície de integração, ou seja, essencialmente independe do instante de tempo Σ onde Σ corta o eixo-tempo — assim P^{λ} é uma constante de movimento. Suas componentes são:

$$P_0 = \int_V T^0{}_0 \, d^3x \quad , \quad P_i = \int_V T^0{}_i \, d^3x$$

ou

$$P_\mu = \int_V T^0{}_\mu \, d^3x$$

Em geral pode-se sempre multiplicar a integral por uma constante (basta fazer $T^\lambda{}_\alpha \to$ (constante) $T^\lambda{}_\alpha$, o que não muda a lei de conservação), e usar essa constante de modo que P^0 seja a energia do sistema dentro do volume V dividida por c:

$$P^0 = \frac{E}{c}$$

e $\vec{P}$ é o momentum total do campo dentro de V.

É de interesse a determinação da expressão $\bar{\delta} q^i(x)$ gerada por transformações de simetria:

a) translações: viu-se que para $q^i(x)$ escalares ($q'^i(x') = q^i(x)$) sob translações

$$\bar{\delta} q^i(x) = - a^\alpha q^i{}_{,\alpha} = - a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \cdot q^i = G_x \cdot q^i(x)$$

onde $G_x = - a^\alpha \frac{\partial \cdot}{\partial x^\alpha}$ é o gerador da translação

b) rotações: se tem em geral

$$q'^i(x') = J^i{}_k(x,x') q^k(x)$$

sob $X' = R.x$, com R uma matriz tipo Lorentz.

Para transformações infinitesimais $R = \frac{1}{4} + \epsilon$ e $q'^i(x+\epsilon.x) = q'^i(x) + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \frac{\partial q^i}{\partial x^\mu}$, onde

$$q'^i(x) + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu q^i = J^i{}_k(x,x')q^k(x)$$

Ainda,

$$J^i{}_k(x,x') = J^i{}_k(x,x) + \varepsilon^\rho{}_\sigma x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\rho} J^i{}_k$$

obviamente $J^i{}_k(x,x) = \delta^i{}_k$, logo podemos escrever

$$J^i{}_k(x,x') = \delta^i{}_k + \varepsilon^\rho{}_\sigma S^{\sigma i}{}_{\rho k}(x)$$

então

$$\bar{\delta} q^i(x) = \left[\varepsilon^\rho{}_\sigma S^{\sigma i}{}_{\rho k}(x) - \delta^i{}_k \varepsilon^\rho{}_\sigma x^\sigma\ \partial_\rho\right] q^k(x)$$

$$= \varepsilon^{\rho\sigma}\left[S_{\sigma\rho}{}^i{}_k(x) - \frac{1}{2}\,\delta^i{}_k\ L_{\sigma\rho}(x)\right]\ q^k(x)$$

com

$$L_{\sigma\rho}(x) = x_\sigma \partial_\rho - x_\rho \partial_\sigma$$

daí,

$$\bar{\delta} q^i(x) = \varepsilon^{\rho\sigma} R_{\sigma\rho k}^{\ \ \ i}(x) q^k(x)$$

As 6 matrizes (n x n) $R_{\sigma\rho k}^{\ \ \ i}(x)$ são divididas em duas partes a parte orbital associado ao tensor (operador) de momen_
tum angular $L(x)$ e a parte intrínseca, associada ao "spin" do campo $S_{\sigma\rho}{}^i{}_k(x)^{\sigma\rho}$.

O gerador da "rotação" no campo $q^i(x)$ é a quantidade

$$G_x{}^i{}_k = \varepsilon^{\rho\sigma} R_{\sigma\rho}{}^i{}_k(x)$$

Como exemplo considere:

a) Campo escalar sem massa

$$\Box \phi = 0$$

cuja solução é $\phi(x) = \phi_0 \ell^{\frac{i}{\hbar} p_\alpha x^\alpha}$, $p^2 = 0$. Então

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \frac{i}{\hbar} p_\alpha$$

daí, o gerador de rotações associado à parte orbital é

$$\Lambda\ (x, \varepsilon) = - \frac{i}{2\hbar} \varepsilon^{\rho\sigma}\ (x_\sigma p_\rho - x_\rho p_\sigma)$$

Como o campo é escalar em relação à transformação de Lorentz $J^i{}_k = \delta^i{}_k$ que implica $S_{\sigma\rho}{}^i{}_k = 0$.

b) Campo vetorial sem massa

$$\Box\ \phi_\alpha = 0 \quad , \quad \phi_\alpha = \overset{0}{\phi}_\alpha \ell^{\frac{i}{\hbar} p_\sigma x^\sigma}$$

a parte orbital é semelhante à anterior e a parte de spin será: $S^i{}_k \to S^\mu{}_\nu$

$$q'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} q^\nu(x) = J^\mu{}_\nu(x,x')\ q^\mu(x)$$

$$= q^\mu(x) + \varepsilon^\mu{}_\nu q^\nu(x)$$

então,

$$S^\mu{}_\nu = \varepsilon^\mu{}_\nu$$

c) Campo tensorial 2ª ordem q (x) ,

$$q'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} q^{\alpha\beta}(x) = J^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}(x,x')\, q^{\alpha\beta}(x)$$

em 1ª ordem,

$$= (\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\alpha}\varepsilon^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\nu}{}_{\beta}\varepsilon^{\mu}{}_{\alpha})\, q^{\alpha\beta}(x)$$

o "spin" é então

$$S^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\alpha}\varepsilon^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\nu}{}_{\beta}\varepsilon^{\mu}{}_{\alpha} = \delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \mathcal{S}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$$

Aqui,

$$\bar{\delta}q^{\mu\nu}(x) = \left[S^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\right] q^{\alpha\beta}(x) = \mathcal{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}q^{\alpha\beta}(x)$$

$$S^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \mathcal{S}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}\varepsilon^{\alpha\lambda}\,(x_{\lambda}\partial_{\alpha} - x_{\alpha}\partial_{\lambda})$$

Trataremos agora da invariância de uma densidade Lagrangeana genérica em relação a transformações de Lorentz. Seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^{i}(x)\ ,\ q^{i}{}_{,\mu}(x))$$

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{i}}\,\bar{\delta}q^{i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{i}{}_{,\mu}}\,\bar{\delta}q^{i}{}_{,\mu}\ ;\ x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

Temos

$$\frac{\partial q'^{i}(x')}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial q'^{i}(x')}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = (\delta^{\alpha}{}_{\mu} - \varepsilon^{\alpha}{}_{\mu})\,\frac{\partial q'^{i}(x')}{\partial x^{\alpha}} =$$

$$= (\delta^{\alpha}_{\ \mu} - \varepsilon^{\alpha}_{\ \mu}) \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (J^{i}_{\ k}(x,R.x)q^{k}(x))\right]$$

$$= (\delta^{\alpha}_{\ \mu} - \varepsilon^{\alpha}_{\ \mu}) \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\delta^{i}_{\ k} - S^{i}_{\ k}(x,\varepsilon)q^{k}(x))\right]$$

Nos exemplos anteriores viu-se que $S^{i}_{\ k}$ era unicamente função de $\underline{\varepsilon}$ mas não de $\underline{x}$ (isso é característico de transformações lineares), daí

$$\frac{\partial q'^{i}(x')}{\partial x'^{\mu}} = (\delta^{\alpha}_{\ \mu} - \varepsilon^{\alpha}_{\ \mu})\ J^{i}_{\ k}(\varepsilon)q^{k}_{\ ,\alpha}(x)$$

$$= q^{i}_{\ ,\mu}(x) + S^{i}_{\ k}(\varepsilon)q^{k}_{\ ,\mu}(x) - \varepsilon^{\alpha}_{\ \mu}q^{i}_{\ ,\alpha}(x) \qquad (25)$$

No lado esquerdo de (25) tem-se:

$$\frac{\partial q'^{i}(x')}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left[q'^{i}(x) + \varepsilon^{\rho}_{\ \alpha}x^{\alpha}q^{i}_{\ ,\rho}(x)\right]$$

$$= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left[q'^{i}(x) + \varepsilon^{\rho}_{\ \alpha}x^{\alpha}q^{i}_{\ ,\rho}(x)\right]$$

$$= (\delta^{\lambda}_{\ \mu} - \varepsilon^{\lambda}_{\ \mu}) \left[q'^{i}_{\ ,\lambda}(x)+\varepsilon^{\rho}_{\ \lambda}q^{i}_{\ ,\rho}(x)+\varepsilon^{\rho}_{\ \alpha}x^{\alpha}q^{i}_{\rho\lambda}(x)\right]$$

$$= q'^{i}_{\ ,\mu}(x) +\varepsilon^{\rho}_{\ \mu}\ q^{i}_{\ ,\rho}(x) + \varepsilon^{\rho}_{\ \alpha}x^{\alpha}q^{i}_{\ ,\rho\mu}(x)-\varepsilon^{\lambda}_{\ \mu}q^{i}_{\ ,\lambda}(x)]$$

onde se reteve termos até 1ª ordem. Levando em (25),

$$\delta q^{i}_{\ ,\mu}(x) \equiv \frac{\partial q'^{i}(x)}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial q^{i}(x)}{\partial x^{\mu}} = S^{i}_{\ k}(\varepsilon)q^{k}_{\ ,\mu}(x) - \varepsilon^{\alpha}_{\ \mu}q^{i}_{\ ,\alpha}(x) -$$

$$- \varepsilon^{\rho}_{\ \mu}q^{i}_{\ ,\rho}(x) - \varepsilon^{\rho}_{\ \alpha}x^{\alpha}q^{i}_{\ ,\rho\mu}(x) + \varepsilon^{\lambda}_{\ \mu}q^{i}_{\ ,\lambda}(x) \ =$$

$$= S^i{}_k(\varepsilon)q^k{}_{,\mu}(x) - \varepsilon^\rho{}_\mu q^i{}_{,\rho}(x) - \varepsilon^\rho{}_\alpha x^\alpha q^i{}_{,\rho\mu}(x) \qquad (26)$$

Temos:

$$\bar{\delta} q^i(x) = R^i{}_k(x,\varepsilon)q^k(x) = S^i{}_k(\varepsilon)q^k - \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L_{\beta\alpha}q^i(x) \qquad (27)$$

E pode-se provar por (26) e (27) que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bar{\delta} q^i(x) = \bar{\delta} q^i{}_{,\mu}(x)$$

Daí,

$$\bar{\delta} L = \frac{\partial L}{\partial q^i} R^i{}_k q^k + \frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\mu}}\left[S^i{}_k(\varepsilon)q^k{}_{,\mu} - \varepsilon^\rho{}_\mu q^i{}_{,\rho} - \varepsilon^\rho{}_\alpha x^\alpha q^i{}_{,\rho\mu}\right]$$

Usando as equações de movimento

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\mu}}$$

se tem

$$\bar{\delta} L = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\mu}}\right)\left[S^i{}_k(\varepsilon) - \frac{1}{2}\delta^i{}_k\varepsilon^{\sigma\rho}L_{\rho\sigma}\right]q^k +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\mu}}\left[S^i{}_k(\varepsilon)q^k{}_{,\mu} - \varepsilon^\rho{}_\mu q^i{}_{,\rho} - \varepsilon^\rho{}_\alpha x^\alpha q^i{}_{,\rho\mu}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i{}_{,\mu}}\left(S^i{}_k(\varepsilon) - \frac{1}{2}\delta^i{}_k\varepsilon^{\sigma\rho}L_{\rho\sigma}\right)q^k\right]$$

Como L é um escalar para transformações de Lorentz,

$$\bar{\delta}L = - \varepsilon^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} L_{,\mu} = - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} L)$$

que dá

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^{i}{}_{,\mu}} S^{i}{}_{k}(\varepsilon) q^{k} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\rho} (x_{\rho} T^{\mu}{}_{\sigma} - x_{\sigma} T^{\mu}{}_{\rho}) \right\} = 0$$

escrevendo

$$M^{\mu}{}_{[\rho\sigma]} = x_{\rho} T^{\mu}{}_{\sigma} - x_{\sigma} T^{\mu}{}_{\rho} \qquad (28)$$

vem a relação de conservação

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{i}{}_{,\mu}} S^{i}{}_{k}(\varepsilon)\, q^{k} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M^{\mu}{}_{[\sigma\rho]} \right\} = \theta \qquad (29)$$

O 1º fator é dito momentum-angular intrínseco do campo genérico $q^{i}(x)$, por essa razão $S^{i}{}_{k}$ é dito "spin" do campo. O 2º fator é o tensor de momentum-angular orbital do campo. Nota-se que em relatividade restrita somente a soma dos dois fatores é conservada. Essa lei de conservação está associada, como foi demonstrado, à invariância de L sob transformações de Lorentz — melhor dizendo, ao fato que $L(x)$ é um escalar de Lorentz.

Se acontecer que o campo $q^{i}(x)$ não tiver "spin" (como exemplo, um campo escalar) então $S^{i}{}_{k} = 0$, e o momentum-angular orbital é conservado

$$\partial_{\mu} M^{\mu}{}_{[\rho\sigma]} = 0$$

é simétrico e determinada em termos de momento-angular intrínseco do sistema:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial q^{i}{}_{,\mu}} S^{i}{}_{k}(\epsilon) q^{k}\right) + \frac{1}{2}\, \epsilon^{\sigma\rho} \eta^{\lambda\beta} \partial_{\beta}\left(\Psi_{\sigma\boxed{\rho\lambda}} - \Psi_{\rho\boxed{\sigma\lambda}}\right) = 0$$

Portanto, a simetrização do tensor momentum - energia é matematicamente equivalente à introdução do momentum-angular intrínseco. Assim, em geral é de se esperar que campos vetoriais ou tensoriais não tenham diretamente um $T_{\mu\nu}$ simétrico. Como exemplo, no caso do campo de Maxwell

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} L - \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right)} \eta_{\beta\mu} \quad ,$$

tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right)} = -\frac{1}{4\pi} F_{\rho\tau} \eta^{\rho\beta} \eta^{\tau\sigma}$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi} A_{\sigma,\nu} F_{\rho\tau} \eta^{\rho\beta} \eta^{\tau\sigma} \eta_{\beta\mu}$$

$$= -\frac{1}{16\pi} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi} A_{\sigma,\nu} F_{\mu}{}^{\sigma}$$

que não é simétrico. Daí definimos

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\,\eta^{\lambda\alpha}\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}\,F_{\mu\alpha}$$

tal que

$$\partial^\mu \mathcal{T}_{\mu\nu} = \partial^\mu T_{\mu\nu}$$

pois

$$\eta^{\lambda\alpha}\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}\,F_{\mu\alpha} = \eta^{\lambda\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\,(A_\nu F_{\mu\alpha}) - A_\nu \eta^{\lambda\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\,F_{\mu\alpha} =$$

$$= \eta^{\lambda\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\,(A_\nu F_{\mu\alpha}) = \partial^\alpha (A_\nu F_{\mu\alpha})$$

pois em pontos onde não existem cargas $\partial^\alpha\, F_{\mu\alpha} = 0$.

Uma nova derivada em $\underline{\mu}$ anulará esse termo. Tem-se:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}\,\eta_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi}\,A_{\sigma,\nu}F_\mu{}^\sigma - \frac{1}{4\pi}\,\eta^{\lambda\alpha}A_{\nu,\lambda}F_{\mu\alpha}$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\,\eta_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi}\,(A_{\sigma,\nu}F_\mu{}^\sigma - A_{\nu,\sigma}F_\mu{}^\sigma)$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\,\eta_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4\pi}\,F_{\nu\sigma}F_\mu{}^\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,(F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\,\eta_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) = \mathcal{T}_{\mu\nu}$$

que é dito tensor de Maxwell. Ele tem a propriedade que

$$\eta^{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Tr}\ \mathcal{T} = 0$$

Retornando novamente à equação (24), temos:

$$\frac{\partial T^0{}_0}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\,T^1{}_0 = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial T^0}{\partial x^0}{}_r + \frac{\partial}{\partial x^i} T^i{}_r = 0 \qquad (34)$$

Daí, integrando num volume V do espaço, teremos para a 1ª equação

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^0{}_0\, d^3x + \int_V \frac{\partial}{\partial x^i} T^i{}_0\, d^3x = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^0{}_0\, d^3x + \oint_S T^i{}_0\, n_i\, d\sigma = 0$$

onde S é o contorno de V. Como $T^0{}_0$ é positivo definido

$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^0{}_0\, d^3x$ = razão de diminuição da energia dentro do volume V.

logo:

$c\oint T^i{}_0\, n_i\, d\sigma$ = quantidade de energia transferida através da superfície S na unidade de tempo.

$-cT_{i0} = cT^i{}_0 = \begin{pmatrix}\text{densidade} \\ \text{fluxo} \\ \text{de energia}\end{pmatrix}$ = quantidade de energia passando para fora de S por unidade de área e por unidade de tempo.

Como:

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int T^\mu{}_0\, d^3x$$

$\frac{1}{c} T^i{}_0 = P^i$ = densidade de momentum logo: c^2x densidade de momentum = $cT^i{}_0$ = fluxo.

Da 2ª equação:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^0{}_r d^3x + \int_V \frac{\partial}{\partial x^i} T^i{}_r d^3x = 0$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^0{}_r d^3x = \oint T^i{}_r\, n_i\, d\sigma$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T_{0r}\, d^3x = \oint T^i{}_r\, n_i\, d\sigma$$

tomando T simétricos, o que pode sempre ser feito.

$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V T_{0r}\, d^3x$ = razão de diminuição do momentum do sistema dentro do volume V por unidade de tempo.

logo,

$\int T^i{}_r\, n_i\, d\sigma$ = quantidade de momentum emergindo do volume V por unidade de tempo.

$-T_{ir} = T^i{}_r = \begin{Bmatrix}\text{densidade}\\ \text{de fluxo}\\ \text{de}\\ \text{momentum}\end{Bmatrix}$ = quantidade de momentum emergindo de V por unidade de área, por unidade de tempo.

para o campo de Maxwell, temos para o tensor de Maxwell

$$T_{ir} = \frac{1}{4\pi}\left[-E_iE_r - H_iH_r + \frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{H}^2)\delta_{ir}\right]$$

$$T^i{}_0 = \frac{1}{c} S^i \qquad , \qquad T_{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{H}^2)$$

onde $\vec{S}$ é o vetor de Poynting, no caso representando a densidade de fluxo de energia: $\vec{S} = (S^i)$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{H}$$

Até aqui consideramos campos na abstenção de cargas. Se existirem cargas na região sob consideração, o momentum total será

$$P_\nu = \frac{1}{c}\int_S T^\mu{}_\nu d\sigma_\mu + \Sigma\; p_\nu \tag{35}$$

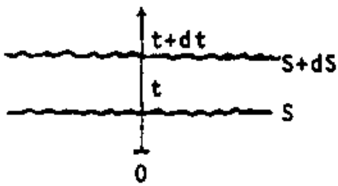
a soma sendo estendida a todas as partículas presentes, e $p^\mu = mcu^\mu$. Na notação tridimensional

$$\vec{P} = \int_V \frac{\vec{s}}{c^2}\, d^3x + \Sigma\,\vec{p}$$

$$E = \int_V W\, d^3x + \Sigma\; \mathcal{E}$$

Em (35) P^μ está associado ao instante t onde S corta o eixo-tempo. Assim,

$$\underset{\text{campo}}{dP_\nu} = P_\nu(t + dt) - P_\nu(t) = \frac{1}{c}\int_{S+dS} T^\mu{}_\nu d\sigma_\mu - \frac{1}{c}\int_S T^\mu{}_\nu d\sigma_\mu$$



logo, teremos para todo o sistema

$$dP_\nu = \frac{1}{c} \oint T^\mu{}_\nu d\sigma_\mu + \Sigma\, dp_\nu$$

$$= \frac{1}{c} \int \frac{\partial T_\nu}{\partial x^\mu}\, d^4x + \Sigma\, dp_\nu$$

Pela equação de movimento das cargas no campo

$$\frac{dp_\nu}{ds} = \frac{e}{c}\, F_\nu{}^\alpha\, \frac{du_\alpha}{ds}$$

logo:

$$dp_\nu = \frac{e}{c}\, F_{\nu\alpha}\, du^\alpha = \frac{e}{c}\, F_{\nu\alpha}\, \frac{du^\alpha}{dt}\, dt$$

$$\Sigma dp_\nu = \frac{dt}{c} \int_V \rho\, F_{\nu\alpha}\, \frac{du^\alpha}{dt}\, dV = \frac{dt}{c} \int_V F_{\nu\alpha} j^\alpha dV$$

pelo teorema do valor médio isso pode ser escrito como (note que S e S+dS se diferem por dt).

$$\Sigma dp_\nu = \frac{1}{c^2} \int F_{\nu\alpha} j^\alpha\, d^4x \quad .$$

logo,

$$dP_\nu = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c}\, F_{\nu\alpha} j^\alpha\right) d^4x \tag{36}$$

Por outro lado, usando a expressão de $T^\mu{}_\nu$ e as equações de Maxwell em presença de cargas e correntes:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c}\, j^\mu$$

se mostra que o integrando de (36) se anula:

$$\frac{\partial T^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = -\frac{1}{c} F_{\nu\alpha} j^{\alpha} \tag{37}$$

de forma que o momentum total P_{ν} é uma constante do movimento: $dP_{\nu} = 0$ —— a energia e momentum do campo mais a energia e momentum das cargas nele presentes são conservados. A equação (37) que generaliza (24) exprime matematicamente essa lei de conservação.

2.1 - *Geometria de Riemann num Contínuo Espaço-Tempo*

A base matemática da teoria da relatividade geral é fundamentalmente a geometria de Riemann num contínuo quadridimensional com três eixos espaciais e um eixo temporal. Einstein verificou juntamente com M. Grossmann que uma generalização do espaço-tempo de Minkowski dotado de métrica $\eta_{\mu\nu}$ = diag. (+1,-1,-1,-1) para um espaço-tempo geral dotado de métrica $g_{\mu\nu}(x^{\sigma})$ tal que localmente numa vizinhança infinitesimal do ponto com coordenadas x^{σ} se tivesse $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, se poderia descrever um campo de gravitação. As bases físicas para tal conclusão serão vistas na sessão seguinte; presentemente trataremos somente os conceitos matemáticos da geometria de Riemann.

A geometria de Riemann trata essencialmente das propriedades de espaços curvos, como exemplo, a geometria sobre superfícies bidimensionais imersas num espaço Euclideano tridimensional E_3 é uma geometria de Riemann. Em geral se prova em geometria diferencial que um espaço curvo R_n pode ser sempre imerso num espaço Euclideano E_k com $k = \frac{1}{2} n(n+1)$ (ver T. L. Civita - The absolute differential calculus, Blackie & Son, 1954) No caso da relatividade geral, o espaço com coordenadas $\{x^\sigma\}$ num dado sistema de referência tem dimensão 4 e é a generalização de um E_4 de Minkowski (pseudo-Euclideano) no sentido que $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x^\sigma)$.

O grupo de transformações de simetria em E_4 é o grupo de Lorentz (ou de Poincaré) no sentido que ele transforma sistemas inerciais de referência uns nos outros, e todos descrevem igualmente as leis físicas em E_4. Em relação a esse grupo, que será denotado por O (3,1) se definem objetos $y_A(x)$ cuja lei de transformação é do tipo

$$y'_A(x') = f_A(y_B(x) \;,\; x'(x)) \tag{3-1}$$

esses campos $y_A(x)$ $(A = 1,\ldots,N)$ são ditos objetos geométricos em relação a O(3,1). Como exemplo, $y_A(x)$ pode ser quantidades tais como $A_\mu(x)$, $F_{\mu\nu}(x)$, $M_{\mu\nu}$, $F^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$ (força de Lorentz), etc. Como decorrência qualquer função

$$\Phi_a(y_A^{(1)}(x),\, y_A^{(2)}(x),\, \ldots) = 0$$

representará um conjunto de equações covariantes sob O (3,1), entretanto para aplicações à teoria da relatividade restrita se usa somente uma sub-classe de funções f_A tais que

$$y'_A(x') = \lambda^B{}_A(x,x') y_B(x) \tag{3-2}$$

ou seja, as f_A são funções lineares das $y_A(x)$, com coeficientes $\lambda^B{}_A$ que estão relacionado. às equações de transformação

$x' = x'(x)$ e suas inversas.

O exemplo mais simples é quando $\lambda^{B}{}_{A} = \delta^{B}{}_{A}$ e se tem

$$y'_A(x') = y_A(x) \tag{3-3}$$

então se diz que o conjunto de funções $y_A(x)$ formam um conjunto de N escalares sob O(3,1). Outros exemplos definem campos tensoriais tais como já falamos na vez anterior. A extensão desses resultados para a geometria de Riemann corresponde a tomar o elemento de linha conectando os eventos em x^σ e $x^\sigma + dx^\sigma$ com $ds^2 = g_{\sigma\rho}(x)dx^\sigma dx^\rho$, o qual é invariante para transformações arbitrárias de coordenadas se $g_{\sigma\rho}(x)$ formar as componentes de um tensor covariante de 2ª ordem

$$g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\rho} g_{\alpha\beta}(x)$$

que é chamado de tensor métrico. As definições de tensores de ordem superior segue-se similar ao caso anterior levando unicamente em consideração que agora tratamos com transformações arbitrárias de coordenadas. O cálculo de tensores tem algumas leis que passamos a escrever:

a) A soma algébrica de tensores do mesmo tipo e variância gera um novo tensor se ambos forem definidos num mesmo ponto do espaço-tempo.

b) O produto direto de um tensor de ordem r por outro de ordem s, ambos definidos num mesmo ponto, gera um tensor de ordem r+s.

c) A partir de qualquer tensor de ordem r misto, podemos formar outro tensor de ordem r-2 por meio da operação de contra -

tação definida por

$$T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_k} = B^{\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_2\ldots\nu_k} \quad , \quad r = p+k$$

Tal operação pode ser repetida enquanto existirem pares de índices livres.

d) A simetria (ou antissimetria) de tensores é um caráter intrínseco deles não sendo alterado por transformações de coordenadas. Se eles forem simétricos (antissimétricos) em todos os índices, dizemos que são completamente simétricos (antissimétricos). Exemplo:

$$T_{\mu\nu\alpha} = \phi_\mu \phi_\nu \phi_\alpha \quad \text{——} \quad \text{completamente simétrico}$$

e) Qualquer tensor pode ser decomposto numa parte simétrica e noutra antissimétrica. Exemplo:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right)$$

$$= T_{(\mu\nu)} + T_{\boxed{\mu\nu}}$$

$$T_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3!}\left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\mu\rho\nu} + T_{\rho\nu\mu}\right)$$

$$T_{\boxed{\mu\nu\rho}} = \frac{1}{3!}\left(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\nu\rho\mu} - T_{\nu\mu\rho} - T_{\mu\rho\nu} - T_{\rho\nu\mu}\right)$$

f) Objetos que se transformam mantendo suas características e que são partes de um objeto geral são ditos serem irredutíveis, como exemplo $T_{\mu\nu}$ se divide nos objetos $T_{(\mu\nu)}$ e $T_{\boxed{\mu\nu}}$ que são irredutíveis:

$$T'_{(\mu\nu)}(x') = f_{\mu\nu}(T_{(\alpha\beta)}(x) \,,\, x'(x)) \,,\; T'_{[\mu\nu]}(x') = f_{\mu\nu}(T_{[\alpha\beta]}(x) \,,\, x'(x))$$

g) Existem objetos geométricos que se transformam como tensores, porém têm um fator multiplicativo do tipo

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{W}$$

ou seja:

$$J'^{\mu_1 \ldots \mu_p}_{\nu_1 \ldots \nu_k}(x') = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{W} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_k}}{\partial x'^{\nu_k}} J^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\beta_1 \ldots \beta_k}(x)$$

eles são chamados de densidades tensoriais de peso W. Tensores podem ser considerados como densidades tensoriais de peso zero. Exemplo: $g(x) = \left|g_{\mu\nu}(x)\right|$ é uma densidade escalar de peso (+2).

h) O produto direto de uma densidade tensorial de peso W_1 por outra de peso W_2 gera uma densidade tensorial de peso W_1+W_2.

Um caráter marcante de tensores em E_4 é que suas derivadas formam tensores de uma ordem cóvariante mais alta, isso decorre diretamente do fato que O(3,1) é realizado por transformações lineares de coordenadas. Tal propriedade não é válida em espaços de Riemann. Vamos chamar de R_4 o espaço de Riemann da relatividade geral. Então se $A_\mu(x) \in R_4$, $\partial A_\mu/\partial x^\nu$ não é um tensor de R_4. De fato,

$$\frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\rho(x) \qquad (3\text{-}4)$$

o que implica que $\partial A_\mu(x)/\partial x^\sigma$ não é um objeto geométrico, e portanto, não é um tensor.

Entretanto em certas situações particulares as derivadas de tensores geram novos tensores:

1) $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ pelo fato de ser antissimétrico é um tensor.

2) $B_{\mu\nu\rho} = A_{\mu\nu,\rho} + A_{\rho\mu,\nu} + A_{\mu\rho,\mu}$, para $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, é completamente antissimétrico e devido a isso é um tensor. *Como exemplo*, parte das equações de Maxwell, tanto em E_4 como em R_4 são

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu} = 0$$

que implica em que $F_{\mu\nu}$ tem a forma dada em (1).

3) Se $A_{\mu\nu\rho}$ é completamente antissimétrico, então

$$B_{\mu\nu\rho\sigma} = A_{\mu\nu\rho,\sigma} + A_{\rho\sigma\mu,\nu} - A_{\sigma\mu\nu,\rho} - A_{\nu\rho\sigma,\mu}$$

é completamente antissimétrico, e devido a isso é um tensor. Em R_4 essa é a ordem mais alta até onde se pode ter tensores completamente antissimétricos.

4) Se U^μ é um vetor contravariante de peso $W = +1$,

$$U'^\mu(x') = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} U^\nu(x)$$

então sua divergência $U^\mu{}_{,\mu}$ é uma densidade escalar de peso

$W = +1$:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}'^{\mu}(x')}{\partial x'^{\mu}} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \frac{\partial \mathfrak{U}^{\mu}(x)}{\partial x^{\mu}}$$

5) Se $\mathfrak{U}^{\mu\nu}(x)$ é uma densidade tensorial antissimétrica de peso (+1), então $\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\nu}(x)$ é uma densidade tensorial de peso (+1)

$$\frac{\partial \mathfrak{U}'^{\mu\nu}}{\partial x'^{\nu}} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \mathfrak{U}^{\alpha\lambda}}{\partial x^{\lambda}}$$

6) Se $\mathfrak{U}^{\nu\mu\rho}$ é uma densidade tensorial completamente antissimétrica de peso (+1) então $\mathfrak{U}^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho}(x)$ é uma densidade tensorial antissimétrica de mesmo peso.

7) idem para $\mathfrak{U}^{\mu\nu\rho\sigma}$ e $\mathfrak{U}^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{,\sigma}$.

Em geral, as derivadas não gerarão novos tensores e devem assim ser corrigidas. A operação de derivação está contida na operação de diferenciação, porém se tem

$$A^{\mu}(x + dx) = A^{\mu}(x) + dA^{\mu}(x)$$

$$= A^{\mu}(x) + \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

A diferença

$$dA^{\mu} = A^{\mu}(x + dx) - A^{\mu}(x)$$

representa a diferença entre as componentes A^{μ} localizadas nos pontos x e x+dx, e portanto não é um vetor. Tem-se

$$dA^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

Como dx^ν são as componentes de um vetor contravariante, segue-se então que $\partial A^\mu/\partial x^\nu$ não é um tensor covariante de 2ª ordem. Entretanto, podemos construir a partir de $\partial A^\mu/\partial x^\nu$ um tensor covariante de 2ª ordem, mesmo ainda sem ter provado isso, vamos chamá-lo por $A^\mu_{;\nu}$ e definir

$$DA^\mu = A^\mu_{;\nu}\, dx^\nu$$

A quantidade de DA^μ é um vetor e como tal é a diferença de componentes de vetores agora localizados num mesmo ponto (no caso em x+dx). Temos:

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, \frac{\partial A^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\, A^\rho\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

Definindo

$$A^\mu_{;\nu} = A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\beta}\, A^\beta \tag{3-5}$$

tal que

$$A'^\mu_{;\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, A^\alpha_{;\beta}(x) \tag{3-6}$$

se tem

$$\Gamma'^\mu_{\nu\beta}\, \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho}\, A^\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} A^\lambda - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, A^\rho$$

daí, as quantidades $\Gamma^\mu_{\nu\beta}(x)$ se transformam como

$$\Gamma'^\mu_{\nu\alpha}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}\, \Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}$$

o último fator pode ser simplificado se usarmos:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

derivando em relação a x^{ρ} vem:

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \quad \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} = 0$$

multiplicando por $\partial x^{\rho}/\partial x'^{\alpha}$

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\alpha}} = 0$$

daí

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\alpha} (x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \qquad (3\text{-}7)$$

quantidade $\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}$ (x) definidas em (3-5) e se transformando por (3-7) são chamadas Afinidades de R_4. Elas são introduzidas com a finalidade de transformar $\partial A^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ no tensor $A^{\alpha}_{;\beta}$. Em relação a (3-7) e ao grupo O(3,1) agindo em referenciais inerciais se tem $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = 0$ pois $\partial A^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ é um tensor. Isso é coerente pois O (3,1) é gerado por transformações lineares e se teria por (3-7) uma lei tensorial de transformações para os $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}$, que entretanto se anulam em qualquer referencial inercial, em coordenadas cartesi anas (x,y,z) e intervalos t de tempo. Se por acaso, usássemos coordenadas curvilíneas em lugar de cartesianas (x,y,z) teríamos obviamente $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha} \neq 0$, acontece porém, que a passagem (x,y,z) $\rightarrow$ (u_1,u_2,u_3) curvilíneas nada tem a ver com O (3,1). Em R_4 a existência de afinidades é essencial para se poder derivar os campos tensoriais nessa variedade.

Por analogia se mostra que

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}A_{\alpha} \qquad (3\text{-}8)$$

que é derivada da propriedade que

$$A_{\mu}A^{\mu} = \text{escalar}$$

e de que a derivada covariante definida por (3-5) e (3-8) é associativa(*). (3-5) e (3-8) podem ser generalizadas para

$$A^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_s;\alpha} = A^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_s,\alpha} + \Gamma^{\mu_1}_{\alpha\rho}\, A^{\rho\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_s} +$$

$$\ldots + \Gamma^{\mu_k}_{\alpha\rho}\, A^{\mu_1\ldots\mu_{k-1}\rho}_{\nu_1\ldots\nu_s} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu_1}\, A^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho_1\ldots\nu_s}$$

$$\ldots - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu_s}\, A^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}\rho}$$

O cálculo de afinidades tem algumas propriedades de interesse:

1) A soma de duas afinidades localizadas no mesmo ponto da variedade não é uma afinidade, se bem que seja ainda um objeto geométrico.

2) A diferença entre duas afinidades localizadas no mesmo ponto da variedade é um tensor de mesma variância.

Da propriedade (2) segue-se que a parte antissimétri

(*) conjuntamente com a propriedade

$$(\text{escalar})_{;\alpha} = (\text{escalar})_{,\alpha}$$

ca de uma afinidade é um tensor e como tal não pode aparecer nas definições (3-5), (3-8), pois então $A^{\mu}_{;\nu}$ e $A_{\mu;\nu}$ não seriam tensores. Daí a razão de porque tomaremos afinidades simétricas retendo as definições (3-5) e (3-8).

Define-se derivada covariante de densidades tensoriais por extensão do caso visto para tensores. Como exemplo, se $U(x)$ é uma densidade escalar de peso W, então $U_{;\mu}(x) = U_{,\mu}(x) - WU(x)\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu}(x)$ é uma densidade vetorial com o mesmo peso:

$$U'_{;\mu}(x') = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{W} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} U_{;\alpha}(x)$$

Generalizando para uma densidade tensorial $U^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ de peso W,

$$U^{\mu\cdots}_{\nu\cdots;\rho} = U^{\mu\cdots}_{\nu\cdots,\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho} U^{\sigma\cdots}_{\nu\cdots} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} U^{\mu\cdots}_{\sigma\cdots} + \ldots - W\Gamma^{\sigma}_{\sigma\rho} U^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$$

Uma propriedade marcante da operação de derivação covariante é a quebra da lei de comutabilidade para as derivadas

$$A^{\rho}{}_{;\mu;\nu} - A^{\rho}_{;\nu;\mu} \neq 0$$

efetuando-se esse cálculo se encontra

$$A^{\rho}_{;\mu;\nu} - A^{\rho}_{;\nu;\mu} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} A^{\sigma} \qquad (3\text{-}9)$$

onde

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \qquad (3\text{-}10)$$

Como o lado esquerdo de (3-9) é obviamente um tensor e A^{σ} é um vetor, segue-se diretamente que $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ de (3-10) é um tensor de 4ª ordem, antissimétrico em (μ,ν). Ele desempenha um papel de grande importância em R_4 pois é o tensor de curvatura ou tensor de Riemann.

(3-9) pode ser generalizada, como exemplo

$$T_{\mu\nu;\rho\sigma} - T_{\mu\nu;\sigma\rho} = - R^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma} T_{\lambda\nu} - R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma} T_{\mu\lambda}$$

A geometria de Riemann é completamente definida pela forma quadrática com coeficientes $g_{\mu\nu}(x)$ tal que localmente tendem a valores constantes $\eta_{\mu\nu}$ (as condições para isso serão vistas adiante) e que satisfazem às condições diferenciais

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0 \tag{3-11}$$

Daí,

$$g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} = 0 \tag{3-12}$$

Resolvendo essa equação para as afinidades se tem (observe que (3-12) representam 40 equações, que é o mesmo número que as componentes independentes da afinidade)

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} \right) \tag{3-13}$$

Afinidades definidas por (3-13) são chamadas símbolos de Christoffel(*), elas são as afinidades da geometria de Riemann Substituindo-se (3-13) em (3-10), encontra-se a expressão de

---

(*) os quais serão indicados por $\{{}^{\mu}_{\alpha\beta}\}$

$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ em termos de derivadas da métrica $g_{\mu\nu}(x)$, ela conterá um termo linear nas derivadas $2^{\underline{as}}$ da métrica e outro termo quadrático nas derivadas $1^{\underline{as}}$.

Com a diferença entre duas afinidades é um tensor, segue-se diretamente que uma afinidade genérica pode ser sempre escrita como

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} \ + \text{arbitrary tensor field}$$

A escolha

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \{^{\mu}_{\alpha\nu}\} - \frac{1}{2}\left(\phi_{\alpha}\delta^{\mu}{}_{\nu} - \phi_{\nu}\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \phi^{\mu}g_{\nu\alpha}\right) = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}$$

implica nas condições

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\, g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\, g_{\mu\beta} = \phi_{\alpha}g_{\mu\nu} \qquad (3\text{-}14)$$

A geometria que satisfaz a (3-14) em lugar de (3-11) é um exemplo de geometria não-Riemanniana. Ela corresponde à geometria de Weil que foi proposta por ele (H. Weyl -Sitz.Akad. Wiss. 97, 291 (1918)) como uma formulação unitária da gravitação e do eletromagnetismo, os $\phi_{\alpha}(x)$ representam os potenciais eletromagnéticos. A gauge eletromagnética corresponde, nessa teoria, à uma transformação conforme na métrica, pois (3-14) é forma invariante sob as transformações

$$\phi_{\alpha} \to \phi_{\alpha} + \Lambda_{,\alpha} = \bar{\phi}_{\alpha}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}\, e^{\Lambda} = \bar{g}_{\mu\nu}$$

ou seja:

$$\bar{g}_{\mu\nu;\alpha} = \bar{\phi}_{\alpha}\, \bar{g}_{\mu\nu}$$

transformações estas que implicarão que a teoria de Weyl é uma formulação conforme invariante das leis físicas.

O tensor $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ definido por (3-10) satisfaz às condições:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = - R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu}$$

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + R^{\rho}{}_{\nu\sigma\mu} + R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma} = 0$$

por decorrência delas restam 80 componentes independentes. Escrevendo $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ em termos da métrica, e usando a definição

$$\{^{\mu}_{\nu\alpha}\} = g^{\mu\beta}\ \{\nu\alpha,\beta\}$$

se obtém

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}\ (g_{\rho\mu,\sigma\nu} + g_{\sigma\nu,\rho\mu} - g_{\rho\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\mu,\rho\nu})$$

$$+ g^{\alpha\beta}\left[\{\rho\mu,\alpha\}\ \{\sigma\nu,\beta\} - \{\rho\nu,\alpha\}\ \{\sigma\mu,\beta\}\right]$$

o qual satisfaz

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = - R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

com essas simetrias o número de componentes independentes de $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ é somente 20. Em adição também se tem a identidade chamada de Bianchi:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma} \pm R_{\mu\nu\sigma\rho;\lambda} \equiv 0$$

Contratação de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ gera um tensor de 2ª ordem simé trico, e aparte por um sinal, ela é definida univocamente como

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\sigma\nu} \qquad (3\text{-}15)$$

que é chamado tensor de Ricci. Sua simetria segue-se diretamente das condições $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$.

Nova contratação desse tensor gera o escalar

$$R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}$$

chamado escalar de curvatura. Esse escalar está relacionado à curvatura Gaussiana de superfície no caso em que a dimensão do espaço é 2.

Além de $R_{\mu\nu}$ existe também o tensor de 2ª ordem $Rg_{\mu\nu}$ que depende até à ordem máxima de derivadas 2ªs da métrica e é linear nessas derivadas. Eles são os únicos tensores de 2ª ordem com essa propriedade. A combinação desses dois tensores do tipo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R$$

é de grande interesse e é chamada de tensor de Einstein. Ele satisfaz às identidades

$$G^{\lambda}{}_{\nu;\lambda} = (g^{\lambda\mu} G_{\mu\nu})_{;\lambda} \equiv 0$$

como decorrência de (3-14). Essas identidades são chamadas de identidades contraídas de Bianchi.

Dado $g_{\mu\nu}(x)$ a norma de um vetor R_4 é dada por

$$A^2(x) = g_{\mu\nu}(x)\, A^{\mu}(x) A^{\nu}(x)$$

Tem-se

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu} \quad , \quad A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu}$$

com $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}$

O determinante $|g_{\mu\nu}(x)| = g(x)$ é uma densidade escalar de peso (+2) e consequentemente $\sqrt{-g(x)}\, d^4x$ é um escalar de peso (+1).

O problema variacional

$$\delta s_{PP'} = \delta \int_{P}^{P'} ds = 0$$

$$ds = \sqrt{g_{\rho\sigma}\, dx^{\rho} dx^{\sigma}}$$

corresponde à equação de uma curva que é a distância mínima entre P e P', sua equação de Euler-Lagrange dará

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} \frac{dx^{\rho}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds} = 0$$

juntamente com

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 1$$

Devido à lei de transformação (3-7) das afinidades, podemos enunciar os teoremas:

(I) É sempre possível determinar-se um sistema de coordenadas no qual as afinidades se anulam num dado ponto da variedade (sistema localmente geodésico).

(II) Existe uma variedade na qual a afinidade se anula em todos os pontos num dado sistema de coordenadas. Essa variedade é o espaço chato tipo Minkowski e o sistema de coordenadas, onde elas se anulam é o cartesiano.

De fato, em (3-7) fazendo x'^{σ} = coordenadas cartesianas e $\Gamma'^{\mu}_{\nu\alpha}(x') = 0$ se tem

$$\Gamma^{\beta}_{\rho\alpha}(x) = \frac{-\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \qquad (3\text{-}17)$$

onde as x^{σ} serão coordenadas curvilíneas.

Outros teoremas de importância são:

(III) Se existir um campo de vetores $h^{\mu}_{(\alpha)} = (h^{\mu}_{(1)},\ldots,h^{\mu}_{(0)})$ tal que $h^{\mu}{}_{(\alpha);\nu} = h^{\mu}{}_{(\alpha),\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\, h^{\rho}{}_{(\alpha)} = 0$, então o tensor de curvatura se anula sobre a variedade. Para a demonstração ver por exemplo, a Monografia Relativity and Gravitation - C.G.Oliveira - CBPF. Tem-se então a afinidade do tipo chato:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = -\, h^{\mu}{}_{(\alpha),\nu}\bar{h}^{(\alpha)}_{\lambda} \qquad (3\text{-}18)$$

com $h^{\rho}{}_{(\alpha)}\bar{h}^{(\alpha)}_{\lambda} = \delta^{\rho}{}_{\lambda}$. Comparando (3-17) e (3-18) se vê que

$$h^{\rho}{}_{(\alpha)} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} , \quad \bar{h}^{(\alpha)}_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \qquad (3\text{-}19)$$

Daí, pelos teoremas (II) e (III) vemos que se o espaço é chato então $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$.

(IV) Se $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ em todos os pontos então a variedade é chata (veja prova por exemplo no livro de Anderson — Principles of Relativity Physics).

De (III) e (IV) vê-se que a condição necessária e suficiente para que a variedade seja chata é que $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ se anule em todos os pontos do espaço.

(V) No sistema de coordenadas onde a afinidade se anula numa vizinhança de um ponto P, o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x_P)$ assume valores constantes.
(ver Sokolnikoff - Tensor Analysis, ou Monografia citada anteriormente).

Como qualquer forma quadrática com coeficientes constantes pode ser reduzida a uma soma de quadrados das diferenciais dx^{σ}, vemos que

$$ds_P^2 = g_{\mu\nu}(x_P)\ dx'^{k}_{P}\ dx'^{\nu}_{P} = \text{soma algébrica dos quadrados de } dx'^{\sigma}$$

que é a condição para $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ localmente.

(VI) Se a afinidade se anula globalmente (espaço chato referido a coordenadas cartesianas) então o tensor métrico no sistema de coordenadas curvilíneas x^{σ} assume a forma (3-20)

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{h}_{\mu}^{(\alpha)}\ \bar{h}_{\nu}^{(\beta)}\ \eta_{\alpha\beta}$$

(ver demonstração na Monografia citada antes).

Métricas da forma (3-20) com $\bar{h}$ dadas por (3-19) são ditas métricas planas.

As equações (3-20) podem ser generalizadas para

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu}^{(\alpha)}(x)\ h_{\nu}^{(\beta)}(x)\ \eta_{\alpha\beta} \qquad (3\text{-}21)$$

onde agora $h_{\mu}^{(\alpha)}(x)$ são funções arbitrárias das coordenadas x^{σ},

com

$$h^{\mu}_{(\rho)} h^{(\rho)}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \ , \ h^{\mu}_{(\alpha)} h^{(\beta)}_{\mu} = \delta^{(\beta)}_{(\alpha)}$$

Métricas do tipo (3-21) se referem a variedades de Riemann e as h's são os campos locais de tetradas. Usualmente, h^{μ}_{0} é um quadrivetor tipo-tempo e $h^{\mu}_{(i)}$ são três quadrivetores tipo espaço. As tetradas são de interesse no problema de acoplamento da gravitação com sistemas Fermiônicos.

3 - *TEORIAS DE GRAVITAÇÃO*

Na teoria de Newton da gravitação, assim como na teoria da relatividade restrita, em particular na sua aplicação à gravitação, a geometria do espaço (ou do espaço-tempo) é fixa, ou seja, ela não é modificada pela presença ou ausência de matéria ou de qualquer outro sistema físico (por exemplo, cargas, correntes, radiação). Isso significa que a geometria do espaço-tempo em relatividade restrita é um elemento absoluto. Em 1915, Einstein propôs uma modificação dessa descrição de forma que a geometria do espaço-tempo passasse a ser um elemento dinâmico da teoria. A formulação da teoria do campo gravitacional, que foi assim sugerida, é hoje em dia conhecida como a teoria da relatividade geral.

A geometria do espaço-tempo na teoria de Einstein é caracterizada por uma métrica de Riemann. Sendo ela um elemento dinâmico, tem que ser determinada via um conjunto de equações de campo, de modo similar como o campo eletromagnético é determinado por meio das equações de Maxwell.

As razões que conduziram Einstein a procurar uma teoria mais geral que aquelas que poderiam ser obtidas por meio da relatividade restrita para a descrição da gravitação foi devido à existência de certas características dessas teorias, que não lhe pareciam consistentes. Essencialmente, podemos enumerar duas dessas características:

a) a incapacidade da mecânica de Newton, ou da teoria da relatividade restrita em explicar a constância universal da razão da massa inercial para a massa gravitacional dos corpos materiais;

b) a existência de certos tipos de movimentos absolutos — os movimentos acelerados, em ambas as teorias citadas antes.

Nas pesquisas que conduziram à teoria da relatividade geral, Einstein foi muito influenciado pelas idéias de E. Mach sobre as forças inerciais,como veremos a seguir.

Antes disso, vamos discutir em mais detalhes o problema do movimento, essa discussão irá inclusive esclarecer o significado das geodísicas de uma variedade de Riemann.

Em relatividade restrita, é possível ter-se movimentos relativos com velocidade constante como consequência do princípio de relatividade. À primeira vista poderia ser pensado que isso entre em contradição com o fato de que a quadrivelocidade é um quadri-vetor no espaço de Minkowski, porém isso não acontece devido à propriedade que iremos ver. Considere uma partícula movendo-se uniformemente ao longo da direção -x de um sistema inercial de referência. Podemos considerar a partícula como um outro sistema inercial de referência e a transformação de Lorentz que conecta ambos referenciais. Seja <u>K</u> o sistema em repouso e <u>K'</u> o sistema ligado à partícula. Para <u>K</u> a partícula se move ao longo da direção -x com quadrivelocidade com componentes

$$u^{\nu} = \frac{dx}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \frac{dx^{0}}{ds}\right)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\quad \frac{dx^{0}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vamos mostrar que em <u>K'</u> a partícula está em repouso e que isso não contradiz à propriedade que a quadrivelocidade é um quadri-vetor de Lorentz. Considere a transformação de Lorentz que liga K a K',

$$u'^{\nu} = L^{\nu}{}_{\lambda}u^{\lambda}$$

então, para as componentes espaciais

$$u'^{i} = L^{i}{}_{0}u^{0} + L^{i}{}_{j}u^{j}$$

onde

$$L^{1}{}_{1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, , \; L^{1}{}_{2} = L^{1}{}_{3} = 0, \; L^{1}{}_{0} = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

No presente exemplo teremos então:

$$u'^{1} = L^{1}{}_{0}u^{0} + L^{1}{}_{1}u^{1}$$

usando os valores de $u^1 = dx/ds$, $u^0 = dx^0/ds$ e de $L^{1}{}_{0}$, $L^{1}{}_{1}$ escritos antes, se mostra facilmente que

$$u'^{1} = 0$$

o que mostra que de fato a partícula está em repouso em K'. Para movimentos acelerados isso não vai ser possível de ser feito, pois a quadri-aceleração

$$w^{\nu} = \frac{du^{\nu}}{ds} = \frac{d^2x^{\nu}}{ds^2}$$

é tal, que sob transformações de Lorentz

$$w'^{\nu} = L^{\nu}{}_{\lambda}(v)w^{\lambda}$$

não permite que se tenha $w'^{1} = 0$ no referencial K'. Portanto, movimentos acelerados são movimentos absolutos em relatividade restrita. Como consequência a equação de movimento

$$\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2} = f^{\nu} = \text{quadri-força}$$

terá significado físico para todos os observadores inerciais, em particular para partículas carregadas

$$f^{\nu} = \frac{e}{m} F^{\nu}{}_{\lambda}u^{\lambda} \qquad (1)$$

é a força de Lorentz. Suponha agora que o movimento seja analisado na teoria geral, isto é, uma variedade de Riemann, onde ele é representado por uma geodésica.

Caso (a) : Movimento ao longo de linhas retas realizado com velocidade constante — na teoria geral tais movimentos são em princípio sem significado físico pois essa teoria trata com um campo de forças, o campo de gravitação. Entretanto, podemos considerar tal tipo de movimento livre em certos sistemas de coordenadas: sistema geodésico de coordenadas onde $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha} \to 0$ ao longo de uma curva. Nessa referencial

$$\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2} = 0 \longrightarrow u^{\nu} = \text{constante}$$

Essa particular escolha de referencial não significa que a descrição assim obtida seja privilegiada, o sistema geodésico de referência é tão adequado como qualquer outro refe -

rencial, entretanto, matematicamente, essas coordenadas nos dão valores constantes para a velocidade u^{ν}, e poderemos agora fazer o que foi feito antes em relatividade restrita, localmente tomamos $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, ou seja o espaço tangente local tipo Minkowski e nele passamos a partícula ao repouso vía uma transformação local de Lorentz

$$u'^{i}(P) = L^{i}{}_{\nu}(P)\, u^{\nu}(P) \to 0$$

Assim chegamos ao princípio de movimentos uniformes relativos na teoria geral. Deve-se, entretanto, observar que aqui existe uma diferença com o mesmo princípio obtido em relatividade restrita. Em diferentes pontos P teremos diferentes variedades locais tangentes, o que implica que sistemas locais de repouso são diferentes ao longo da trajetória de partícula — matematicamente isso significa que a matriz $L^{\mu}{}_{\nu}$ de Lorentz é agora função da posição P (esse é um efeito de curvatura do espaço-tempo).

<u>Caso (b)</u> : Em relação a movimentos acelerados, temos as equações das geodésicas

$$u^{\nu} u^{\alpha}{}_{;\nu} = 0 \qquad (2)$$

que se divide em dois termos:

$$u^{\nu} u^{\alpha}{}_{;\nu} = \overset{(1)}{t}{}^{\alpha} + \overset{(2)}{t}{}^{\alpha}$$

$$\overset{(1)}{t}{}^{\alpha} = \frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} = \text{quadri-aceleração} = w^{\alpha}$$

$\overset{(2)}{t}{}^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\rho}}{ds} \frac{dx^{\sigma}}{ds}$ = quadri-força gravitacional

sob transformações arbitrárias de coordenadas

$$w'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} w^{\lambda} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\sigma}} u^{\lambda} u^{\sigma}$$

podemos então tomar coordenadas tais que $w^{\alpha} = 0$, e então

$$w'^{\alpha} = \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\sigma}} \; u^{\lambda} u^{\sigma}$$

portanto, todos os movimentos acelerados são movimentos relativos na teoria geral. No referencial onde $w^{\alpha} \to 0$, se tem $\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \to 0$ ou seja, a quadri-força se anula e reobtemos o caso (a) anterior.

O fato de que w^{α} não são quadrivetores na teoria geral, implica que a equação de Lorentz (1) necessite ser corrigida introduzindo-se o termo extra $\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} u^{\alpha} u^{\lambda}$ que a transforma na equação de uma "geodésica" com o lado direito diferente de zero.

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} \; u^{\alpha} u^{\lambda} = \frac{e}{m} F^{\mu}{}_{\lambda} u^{\lambda} \tag{3}$$

Vamos agora passar a considerar o princípio de Mach. De acordo com ele (E. Mach - The Science of Mechanics - La Salle, 1942) todos os efeitos inerciais seriam devidos à interação mútua da matéria no universo. Ele diz no seu livro: Quando um corpo gira relativamente às estrelas fixas, forças centrífugas aparecem. Tais forças aparecem devido à interação do corpo com as outras massas no universo. Como exemplo, considere as estrelas fixas como uma distribuição de massa uniforme sobre a superfície de uma esfera e considere uma massa m girando dentro da esfera com velocidade angular ω constante numa trajetória circular

Em média se tem o efeito de uma atração para fora da trajetória pois ela estará sempre mais perto de uma parte da distribuição.

Efeito semelhante geraria tensão numa corda que contêm massas m e m' em suas extremidades, e que giram dentro da esfera.

Desde que esse princípio de Mach explicaria a origem das forças inerciais, ele tem sido considerado por diversos pesquisadores, tanto teóricos quanto experimentais, que procuram detectar efeitos que de fato comprovem esse princípio. Como referência citamos:

i) <u>Trabalhos Teóricos</u>

- R. Dicke (The Many Faces of Mach - Gravitation and Relativity - H. Chiu, W. Hoffmann (Benjamin, 1964).
- J. Wheeler (Mach's Principle as a Boundary Condition for Einstein's Equation - Gravitation and Relativity).
- F. Gursey - Ann. Physik, <u>24</u>, 211 (1963).

ii) Trabalhos Experimentais

- G. Cocconi, E. Salpeter - N. Cim., 10, 646 (1958).
- W. Hughes - (Mach's Principle and Experiments on Mass Anisotropy - Gravitation and Relativity (1964)).

Como ilustração vamos considerar resumidamente, a teoria de Dicke. De acordo com ele, o princípio de Mach seria realizado por meio da existência de um campo escalar atrativo de longo alcance, agindo na matéria (e sendo gerado por ela). Nessa teoria, a matéria teria uma "carga mesônica" que depende, em geral, do particular corpo sob consideração, a Ação para o sistema campo+matéria sendo

$$S = \int d^4x \, (g^{\mu\nu}{}_{\phi,\mu}\phi_{,\nu} - \alpha^2\phi^2) - \sum_i m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\dot{Z}_i^2}\, d\lambda_i -$$

$$- \sum_i g_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\lambda_i \int \phi(x)\delta_4(x - Z_i(\lambda)) \sqrt{\dot{Z}_i^2}\, d^4x \qquad ,$$

onde $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\lambda_i$ significa integração sobre a linha de universo do corpo $\underline{i}$. As equações de campo e de movimento são

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = (\Box + \alpha^2)\phi(x) + \rho(x) = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta Z_{i\mu}} = \frac{d}{d\tau_i} \left\{(m_i + g_i\phi(Z_i))\, \dot{Z}_{i\mu}\right\} - g_i \frac{\partial\phi}{\partial Z_{i\mu}} = 0$$

com

$$\rho(x) = \sum_i g_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \delta^4 \, (x - Z_i(\lambda)) \sqrt{\dot{Z}_i^2}\, d\lambda_i$$

Como resultado dessa teoria a massa efetiva dos corpos com cargas mesônicas g_i se torna uma função do campo escalar:

$$m^i_{ef.} = m_i + g_i\ \phi(Z_i)$$

e, portanto, depende da localização do corpo i ao longo de sua linha de universo. Esse acréscimo de massa $g_i\phi(Z_i)$ seria então gerada pela interação de m_i com todas as outras massas via fator $\phi(Z_i)$, solução da 1ª equação, esse fator explicaria os efeitos de inércia sobre m_i, e está em concordância com o Princípio de Mach. A força total agindo no corpo i é

$$F_{i\mu} = g_i \frac{\partial\phi}{\partial Z^i_{\ \mu}} - \dot{Z}_{i\mu} \frac{d}{d\tau_i} (g_i\phi) =$$

$$= g_i \frac{\partial\phi}{\partial Z^i_{\ \nu}} (\delta_{\nu\mu} - \dot{Z}_{i\mu}\ \dot{Z}_{i\nu})$$

que depende das velocidades ao longo da órbita da partícula i em concordância com o fato que todas as forças de inércia dependem das velocidades do corpo.

O Princípio de Mach sendo uma condição sobre a estrutura das forças inerciais, as quais na Mecânica de Newton são obtidas em referenciais acelerados e a partir do resultado que o elemento de linha ds^2 em referenciais acelerados assume a forma

$$ds^2 = f_{\mu\nu}(x)\ dx^\mu dx^\nu$$

Einstein já tinha uma motivação para poder introduzir o conceito fundamental que a geometria do espaço-tempo é um elemento dinâmico descrevendo a gravitação. Para completar as informações necessárias, ele usa o princípio da equivalência, a forma em que vamos enunciá-lo é hoje em dia conhecida como o princípio fraco de equivalência:

"A razão da massa inercial para a massa gravitacional é uma constante universal".

Esse princípio tem sido testado experimentalmente com grande acuracidade, e é válido inclusive para massas da ordem do próton, neutron e elétrons.

Esse princípio implica que localmente um campo de forças de inércia é equivalente a um campo gravitacional, por exemplo: um referencial acelerado na direção +Z em relação ao sistema inercial de referência é equivalente a um referencial em repouso, tal que sobre todas as massas presentes age uma força $\vec{f} = -\lambda\vec{k}$.

Mas isso é por sua vez, equivalente a um campo de gravitação uniforme ao longo do eixo -Z, pois $m_{gr} = m_{in}$. Essa correspondência obviamente só é de natureza local. Daí, segue-se que numa região onde exista gravitação, a geometria é de Riemann. Convém notar que o princípio fundamental da relatividade geral é de fato o princípio da equivalência, as idéias de Mach tendo sido unicamente uma motivação para a teoria de Einstein pois baseado unicamente no princípio fraco de equivalência se tem:

(1) Identidade local entre inércia e gravitação. Isso agregado ao resultado matemático;

(2) Num referencial acelerado ds^2 assume a forma $ds^2 = f_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$. É o resultado da teoria de Newton;

(3) Em referenciais acelerados aparecem forças de inércia.

Se pode enunciar que $ds^2 \neq g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ em presença de gravitação.

A equação de movimento de um corpo m num campo de gravitação dado (massa teste) seria então, segundo a geometria de Riemann, uma geodésica:

$$\frac{d^2 Z^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dZ^\rho}{ds}\frac{dZ^\sigma}{ds} = 0 \qquad (4)$$

que verifica o princípio de equivalência pois essa equação implica que $m_{in.} = m_{gr}$.

Entretanto (4) não é característica unicamente da formulação geométrica de Riemann. Pode-se construir uma teoria de gravitação no espaço de Minkowski representando a gravitação por um tensor de Lorentz simétrico $\psi_{\mu\nu}(x)$ e um escalar de Lorentz $\phi(x)$ como:

$$\text{Ação} = \frac{1}{2}\int\left[\eta^{\rho\sigma}\psi_{\mu\nu,\rho}\psi^{\mu\nu}_{,\sigma} + \eta^{\rho\sigma}\phi_{,\rho}\phi_{,\sigma}\right]d^4x$$
$$- \sum_i m_i \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu}\,\delta^4(x-Z_i)\,d\lambda_i\,d^4x$$

tomando,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \alpha\phi\eta_{\mu\nu} + \beta\Psi_{\mu\nu} \tag{5}$$

As equações de movimento obtidas sendo

$$\frac{\delta S}{\delta Z_{i\mu}} = \ddot{Z}_i^\mu + \{{}^{\mu}_{\rho\sigma}\} \dot{Z}_i^\rho \dot{Z}_i^\sigma = \theta \tag{6}$$

e o parâmetro λ_i sendo fixado pela condição

$$g_{\mu\nu}(Z_i) \dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu = 1$$

e $\{{}^{\mu}_{\rho\sigma}\}$ é o símbolo de Christoffel para a "métrica" (5). As equações do campo serão:

$$\Box \Psi_{\mu\nu} = - \frac{\beta}{2} \sum_i m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \dot{Z}_{i\mu}\dot{Z}_{i\nu}\delta^4(x - Z_i)\, d\lambda_i$$

$$\Box \phi = - \frac{\alpha}{2} \sum_i m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \eta_{\mu\nu} \dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu \delta^4(x - Z_i)\, d\lambda_i$$

Observa-se assim que a equação da "geodésica" não é uma característica única do espaço de Riemann.

Entretanto, notamos que somente a teoria de Riemann é inteiramente concordante com o princípio da equivalência, pois nela necessariamente em (4) se tem que ter $m_{in} = m_{gr}$. Na teoria invariante de Lorentz se tem equações tipo "geodésica" tal como (6), mas nelas se poderia violar o princípio de equivalência, pois tanto a quadri-aceleração $\ddot{Z}^\mu{}_i$ como a quadri-força gravitacional

$$f^\mu{}_i = \{{}^{\mu}_{\rho\sigma}\} \dot{Z}^\rho{}_i \dot{Z}^\sigma{}_i$$

são quadrivetores de Lorentz.

O enunciado do princípio de equivalência devido a Einstein é:

"Na medida em que se possa desprezar a reação sobre o campo da partícula teste se movendo nele, medidas feitas em qualquer sistema físico de teste darão a mesma afinidade na região do espaço-tempo sob consideração".

O enunciado "forte" desse princípio é idêntico, só se agregando à propriedade que ele vale qualquer que seja a região do espaço-tempo.

Exemplo: tome qualquer tipo de partícula e deixe ela se mover no campo, desprezando sua reação sobre o campo (pequenas massas) determinamos a Afinidade. Esta afinidade servirá para o movimento subsequente de qualquer outro sistema de teste na região, por exemplo raios de luz de baixa frequência no campo.

O terceiro princípio seguido por Einstein, é o princípio de covariância generalizado que substitue o princípio de relatividade restrita que dizia que todos os referenciais inerciais eram fisicamente indistinguíveis. Agora ele se generaliza para: qualquer referencial serve para descrever as leis físicas. Assim, todos os movimentos serão relativos, não existindo mais regiões do espaço-tempo que sejam absolutas na descrição dos fenômenos físicos numa região onde exista gravitação.

Em particular, o princípio da covariância generalizada implica em que $m_{in} = m_{gr}$ na equação das geodésicas.

Como a métrica é um elemento dinâmico da teoria, ela tem que ser solução de uma equação de campo, inteiramente similar ao potencial eletromagnético na teoria de Maxwell ou o potencial Newtoniano na mecânica não-relativística.

Nosso próximo assunto é assim a determinação dessa equação. Ela tem que satisfazer:

1) limite não relativístico correto

$$(\nabla^2\phi = 4\Pi G\ \rho(x))$$

2) explicar os testes experimentais da teoria.

Devido ao requesito (1) ela deve ser diferencial de 2ª ordem. Existem, em princípio, diversas candidatas, porém em cada caso somente um tipo irredutível de campo vai ser usado.

Exemplo: $T_{(\mu\nu)}$

$T_{|\mu\nu|}$

$$T^{\mu}{}_{\nu} \rightarrow \begin{cases} T^{\rho}{}_{\rho}(\text{traço}) \text{ —— 1 componente} \\ T^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{4}\,\delta^{\mu}{}_{\nu}T^{\rho}{}_{\rho}\ (\text{trace free part}) \\ \qquad\qquad \text{—— 9 componentes} \end{cases}$$

(a) Campo Escalar : $\phi(x)$ — como a métrica é um objeto dinâmico na teoria, teremos onze incógnitas, e a equação avaliável de 2ª ordem é

$$\phi^{;\mu}_{;\mu} = j = \text{fonte} = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$$

temos então, só uma equação e um número super-abundante de incógnitas. Outros pontos contrários são:

(a-1) se usa dois objetos irredutíveis para descre - ver um único campo: ϕ e $g_{\alpha\beta}$

(a-2) essa teoria não implica em curvatura de raios luminosos no campo gravitacional.

(b) <u>Campo Vetorial</u> --$f_{\mu}(x)$, contra essa possibilida- de existem os resultados:

(b-1) geraria forças gravitacionais tanto atrativas quanto repulsivas;

(b-2) contém 14 variáveis irredutíveis de campo, e via de regra, só fornece 4 equações de campo, tais como

$$f_{\mu;\nu}^{;\nu} = j_{\mu} \ , \ f_{\mu\nu}{}^{;\nu} = \lambda_{\mu}$$

(c) <u>Campo Tensorial 2ª Ordem Antissimétrico</u>-$f_{|\mu\nu|}(x)$, ou então uma densidade antissimétrica de 2ª ordem e peso W = 1 como $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$. Equações possíveis seriam tipo Maxwell para $f_{|\mu\nu|}(x)$, e para $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se teria

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}_{,\nu} = \sqrt{\det \mathcal{F}^{\mu\nu}} j^{\mu} \qquad (7)$$

que é independente da métrica. As dificuldades envolvidas são

(c-1) para $f_{|\mu\nu|}(x)$ tem-se equações tipo Maxwell que envolvem a métrica na equação $f_{|\mu\nu|}{}^{;\nu} = \lambda_{\mu}$ e teremos 16 equações incógnitas e 8 equações de campo.

(c-2) para $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ temos 6 incógnitas e somente 4 equa -

ções de campo, as (7), e não sabemos como obter mais duas equações sem envolver a métrica, por exemplo, poderíamos tomar $\det F^{\mu\nu} = 0$ como outra equação, mas não é suficiente.

(d) <u>Campo Tensorial 2ª Ordem Simétrico</u> — é a mais natural e por simplicidade tomamos logo as variáveis de campo como $g_{\mu\nu}(x)$. Equações possíveis seriam de diversas formas:

(d-1) $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ — que implica que o espaço-tempo é chato, logo não serve.

(d-2) $C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ (tensor de Weyl) o qual é definido por

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\rho\mu}R_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} g_{\rho\nu}R_{\mu\sigma} + \frac{1}{2} g_{\sigma\mu}R_{\nu\rho}$$

$$- \frac{1}{2} g_{\sigma\nu}R_{\mu\rho} - \frac{1}{6} g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma}R + \frac{1}{6} g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma}R$$

e satisfaz:

(i) $C_{\sigma\nu} = g^{\rho\mu}C_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$

(ii) tem todas simetrias do tensor de Riemann

(iii) é igual ao tensor de Riemann em variedades onde o tensor de Ricci se anula: $R_{\mu\nu} = 0$

(iiii) $C^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ é invariante sob a transformação conforme $g_{\mu\nu}(x) \to e^{\sigma(x)}g_{\mu\nu}(x)$

(iiiii) $C^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$ implica que a geometria é conformalmente chata: $g_{\mu\nu}(x) = (-g)^{1/4}(x)\eta_{\mu\nu} = \phi(x)\eta_{\mu\nu}$.

Essa teoria é possível pois envolve somente o escalar $\phi(x) = (-g(x))^{1/4}$. Ela foi originalmente considerada, em 1912 por Nordstrom como uma tentativa de generalizar a teoria escalar de Newton. Em 1914 ela foi revista por Fokker e Einstein quando este estava nas primeiras tentativas de obter suas equações de campo. Einstein e Fokker agregaram à teoria de Nordstrom as equações

$$R = k\ g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

para determinar a densidade escalar g(x). Entretanto, novamente apareceram dificuldades:

(j) prediz sinal errado para o avanço do perihélio dos planetas.

(jj) não prediz desvio de raios luminosos no campo de gravitação (esse é um defeito de qualquer teoria escalar).

(d-3) A única possibilidade restante seria tomar equações do tipo

$$R_{\mu\nu} + \alpha R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu} \tag{8}$$

α, Λ, K constantes inicialmente arbitrárias. Tem-se:

(k) Se $\alpha = -1/2$ essas equações são derivadas de um princípio variacional (Einstein, Hilbert);

(kk) Então o lado esquerdo das equações:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}$$

satisfaz às identidades contraídas de Bianchi,

$$G_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$$

que implicam em $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ e isso é a generalização covariante das leis de conservação de energia e momentum da matéria fonte de campo. Daí, segue-se que as (8) devem ser as equações corretas. Verifica-se que a partir delas todos três testes da teoria podem ser obtidos corretamente.

4 - *EQUAÇÕES DE EINSTEIN*

As equações de campo da teoria de Einstein para o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ são da forma (para campos livres)

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Essas equações derivam do princípio variacional, descoberto independentemente e simultaneamente por Einstein e Hilbert para a Integral de Ação

$$S_G = - \frac{1}{2K} \int_\Omega \sqrt{-g}\ (R - 2\Lambda)d^4x$$

Observa-se que $\sqrt{-g}\ R$ e $\sqrt{-g}$ são as duas únicas densidades escalares de peso (+1) avaliáveis que dependem de derivadas $1^{\underline{as}}$ e $2^{\underline{as}}$ da variável de campo $g_{\mu\nu}(x)$. As equações devem provir de variações $\delta g_{\mu\nu}(x)$ se anulando no contorno de integração tal que

$$\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = \mathcal{G}^{\mu\nu}(x) = 0 .$$

Entretanto R depende de derivadas $2^{\underline{as}}$ dos $g_{\mu\nu}$ e sua variação deveria gerar derivadas $3^{\underline{as}}$ que não podem aparecer nas equações de campo. Acontece porém que R é linear nas derivadas $2^{\underline{as}}$ dos $g_{\mu\nu}$

$$R = g^{\mu\nu} \left[\Gamma^\rho_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}\right]$$

fato este que permite isolar todas as derivadas $2^{\underline{as}}$ de $g_{\mu\nu}$

como uma divergência. Para isso use que

$$dg = - gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}$$

que implicam,

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \log \sqrt{-g} \tag{1}$$

então

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})$$

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\lambda})$$

Logo

$$\sqrt{-g}\, R = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left[\sqrt{-g}\, g^{\sigma\rho}\, \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} - \sqrt{-g}\, g^{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}\right] +$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\lambda}) +$$

$$+ g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}$$

Como a divergência não contrinue nas variações com extremo fixo, podemos desprezá-la e após alguns cálculos usando (1), e a relação

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\, g^{\beta\nu} - \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\, g^{\mu\beta}$$

se acha (a menos da divergência)

$$\sqrt{-g}\; R = - g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) \sqrt{-g} \qquad (2)$$

A constante na Ação será tomada como: (fazemos aqui $\Lambda = \theta$)

$$S_G = \frac{1}{2K} \int_{\Omega} \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\right) d^4x \quad ; \quad K^{-1} = \frac{c^3}{8\pi k} \qquad (3)$$

onde k é a constante gravitacional, sua dimensão segue-se de (3) como:

dimensão Ação = Energia x tempo = ML^2T^{-1}

dimensão coordenadas = L

dimensão $g_{\mu\nu} = L^0M^0T^0$ (sem dimensão)

logo:

dimensão $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{L^2}$ (mesma dimensão da curvatura)

e, portanto,

dimensão $k = M^{-1}L^3T^{-2}$

no sistema c.g.s. seu valor numérico será

$$k = 6{,}67 \times 10^{-8}\ cm^3\ gm^{-1}\ sec^{-2}$$

É possível usar-se sistemas de unidades tais que $c = 1$, $k = 1$, e nesse caso, $L = T = 1/M$.

Se prova que a variação de S_G é do tipo(daqui para a frente vamos tomar $\Lambda = 0$)

$$\delta S_G = \frac{c^3}{16\pi k} \int \sqrt{-g}\; \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) \delta g_{\mu\nu}\; d^4x$$

De modo que no espaço vazio as equações de campo são

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}R = 0$$

representando dez equações nas dez variáveis de campo $g_{\mu\nu}(x)$. Delas segue-se que $R = 0$ e portanto $R^{\mu\nu} = 0$ (ou $R_{\mu\nu} = 0$) no espaço vazio. Dizemos que tais variedades são "Ricci-flat". Nessa região do espaço-tempo o tensor de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ passa a ter somente dez componentes não-nulas e coincide com o tensor de Weyl,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow C_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Em presença de fontes do campo que aqui serão energia e matéria ponderável, se tem a Ação total

$$S = S_G + S_M$$

tal que,

$$\delta S_M = \frac{1}{2c} \int_\Omega \sqrt{-g}\; T^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu}\; d^4x \tag{3}$$

Note que a dimensão $T^{\mu\nu}$ = energia/volume, daí a dimensão $S_M = \frac{1}{C} \cdot \frac{Mc^2}{L^3} L^4 = Mc^2.T$ que é a dimensão correta.

Essa escolha da integral de Ação para as fontes corresponde à imposição da "integração mínima" similar ao que se faz em eletromagnetismo ao se tomar a Ação para as fontes do campo na forma:

$$\delta S_{\substack{\text{cargas,}\\ \text{correntes}}} = \delta \int_\Omega j^\mu A_\mu\, d^4x = \int_\Omega j^\mu\, \delta A_\mu\, d^4x$$

De (3), segue-se que

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (4)$$

De passagem, observamos que as fórmulas (4) servem como uma definição para tensores de momento-energia $T^{\mu\nu}$ mesmo em relatividade restrita (como um truque matemático introduzindo métrica $g_{\mu\nu}$ como objeto a ser variado). Como exemplo, se quizermos acoplar gravitação ao campo eletromagnético em relatividade geral tomamos

$$S_M = S_{\substack{\text{Maxwell no} \\ \text{espaço curvo}}} = - \frac{1}{8\pi} \int_\Omega \sqrt{-g}\; g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \qquad (5)$$

porém se quizéssemos calcular T_{Maxwell} em relatividade restrita também poderíamos fazer isso, agora com $g_{\mu\nu}$ desempenhando unicamente o papel de uma variável matemática de cálculo. Daí, usando que

$$\delta g^{\mu\nu} = - g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \delta g_{\sigma\lambda}$$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

um cálculo direto conduz a

$$\delta S_M = - \frac{1}{8\pi} \int_\Omega d^4x \;\sqrt{-g} \left\{ F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g^{\lambda\beta} - F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\mu\lambda} g^{\rho\beta} g^{\nu\sigma} - \right.$$

$$\left. - F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} g^{\sigma\beta} \right\} \delta g_{\lambda\beta}$$

ou seja,

$$T^{\lambda\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\lambda\sigma} F^{\beta}{}_{\sigma} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g^{\lambda\beta} \right)$$

que é o tensor de Maxwell visto antes.

As equações assumem em geral a forma

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{6}$$

Essas equações podem ser re-escritas na forma equivalente:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \tag{7}$$

e observe-se que

$$R = \frac{8\pi k}{c^4} T \tag{8}$$

Em (6) os $T_{\mu\nu}$ representam o tensor de Momento-Energia canônico (proveniente do princípio variacional) das fontes do campo gravitacional, que podem ser em princípio, qualquer distribuição de energia ou matéria ponderável, ou outros tipos de campo.

Um outro exemplo de fonte é dado por um campo escalar $\phi(x)$ onde se tem

$$S_M = S_{\substack{\text{campo em} \\ \text{coordenadas curv.}}} = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g}\, (g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - m^2\phi^2)$$

então,

$$\delta S_M = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g}\, (\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{m^2}{2}\cdot\phi^2 g^{\alpha\beta})\delta g_{\alpha\beta}$$

que dá,

$$T^{\alpha\beta} = (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta})\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{m^2}{2} \phi^2 g^{\alpha\beta}.$$

Vamos agora tratar do sistema completo de equações para campos em interação com o campo gravitacional na teoria de Einstein. Como exemplo desse tratamento vamos considerar o acoplamento gravitação e eletromagnetismo. A integral de Ação para esse sistema, mais um conjunto de partículas de cargas e_i e massas m_i presentes, é da forma

$$S = -\frac{1}{2K}\int_\Omega \sqrt{-g}\, d^4x\, R - \frac{1}{8\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\, d^4x\, \frac{1}{2} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} -$$

$$- \sum_i m_i \int \sqrt{-g}\, d^4x \int d\lambda_i\, \delta^4(x-Z_i)\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu} \;+$$

$$+ \sum_i e_i \int \sqrt{-g}\, d^4x \int d\lambda_i\, \delta^4(x-Z_i)\, A_\mu(x)\, \dot{Z}_i^\mu$$

onde

$$S_1 = \sum_i e_i \int \sqrt{-g}\, d^4x \int d\lambda_i\, \delta^4(x - Z_i)A_\mu(x)\, \dot{Z}_i^\mu$$

é fonte do campo eletromagnético (também contribue ao campo gravitacional). E

$$S_2 = -\sum_i m_i \int \sqrt{-g}\, d^4x \int d\lambda_i\, \delta^4(x - Z_i)\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu}$$

é a fonte massiva do campo gravitacional dando

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = \sum_i m_i \int d\lambda_i \delta^4(x-Z_i)\left\{\frac{\dot{Z}_{\mu i}\dot{Z}_{\nu i}}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu}} + \sqrt{g_{\beta\sigma}(x)\dot{Z}^{\beta i}\dot{Z}^{\sigma i}}\, g^{\alpha\beta}(x)\right\}$$

As equações de Maxwell serão:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

(sistema de equações dadas)

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\ F^{\mu\nu})_{,\nu} = j^\mu(x) = \sum_i e_i \int d\lambda_i \delta^4(x-Z_i)\dot{Z}_i^\mu$$

como $(\sqrt{-g}\ F^{\mu\nu})$ é uma densidade tensorial de peso (+1) antissimétrica, segue-se que:

$$(\sqrt{-g}\ F^{\mu\nu})_{,\nu} = (\sqrt{-g}\ F^{\mu\nu})_{;\nu}$$

o que mostra que a corrente $\sqrt{-g}\ j^\mu(x)$ é uma densidade vetorial de peso (+1), o que implica que as equações de Maxwell têm a forma covariante correta. Tem-se em geral para a divergência covariante de um vetor:

$$j^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\ j^\mu)}{\partial x^\mu}$$

a qual, no caso sob consideração, se anula, gerando a lei de conservação de cargas. Variações em Z_i^μ — posição da partícula $\underline{i}$ de carga e_i e massa m_i, ao longo de sua linha de universo — dará:

$$\ddot{Z}_i^\mu + \{{}^{\mu}_{\rho\sigma}\}\ \dot{Z}_i^\rho \dot{Z}_i^\sigma = \frac{e_i}{m_i} F_\nu{}^\mu\ \dot{Z}_i^\nu \quad .$$

O lado direito é a força de Lorentz em presença de gravitação.

Esse tipo de método se aplica bem sempre que se tem massas ponderáveis, fluídos ou campos de spin inteiro (tal como o de Maxwell). Se tivermos campos de spin semi-inteiro que não interagem com a gravitação via o tensor métrico porém através das vierbeines já não devemos usar o acoplamento mínimo an terior como um processo matemático para obter as equações em interação sob forma simples. Nesses casos, é mais conveniente escrever diretamente as equações de Einstein com fontes dadas pelo tensor canônico de Momentum-energia do campo fermiônico (proveniente de sua Lagrangeana) e as equações desse campo são escritas sob a forma covariante no espaço de Riemann. Como exemplo, as equações de Dirac em relatividade restrita

$$\overset{\circ}{\gamma}^{\mu} \frac{\partial\Psi}{\partial x^{\mu}} - m\Psi = 0 \tag{9}$$

$$\overset{\circ}{\gamma}^{\mu}\overset{\circ}{\gamma}^{\nu} + \overset{\circ}{\gamma}^{\nu}\overset{\circ}{\gamma}^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{10}$$

são covariantes de Lorentz se a função de onda de Dirac se transformar como

$$\partial\Psi(x) = -\frac{1}{4}\,\varepsilon^{\mu\nu}\left[\overset{\circ}{\gamma}_{\mu},\overset{\circ}{\gamma}_{\nu}\right]\Psi(x) \tag{11}$$

sob transformações de Lorentz infinitesimais. Em espaços de Riemann se tem a transição $\overset{\circ}{\gamma}^{\mu} \rightarrow \gamma^{\mu}(x) = h^{\mu}_{(\alpha)}\overset{\circ}{\gamma}^{\alpha}$ onde $h^{\mu}_{(\alpha)}(x)$ são vierbeines, portanto,

$$\gamma^{\mu}(x)\gamma^{\nu}(x) + \gamma^{\nu}(x)\gamma^{\mu}(x) = 2g^{\mu\nu}(x)$$

As equações de transformação (11) agora são modificadas, lembrando-se que em espaços de Riemann as transformações tipo Lorentz são locais (na variedade chata tangente), portanto

$$\delta\Psi(x) = -\frac{1}{4}\,\varepsilon^{(\mu)(\nu)}(x)\left[\overset{\circ}{\gamma}_{\mu},\overset{\circ}{\gamma}_{\nu}\right]\Psi(x) \tag{12}$$

De (12) segue-se que as derivadas de $\Psi(x)$ não se transformam como Ψ sob transformações locais de Lorentz e devem ser portanto, corrigidas pela introdução de uma derivada covariante $\Psi_{;\mu}(x)$ tal que:

$$\delta\Psi_{;\mu} = -\frac{1}{4}\,\epsilon^{(\alpha)(\beta)}(x)\left[\overset{o}{\gamma}_\alpha, \overset{o}{\gamma}_\beta\right]\,\Psi(x) \qquad (13)$$

e tal que sob transformações arbitrárias de coordenadas $\Psi_{;\mu}(x)$ seja um quadrivetor covariante. Escreve-se

$$\Psi_{;\mu} = \partial_\mu\Psi + \Gamma_\mu\Psi \qquad (14)$$

De (13) e (14) se obtém a lei de transformação da afinidade interna Γ_μ,

$$\delta\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon^{(\alpha)(\beta)}(x)\left[\sigma_{(\alpha)(\beta)}\Gamma_\mu - \Gamma_\mu\sigma_{(\alpha)(\beta)}\right] - \frac{1}{2}\,\epsilon^{(\alpha)(\beta)}_{\;\;,\mu}\,\sigma_{(\alpha)(\beta)} \qquad (15)$$

O valor explícito de Γ_μ é obtido impondo-se a condição

$$\gamma^\mu{}_{;\nu} = \theta \qquad (16)$$

que é consistente com a condição $g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = \theta$. Tomando as matrizes γ^μ com índices $\gamma^{\mu i}{}_k$, onde i, k são índices spinoriais de Dirac, teremos por (16)

$$\gamma^{\mu i}{}_{k;\alpha} = \partial_\alpha\gamma^{\mu i}{}_k + \left\{{\mu \atop \alpha\lambda}\right\}\gamma^{\lambda i}{}_k + \Gamma_\alpha{}^i{}_s\,\gamma^{\mu s}{}_k - \Gamma_\alpha{}^s{}_k\gamma^{\mu i}{}_s = \theta$$

Em rotação de matrizes

$$\gamma^\mu{}_{;\alpha} = \partial_\alpha\gamma^\mu + \left\{{\mu \atop \alpha\lambda}\right\}\gamma^\lambda + \Gamma_\alpha\gamma^\mu - \gamma^\mu\Gamma_\alpha = 0 \quad .$$

Essa equação pode ser resolvida para as matrizes Γ_α, que são conhecidas na literatura como coeficientes de Fock-Ivanenko. Acha-se:

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{4}\gamma_\beta(\gamma^\beta{}_{,\alpha}+\{^{\beta}_{\lambda\alpha}\}\gamma^\lambda) \tag{17}$$

De forma que a equação de Dirac (9) agora assume a forma

$$ih^\mu{}_{(\alpha)}(x)\ \overset{o}{\gamma}{}^{\alpha}\ (\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}+\Gamma_\mu\Psi) - m\Psi = 0$$

com Γ_μ dado por (17). Essa é a forma da equação da partícula de massa m, spin 1/2 em interação com a gravitação na teoria de Einstein. Esse processo pode ser generalizado para spins semi-inteiros de ordem maior que 1/2 (como por exemplo nas equações de Rarita-Schwinger para spin 3/2).

Vamos agora provar que no limite não-relativístico as equações de Einstein degeneram nas equações de Poisson da mecânica Newtoniana. Esse limite é obtido para uma classe de *campos gravitacionais* ditos fracos, que são aqueles para os quais as equações de campo podem ser linearizadas. Assim, o fato de que um dado *campo é fraco é a primeira* indicação que ele é adequado para a passagem ao limite não-relativístico. Campos fortes cujos fatores preponderantes *são os não-lineares*, são campos fortemente relativísticos e não estão na região adequada para o limite não-relativístico. Ao fazermos a *lineariza*ção das equações de Einstein, estaremos passando para uma teoria de gravitação semelhante às que existem em relatividade restrita. Para ir daí ao limite não-relativístico, devemos ainda impor que a velocidade de todos os corpos (quer sejam fontes do campo, quer sejam corpos testes) é muito menor que c pois este é o processo usual de se passar para a mecânica não-relativís-tica, a partir da relatividade restrita.

Essa última imposição implica que a parte estática do campo $g_{\mu\nu}$ será a mais importante e que todas as outras componentes da métrica que sejam associadas ao movimento relativo dos corpos são muito menores. Tem-se:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}(x) \quad , \quad \det\phi_{\mu\nu} << 1 \; .$$

Tomando uma massa pequena (teste) que segue geodésicas dessa geometria, tem-se para suas equações de movimento:

$$\frac{d^2Z^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2}\, \eta^{\mu\lambda} \, (\phi_{\lambda\nu,\alpha} + \phi_{\lambda\alpha,\nu} - \phi_{\nu\alpha,\lambda}) \frac{dZ^\nu}{ds} \frac{dZ^\alpha}{ds} = 0 \qquad (18)$$

tomando campos estáticos, que são os preponderantes

$$\phi_{\mu\nu,o} = 0 \quad , \quad \phi_{oi} = 0$$

pois nessa aproximação linear se mostra que ϕ_{oi} está associado ao movimento relativo das fontes do campo. Tem-se então:

$$\frac{d^2Z^i}{dt^2} - \frac{1}{2}\, (\phi_{ik,\ell} + \phi_{i\ell,k} - \phi_{k\ell,i}) \frac{dZ^k}{dt} \frac{dZ^\ell}{dt} + \frac{c^2}{2}\, \phi_{00,i} = 0 \quad (19)$$

(onde a assinatura é -2), e onde se tem

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 \quad ,$$

pois na aproximação linear a métrica é $\eta_{\mu\nu}$. Então,

$$(\frac{dt}{ds})^2 = \frac{1}{c^2(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2})} \simeq \frac{1}{c^2} (1 + \frac{\vec{v}^2}{c^2}) \simeq \frac{1}{c^2}$$

e em (18) passamos a usar t como parâmetro em lugar de s, e daí obtemos (19) quando tomamos $\mu = i$.

Como $\left|\frac{dZ^i}{dt}\right| << c$ o termo médio em (19) é desprezível e ficamos com uma equação de movimento do tipo não-relativístico:

$$\frac{d^2 Z^i}{dt^2} = - \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \phi_{00} \quad ,$$

que uma equação Newtoniana para o potencial

$$\phi = \frac{c^2}{2} \phi_{00} \tag{20}$$

A equação (18) para $\mu = 0$ dará a lei de conservação da energia total da partícula no campo Newtoniano ϕ:

$$E = \frac{m}{2} \dot{Z}^{i2} + m\phi = \text{constante.}$$

Daí,

$$g_{00} = 1 + \phi_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}$$

$$g_{0i} = 0$$

Resta g_{ij} que será proporcional a $v_i v_j$, onde v_i são velocidades de partículas massivas que geram o campo. Logo, $g_{ij} << g_{00}$ e não será considerado.

A única componente preponderante da métrica nesse caso é g_{00}.

Desde que somente corpos massivos são fontes de gravitação na teoria de Newton, devemos colocar no lado direito das equações de Einstein um $T_{\mu\nu}$ adequado a isso:

$$T^{\mu\nu} = c \sum_i m_i \int \delta^4(x-Z_i(\lambda_i)) \frac{\dot{Z}_i^\mu \dot{Z}_i^\nu}{\sqrt{\dot{Z}_i^2}} d\lambda_i \ ,$$

que é o tensor de Minkowski de energia-momentum. No limite de baixas velocidades, sua parte preponderante é obviamente T^{00},

$$T^{00} = c \sum_i m_i \int \delta^4(x-Z_i) \frac{c^2}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{Z}_i^2}{c^2}}} d\lambda_i$$

$$= c^2 \sum_i m_i \int \delta^4(x-Z_i) d\lambda_i = c^2 \sum_i m_i \ \delta^3(x-Z_i)$$

$$= c^2 \rho(x)$$

Vimos que (equação (8)),

$$R = \frac{8\pi k}{c^4} T = \frac{8\pi k}{c^4} g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \simeq \frac{8\pi k}{c^4} \eta_{00} \ T^{00}$$

ou seja,

$$R \simeq \frac{8\pi k}{c^4} T^{00} \simeq \frac{8\pi k}{c^4} c^2 \rho(x) \tag{21}$$

ainda

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \simeq \eta_{00} \ R^{00} = R^{00} \tag{22}$$

Calculando R^{00} em 1ª ordem nas quantidades $\phi_{\mu\nu}$ se obtém (use $\phi_{\mu\nu,0} \simeq 0$, $\phi_{0i} \simeq 0$)

$$R^{00} \simeq \{^{r}_{00}\}_{,r} \simeq \frac{2}{c^2} \nabla^2\phi \tag{23}$$

Deixamos como exercício essa última passagem. Portanto, se tem de (21), (22) e (23) a equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi k\rho(x)$$

A componente g_{00} vale

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}$$

para uma massa puntiforme M como fonte do campo. A relação entre o tempo próprio $ds = cd\tau$ e o tempo $dx^0 = cdt$ é

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt$$

A seguir consideramos campos gravitacionais fracos; tais campos foram primeiramente considerados por Einstein em 1916. Se tem

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}(x)$$

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\phi_{\rho\sigma}(x)$$

$$\{^{\mu}_{\rho\sigma}\} \simeq \frac{1}{2}\, \eta^{\mu\nu}\, (\phi_{\rho\nu,\sigma} + \phi_{\sigma\nu,\rho} - \phi_{\rho\sigma,\nu})$$

e o tensor de Ricci é

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\, (\phi_{,\mu\nu} + \eta^{\rho\sigma}(\phi_{\mu\nu,\rho\sigma} - \phi_{\mu\rho,\nu\sigma} - \phi_{\nu\rho,\mu\sigma})$$

onde $\phi = \eta^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$. Para o tensor de Einstein se tem:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\phi_{,\mu\nu} + \eta^{\rho\sigma}\left(\phi_{\mu\nu,\rho\sigma} - \phi_{\mu\rho,\nu\sigma} - \phi_{\nu\rho,\mu\sigma}\right)\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left(\phi_{,\rho\sigma} - \eta^{\alpha\beta}\phi_{\rho\alpha,\sigma\beta}\right)$$

Introduzindo as quantidades

$$\gamma_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\phi$$

se tem para as equações de Einstein:

$$\frac{1}{2}\left[\Box\gamma_{\mu\nu} - \eta^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\rho,\sigma\nu} - \eta^{\rho\sigma}\gamma_{\nu\rho,\sigma\mu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\lambda\beta}\gamma_{\rho\lambda,\beta\sigma}\right] = \kappa T_{\mu\nu} \quad .$$

Nesse caso, o grupo de transformações arbitrárias de coordenadas se divide em transformações de Poincaré e transformações de Gauge de spin 2. Sob as transformações de Poincaré $g_{\mu\nu}(x)$ é um tensor tal que $g'_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)^{(*)}$, ou seja, a característica de campo fraco é mantida invariante. Sob transformações de Gauge de $g_{\mu\nu}$ geradas por

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$$

Se tem

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

(onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$), dando

$$\phi'_{\mu\nu}(x) = \phi_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \; .$$

(*) em relação a transformações de Poincaré infinitesimais.

Se prova que $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é Gauge invariante. Isso decorre de sua expressão nessa aproximação:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \simeq \frac{1}{2} (\phi_{\mu\sigma,\nu\rho} + \phi_{\nu\rho,\mu\sigma} - \phi_{\mu\rho,\nu\sigma} - \phi_{\nu\sigma,\mu\rho})$$

Daí decorre que sob transformações de Gauge

$$R'_{\mu\nu}(x) = R_{\mu\nu}(x) \quad , \quad R'(x) = R(x) \longrightarrow \quad G'_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}(x) \quad ,$$

pois

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\beta} R_{\mu\lambda\nu\beta} \simeq \eta^{\lambda\beta} R_{\mu\lambda\nu\beta} \; ,$$

portanto, as equações de Einstein no espaço vazio serão Gauge invariantes.

Como os potenciais são Gauge variantes se pode impor sobre eles,quatro condições (análogas às condições de Lorentz em eletromagnetismo):

$$\eta^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\rho,\sigma} = \theta$$

Com essas condições, as equações de Einstein se transformam em equação de onda não-homogêneas

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = \kappa T \qquad (24)$$

inteiramente semelhante às equações de Maxwell

$$\Box A_\mu = j_\mu \qquad , \qquad A_\mu{}^{,\mu} = \theta$$

E daí, segue-se a existência de ondas gravitacionais no espaço vazio e sua geração por meio das fontes via potenciais retardados associados à equação (24): a solução geral desta equação é

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \overset{(1)}{\gamma_{\mu\nu}}(x) + \overset{(2)}{\gamma_{\mu\nu}}(x)$$

onde $\overset{(1)}{\gamma_{\mu\nu}}$ é uma solução da equação com 2º membro,

$$\overset{(1)}{\gamma_{\mu\nu}}(x) = \frac{\kappa}{2\pi}\int d^4x'\,\delta\left[(x-x')^2\right]T_{\mu\nu}(x') \qquad (25)$$

e $\overset{(2)}{\gamma_{\mu\nu}}$ é a solução geral da equação homogênea (ondas). Em geral se pode ter as soluções:

(a) Soluções Estacionárias — $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$, em particular para uma massa em repouso na origem $T_{00} = m\delta^3(x)$ e todas as outras componentes são nulas. Se acha

$$g_{00} = 1 - \frac{2km}{C^2|\vec{x}|} \quad , \quad g_{0i} = 0 \quad , \quad g_{rs} = \delta_{rs}(-1-\frac{2km}{c^2|\vec{x}|})$$

A aproximação linear se verificará coerentemente sempre que $\frac{2km}{c^2 r} \ll 1$ $(r = |\vec{x}|)$, que é válida na superfície da Terra, onde $\frac{2km}{c^2 r} \approx 10^{-9}$. Também se aplica na superfície do Sol onde se tem $\frac{2km}{c^2 r} \approx 10^{-6}$. Para Anãs Brancas $\frac{2km}{c^2 r} = 10^{-3}$, e, finalmente, para Estrelas de Neutrons $\frac{2km}{c^2 r} \approx 1$, já não valendo a aproximação linear.

(b) Distribuições com $T_{00} = f(x)$ e todas as outras componentes nulas — Soluções de multipolos, com abstenção do dipolo gravitacional que não existe.

(c) Distribuições em Rotação Uniforme — $T_{0s} = f_s(x)$ — gera campos g_{0s} através do momentum angular

$$M^{rs} = \int (T^{0r}x^s - T^{0s}x^r)d^3x$$

se acha,

$$g_{0s}(x) = \frac{\kappa}{4\pi} M_{sr} \left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)_{,r} + \ldots$$

(d) Ondas Gravitacionais: $\Box \gamma_{\mu\nu} = 0$, cuja solução representando ondas planas é $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}(x-x_0)$, para ondas propagando na direção +x. Se prova que só existem duas componentes independentes: γ_{22} e γ_{23}, ou seja, $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$, $Tr\gamma_{\mu\nu} = 0$ Tem-se um tensor simétrico, de traço nulo no plano YZ

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ 0 & \gamma_{23} & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como o plano YZ é ortogonal à direção de propagação tem-se uma onda transversal com dois estados de polarização $\gamma_{22}(x-x_0)$ e $\gamma_{23}(x-x_0)$.

(e) Fontes Dependentes do Tempo — $T_{\mu\nu}(x,x^0)$ que através das equações de campo satisfaz $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ — observar que esta condição é fisicamente impossível de se verificar, e isso é um ponto fortemente negativo da aproximação linear — de qualquer forma, obtém-se soluções de potenciais retardados que gerariam as ondas gravitacionais (como referência ver o livro de J. Anderson - "Principles of Relativity Physics").

5 - *2º TEOREMA DE NOETHER EM TEORIA DE CAMPOS*

Seja um sistema descrito pelas funções $y_A(x)$ $A = 1,\ldots,N$ por meio da densidade Lagrangeana

$$L(x;y_A(x),y_{A,\rho}(x)) = L(x;y(x))$$

$$x = (x^1,\ldots,x^n) \quad , \quad \rho = 1,\ldots,n$$

$$W = \int_\Omega L dx$$

Desde que qualquer situação física pode ser descrita em diferentes sistemas de coordenadas, assim como por diferentes conjuntos de funções de campo (por exemplo, por diferentes Gauges), podemos considerar o conjunto de transformações

$$\begin{cases} y'_A(x') = f_A(x;y) \\ x'^\alpha = f^\alpha(x) \end{cases}$$

que são supostas serem contínuas a partir da transformação identidade. Essas transformações definidas nos espaços X, Y ($x \in X$, $y \in Y$) podem ser, ou não, correlacionadas uma com a outra.

Transformações dessa natureza se dividem em duas partes:

(i) dependem de um conjunto de p parâmetros: $\{G_p\}$

(ii) dependem de um conjunto de funções — que chamaremos "grupos funcionais" e que serão denotadas por $\{G_{\infty q}\}$ para q-funções em cada ponto $x \in X$.

Os teoremas de E Noether se dividem em duas partes:

(1) <u>1º Teorema de Noether</u> - A invariância da Integral de Ação do sistema sob $\{G_p\}$ implica na lei de conservação de um conjunto $\{S_p\}$ de funções de $y \varepsilon Y$ que usualmente podem ser identificadas como variáveis físicas associadas ao sistema.

(2) <u>2º Teorema de Noether</u> - A invariância da Integral de Ação sob $\{G_{\infty q}\}$ implica na existência de um conjunto $\{I_q\}$ de identidades envolvendo as funções de campo $y \varepsilon Y$ em cada ponto $x \varepsilon X$.

Iremos ver que esses teoremas permitem a determinação de um método para introdução de interações quando se generaliza do 1º para o 2º — hoje conhecido como o Método dos Campos Compensadores. Ambos os teoremas também se aplicam isoladamente, dando em cada caso os resultados enunciados. Resultados relacionados ao 1º teorema são bem conhecidos, como exemplo, na relatividade restrita onde $n = 4$ se tem:

(a) lei de conservação do Momentum e Energia de campos $y_A(x)$ quando $p = 4$ e $\{G_4\}$ é o conjunto de translações no espaço de Minkowski.

(b) lei de conservação do Tensor de Momentum Angular no mesmo caso quando $p = 6$ e $\{G_6\}$ é o conjunto de transformações de Lorentz.

(c) lei de conservação da corrente de probabilidade $j^\mu = \frac{\partial L}{\partial \Psi_{,\mu}} \Psi - \Psi^* \frac{\partial L}{\partial \Psi^*_{,\mu}}$ sob transformações no espaço Y_Ψ das funções $\Psi(x)$ para $p = 1$ com $\{G_1\}$ representando transformações de fase $\Psi'(x) = \Psi(x)\, e^{i\varepsilon}$.

Vamos aqui estudar o 2º teorema de Noether, e também transições entre o 1º e o 2º teoremas que gerarão campos compensadores.

Seja $\omega_{\infty q} \in \{G_{\infty q}\}$ descrita pelas funções $\varepsilon^i(x)$ $i = 1,\ldots,q$, por

$$\left\{\begin{array}{l} \delta x^\beta = \varepsilon^i(x)\xi_i^\beta(x) \\ \\ \delta y_A = \varepsilon^i(x)\eta_{Ai}(x) + \varepsilon^i_{,\rho}\gamma^\rho_{Ai}(x) \end{array}\right. \qquad (1)$$

Nos restringimos a termos em derivadas 1ªs de ε^i em δy_A porque isso basta para todas aplicações conhecidas em física, entretanto a generalização é trivial, unicamente se teria maior complexidade nos cálculos.

A condição que $y'_A(x')$ deve satisfazer de forma que as equações de campo na nova representação sejam equivalentes às antigas é:

$$\int L(x,y(x))dx = \int L(x';y'(x'))dx' + \oint Q^\rho d\,\Sigma_\rho$$

Q^ρ são em geral funções de $x,y(x)$ da mesma ordem que δx e δy. Considerando que os campos vão a zero no contorno Σ podemos fazer $Q^\rho = 0$.

Usando que

$$\delta y_A = y'_A(x') - y_A(x) = \bar{\delta} y_A(x) + y_{A,\beta}(x)\delta x^\beta$$

e que em 1ª ordem nas variações

$$dx' = (1 + \delta x^\rho_{,\rho})dx$$

$$\int L'dx' - \int Ldx = 0 \quad , \quad L' = L(x';y'(x'))$$

tem-se

$$\left[\int L'(1 + \delta x^{\rho}_{,\rho})dx - Ldx\right] = 0$$

$$\int \left[L'dx + L\delta x^{\rho}_{,\rho}\, dx - Ldx\right] = 0$$

note que $L'\delta x^{\rho}_{,\rho} = L\ \delta x^{\rho}_{,\rho}$ em 1ª ordem. Ainda

$$L' - L = \delta L = \overline{\delta}L + L_{,\rho}\delta x^{\rho}$$

portanto,

$$\int \left[\overline{\delta}L + (L\delta x^{\rho})_{,\rho}\right] dx = 0$$

daí, como a região de integração é arbitrária, segue-se que

$$(\partial^{A}L)\overline{\delta}y_{A} + (\partial^{A\rho}L)\overline{\delta}y_{A,\rho} + (L\delta x^{\rho})_{,\rho} = 0$$

onde

$$\partial^{A}L = \frac{\partial L}{\partial y_{A}} \quad , \quad \partial^{A\rho}L = \frac{\partial L}{\partial y_{A,\rho}} \quad , \quad \overline{\delta} = \delta - \delta x^{\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}$$

Portanto, teremos:

$$L^{A}\overline{\delta}y_{A} + \Gamma^{\rho}_{,\rho} = 0 \tag{2}$$

onde L^{A} é a derivada de Lagrange de L com relação a y_{A}

$$L^{A} = \partial^{A}L - (\partial^{A\rho}L)_{,\rho} \tag{3}$$

e Γ^{ρ} vale:

$$T^{\rho} = L\delta x^{\rho} + (\partial^{A\rho}L)\bar{\delta}y_A$$

Substituindo (1) em (2) se obtêm:

$$\varepsilon^{i}\left[L^{A}(\eta_{Ai}-y_{A,\mu}\xi^{\mu}_{i})-(L^{A}\gamma^{\rho}_{Ai})_{,\rho}\right]+\left[(\partial^{A\rho}L)\bar{\delta}y_A + L^{A}\varepsilon^{i}\gamma^{\rho}_{Ai} + L\delta x^{\rho}\right]_{,\rho} = 0 \tag{4}$$

Se integrarmos essa equação teremos, desprezando termos de superfície,que a integral do 1º termo se anula num domínio arbitrário de integração, dando

$$\varepsilon^{i}\left[L^{A}(\eta_{Ai} - y_{A,\mu}\xi^{\mu}_{i})-(L^{A}\gamma^{\rho}_{Ai})_{,\rho}\right] = 0 \tag{5}$$

levando em (4) se tem:

$$\left[(\partial^{A\rho}L)\bar{\delta}y_A + L^{A}\varepsilon^{i}\gamma^{\rho}_{Ai} + L\delta x^{\rho}\right]_{,\rho} = 0 \tag{6}$$

A relação (6) é separada em três identidades representando os coeficientes de ε^{i}, $\varepsilon^{i}_{,\alpha}$ e $\varepsilon^{i}_{,\alpha\beta}$, que devem se anular separadamente (as funções ε^{i}, $\varepsilon^{i}_{,\alpha}$ e $\varepsilon^{i}_{,\alpha\beta}$ são em geral independentes)

$$(L^{A}\gamma^{\rho}_{Ai} + \eta_{Ai}\partial^{A\rho}L - T^{\rho}{}_{\beta}\xi^{\beta}_{i})_{,\rho} = 0 \tag{7}$$

$$L^{A}\gamma^{\rho}_{Ai} + \eta_{Ai}\partial^{A\rho}L - T^{\rho}{}_{\beta}\xi^{\beta}{}_{i} + (\gamma^{\rho}_{Ai}\partial^{A\beta}L)_{,\beta} = 0 \tag{8}$$

$$\gamma^{\rho}_{Ai}\partial^{A\beta}L + \gamma^{\beta}_{Ai}\partial^{A\rho}L = 0 \tag{9}$$

onde

$$T^{\rho}{}_{\beta} = (\partial^{A\rho}L)y_{A,\beta} - \delta^{\rho}{}_{\beta}L \tag{10}$$

Observe que $T^{\rho}{}_{\beta}$ é o tensor canônico de Momentum-Energia obtido antes em relatividade restrita (ou em relatividade geral).

As equações (5), (7), (8) e (9), representam o conteúdo matemático do segundo teorema de Noether para Lagrangeanas do tipo escolhido e para transformações da forma (1). Como referência ver R Utiyama - Supp. Prog. Th. Phys. nº 9, 19(1959).

Vamos agora considerar aplicações desse teorema.

5.1 - *Aplicação para Campos Livres*

5.1.1 - Grupo de Transformações Arbitrárias de Coordenadas num R_4 de Riemann

Tem-se $\delta x^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha}(x)$, logo $\xi^{\beta}_{\nu} = \delta^{\beta}_{\nu}$ ou seja $q = 4$, com $y_A \rightarrow g_{\mu\nu}$. Nesse caso as transformações em $g_{\mu\nu}$ são induzidas por transformações dos x^{α}

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(x) - \varepsilon^{\lambda}{}_{,\alpha}(\delta^{\alpha}_{\nu} g_{\mu\lambda} + \delta^{\alpha}_{\mu} g_{\lambda\nu})$$

$$\bar{\delta} g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -(g_{\lambda\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} + g_{\lambda\nu}\delta^{\alpha}_{\mu})\varepsilon^{\lambda}{}_{,\alpha} - \varepsilon^{\alpha} g_{\mu\nu,\alpha}$$

portanto, os símbolos na equação (1) serão aqui

$$\eta_{Ai} \rightarrow \eta_{\rho\sigma,\lambda} = 0$$

(pois $\delta g_{\mu\nu} = -(g_{\lambda\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} + g_{\lambda\nu}\delta^{\alpha}_{\mu})\varepsilon^{\lambda}{}_{,\alpha})$)

$$\gamma^{\rho}_{Ai} \rightarrow \gamma^{\rho}_{\mu\nu,\lambda} = -(g_{\mu\lambda}\delta^{\rho}_{\nu} + g_{\lambda\nu}\delta^{\rho}_{\mu})$$

A Lagrangeana de Einstein sendo da forma

$$L = L' + K^{\mu}_{,\mu}$$

$$L' = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\{^{\alpha}_{\mu\lambda}\}\{^{\lambda}_{\nu\alpha}\} - \{^{\lambda}_{\mu\nu}\}\{^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}\right)$$

$$K^{\sigma} = \sqrt{-g}\, \left(g^{\lambda\alpha}\{^{\sigma}_{\lambda\alpha}\} - g^{\lambda\sigma}\{^{\alpha}_{\lambda\alpha}\}\right)$$

a quantidade que desempenha o papel de Lagrangeana no princípio variacional é L' e não L, entretanto,

$$W' = \int L'\, d^4x$$

não é invariante sob $G_{\infty 4}$ pois $L' = f(g_{\mu\nu}, \{^{\alpha}_{\beta\gamma}\})$. Temos

$$\delta W = \delta W' + \oint_{\Sigma} \left(\frac{\partial K^{\mu}}{\partial g_{\alpha\beta}}\, \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial K^{\mu}}{\partial \{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}}\, \delta\{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}\right) d\sigma_{\mu}$$

se restringirmos a transformação de $G_{\infty 4}$ tal que $\delta g_{\alpha\beta}, \delta\{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$ tendem a zero sobre Σ(*) teremos $\delta W = \delta W'$, e os resultados anteriores se aplicam pois agora $L' = f(g_{\mu\nu}, \partial_{\sigma} g_{\mu\nu})$. Entretanto, ao fazermos isso devemos lembrar que tínhamos a equação

$$L^{A} \bar{\delta} y_A + \Gamma^{\rho}_{,\rho} = 0$$

que contém $\epsilon^{\mu}(x)$ no fator $\Gamma^{\rho}_{,\rho}$ de superfície e que agora não irão contribuir(**) e fica-se só com

$$L^{A} \bar{\delta} y_A = 0$$

(*) inclusive os coeficientes $\frac{\partial K^{\mu}}{\partial g_{\alpha\beta}}, \frac{\partial K^{\mu}}{\partial \{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}}$ tendem também a zero sobre Σ

(**) pois sobre Σ se deve ter $\epsilon^{\mu}(x) \to 0$.

que corresponde a só reter a relação (5) e não considera as (7), (8) e (9) nesse caso. Assim fica-se com

$$-L^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho} + \partial_\sigma \left[L^{\mu\nu}(g_{\mu\rho}\delta^\sigma_\nu + g_{\nu\rho}\delta^\sigma_\mu)\right] = 0$$

onde

$$L^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\alpha}L_{\alpha\beta}\ ,\quad L_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}$$

Essas equações dão como resultado

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$$

que são as identidades de Bianchi contraídas. Resultado simi - lar pode ser obtido diretamente como:

$$\bar{\delta}W = \int \sqrt{-g}\ G^{\mu\nu}\bar{\delta}g_{\mu\nu}d^4x$$

onde variações são tomadas em relação a transformações arbi - trárias de coordenadas. Se prova que:

$$-\bar{\delta}g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu;\nu} + \varepsilon_{\nu;\mu}$$

Daí,

$$\bar{\delta}W = \int \left[(\sqrt{-g}\ G^{\mu\nu})_{;\nu}\varepsilon_\mu + (\sqrt{-g}\ G^{\mu\nu})_{;\mu}\varepsilon_\nu\right] d^4x\ -$$
$$-\int d^4x \left\{ (\sqrt{-g}\ G^{\mu\nu}\varepsilon_\mu)_{;\nu} + (\sqrt{-g}\ G^{\mu\nu}\varepsilon_\nu)_{;\mu} \right\}$$

como

$$(\sqrt{-g})_{;\mu} = (\sqrt{-g})_{,\mu} - \sqrt{-g}\ \{^{\lambda}_{\lambda\mu}\} = 0$$

vem

$$\bar{\delta}W = \int \sqrt{-g}\, d^4x \left[G^{\mu\nu}{}_{;\nu}\varepsilon_\mu + G^{\mu\nu}{}_{;\mu}\varepsilon_\nu\right] -$$

$$- \int d^4x \left\{(\sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}\varepsilon_\mu)_{;\nu} + (\sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}\varepsilon_\nu)_{;\mu}\right\}$$

$\sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}\xi_\mu$ é uma densidade vetorial de peso (+1), portanto sua divergência covariante é idêntica à divergência comum, e tomando $\varepsilon_\mu(x) \to 0$ no contorno similarmente ao caso anterior vemos que a última integral se anula e se tem

$$\bar{\delta}W = 0 \longleftrightarrow G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Daí, conclue-se que a invariância de W_{gravit} sob transformações arbitrárias de coordenadas tais que assintoticamente se reduzem à transformação identidade (assintoticamente não existem campos, portanto o fator $G^{\mu\nu}\varepsilon_\mu$ já se anula devido ao termo $G^{\mu\nu}$ independentemente de ε_μ) implicam na existência de 4 identidades envolvendo o lado esquerdo das equações de Einstein. Nenhuma lei de conservação foi obtida nesse caso e isso comprova o conteúdo do 2º teorema de Noether.

5.1.2 - Grupo de Gauge de 1ª Espécie, Eletromagnético, em Espaços de Minkowski

Tem-se $y_A \to A_\mu$

$$\delta x^\beta = 0 \to \xi_i^\beta = 0$$

$$\delta y_A = \delta A_\mu = \varepsilon_{,\mu} \to \begin{cases} \eta_{Ai} = 0 \\ \gamma_{Ai}^\rho = \delta_\sigma^\rho \end{cases}$$

aqui, $q = 1$, $n = 4$, e se tem $\bar{\delta}A_\mu = \delta A_\mu$, desde que $\delta x^\mu = 0$.

As equações provenientes do teorema de Noether serão então:

$$L^\mu{}_{,\mu} = 0 \tag{11}$$

$$L^\mu + \left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\rho}}\right)_{,\rho} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} + \frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}} = 0 \tag{13}$$

onde $L^\mu = \partial^\mu L - (\partial L/\partial A_{\mu,\nu})_{,\nu}$ é a derivada de Lagrange de L.De (12) tem-se

$$\partial^\mu L \equiv \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0$$

logo,

$$L^\mu = -\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}}\right)_{,\nu} \tag{14}$$

De (13) conclue-se que L depende das derivadas de A_μ somente através da combinação antissimétrica

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

pois,

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} + \frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} - \frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} - \frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}}\right) = \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}}$$

Finalmente, (11) que é a equação que no caso gravitacional era a identidade de Bianchi, dará aqui:

$$L^{\mu}{}_{,\mu} = - \partial_{\rho\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\rho}}\right) = - \partial_{\rho\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial F_{\mu\rho}}\right) = 0$$

que é trivialmente verificada. Daí, pode-se então afirmar que $L_{Maxwell} = f(F_{\mu\nu})$. Impondo agora a invariância de Lorentz se tem

$$L_{Maxwell} = \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad \alpha = cte$$

A constante α é determinada de modo que a Ação tenha dimensão correta.

Vemos que nesse caso temos

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} = 0$$

que implica que o campo de Maxwell é sem massa de repouso, se introduzirmos na Ação um fator

$$m^2 A_{\mu} A^{\mu}$$

destruímos a invariância de Gauge na teoria(*) e passamos a ter um campo vetorial massivo.

5.1.3 - Grupo de Gauge de 2ª Espécie em Eletromagnetismo

Chamaremos por campo da matéria qualquer campo, com excessão do eletromagnético e gravitacional; o spin desse campo é deixado arbitrário ($\underline{N}$ fica arbitrário) e tomamos $n = 4$ e $i = 1$. Seja Ψ a variável do campo da matéria

---

(*) A equação (12) é violada.

$$L_\Psi = L_\Psi(\Psi, \partial_\sigma \Psi)$$

L_Ψ é invariante sob transformações de fase

$$\Psi' = e^{i\varepsilon}\Psi \quad , \quad \varepsilon = \text{constante.}$$

Tal propriedade de invariância gera a lei fraca de conservação da "corrente de probabilidade"

$$j^\mu = \frac{\partial L_\Psi}{\partial \Psi_{,\mu}} \Psi - \Psi^* \frac{\partial L}{\partial \Psi^*_{,\mu}}$$

de fato

$$\delta L = \frac{\partial L_\Psi}{\partial \Psi} \delta\Psi + \frac{\partial L_\Psi}{\partial \Psi^*} \delta\Psi^* + \frac{\partial L}{\partial \Psi_{,\mu}} \delta\Psi_{,\mu} + \frac{\partial L}{\partial \Psi^*_{,\mu}} \delta\Psi^*_{,\mu}$$

como

$$\delta\Psi = i\varepsilon\Psi \quad , \quad \delta\Psi^* = - i\varepsilon\Psi^*$$

$$\delta\Psi_{,\mu} = i\varepsilon\Psi_{,\mu}, \quad \delta\Psi^*_{,\mu} = - i\varepsilon\Psi^*_{,\mu}$$

e, usando as equações do campo

$$\frac{\partial L_\Psi}{\partial \Psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{,\mu}}\right) \quad , \quad \frac{\partial L_\Psi}{\partial \Psi^*} = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi^*_{,\mu}}\right)$$

vem

$$\delta L = i\varepsilon \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

Essa propriedade de invariância é violada se $\varepsilon \to \varepsilon(x)$ pois os fatores $\Psi^*_{,\mu}\Psi^{,\mu}$ em L_Ψ já não são invariantes. Entretanto, como essa escolha de diferentes fases em cada posição é sem significação física deve existir um outro campo tal que a Lagrangeana total seja invariante.

O 2º teorema de Noether resolve esse problema, porém antes de usá-lo é instrutivo apelar para métodos geométricos similares à geometria de Riemann, que estão mais próximos do espírito do presente curso.

Se $\varepsilon = \varepsilon(x)$ as derivadas de Ψ (ou de Ψ^*) não se transformam como Ψ (ou como Ψ^*) e devemos então introduzir uma derivada covariante $\Psi_{;\mu}$ tal que

$$\Psi'_{;\mu}(x) = \Psi_{;\mu}(x) + i\varepsilon\Psi_{;\mu}(x) \tag{15}$$

que corrige a transformação

$$\Psi'_{;\mu}(x) = \Psi_{,\mu}(x) + i\varepsilon\Psi_{,\mu}(x) + i\varepsilon_{,\mu}(x)\Psi(x)$$

Define-se

$$\Psi_{;\mu}(x) = \partial_\mu\Psi(x) + \Gamma_\mu\Psi(x) \tag{16}$$

tal que (15) será verificada se Γ_μ se transformar como

$$\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu - i\varepsilon_{,\mu} \tag{17}$$

De fato, de (15), (16) e de $\Psi' = \Psi + i\varepsilon\Psi$, vem

$$\partial_\mu\Psi' + \Gamma'_\mu\Psi' = \partial_\mu\Psi + \Gamma_\mu\Psi + i\varepsilon(\partial_\mu\Psi + \Gamma_\mu\Psi)$$

$$\partial_\mu\Psi + i\varepsilon\Psi_{,\mu} + i\varepsilon_{,\mu}\Psi + \Gamma'_\mu(\Psi + i\varepsilon\Psi) = \partial_\mu\Psi+\Gamma_\mu\Psi+i\varepsilon\partial_\mu\Psi+i\varepsilon\Gamma_\mu\Psi$$

temos,

$$i\Gamma'_\mu\varepsilon\Psi = i\Gamma_\mu\varepsilon\Psi$$

logo,

$$\Gamma'_\mu \Psi = -i\varepsilon_{,\mu}\Psi + \Gamma_\mu \Psi$$

que vale qualquer que seja Ψ dando a transformação (17). Obviamente um $\Gamma_\mu(x)$ se transformando por (17) é um potencial tipo eletromagnético de forma que

$$L_{total} = \tilde{L}_\Psi + L_{Maxwell}$$

onde $\tilde{L}_\Psi = L_\Psi(\Psi, \Psi_{;\mu})$, será invariante sob transformações de Gauge de 2a. espécie. Esse é, portanto, um processo de introdução de interações via campos compensadores. A introdução do campo gravitacional, segundo esse método, seria (Utiyama - Phys. Rev. 1958)

$$L_\Psi \rightarrow \tilde{L}_\Psi(\Psi, \Psi_{;\mu})$$

com afinidade gerada via $\varepsilon^\lambda{}_\mu \rightarrow \varepsilon^\lambda{}_\mu(x)$ que gerará os símbolos de Christoffel e

$$L_{total} = \tilde{L}_\Psi + L_{Einstein}$$

Resultado análogo (para $\varepsilon = \varepsilon(x)$) é obtido via o teorema de Noether: se tem

$$y^A = \{\Psi, \Psi^*, A_\mu\}$$

$$\delta x^\rho = 0$$

$$\delta\Psi = i\varepsilon\Psi$$

$$\partial\Psi^* = -i\varepsilon\Psi^*$$

$$\eta_\Psi = i\Psi, \eta_\mu = 0$$

$$\eta_\Psi{}^* = -i\Psi^*, \gamma^\rho_\mu = \delta^\rho_\mu$$

$$\gamma^{\rho}_{\Psi} = \gamma^{\rho}_{\Psi*} = 0 \quad , \quad \xi^{\beta} = 0$$

As equações do teorema de Noether darão aqui:

$$j^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} = 0 \tag{18}$$

$$j^{\mu} = i \frac{\partial L}{\partial \Psi_{,\mu}} \Psi - i\Psi^* \frac{\partial L}{\partial \Psi^*_{,\mu}} \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} + \frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}} = 0 \tag{20}$$

$$(L^{\beta} + i \frac{\partial L}{\partial \Psi_{,\beta}} \Psi - i\Psi^* \frac{\partial L}{\partial \Psi^*_{,\beta}})_{,\beta} = 0 \tag{21}$$

$$iL_{\Psi}\Psi = i\Psi^* L_{\Psi*} - L^{\mu}{}_{,\mu} = 0 \tag{22}$$

Elas implicam em

$$L = L_1 \; (\Psi, \Psi^* \; , \; \Psi_{;\mu} \; , \; \Psi^*_{;\mu}) + L_2(F_{\mu\nu}) \tag{23}$$

com

$$L_2(F_{\mu\nu}) = L_0(F_{\mu\nu}) + \omega\Omega_{\mu\nu}(\Psi,\Psi^*)F^{\mu\nu}$$

L_0 é a Lagrangeana livre de Maxwell, $\underline{\omega}$ uma constante de aco - plamento não-mínimo e $\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$, representando interações de momento magnético com $F^{\mu\nu}$, possíveis casos seriam

$$\text{spin } \tfrac{1}{2} : \Omega_{\mu\nu} = \overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi$$

$$\text{spin } \tfrac{3}{2} : \Omega_{\mu\nu} = \overline{\Psi}_{\alpha}\sigma_{\mu\nu}\Psi^{\alpha}$$

$$\text{spin } 1 : \Omega_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \text{ (com massa)}$$

tais interações no limite não relativístico gerarão momentos magnéticos anômalos para essas partículas.

De (23) segue-se que A_μ aparecerá em L_1 na combinação $\Psi_{;\mu} = \partial_\mu \Psi - iA_\mu \Psi$ que é equivalente via (18) a interações mínimas $A_\mu j^\mu$. Finalmente (22) gera a lei fraca de conservação da carga total:

$$L_\Psi = L_{\Psi *} = 0 \rightarrow \partial_\rho j^\rho = 0$$

similar à obtida antes para ε = constante (na equação (22) $\underline{\varepsilon}$ funciona como uma constante) e isso significa que o acoplamento com o campo eletromagnético conserva a carga total do sistema.

5.1.4 - Gauge Isotópica de Yang-Mills

A conservação do spin isotópico em interações fortes é gerada pela invariância sob rotações no espaço de spin isotópico da densidade Lagrangeana para nucleons livres. O espaço de spin isotópico é um E_n Euclideano, no caso tomamos n = 3 e nos restringimos a nucleons formados por prótons e neutrons.

$$\Psi^A \longrightarrow \Psi_{Nucleons} = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}$$

A lei de transformação para Ψ^A, sob rotações infinitesimais dos eixos isotópicos é

$$\delta\Psi^A{}_{(x)} = i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon^c \, \tau^A{}_{(c)B} \Psi^B{}_{(x)} \qquad (24)$$

onde $\tau_{(c)}$ são as matrizes de spin isotópico para isospin $\frac{1}{2}$ e

$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon^c)$ é o iso-vetor de 1a. ordem em torno do qual se faz a rotação. A transformação (24) é a mesma qualquer que seja a posição x^μ (invariância não local no espaço de coordenadas). Se impuzermos uma invariância de tipo local fazendo $\varepsilon^c \to \varepsilon^c(x)$, que gerará uma Gauge isotópica de 2a. espécie, teremos similarmente aos casos anteriores, que introduzir afinidades (derivadas covariantes) ou equivalentemente, campos compensadores.

A afinidade (ou campo compensador) de (24) para $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(x)$, é necessariamente um campo de spin 1 e isospin 1 pois é do tipo $\vec{B}_\mu$ para poder eliminar o fator $\vec{\varepsilon}_{,\mu}$ em $\delta\Psi^A_{,\mu}(x)$. Acha-se que

$$\delta\vec{B}_\mu = \vec{\varepsilon}_{,\mu} + 2\vec{B}_\mu \times \vec{\varepsilon}$$

Aqui se tem:

$$\delta\Psi = i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\tau}\Psi$$

$$\delta\overline{\Psi} = -i\overline{\Psi}\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\tau}$$

$$\delta x^\rho = 0$$

tem-se

$$\xi^\rho_i = 0 \quad , \quad \gamma^\rho_{\Psi i} = 0$$

$$\eta^\Psi_i = i\tau_i\Psi \quad , \quad \eta^{\overline{\Psi}}_i = -i\overline{\Psi}\tau_i$$

$$\eta^i_{\mu k} = \varepsilon^i{}_{jk}B^j{}_\mu$$

$$\gamma^{\rho i}_{\mu k} = \delta^\rho_\mu \delta^i_k$$

com $\varepsilon^i{}_{jk}$ o símbolo tridimensional de permutações.

Aplicando o teorema de Noether nesse caso, acha-se, após cálculos relativamente longos, que:

$$L_{total} = -\frac{1}{4}\vec{\phi}_{[\mu\nu]}\cdot\vec{\phi}^{[\mu\nu]} - \bar{\Psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}-i\vec{\tau}\cdot\vec{B}_{\mu})\,\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

a derivada covariante é aqui

$$\Psi_{;\mu} = \partial_{\mu}\Psi - i\vec{\tau}\cdot\vec{B}_{\mu}\Psi$$

e a densidade Lagrangeana do campo compensador $\vec{B}_{\mu}$ dito de Yang-Mills é gerada pelo termo quadrático em

$$\vec{\phi}_{[\mu\nu]} = \frac{\partial\vec{B}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\vec{B}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - 2\vec{B}_{\mu}\times\vec{B}_{\nu} \qquad (25)$$

que é semelhante à expressão do tensor de Riemann em termos das $\{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$.

A expressão (25) é invariante sob a Gauge isotópica $\delta\vec{B}_{\mu} = \vec{\varepsilon}_{,\mu} + 2\vec{B}_{\mu}\times\vec{\varepsilon}$.

As equações dos campos são:

$$\vec{L}_{\mu} \equiv \frac{\partial\vec{\phi}_{[\mu\nu]}}{\partial x_{\nu}} + 2\,(\vec{B}_{\nu}\times\vec{\phi}_{[\mu\rho]})g^{\rho\nu} + \vec{J}_{\mu} = 0$$

$$L_{\Psi} \equiv \gamma_{\mu}(\partial^{\mu} - i\vec{\tau}.\vec{B}^{\mu})\Psi + m\Psi = 0$$

$$\vec{J}_{\mu} = i\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\vec{\tau}\Psi$$

Nesse caso existe a lei fraca de conservação do spin isotópico do sistema: se $L_{\Psi} = 0$ então

$$\partial_{\mu}\vec{L}^{\mu} = 0$$

dando

$$\partial_{\mu}(\vec{J}^{\mu} + 2\vec{B}_{\nu}\times\vec{\phi}^{[\mu\nu]}) = 0$$

Devido à arbitrariedade dos três valores de $\vec{\varepsilon}(x)$, *pode-se im - por* três condições de Gauge que são escolhidas como $\partial_\mu \vec{B} = 0$. Com isso, se elimina as componentes escalares dos três isoveto res mesônicos $\vec{B}_\mu$ ($T = 1$, $S = 1$) *que interagem com nucleons via* $L_{int.} = \vec{J}_\mu \cdot \vec{B}^\mu$.

Essas condições são análogas às de Lorentz $A^\mu_{,\mu} = 0$ para potenciais *eletromagnéticos*.

6 - *CAMPOS DE KILLING E SOLUÇÕES ESTÁTICAS DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN*

Vamos considerar transformações de coordenadas infinitesimais que preservam a forma de $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$. Tem-se

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x)$$

$$dx^\mu \to dx^\mu + \xi^\mu_{,\nu}dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) + \xi^\beta g_{\mu\nu,\beta}(x)$$

Assim, no novo sistema de coordenadas

$$g'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu \equiv g_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu =$$

$$= (g_{\mu\nu} + \xi^\beta g_{\mu\nu,\beta})(dx^\mu + \xi^\mu_{,\alpha}dx^\alpha)(dx^\nu + \xi^\nu_{,\rho}dx^\rho)$$

e se impõe que ds^2 tenha a mesma forma em ambos referenciais:

$$g'_{\mu\nu}\, dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (1)$$

Tem-se: em 1ª ordem nas ξ's.

$$g'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \xi^\beta g_{\mu\nu,\beta}dx^\mu dx^\nu +$$

$$+ g_{\mu\nu}\xi^\mu_{,\alpha}dx^\alpha dx^\nu + g_{\mu\nu}\xi^\nu_{,\rho}dx^\mu dx^\rho$$

Daí,

$$\xi^\beta g_{\mu\nu,\beta}dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}\xi^\mu_{,\alpha}dx^\alpha dx^\nu + g_{\mu\nu}\xi^\nu_{,\rho}dx^\mu dx^\rho = 0$$

Como as diferenciais podem ser colocadas em evidência e são não nulas, segue-se que:

$$\xi^{\beta}g_{\mu\nu,\beta} + g_{\alpha\nu}\xi^{\alpha}_{,\mu} + g_{\mu\alpha}\xi^{\alpha}_{,\nu} = 0 \qquad (2)$$

definindo

$$\xi_{\lambda} = g_{\lambda\mu}\xi^{\mu}$$

vem de (2)

$$\xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu} - \xi^{\alpha}g_{\alpha\nu,\mu} - \xi^{\alpha}g_{\mu\alpha,\nu} + \xi^{\beta}g_{\mu\nu,\beta} = 0$$

ou seja,

$$\xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\beta}g^{\alpha\beta}\,(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = 0$$

$$\xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu} - 2\xi_{\beta}\,\{{}^{\beta}_{\mu\nu}\} = 0$$

que é equivalente às equações

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \qquad (3)$$

Essas equações são ditas equações de Killing e os ξ_{μ} que as satisfazem são os vetores de Killing da geometria. Eles são os geradores de transformações que mantêm ds^2 com a mesma forma tanto no referencial inicial quanto no final (ver (1)):

$$g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu\nu}(x')dx'^{\mu}dx'^{\nu} \qquad (4)$$

e que devem ser distinguidas de transformações arbitrárias que mantêm ds^2 invariante porém são do tipo:

$$g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} = g'_{\mu\nu}(x')dx'^{\mu}dx'^{\nu} \qquad (5)$$

Transformações do tipo (3) geram os chamados grupos de movimentos ou isometrias da teoria.

Por (5) basta que $g_{\mu\nu}(x)$ seja as componentes de um tensor covariante de 2a. ordem:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, g_{\alpha\beta}(x)$$

$$= (\delta^\alpha_\mu - \xi^\alpha_{,\mu})(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta_{,\nu})g_{\alpha\beta}$$

$$= g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\mu}g_{\alpha\nu} - \xi^\beta_{,\nu}g_{\mu\beta}$$

ou seja,

$$g'_{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{,\mu}g_{\alpha\nu} - \xi^\beta_{,\nu}g_{\mu\beta}$$

donde

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} - \xi^\alpha_{,\mu}g_{\alpha\nu} - \xi^\beta_{,\nu}g_{\mu\beta} \quad (6)$$

comparando com (2) vemos que isometrias são tais que

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (7)$$

ou seja, a equação (3) é válida. Enquanto que transformações arbitrárias de coordenadas geram

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} = -\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} \neq 0 \quad (8)$$

Em teoria de campos diríamos que isometrias formam a classe de transformações sob as quais $g_{\mu\nu}(x)$ é gauge invariante, enquanto que transformações arbitrárias de coordenadas geram transformações na métrica que as fazem gauge variante. Em geral, isso é, para métricas gerais, é muito difícil determinar-se a classe de isometrias, no entanto, para métricas com formas especiais pode-se determinar suas isometrias ou recipro camente pode-se impôr certas isometrias e daí procurar determinar qual $g_{\mu\nu}$ que as satisfaz. A determinação de isometrias para uma certa métrica é um processo que simplifica a solução das equações de Einstein pois via de regra, elimina um certo número de componentes das $g_{\mu\nu}$. Por outro lado, a existência de isometrias também é de importância na teoria da radiação gravitacional onde a existência de vetores de Killing assintóticos gera leis de conservação do campo nessa região.

O exemplo mais trivial de isometria é para o espaço chato, mapeado em coordenadas cartesianas $\vec{x}$, onde

$$\left\{ {\alpha \atop \beta\lambda} \right\} = 0 \quad , \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

As (3) assumem a forma simples

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = 0$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= a_\mu + \epsilon_{\mu\rho} x^\rho \\ \epsilon_{\mu\rho} &= - \epsilon_{\rho\mu} \end{aligned} \tag{9}$$

dependente de 10 parâmetros constantes a_μ, $\epsilon_{\mu\nu}$. As equações (9) definem uma transformação infinitesimal do grupo de Poincaré, e segue-se que esse grupo é o grupo de isometrias do tensor de Minkowski, um resultado já conhecido de relatividade restrita.

Os vetores de Killing podem ser , em princípio, dos três tipos: espacial, temporal ou nulo. Veremos no decorrer do curso que todos três são de interesse em gravitação.

O 1º caso de interesse é quando se tem um vetor de Killing temporal sobre toda a variedade, vamos indicá-lo por τ_μ,

$$\begin{aligned} &\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu} = \tau_{\mu,\nu} + \tau_{\nu,\mu} - 2 \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \tau_\lambda = 0 \\ &\tau^2(x) = g_{\mu\nu}(x)\tau^\mu(x)\tau^\nu(x) > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

(na assinatura -2). Existe então um referencial tal que $\tau^\mu = \delta^\mu_0$, dando

$$\tau_0 = g_{0\alpha}\tau^\alpha = g_{00}$$
$$\tau_i = g_{i\alpha}\tau^\alpha = g_{i0}$$

ou seja, $\tau_\mu = g_{\mu 0}$ com $\tau^2 = g_{\mu\nu}\delta^\mu_0\delta^\nu_0 = g_{00} > 0$. As (11), nesse referencial, tomam a forma

$$g_{\mu 0,\nu} + g_{\nu 0,\mu} - g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) g_{\lambda 0} = 0$$

ou

$$g_{\mu 0,\nu} + g_{\nu 0,\mu} - \left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right) = 0$$

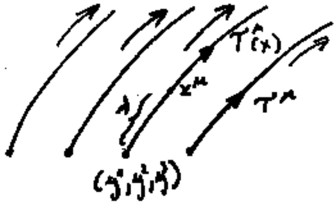
que são diretamente

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0 \tag{12}$$

A relação (12) junto com $g_{00} > 0$, definem um campo gravitacional estacionário — ou seja um campo que possue um vetor tipo-tempo global sobre a variedade.

Dado um campo de vetores temporais $\tau^\mu(x)$ (não necessariamente um vetor de Killing) sobre a variedade, poderemos introduzir uma família de curvas cujas tangentes sejam os $\tau^\mu(x)$.

Os pontos sobre essas curvas serão dados por



$$x^\mu = f^\mu(\lambda, y^i)$$

As equações dessas curvas serão

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial\lambda} = \tau^\mu\ (f(\lambda, y^i))$$

tomando referencial tal que $\tau^\mu = (1, \vec{0})$. Nesse caso se terá

$$\frac{\partial f^0}{\partial\lambda} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f^i}{\partial\lambda} = 0$$

ou seja, $x^0 = f^0 = \lambda$, $x^i = f^i$ = constante (ind. de $\underline{\lambda}$) e as y^i podem ser identificadas com x^i.

Qualquer deslocamento em R_4 pode ser decomposto numa componente paralela a τ^μ e noutra normal a essa direção:

$$dx^\mu = \tau^\mu d\alpha + d\beta^\mu$$ (essa relação é válida q.q.s. o referencial)

$$\tau^\mu d\beta_\mu = 0$$

daí,

$$d\alpha = \frac{\tau_\mu dx^\mu}{\tau^2}$$

e

$$d\beta^\mu = dx^\mu - \frac{\tau^\mu \tau_\beta dx^\beta}{\tau^2} = B^\mu{}_\nu dx^\nu$$

com

$$B^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{\tau^\mu \tau_\nu}{\tau^2}$$

O tensor $B^{\mu}{}_{\nu}$ é um operador de projeção para a hipersuperfície normal a τ^{μ} pois

$$B^{\mu}{}_{\nu}B^{\nu}{}_{\alpha} = B^{\mu}{}_{\alpha}$$

$$B^{\mu}{}_{\nu}\tau^{\mu} = 0$$

O comprimento $d\ell^2 = d\beta_{\mu}d\beta^{\mu}$ sobre a hipersuperfície normal a τ^{μ} é

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu}d\beta^{\mu}d\beta^{\nu} = g_{\mu\nu}B^{\mu}{}_{\alpha}B^{\nu}{}_{\lambda}dx^{\alpha}dx^{\lambda} = e_{\alpha\lambda}dx^{\alpha}dx^{\lambda}$$

com

$$e_{\alpha\lambda} = B^{\mu}{}_{\alpha}B^{\nu}{}_{\lambda}g_{\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} - \frac{\tau_{\lambda}\tau_{\alpha}}{\tau^2}$$

$e_{\alpha\lambda}$ é a projeção de $g_{\alpha\lambda}$ sobre a hipersuperfície normal a τ^{μ} e desempenha o papel de métrica nesse sub-espaço. Suas componentes são: (no referencial onde $\tau_{\lambda} = g_{\lambda 0}$)

$$e_{00} = e_{0r} = 0 \quad , \quad e_{rs} = g_{rs} - \frac{g_{0s}g_{0r}}{g_{00}}$$

Elas são tais que e_{rs} descreve a tri-geometria e satisfaz

$$d\ell^2 = e_{rs}dx^r dx^s \quad \text{(sobre a hipersuperfície} \perp \text{a } \tau^{\mu})$$

$$e_{rs}g^{su} = \delta^u_r$$

Similarmente, define-se um deslocamento na direção de τ^{μ} por

$$du^2 = (d\alpha\tau_{\mu})(d\alpha\tau^{\mu}) = g_{\mu\nu}(d\alpha\tau^{\mu})(d\alpha\tau^{\nu})$$

$$= p_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$$

com

$$p_{\mu\nu} = \frac{\tau_\mu \tau_\nu}{\tau^2}$$

Como essas relações são inteiramente independentes de referenciais vem que $B^\mu{}_\nu$, $e_{\mu\nu}$ e $p_{\mu\nu}$ *são tensores em* R_4.

No sistema onde $\tau^\mu = \delta^\mu_0$ (vamos chamá-lo de "canônico") se tem

$$d\ell^2 = e_{rs} dx^r dx^s = (g_{rs} - \frac{g_{0s} g_{r0}}{g_{00}})\, dx^r dx^s$$

$$du^2 = \frac{g_{\mu 0} g_{\nu 0}}{g_{00}}\, dx^\mu dx^\nu$$

donde se vê que $g_{\mu 0}$ é associado a deslocamentos normais à hipersuperfície R_3. Na aula anterior já tínhamos chamado a atenção para isso.

O vetor unitário ao longo da direção de τ^μ é

$$\ell^\mu = \frac{\tau^\mu}{\sqrt{\tau^2}} \quad , \quad \ell^\mu \ell_\mu = 1$$

no referencial canônico e para assinatura $(-2)^{(*)}$ se tem

$$\ell^\mu = \frac{\delta^\mu_0}{\sqrt{g_{00}}} \quad , \quad \ell_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}$$

Então se tem em qualquer referencial:

$$e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \ell_\mu \ell_\nu \quad , \quad B^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \ell^\mu \ell_\nu$$

$$p_{\mu\nu} = \ell_\mu \ell_\nu$$

(*) notar que para assinatura (+2) se teria $\tau^2 < 0$ e no referencial canônico se tem $\tau^2 = g_{00} < 0$ dando,

$$\ell^\mu = \frac{\delta^\mu_0}{\sqrt{-g_{00}}} \quad , \quad \ell_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{-g_{00}}} \quad \text{com} \quad \ell^2 = -1$$

$$d\ell^2 = (g_{\mu\nu} - \ell_\mu \ell_\nu)\, dx^\mu dx^\nu$$
$$du^2 = (\ell_\mu dx^\mu)^2$$

Esses resultados se aplicam não somente a campos estacionários (onde τ^μ = Killing vector) mas também ao desdobramento genérico da geometria quadridimensional noutra tridimensional, e numa direção tipo-tempo, tal como é necessário na formulação Hamiltoniana da gravitação (teoria de Dirac).

Observe que se tivéssemos convencionado que no referencial canônico

$$\tau_\mu = \delta^0_\mu$$

em vez de $\tau^\mu = \delta^\mu_0$ como fizemos, se obteria

$$\tau^\mu = g^{\mu 0} \quad , \quad \tau^2 = g^{00}$$

$$\ell^\mu = \frac{g^{\mu 0}}{\sqrt{g^{00}}} \quad , \quad \ell_\mu = \frac{\delta^0_\mu}{\sqrt{g^{00}}}$$

$$e^{rs} = g^{rs} - \frac{g^{0s} g^{0r}}{g^{00}} \quad , \quad e_{rs} = g_{rs}$$

$$d\ell^2 = g_{rs} dx^r dx^s \, .$$

É sempre possível definir uma hipersuperfície normal a τ^μ em cada ponto de R_4 porém nem sempre é possível obter-se uma <u>família</u> de hipersuperfícies com τ^μ como normal, de fato seja

$$\phi(x) = \text{constante}$$

uma tal família, então

$$\tau_\mu(x) = \xi(x) \phi_{,\mu}(x) \tag{13}$$

Mapeando para o referencial canônico

$$g_{\mu 0}(x) = \xi(x)\phi_{,\mu}(x) \tag{14}$$

que, em geral, não é satisfeito para todas as métricas $g_{\mu\nu}$, pois irá representar uma limitação na métrica. De fato, se (13) se verificar, tem-se

$$\left(\frac{\tau_\mu}{\xi}\right)_{,\nu} - \left(\frac{\tau_\nu}{\xi}\right)_{,\mu} = 0$$

ou seja,

$$\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu} = \frac{1}{\xi}\,(\xi_{,\nu}\tau_\mu - \xi_{,\mu}\tau_\nu)$$

Dessa equação se prova que

$$B^\mu{}_\rho B^\nu{}_\sigma(\tau_{\mu,\nu}-\tau_{\nu,\mu}) = 0 \tag{15}$$

Assim, as condições matemáticas para que τ^μ seja tipo-tempo, Killing e ainda ortogonal a uma família de hipersuperfícies em R_3 são:

$$\begin{aligned} &\tau^2 > 0 \\ &\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu} = 0 \\ &B^\mu{}_\rho B^\nu{}_\sigma\,(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Mapeando para o sistema canônico e levando em conta que τ^μ é Killing ($g_{\mu\nu,0} = 0$) se mostra por cálculo direto que as relações (15) conduzem a:

(i) $\rho = \sigma = 0$ — elas são identicamente satisfeitas

(ii) $\sigma = i$, $\rho = 0$ — elas são identicamente satisfeitas

(iii) $\sigma = i$, $\rho = k$ — elas implicam que $g_{k0}(x) = 0$

Métricas satisfazendo simultaneamente as (16) são ditas estáticas. Em resumo, na assinatura (-2) se tem

TIPO DE CAMPO	CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA	CONDIÇÕES	REFERENCIAL CANÔNICO
Estacionário	Existe um campo de Killing temporal	$\tau^2 > 0$ $\tau_{(\mu;\nu)} = 0$	$g_{00} > 0$ $g_{\mu\nu,0} = 0$
Estático	Existe um campo de Killing temporal ortogonal a uma família de superfícies em R_3	$\tau^2 > 0$ $\tau_{(\mu;\nu)} = 0$ $B^{\mu}{}_{\lambda} B^{\nu}{}_{\rho} \; \tau_{\boxed{\mu,\nu}} = 0$	$g_{00} > 0$ $g_{\mu\nu,0} = 0$ $g_{i0} = 0$
Geral	Existe um campo de vetores tipo-tempo em R_4	$\tau^2 > 0$	$g_{00} > 0$ $g < 0$

Com isso, terminamos esse estudo sobre vetores de Killing tipo-tempo e vamos passar agora a considerar vetores de Killing tipo-espaço. Em particular, é de grande interesse o caso em que a geometria admita vetores de Killing Euclideanos, que são particulares vetores de Killing espaciais da forma

$$\xi^{\alpha} = (\theta, \epsilon^{rk} x^{k})$$

$$\epsilon^{rk} = -\epsilon^{kr}, \ \vec{x} = \text{coordenadas cartesianas}$$

Nesse caso, as isometrias $\delta x^{\alpha} = \xi^{\alpha}$ serão rotações no tri-espaço Euclideano E_3 mapeados pelas coordenadas $\vec{x}$. As equações de Killing

$$-g_{\mu\rho}\xi^{\rho}_{,\nu} - g_{\rho\nu}\xi^{\rho}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\xi^{\rho} = 0$$

para $\mu = \nu = 0$ darão, observando que $\xi^{\rho}_{,0} = 0$,

$$- g_{00,k}\xi^{k} = -g_{00,k}\varepsilon^{ks}x^{s} = 0 \tag{17}$$

se $\mu = 0$, $\nu = r$, obtemos

$$-g_{0i}\varepsilon^{ir} - g_{0r,i}\varepsilon^{ik}x^{k} = 0 \tag{18}$$

se $\mu = r$, $\nu = s$, temos

$$- g_{ru}\varepsilon^{us} - g_{us}\varepsilon^{ur} - g_{rs,u}\varepsilon^{uv}x^{v} = 0 \tag{19}$$

De (17) segue-se que

$$g_{00} = \alpha(r,x^{0}) \tag{20}$$

De (18), segue-se que,

$$g_{0r} = \beta(r,x^{0})\,\frac{x^{r}}{r} \tag{21}$$

De (19), segue-se que,

$$g_{ik} = \gamma(r,x^{0})\delta_{ik} + \lambda(r,x^{0})\,\frac{x^{i}x^{k}}{r^{2}} \tag{22}$$

onde $r^{2} = x^{i}x^{i}$.

As expressões (20), (21) e (22) podem ser simplificadas se considerarmos transformações de coordenadas que deixam essas relações invariantes. Prova-se que podemos efetuar uma transformação desse tipo como:

$$(\vec{x},x^{0}) \rightarrow (x'^{s},\, x^{0}),\ldots,x'^{s} \quad \text{são também cartesianas}$$

onde

$$\begin{cases} x^{s} = f_{1}(r',x'^{0})x'^{s} \\ x^{0} = f_{2}(r',x'^{0}) \end{cases}$$

Como exemplo escrevemos a forma assumida por g_{ik} no novo referencial:

$$g'_{ik}(x') = F(r',x'^0)\delta_{ik} + M(r',x'^0)\,\frac{x'^i x'^k}{r'^2}$$

onde

$$F(r',x'^0) = f_1^2\,\gamma(f_1 r',f_2) \quad ,$$

se tem que $r = f_1 r'$,

$$M(r',x'^0) = f_1{}^2\lambda(f_1 r',f_2) + (f_{1,r'})^2\, r'^2\gamma(f_1 r',f_2) +$$

$$+ 2f_1 f_{1,r'} r'(\gamma(f_1 r',f_2) + \lambda(f_1 r',f_2)) \; +$$

$$+ 2f_1 f_{2,r'}\, \beta(f_1 r',f_2) + 2f_{1,r'} f_{2,r'} r'^3\beta(f_1 r',f_2) +$$

$$+ (f_{2,r'})^2\, \alpha(f_1 r',f_2) \; .$$

Podemos usar as duas funções f_1, f_2 com a finalidade de eliminar duas das 4 funções arbitrárias que aparecem em $g_{\mu\nu}$ pelas (20), (21) e (22).

Mostra-se que se pode ter no novo referencial (entretanto por simplicidade não vamos colocar linhas) fazendo a escolha:

$$f_1 = -\gamma^{-1/2} \; , \; f_2 = f_2(x'^0) = x'^0, \; (x^0 = x'^0)$$

$$g_{ik}(x) = -\,\delta_{rs} + \lambda(r,x^0)\,\frac{x^r x^s}{r^2} \qquad (23)$$

Fazemos agora transformações que não mudam (23) mas que alteram (20) e (21):

$$x^s = x'^s \qquad ; \qquad x^0 = f_2\,(x'^0,r')$$

Então

$$g'_{0k}(x') = \frac{\partial f_2}{\partial x'^0} \left(\frac{\beta x'^k}{r'} + \frac{\partial f_2}{\partial x'^k}\alpha\right)$$

tomando

$$\frac{\partial f_2}{\partial x'^k} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{x'^k}{r'}$$

se tem $g'_{0k} = 0$ e eliminamos β em (21). Sob ambos os mapeamentos considerados g_{00} não se alterará. Portanto após essas recalibragens obtemos o resultado que *é sempre possível reduzir-se um tensor métrico esfericamente simétrico ã uma expressão dependente de duas funções arbitrárias de* (r,x^0):

$$\begin{cases} g_{00} = \alpha(r,x^0) \\ g_{0s} = 0 \\ g_{rs} = -\delta_{rs} + \lambda(r,x^0)\,\dfrac{x^r x^s}{r^2} \end{cases} \tag{24}$$

É óbvio que é de interesse em passar para coordenadas esféricas (r,θ,ϕ). Também se escreve

$$\alpha = e^{\nu} \quad , \quad \lambda = 1-e^{\Lambda}$$

então

$$g_{00} = e^{\nu(r,x^0)}$$

$$g_{0i} = 0$$

$$g_{11} = -e^{\Lambda(r,x^0)} \; , \; g_{22} = -r^2, \; g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Calculam-se os símbolos de Christoffel e as componentes não nulas *do tensor* de Einstein e se obtêm - equações de campo vazio

$$G_1{}^1 = e^{-\Lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}$$

$$G_2{}^2 = G_3{}^3 = \frac{1}{2}\, e^{-\Lambda}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'-\Lambda'}{r} + \frac{\nu'\Lambda'}{2}) -$$

$$- \frac{1}{2}\, e^{-\nu}\, (\ddot{\Lambda} + \frac{\dot{\Lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\Lambda}\dot{\nu}}{2})$$

$$G_0{}^0 = e^{-\Lambda}\,(\frac{1}{r^2} - \frac{\Lambda'}{r}) - \frac{1}{r^2}$$

$$G_0{}^1 = e^{-\Lambda}\,\frac{\dot{\Lambda}}{r}$$

então se tem $G_{\nu}{}^{\mu}{}_{;\mu} = 0$ e como decorrência disso, pode-se mostrar que $G_2{}^2$ é uma combinação linear de $G_1{}^1$, $G_0{}^0$ e $G_0{}^1$, e fica-se somente com as equações independentes

$$\begin{cases} e^{-\Lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ e^{-\Lambda}(\frac{\Lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} = 0 \\ \dot{\Lambda} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Tomando-se a primeira com a segunda, se tem

$$\nu' + \Lambda' = 0 \longrightarrow \nu + \Lambda = \phi(x^0)$$

Vamos agora recalibrar g_{00} tomando as transformações

$$\begin{cases} x^r = x'^r \\ x^0 = f(x'^0) \end{cases}$$

que obviamente não destroem a simetria esférica do sistema, se tem

$$\begin{cases} g'_{rs} = g_{rs} \\ g'_{0r} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\, g_{0r} = 0 \\ g'_{00} = (\frac{\partial x^0}{\partial x'^0})^2\, g_{00} = \dot{f}^2 g_{00} \end{cases}$$

que equivalem a fazer

$$\alpha \to \dot{f}^2(x^0)\alpha(r,x^0) = \alpha'$$

mas como $\alpha = e^{\nu}$, se tem

$$\alpha' = e^{\nu+\Psi(x^0)} = e^{\nu}.e^{\Psi(x^0)} = \alpha\dot{f}^2$$

Então

$$g'_{00} = e^{\nu'} = e^{\nu+\Psi(x^0)}$$

Escolhendo a função arbitrária $\Psi(x^0)$ tal que

$$\nu' + \Lambda - \phi(x^0) = 0$$

ou seja,

$$\nu + \Lambda = 0 \quad , \quad \text{com } \Psi(x^0) = \phi(x^0)$$

De (25-3) vem então que $\dot{\nu} = 0$, e se tem

$$\dot{\nu} = 0 \quad , \quad \dot{\Lambda} = 0$$

Portanto, o tensor métrico mais geral com simetria esférica, solução das equações de Einstein é necessariamente estático:

$g_{0i} = 0$ → (decorre dos mapeamentos usados)

$g_{rs,0} = g_{00,0} = 0$ → (decorre das equações de campo)

Temos agora somente uma função a ser determinada pois $\nu+\Lambda = 0$, vamos escolher Λ e usando a equação

$$e^{-\Lambda}\left(\frac{\Lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0$$

achamos

$$e^{-\Lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2c}{r}$$

então,

$$\begin{cases} g_{00}(r) = 1 - \dfrac{2c}{r} \\ g_{0i} = 0 \quad , \quad g_{11} = \dfrac{-1}{1 - \dfrac{2c}{r}} \; , \; g_{22} = -r^2 , \; g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$$

e estamos na região onde $T_{\mu\nu} = 0$ (região exterior).

Comparando essa solução com a solução para as equações linearizadas correspondente a uma massa pontual em repouso na origem, deve-se ter assintoticamente (para grandes valores de $\underline{r}$)

$$g_{11} = g_{rr}^{\text{linearizada}} = -1 - \frac{2Gm}{c^2 r}$$

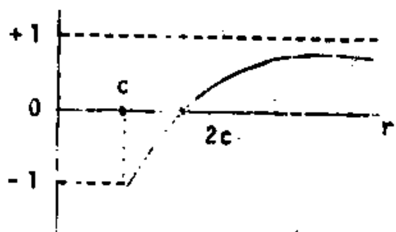
portanto, a constante de integração é

$$c = \frac{Gm}{c_{luz}^2}$$

Nota-se que:

(i) se $r \to \infty$ a métrica acima tende ao tensor de Minkowski.

(ii) para $g_{00}(r)$ se tem o gráfico



em $r = 2c$, $g_{00} \to 0$ e para $r < 2c$ a assinatura muda de sinal pois aí $g_{00}(r) < 0$. Como, se puzermos $dx^r = 0$ no intervalo, obtemos o tempo próprio, se tem

$$c^2 d\tau^2 = g_{00}(r)(dx^0)^2$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}(r)}\, dt \quad ,$$

dt = dif. do tempo para observador externo.

Como $g_{00}(r) \leq 1$, vêm $d\tau \leq dt$, ou seja a distâncias finitas da massa gravitante a um "slowing down" do tempo medido pelo observador próprio que se move nessa região , comparado com o tempo no infinito.

$$d\tau = dt \quad \text{se} \quad r \to \infty \, .$$

Isso implica no desvio para o vermelho das linhas espectrais observadas perto da massa gravitante; considere a experiência idealizada

Observador a → livre do campo (externo)

Observador b → observador próprio na região do campo

Ambos observam raios luminosos tais que

$$\nu_a = K \, \frac{\text{vibrações}}{\text{seg}}$$

$$\nu_b = \frac{K \text{ vibrações}}{N \text{ seg. de tempo próprio}} = \frac{1}{N} \nu_a < \nu_a$$

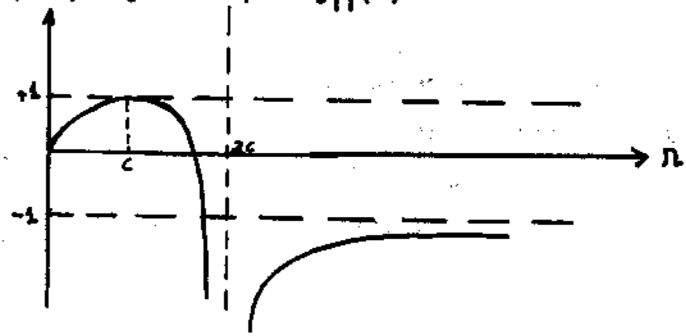
logo, ν_b comparada com ν_a aparenta estar desviada para o vermelho.

Como em $r = 2c$, $g_{00} \to 0 \longrightarrow d\tau \to 0$ o relógio para , portanto esse ponto não vai poder ser atingido pelo observador externo próprio, muito menos cruzar para $r < 2c$ pois aí g_{00} troca de sinal. A região permitida é para

$$r > 2c \longrightarrow 0 < g_{00}(r) \leq 1$$

O ponto $r = 2c$ é chamado raio de Schwarzschild ($r = r_s$). Para o Sol $r_s \simeq 1{,}47$ km. Para a Terra $r_s \simeq 4{,}9$ mm, portanto essas regiões ($r < 2c$) já não apresentam problemas sérios pois não são observáveis na superfície desses corpos.

(iii) O gráfico para $g_{11}(r)$ é



em $r = 2c$, $g_{11} \to \infty$ e a assinatura troca de sinal na transição através de $r \to r_s = 2c = 2Gm/c^2$ por valores superiores, como dissemos essa transição não é possível

distância ao centro de um ponto qq. $\Big\}$ $\int_0^r \sqrt{-g_{11}}\, dr \geq r$ pois $-g_{11} \geq 1$

desde que

$$-g_{11}(r) = \left(1 - \frac{2c}{r}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{2c}{r}$$

pois $2c = 2Gm/c^2$ é um número pequeno.

Como o comprimento da circunferência de centro na origem é $C = 2\pi r$, teremos

$$2\pi r_g \geq 2\pi r = C$$

$$\frac{C}{r_g} \leq 2\pi$$

(iiii) O valor $r = 2c$ é dito singularidade de Schwarzschild — essa singularidade é um efeito do sistema de coordenadas e não representa uma singularidade física do sistema. Isso pode ser visto determinando-se em $r = 2c$ o valor do invariante $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ que será um valor finito nesse ponto.

(iiiii) Eddington (1924) mostrou que a singularidade em $r = 2c$, proveniente do sistema de coordenadas esféricas, pode ser removida pela transformação

$$x'^{r} = x^{r} \ , \ x^{0} = x'^{0} \pm 2c \log \left(\frac{r'}{2c-1}\right)$$

As novas coordenadas são $(x'^{0}, r, \theta, \phi)$ e se tem

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2c}{r} & \pm \frac{2c}{r} & 0 & 0 \\ \pm \frac{2c}{r} & -(1 + \frac{2c}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

(iiiiii) Na métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas consideramos raios luminosos movendo-se na direção $\phi = \phi_0$ sobre o plano $\theta = \theta_0$. Então se faz $ds^2 = 0$, $d\Omega^2 = 0$, e tem-se:

$$-\frac{1}{1 - \frac{2c}{r}} dr^2 + c_{luz}^2 \left(1 - \frac{2c}{r}\right) dt^2 = 0$$

Para evitar confusão com símbolos, escreveremos:

$$c = m^* = \frac{Gm}{c^2}$$

$$c_{luz} = c$$

fótons se movendo radialmente, nessa forma, têm velocidades efe<u>tivas</u> $dr/dt = \pm c(1 - 2m^*/r)$

(a) na região $r < 2m^* \Longrightarrow \frac{2m^*}{r} > 1$, $1 - \frac{2m^*}{r} < 0$, então:

$$\frac{dr}{dt} = \mp c \left|1 - \frac{2m^*}{r}\right|$$

eles poderão se mover na direção de $\underline{r}$ crescente, ou ma direção de $\underline{r}$ decrescente

(a-1) na direção $\underline{r}$ crescente a partir de $\underline{r = 0}$:

$$\frac{dr}{dt} = \left|1 - \frac{2m^*}{r}\right| c$$

$r = 0$, $v = \infty$ $\longrightarrow$ exclue-se da discussão

$r = m^*$, $v = c$

$r = 2m^*$, $v = 0$ $\longrightarrow$ não pode atingir esse ponto nem cruzar para fora ($r > 2m^*$)

$r = 4m^*$, $v = \frac{1}{2} c$

$r = \infty$, $v = c$

(a-2) na direção $\underline{r}$ decrescente a partir de $r = 2m^*$:

$$\frac{dr}{dt} = - c\left|1 - \frac{2m^*}{r}\right|$$

$r = 2m^*$, $v = 0$ (parte do repouso, que é irrealizável)

$r = m^*$, $v = -c$

Nesse caso ele tem que partir de $r < 2m^*$ e se dirige para $r=0$.

(b) na região $r > 2m^*$, $1 - \frac{2m^*}{r} > 0$

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)$$

(b-1) Movimento na direção de r crescente partindo de $r > 2m^*$ (para evitar $v = 0$)

$$\left.\begin{array}{ll} r = 4m^* , & v = +c(\frac{1}{2}) \\ r = \infty , & v = c \end{array}\right\}$$ não é realizável em princípio pois o campo é atrativo

(B-2) Movimento na direção de r decrescente partindo de $r > 2m^*$

$$\left.\begin{array}{ll} r = 4m^* , & v = -\frac{c}{2} \\ r = 2m^* , & v = 0 \\ r = m^* , & v = c \end{array}\right\}$$ em princípio possível, sem saber-se, contudo, o que se passa em $r = 2m^*$ (o campo é atrativo)

Assim, em princípio, todos os fótons em $r < 2m^*$ movendo-se radialmente tendem a ficar dentro dessa região, os de fora tendem a entrar, excluindo-se o que se passaria ao cruzar a fronteira.

Outro tópico que pode ser tratado é o de vetores de Killing para simetria cilíndrica. Vamos fazê-lo sucintamente.

rotação infinitesimal em torno do eixo-Z $\left\{\begin{array}{l} x' = x - \theta y \\ y' = y + \theta x \\ z' = z \\ x'^0 = x^0 \end{array}\right.$

Vetor de Killing espacial $\Big\}$ $\xi^\alpha = (-\theta y, \theta x, 0, 0)$

Como decorrência das equações de Killing para esse problema, se tem:

$$g_{00} = f(\rho, z, x^0) \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$g_{01} = \phi(\rho,z,x^0)\,\frac{x}{\rho}$$

$$g_{02} = \phi(\rho,z,x^0)\,\frac{y}{\rho}$$

$$g_{03} = F(\rho,z,x^0)$$

$$g_{32} = \phi(\rho,z,x^0)\,\frac{zy}{\rho^2}$$

$$g_{31} = \phi(\rho,z,x^0)\,\frac{zx}{\rho^2}$$

$$g_{nm} = -\,\delta_{nm}\Psi(\rho,z,x^0) + \chi(\rho,z,x^0)\,\frac{x_n x_m}{\rho^2}$$

$(n,m = 1,2)$

$$g_{33} = -\,\Lambda\,(\rho,z,x^0)$$

Ao todo, tem-se 7 funções arbitrárias de (ρ,z,x^0). Fazendo recalibrações por meio de mapeamentos tal como antes, se reduz essas funções a somente duas independentes:

$$g_{00} = e^{\mu}\ ,\quad g_{0m} = 0\ ,\quad g_{03} = 0\ ,\quad m,n = 1,2$$

$$g_{33} = -e^{-\mu+\nu}\ ,\ g_{3m} = 0$$

$$g_{nm} = e^{-\mu}\left\{-\delta_{nm} + (1 - e^{-\nu})\,x^m x^n\right\}$$

com somente duas funções: μ,ν das variáveis anteriores.

7 - *PROBLEMA DAS CONDIÇÕES INICIAIS PARA AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN*

Vamos aqui estudar o problema de condições iniciais para as equações de Einstein. Dado um tensor $g_{\mu\nu}(x^i, x^0)$ solução das equações no instante x^0, podemos perguntar se $g_{\mu\nu}(\bar{x}^i, \bar{x}^0)$ para $\bar{x}^0 > x^0$ ainda é solução dessas equações, o problema de Cauchy responde a essa questão dando uma prescrição para a propagação temporal de soluções das equações do campo.

Esse problema pode ser analisado tanto no formalismo Lagrangeano quanto no Hamiltoniano. Em seguida, como recordação, vamos falar brevemente nesse assunto para sistemas discretos, desde que a generalização para sistemas contínuos é direta.

(a) <u>Formalismo Lagrangeano</u>

Temos as equações de movimento

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

provenientes da Lagrangeana $L(q^i, \dot{q}^i)$, e dadas as condições iniciais $q^i(0)$, $q^i(0)$ determinamos uma solução $q^i(t)$ como

$$q^i(t) = q^i(0) + t\dot{q}^i(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{q}^i(0) + \dots \tag{1}$$

usando as equações de movimento, se tem

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} q^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Se a matriz coeficiente da derivada temporal de q de mais alta ordem for não-singular

$$|M_{ij}| = \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right| \neq 0$$

então

$$\ddot{q}^j(t) = M^{-1js}\left\{\frac{\partial L}{\partial q^s} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial q^k}\,\dot{q}^k\right\} \qquad (2)$$

tem-se que $M^{-1js} = f^{js}(q,\dot{q})$ e o termo entre colchetes em (2) também é função de q e $\dot{q}$. Daí, substituir (2) em (1) e de suas derivadas temporais gera a solução $q^i(t)$ de forma unívoca. De fato, chamando o lado direito de (2) por

$$\ddot{q}^j(t) = f^j(q(t),\dot{q}(t))$$

então,

$$\dddot{q}^j(t) = \frac{\partial f^j}{\partial q^r}\,\dot{q}^r + \frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^r}\,f^r\,(q,\,\dot{q})$$

e a solução é

$$q^i(t) = q^i(0) + t\dot{q}^i(0) + \frac{t^2}{2!}\left[f^i(q(t),\dot{q}(t))\right]_{t=0} + \\ + \frac{t^3}{3!}\left[\frac{\partial f^j}{\partial q^r}\,\dot{q}^r + \frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^r}\,f^r(q(t),\dot{q}(t))\right]_{t=0} + \ldots$$

que é única a partir das condições iniciais. Para isso foi necessário que $|M_{ij}| \neq 0$. Se acontecer que M_{ij} seja singular, mas contenha uma sub-matriz regular (um menor de M_{ij}) então só existirão soluções para as partes correspondentes a essa sub-matriz regular.

Um exemplo onde isso acontece e que será ilustrativo na aplicação que iremos fazer à relatividade geral é para a Mecânica Analítica parametrizada. Temos

$$I = \int L(q,\dot{q},t)dt = \int L\ (q(\lambda),\ \frac{q'}{t'}\ ,\ t(\lambda))\ t'd\lambda$$

onde agora se fez $t = t(\lambda)$ e $q' = dq^i/d\lambda$, $t' = dt/d\lambda$. Chamando

$$Q^a = (q^i(\lambda)\ ,\ t(\lambda))$$

se tem

$$I = \int \mathcal{L}\ (Q^a(\lambda)\ ,\ Q'^a(\lambda))\ d\lambda$$

$$\mathcal{L} = L(q,\ \frac{q'}{t'}\ ,\ t)\ t'$$

Usando as definições de Momenta conjugado e Hamiltoniana:

$$p^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'^a} \begin{cases} p^i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^i} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{q'^s}{t'})} \dfrac{\partial(\frac{q'^s}{t'})}{\partial q^i} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{q'^i}{t'})} \dfrac{1}{t'} \\[2ex] p^t = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} = L - \dfrac{\partial L}{\partial(\frac{q'^s}{t'})} (\frac{q'^s}{t'}) \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = p^a Q'_a - \mathcal{L} = p^i q'_i + p^t t' - \mathcal{L}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{q'^i}{t'})} \frac{q'^i}{t'} + Lt' - t' \frac{\partial L}{\partial(\frac{q'^s}{t'})} (\frac{q'^s}{t'}) - \mathcal{L} = 0$$

Portanto, na representação paramétrica a Hamiltoniana se anula e isso representa uma relação de vinculação nessa representação:

$$\mathcal{H}\ (Q^a\ ,\ P_a) = 0 \tag{3}$$

Por outro lado, o fato que $H = 0$ implica que L é homogênea de 1a. ordem nas velocidades Q'^a:

$$P^a Q'_a = L$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q'_a} Q'_a = L \tag{4}$$

derivando novamente em Q'_s se tem

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q'_a \partial Q'_s} Q'_a = 0 \tag{5}$$

que diz que a matriz $M^{as} = \partial^2 L/\partial Q'_a \partial Q'_s$ possue um autovetor Q'_a associado a autovalores zero e, portanto, é singular. Daí segue que o problema de Cauchy sob a forma

$$Q^a(\lambda) = Q^a(0) + \lambda Q'^a(0) + \frac{\lambda^2}{2!} Q''^a(0) + \ldots$$

não terá solução para todos Q^a pois das equações de movimento

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial Q'_a} - \frac{\partial L}{\partial Q_a} = 0$$

não poderemos resolver para $Q''_a(\lambda)$ em função de $Q^a(\lambda)$ e $Q'_a(\lambda)$ como fizemos antes. Essa teoria ainda apresenta uma caracte - rística de interesse. Ela é invariante (sua Ação) sob o grupo de transformações dependentes de um parâmetro:

$$\bar{\lambda} = f(\lambda)$$

ou seja, novas reparametrizações: $I_\lambda = I_{\bar{\lambda}}$ (isso decorre de que L é homogênea de 1a. ordem nas velocidades):

$$L = \mathrm{L}\ t'$$

$$\mathcal{L}d\lambda = \bar{\mathcal{L}}d\bar{\lambda}$$

pois

$$Lt'd\lambda = L\bar{t}\,\overline{d\lambda}$$

com $\bar{t} = dt/d\lambda$.

Logo, em resumo:

(i) A Mecânica Analítica parametrizada é um exemplo de teoria onde o problema de Cauchy não procede trivialmente.

(ii) A Hamiltoniana é nula, representando uma relação de vinculação no espaço de fases.

(iii) A Ação é invariante sob o grupo uni-paramétrico de reparametrização.

(b) Formalismo Hamiltoniano sem Vínculos

$$p^i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad , \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \quad , \quad [A,B] = \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}$$

daí, escrevendo as expansões em série de Taylor

$$\begin{cases} q^i(t) = q^i(0) + t\dot{q}^i(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{q}^i(0) + \ldots \\ p_i(t) = p_i(0) + t\dot{p}_i(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{p}_i(0) + \ldots \end{cases}$$

e, lembrando que em geral, dado A tal que $\partial A/\partial t = 0$, se tem

$$\frac{dA}{dt} = [A,H]$$

vem ,

$$\begin{cases} q^i(t) = q^i(0)+t \left\{\left[q^i(t),H\right]\right\}_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left\{\left[\left[q^i(t),H\right],H\right]\right\}_{t=0} + \cdots \\ p_i(t) = p_i(0)+t \left\{\left[p_i(t),H\right]\right\}_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left\{\left[\left[p_i(t),H\right],H\right]\right\}_{t=0} + \cdots \end{cases}$$

Logo, dadas as condições iniciais $q^i(0)$, $p_i(0)$ e a Hamiltoniana H a solução procede de forma natural. Esse processo sempre é válido desde que não existam relações de vinculação, como exemplo citamos o caso anterior da mecânica analítica na representação paramétrica onde $H \to 0$ e o problema de Cauchy não procede trivialmente. Note contudo que $\mathcal{H} = 0$ não implica necessariamente que suas derivadas se anulem, ou seja, poderemos ter por exemplo:

$$P'_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q^a} = \left[P_a, \mathcal{H}\right] \neq 0$$

De fato, das equações de Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^a}$$

logo,

$$\frac{d}{d\lambda} P_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^a} \neq 0$$

e se acha

$$P'_a = \begin{cases} p'_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = t'\,\frac{\partial L}{\partial q^i} = t\,\dot{p}_i \\ p^{t'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = t'\,\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

essa última será a lei de conservação de energia na antiga representação se $\partial L/\partial t = 0$, pois tem

$$p^t = L - \frac{\partial L}{\partial(\frac{q'^s}{t'})}(\frac{q'^s}{t'}) = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = -H$$

portanto, $\left[P_a, H\right] \neq 0$. Quantidades tais que $A(P,Q) = 0$, com $\left[A,B\right] \neq 0$ qualquer que sejam $B(P,Q)$ são ditas se anularem fracamente (terminologia usada por Dirac que estudou essas teorias resumidamente) e se indica por $A \approx \theta$. Assim, se tem $H \approx 0$ para os vínculos vistos antes.

(c) Visto esses exemplos, vamos retornar ao caso das equações de Einstein. As variáveis tipo "$q_i(t)$" do método Lagrangeano são os $g_{\alpha\beta}(x^i, x^0)$, ou seja,

$$i \to \alpha\beta, x^i$$

pontos t = cte. no espaço de configurações da Mecânica Analítica aqui são representados por hipersuperfícies x^0 = cte. no R_4. Elas são determinadas pelas condições : (seja ℓ_μ a normal a essa hipersuperfície num dado ponto)

$$g^{\mu\nu}\ell_\mu\ell_\nu > 0 \ \ldots \ \ell_\nu \text{ é tipo-tempo}$$

tomando $\underline{\ell}$ normalizada, tal que num dado referencial ℓ_0 aponte na direção temporal: $\ell_\mu = \delta^0_\mu$, se terá nesse referencial

$$g^{00} > 0$$

e se tem sempre

$$g < 0$$

Vamos tomar a hipersuperfície tal que $x^0 = 0$ sobre ela no referencial escolhido e vamos chamá-la $\underline{S}$. Sobre $\underline{S}$ se especifica os valores de

$$\begin{cases} \phi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^r,0) = g_{\mu\nu}(S) \\ \dot{\phi}_{\mu\nu} = \left[\dfrac{\partial g_{\mu\nu}(x^r,x^0)}{\partial x^0}\right]_{x^0=0} = \dot{g}_{\mu\nu}(S) \end{cases}$$

logo, conhecemos sobre S as quantidades

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x^r} \quad , \quad \frac{\partial \dot{\phi}_{\mu\nu}}{\partial x^r}$$

conjuntamente com derivadas espaciais de ordem superior.

Se tem, numa região do futuro de S

$$g_{\mu\nu}(x^r,x^0) = g_{\mu\nu}(x^r,0) + x^0 \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}(x^r,x^0)}{\partial x^0}\right]_{x^0=0} +$$

$$+ \frac{(x^0)^2}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}(x^r,x^0)}{\partial x^0 \partial x^0}\right]_{x^0=0} + \ldots \qquad (6)$$

Portanto, para resolver esse problema, devemos obter a partir das dez equações de campo $R_{\mu\nu} = 0$ as dez incógnitas $\ddot{g}_{\mu\nu}$ na forma

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}(x^r,x^0)}{\partial x^0 \partial x^0} = \Psi_{\mu\nu} \left[g_{\alpha\beta}(x^r,x^0), \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x^r,x^0)}{\partial x^0}, + \begin{matrix}\text{derivadas}\\ \text{espaciais}\end{matrix}\right] \qquad (7)$$

Obtidas (7), substituimos em (6) e o problema está resolvido . (Derivadas temporais superiores de (7) são diretamente deriváveis caso se tenha essa relação.)

As equações $R_{\mu\nu} = 0$ são do tipo

$$\frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(g_{\mu\nu,\rho\sigma} + g_{\rho\sigma,\mu\nu} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\rho,\mu\sigma}) + K_{\mu\nu} = 0 \qquad (8)$$

com

$$K_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\,(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\lambda})$$

Sobre $\underline{S}$ $K_{\mu\nu}$ é conhecido pois ele contém somente derivadas $1^{\underline{as}}$ da métrica. Um cálculo simples permite isolar o fator $g_{\mu\nu,00}$ como:

$$\begin{cases} R_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{00} g_{ij,00} + M_{ij} \\ R_{0i} = -\frac{1}{2}\, g^{0k} g_{ik,00} + M_{i0} \\ R_{00} = \frac{1}{2}\, g^{ij} g_{ij,00} + M_{00} \end{cases} \tag{9}$$

onde

$$M_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}(x^r,x^0), g_{\alpha\beta,\rho}(x^r,x^0), g_{\alpha\beta,ij}(x^r,x^0), g_{\mu\nu,0i}(x^r,x^0))$$

Portanto, $M_{\mu\nu}$ é dado sobre S, porém por (9) só aparecem derivadas duas vezes no tempo as componentes de g_{ij}. Daí, segue-se que temos 10 equações (9) em somente seis incógnitas: $g_{ij,00}$ que é um número superabundante de equações. Disso decorre que restam 4 equações que não atuarão como deveriam no problema de Cauchy. Em resumo:

(i) $g_{0\mu,00}$ não aparece na expressão do tensor de Ricci, consequentemente $g_{0\mu}$ é indeterminado como função de x^0.

(ii) $g_{ij,00}$ é determinado pelas equações de campo em termos das variáveis restantes, de forma compatível com as condições iniciais, mas as 6 quantidades $g_{ij,00}$ são em menor número que o número total de equações de campo. Como consequência, existi rão 4 relações entre $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\rho}, g_{\alpha\beta,ij}, g_{\alpha\beta,0i}$.

De fato, usando as seis primeiras equações (9) para obter $g_{ij,00}$:

$$g_{ij,00} = -\frac{2M_{ij}}{g^{00}} \tag{10}$$

ainda teremos quatro equações restantes em (9) que irão representar relações entre $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\rho}, g_{\alpha\beta,ij}$ e $g_{\alpha\beta,0i}$, que por (10) assumem a forma

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\, g^{0k}\left(\frac{-2M_{ik}}{g^{00}}\right) + M_{i0} = 0 \\ \\ \frac{1}{2}\, g^{ij}\left(-\frac{2M_{ij}}{g^{00}}\right) + M_{00} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

qualquer que seja a posição x^{μ}. Em particular sobre S teremos por (11) quatro relações entre as 20 componentes dos dados iniciais $g_{\mu\nu}(x^r,0)$ e $\dot{g}_{\mu\nu}(x^r,0)$. Daí decorre que 4 das equações de Einstein são limitações sobre as condições iniciais, as quais já não podem ser arbitrariamente escolhidas. Tem-se também

(iii) As identidades contraídas de Bianchi que implicam em $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ geram o que se chama vínculos primários, que não são as equações (11), porém representam como Dirac provou que os momenta conjugados a $g_{0\mu}$ se anulam. Elas não se alteram se existirem fontes do campo.

(iiii) As relações (11) são chamadas de vínculos secundários na formulação Hamiltoniana, ou vínculos Hamiltonianos. Elas são obtivamente, alteradas pela presença de fontes, pois são parte das equações de campo. As (10) em presença de fontes são

$$g_{ij,00} = (T_{ij}-M_{ij})\frac{2}{g^{00}} - \frac{1}{g^{00}} g_{ij} T$$

portanto, obviamente, a presença de fontes modifica também o problema de Cauchy para as g_{ij}.

(iiiii) O fato que $g_{0\mu}$ não é uma variável dinâmica através das equações de Einstein, pode ser visto geometricamente como: considere uma transformação de coordenadas que sobre S é a identidade mas que fora de S é arbitrária; por exemplo:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^r,x^0) \quad ,$$

$$\xi^{\mu} = x^0 f(x^r)$$

As equações de Einstein sendo invariantes, sob essa transformação não podem conter variáveis que mudem sob essa transformação sem compensação vinda de outras variáveis. Acontece que $g_{0\mu}$ é uma variável dessa forma pois ela mede um intervalo dx^0 normal a S

$$ds = \sqrt{g_{0\mu}dx^0dx^{\mu}}$$

e, portanto, varia nessa transformação. Assim, tomando-se todo o conjunto ∞ de tais transformações geraremos ∞ conjuntos para $g_{0\mu}$, o que mostra que eles não são variáveis, a serem determinadas via uma lei dinâmica.

A única forma de se evitar isso seria fixar o sistema de coordenadas, tal como por exemplo, pelas condições $g_{0\mu} = \delta^0_{\mu}$. Entretanto, não iremos fazer isso pois isso quebra o prin vidade geral eliminam 4 dados de Cauchy, por exemplo $g_{0\mu}(\vec{x}) = \delta^0_\mu$.

Restam então os dados de Cauchy $f_i(\vec{x})$, $g_i(\vec{x})$ e $h(\vec{x})$, a comparação com a relatividade geral sendo

ELETRODINÂMICA	TEORIA DE EINSTEIN
$\left[A_\mu(\vec{x},x^0)\right]_{x^0=0}, \left[A_{\mu,0}(\vec{x},x^0)\right]_{x^0=0}$ (Dados de Cauchy)	$g_{\mu\nu}(x^r,0)$, $g_{\mu\nu,0}(x^r,0)$
Condição de Gauge elimina um dado de Cauchy: $\phi_{,0}(\vec{x})$	Condição de Gauge elimina 4 dados de Cauchy: $(g_{0\mu}(\vec{x}))$
Restam 7 dados de Cauchy	Restariam 16 dados de Cauchy
$f_i(\vec{x})$, $g_i(\vec{x})$, $h(\vec{x})$	$g_{ij}(\vec{x})$, $g_{ij,0}(\vec{x})$, $g_{\mu 0,0}(\vec{x})$
A variável $h(\vec{x})$ que é essencialmente Gauge variante ainda é presente.	A variável $g_{\mu 0,0}(\vec{x})$ que depende da escolha de coordenadas fora de S é ainda presente.

Das equações $\Box A_\mu = 0$ se tem

$$A_{i,00}(x^r,x^0) = A_{i,kk}(x^r,x^0)$$

$$\phi_{,00}(x^r,x^0) = \phi_{,kk}(x^r,x^0)$$

Cálculos simples dão a solução para ϕ de acordo com o problema de Cauchy

$$\phi(x^r,x^0) = h(x^r) + x^0 f_{i,i}(x^r) + \frac{(x^0)^2}{2} g_{i,i}(x^r) + \frac{(x^0)^3}{6} \nabla^2 f_{i,i}(x^r) + \ldots \tag{17}$$

similarmente para $\vec{A}$

$$A_i(x^r,x^0) = f_i(x^r) + x^0 g_i(x^r) + \frac{(x^0)^2}{2}\nabla^2 f_i(x^r) + $$
$$+ \frac{(x^0)^3}{6}\nabla^2 g_i(x^r) + \ldots \tag{18}$$

Sob transformações de gauge

$$\begin{aligned} A'_i(x^r,x^0) &= A_i(x^r,x^0) + \Lambda_{,i}(x^r,x^0) \\ \phi'(x^r,x^0) &= \phi(x^r,x^0) + \Lambda_{,0}(x^r,x^0) \end{aligned} \tag{19}$$

onde Λ é solução da equação de ondas, $\Box\Lambda = 0$.

Vamos, por analogia com a relatividade geral, tomar Λ tal que

$$\Lambda(x^r,x^0=0) = 0, \quad \text{para todo } x^r \in S \tag{20}$$

então ela é da forma (por expansão em série de potências de x^0)

$$\Lambda(x^r,x^0) = x^0 a(x^r) + \frac{(x^0)^2}{2} b(x^r) + \ldots \tag{21}$$

então, qualquer que seja (x^r,x^0)

$$\Box\Lambda = x^0 a_{,kk} + \frac{(x^0)^2}{2} b_{,kk} - b(\vec{x}) + x^0 c(x^r) + \ldots = 0 \tag{22}$$

em particular para $x^0 \to 0$ (em S) se tem

$$b(\vec{x}) = 0 \ , \ \vec{x} \in S \tag{23}$$

De (20) segue-se que

$$\begin{cases} A'_i(x^r,0) = A_i(x^r,0) \ , & \vec{x} \in S \\ \phi'(x^r,0) = \phi(x^r,0) + a(x^r) \ , & \vec{x} \in S \end{cases} \tag{24}$$

portanto $A_i(x^r,x^0)$ é gauge invariante sobre S e corresponde assim ao $g_{ij}(x^r,x^0)$ da teoria gravitacional. Daí também se vê que

$$\phi(x^r,x^0) \longleftrightarrow g_{0\mu}(x^r,x^0)$$

Pelas definições dos dados de Cauchy se tem por (19) e (24) sobre S:

$$\begin{aligned}
f'_i(\vec{x}) &= f_i(\vec{x}) \\
h'(\vec{x}) &= h(\vec{x}) + a(\vec{x}) \\
g'_i(\vec{x}) &= g_i(\vec{x}) + a_{,i}(\vec{x}) \\
p'(\vec{x}) &= p(\vec{x}) + b(\vec{x}) = \vec{p}(x) \quad \text{(por (23))}
\end{aligned}$$

Logo, sobre $\underline{S}$ $f(\vec{x})$ e $p(\vec{x}) = f_{i,i}(\vec{x})$ são gauge invariantes. Disso se pode decompor $\vec{A}$ e ϕ em duas partes:

$$A_i = A_i^{(I)} + A_i^{(II)} \quad , \quad \phi = \phi^{(I)} + \phi^{(II)}$$

tal que $A_i^{(I)}$ e $\phi^{(I)}$ são gauge invariantes e $A_i^{(II)}$ e $\phi^{(II)}$ são gauge variantes:

$$\left\{\begin{aligned}
A_i^{(I)}(x^r,x^0) &= f_i(\vec{x}) + \frac{(x^0)^2}{2}\nabla^2 f_i(\vec{x}) + \ldots \\
A_i^{(II)}(x^r,x^0) &= x^0 g_i(\vec{x}) + \frac{(x^0)^3}{6}\nabla^2 g_i(\vec{x}) + \ldots \\
\phi^{(I)}(x^r,x^0) &= x^0 f_{i,i}(\vec{x}) + \frac{(x^0)^3}{6}\nabla^2 f_{i,i} + \ldots \\
\phi^{(II)}(x^r,x^0) &= h(\vec{x}) + \frac{(x^0)^2}{2} g_{i,i}(\vec{x}) + \ldots
\end{aligned}\right. \qquad (25)$$

Uma outra forma, que é matematicamente equivalente , para se obter esse resultado e que foi usada por Arnowitt, Deser e Misner para a teoria linearizada de Einstein (com indicações de eventual generalização para a teoria não-linear) é a seguinte: Qualquer campo vetorial pode ser decomposto numa *parte de divergência nula e noutra de rotacional nulo:*

$$\vec{V} = \vec{V}^T + \vec{V}^L$$

$$\begin{cases} V_{i,i}^{T}(x^r,x^0) = 0 \\ \epsilon_{ijk}\, V^L_{j,k}(x^r,x^0) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} V_i^{\,T}(x^r) = V_i(x^r) - \nabla_i \dfrac{1}{\nabla^2}(\nabla\cdot\vec{V}) \\ \qquad\qquad = V_i(x^r) - \dfrac{\partial}{\partial x^i}\displaystyle\int G(\vec{x},\vec{x}')\nabla_{\vec{x}'}\cdot\vec{V}(\vec{x}')d^3x' \\ V_i^{\,L}(x^r) = \nabla_i \dfrac{1}{\nabla^2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\displaystyle\int G(\vec{x},\vec{x}')\nabla_{\vec{x}'}\cdot\vec{V}(\vec{x}')d^3x' \end{cases}$$

onde $G(\vec{x},\vec{x}')$ é a função de Green do Laplaciano. Sob transformações de gauge $A_i' = A_i + \nabla_i\Lambda$ se tem

$$\begin{cases} \vec{A}'^{T}(x^r,x^0) = \vec{A}^T(x^r,x^0) \\ \vec{A}'^{L}(x^r,x^0) = \vec{A}^L(x^r,x^0) + \vec{\nabla}\Lambda(x^r,x^0) \end{cases}$$

portanto

$$\vec{A}^T \longleftrightarrow \vec{A}^{(I)}$$

$$\vec{A}^L \longleftrightarrow \vec{A}^{(II)}$$

Sobre $\underline{S}$ por (25) se tem:

$$\begin{cases} A_i^{(I)}(x^r,0) = A_i^T(x^r,0) \\ A_i^{(II)}(x^r,0) \to 0 \\ \phi^{(I)}(x^r,0) \to 0 \\ \phi^{(II)}(x^r,0) = h(\vec{x}) = \phi^L(x^r,0) \end{cases}$$

Daí se vê que sobre S

$$A_i^{(I)} = A_i^T \longleftrightarrow g_{ij} \in S$$

$$\phi = \phi^L \quad \text{em} \quad S \longleftrightarrow g_{0\mu}$$

A Lagrangeana de Maxwell é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{A}} + \nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2 - \rho\phi + \vec{j}\cdot\vec{A}$$

$$\begin{cases} \vec{p} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \dot{\vec{A}} + \nabla\phi = -\vec{E} \\ \pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 \end{cases}$$

A relação $\pi = 0$ é um vínculo primário, seu aparecimento é devido a que $\mathcal{L}$ é gauge invariante, e com $\dot{\vec{A}}$ se constroi a quantidade gauge invariante $\dot{\vec{A}} + \nabla\phi$ porém com $\dot{\phi}$ só existiria a quantidade gauge invariante $\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}$ que se anula pela condição de Lorentz. Portanto, não existindo nenhuma quantidade gauge invariante formada com $\dot{\phi}$ a $\mathcal{L}$ não pode depender de $\dot{\phi}$. Na teoria de Einstein isso corresponde a

$$\pi^{\mu 0} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Einstein}}}{\partial g_{\mu 0,0}} = 0$$

por raciocínio semelhante com $g_{\mu 0,0}$ não se constroi nenhuma quantidade invariante sob transformações arbitrárias de coordenadas se anulando sobre S, daí L_E não pode depender de $g_{\mu 0,0}$. A densidade Hamiltoniana de Maxwell é

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{A}} - L = \frac{1}{2}\,\vec{p}^2 + \frac{1}{2}\,(\nabla \times \vec{A})^2 - \vec{J}\cdot\vec{A} + \phi\,(\nabla\cdot\vec{p} + \rho)$$

O vínculo $\vec{\pi} = 0$ deve ser mantido no curso do tempo (invariância dinâmica de gauge), daí

$$\dot{\vec{\pi}} = \nabla\cdot\vec{p} + \rho = 0$$

que é o vínculo secundário ou vínculo Hamiltoniano(*). Na teoria de Einstein se tem na formulação de Dirac

$$L_{Dirac} = L_{Einstein} + \text{divergência}$$

tal que existem os vínculos primários (decorrem das identidades de Bianchi)

$$\pi_D^{0\mu} = \frac{\partial L_D}{\partial g_{\mu 0,0}} = 0$$

A Hamiltoniana de Dirac é

$$H_D(t) = \int d^3x\; H_D(x^r, x^0)$$

$$H_D(x) = (g^{00})^{-1/2}\; H_L(x^r, x^0) \;+\; g_{0r}\; H^r\,(x^r, x^0)$$

tal que os vínculos primários são mantidos no decorrer do tempo gerando 4 vínculos secundários:

(*) correspondendo à equação de Maxwell $-\nabla\cdot\vec{E} + \rho = 0$.

$$\dot{\pi}_D^{0\mu} = 0 \longrightarrow \mathcal{H}^r(x^r, x^0) = 0 \quad , \quad \mathcal{H}_L(x^r, x^0) = 0$$

onde

$$\mathcal{H}^r = e^{rs}\left[p^{uv} g_{uv,s} - 2(p^{uv} g_{us})_{,v}\right]$$

$$\mathcal{H}_L = K^{-1}\left[p^{rs} p_{rs} - \frac{1}{2} p_r{}^r p_s{}^s\right] + K e^{rs} S_{rs}$$

$$p^{rs} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial g_{rs,0}} \quad , \qquad e^{rs} g_{sk} = \delta_k^r$$

Índices são erguidos com e^{rs} (tri-geometria) e S_{rs} é o tensor de Ricci da geometria tridimensional

$$S_{rs} = \Gamma^{\ell}_{rs,\ell} - \Gamma^{\ell}_{r\ell,s} + \Gamma^{\ell}_{rs}\,\Gamma^{v}_{\ell v} - \Gamma^{v}_{r\ell}\,\Gamma^{\ell}_{sv}$$

$$\Gamma^{\mu}_{kv} = \frac{1}{2} e^{us} \left(g_{sk,v} + g_{sv,k} - g_{kv,s}\right)$$

Os vínculos secundários $\mathcal{H}^r = 0$, $\mathcal{H}_L = 0$ correspondem às 4 equações de Einstein $G_{\mu 0} = 0$. As seis equações restantes, $G_{ij} = 0$ são 6 equações de propagação para os 6 $g_{ij}(x^r, x^0)$ porém elas contêm coeficientes arbitrários (g^{00} e g_{0r}):

$$g_{ij}\,(x^r, x^0) = \left[g_{ij}(x^r, x^0), H_D(x^0)\right]$$

portanto, tão pouco está univocamente fixada a propagação temporal dos g_{ij}. Necessita-se impôr condições de coordenada.

Na eletrodinâmica a introdução de variáveis transversais elimina o vínculo secundário:

$$\nabla \cdot \vec{p}^{T} = 0$$

se $\rho = 0$ ele já não aparece em H_{Maxwell}; se $\rho \neq 0$, se tem $\nabla.\vec{p}_L = -\rho$, dando

$$\vec{p}_L = -\nabla(\frac{1}{\nabla^2}\,\rho)$$

Na região onde não há cargas (campo livre de radiação) se tem H_{Maxwell} em termos unicamente das variáveis transversais pois aí $\vec{p}_L \to \theta$,

$$H_M = \frac{1}{2}\,\vec{p}_T^{\,2} + \frac{1}{2}\,(\nabla \times \vec{A}^T) = \text{densidade de energia}$$

daí, a dinâmica é via $\vec{p}_T$, $\vec{A}^T$ e os PB canônicos devem ser re-escritos em termos de $[\vec{p}_T,\vec{A}^T]$ que serão os PB modificados , adequados para a quantização.

A parte restante de $\vec{A}$, ou seja $\vec{A}_L$ que fica arbitrária é fixada por escolha de gauge, como por exemplo fazendo

$$\vec{A}_L' = 0 \longrightarrow \vec{A}_L - \nabla\Lambda = \theta \quad .$$

Tal método se aplica na teoria linearizada de Einstein via quantidades $g_{ij}{}^{TT}$, p^{ijTT} que são tensores de Lorentz gauge invariantes sob a gauge de spin 2. Porém existem dificuldades na generalização para a teoria completa não linear pois aí já não poderemos definir coerentemente variáveis tipo T.

8 - *LEIS DE CONSERVAÇÃO E RADIAÇÃO GRAVITACIONAL*

Nessa sessão vamos considerar dois problemas básicos da teoria de Einstein do campo de gravitação, quais sejam as leis de conservação e a radiação gravitacional. Vamos analisar em separado cada um deles.

(a) Leis de Conservação — Equações de Continuidade em Relatividade Geral

Retornando ao teorema de Noether geral tratado antes, temos a identidade

$$L^A \,\overline{\delta} y_A + \overline{\delta} t^i_{\ ,i} \equiv 0 \qquad (1)$$

onde

$$\overline{\delta} y_A = \varepsilon^\nu(x)\eta_{A\nu}(x) - \varepsilon^\nu_{\ ,i}(x)\gamma^i_{A\nu}(x)$$

que no presente caso é gerada pela transformação de coordenadas no espaço de Riemann: $y_A \to g_{\mu\nu}$

$$\delta x^i = \varepsilon^\nu(x)\ \xi^i_\nu(x) = \varepsilon^\nu(x)$$

ou seja, faz-se $i \to \nu$ e $\xi^i_\nu \to \delta^\sigma_\nu$.

De (1) vem

$$L^A(\varepsilon^\nu \eta_{A\nu} - \varepsilon^\nu_{\ ,\alpha}\gamma^\alpha_{A\nu}) + \overline{\delta} t^\mu_{\ ,\mu} = 0 \qquad (2)$$

Usando a identidade de Bianchi proveniente do teorema de Noether:

$$L^A \eta_{A\nu} + (L^A \gamma^\mu_{A\mu})_{,\mu} \equiv 0 \qquad (3)$$

tem-se:

$$L^A \eta_{A\nu} \equiv -(L^A \gamma^{\mu}_{A\nu})_{,\mu}$$

substituindo em (2) obtém-se,

$$-\varepsilon^{\nu}(L^A \gamma^{\mu}_{A\nu})_{,\mu} - \varepsilon^{\nu}_{,\alpha}\gamma^{\alpha}_{A\nu}L^A + \overline{\delta}t^{\mu}_{,\mu} = 0 \tag{4}$$

ou seja,

$$\Xi^{\mu}_{,\mu} \equiv 0 \tag{5}$$

com

$$\Xi^{\mu} = \overline{\delta}t^{\mu} - \varepsilon^{\nu}L^A\gamma^{\mu}_{A\nu} \tag{6}$$

De (5) decorre que

$$\Xi^{\mu} \equiv U^{\boxed{\mu\sigma}}{}_{,\sigma}$$

e portanto,

$$U^{\boxed{\mu\sigma}}{}_{,\sigma} = \overline{\delta}t^{\mu} - \varepsilon^{\nu}L^A\gamma^{\mu}_{A\nu} \tag{7}$$

A quantidade $U^{\boxed{\mu\sigma}}$ é chamada de super-potencial. Historicamente, o 1º super-potencial foi introduzido por Freud (P. von Freud - Ann. Math. <u>40</u>, 417 (1939)) em conexão com o pseudo-tensor de Einstein.

O que existe de mais análogo à uma lei fraca de conservação de energia e momentum do campo gravitacional isolado é obtida em (5), (6) fazendo $L^A = 0$:

$$\Xi^{\mu}_{,\mu} = \overline{\delta}t^{\mu}_{,\mu} = 0 \tag{8}$$

recordando que $\overline{\delta}t^{\mu}$ tem a forma

$$\overline{\delta}t^{\mu} = \sqrt{-g}\left[\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta,\mu}} - \partial^{\lambda}\left(\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta,\lambda\mu}}\right)\right]\overline{\delta}g_{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\,\frac{\partial R}{\partial g_{\alpha\beta,\mu\nu}}\,\overline{\delta}g_{\alpha\beta,\mu\nu} +$$

$$+ \sqrt{-g}\, R\, \varepsilon^{\mu}$$

Pode-se provar (A. Komar - Phys. Rev. 113, 934 (1959)) que (8) assume a forma

$$\overline{\delta} t^{\mu}_{\ ,\mu} = \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \left(g^{\sigma\nu}\varepsilon^{\mu}_{;\nu} - g^{\mu\nu}\varepsilon^{\sigma}_{;\nu}\right)_{,\sigma\mu} \right\} \tag{9}$$

Entretanto isso não implica numa lei verdadeira de conservação de uma quantidade física, pois $\overline{\delta} t^{\mu}$ depende das funções arbitrárias $\varepsilon^{\mu}(x)$. De (9) vem que o super-potencial canônico (proveniente do princípio variacional) é

$$U^{[\mu\sigma]} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \left(g^{\sigma\nu}\varepsilon^{\mu}_{;\nu} - g^{\mu\nu}\varepsilon^{\sigma}_{;\nu}\right) \tag{10}$$

As quantidades $\overline{\delta} t^{\mu}$ e $U^{[\mu\sigma]}$ não são também univocamente determinadas pois

$$\begin{cases} \overline{\delta} t'^{\mu} = \overline{\delta} t^{\mu} + V^{[\mu\sigma]}_{\ \ ,\sigma} \\ U'^{[\mu\sigma]} = U^{[\mu\sigma]} + V^{[\mu\sigma]} \end{cases} \tag{11}$$

são tão adequadas quanto as originais. Por escolhas apropriadas de $\varepsilon^{\nu}(x)$ e $V^{[\mu\sigma]}(x)$ poderemos obter vários pseudo-tensores de "Momentum-Energia" e seus correspondentes super-potenciais.

Como exemplo, impondo-se as condições de coordenadas

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = 0$$

para fixar as $\varepsilon^{\mu}(x)$, temos que enfraquecer o grupo arbitrário de transformações de coordenadas, pois essa relação não é covariante sob transformações arbitrárias de coordenadas, porém claramente é invariante sob transformações lineares tipo Lorentz. Tomando então

$$\varepsilon^{\mu} = a^{\mu} = \text{constantes}$$

que é parte do grupo de Poincaré, tem-se:

$$\varepsilon^{\mu}_{;\nu} = \{^{\mu}_{\nu\alpha}\}\, a^{\alpha}$$

e obteremos o super-potencial de Möller por (10):

$$U^{\boxed{\mu\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\,(g^{\sigma\nu}\{^{\mu}_{\nu\alpha}\} - g^{\mu\nu}\{^{\sigma}_{\nu\alpha}\})a^{\alpha}$$

$$= a^{\alpha}\ {}_{M}U_{\alpha}^{\boxed{\mu\sigma}}$$

associado ao pseudo-tensor ${}_{M}t^{\mu}{}_{\alpha}$ de Möller

$$\bar{\delta}t^{\mu} = a^{\alpha}\ {}_{M}t^{\mu}{}_{\alpha}$$

$${}_{M}t^{\mu}{}_{\alpha} = \left[\frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\,(g^{\sigma\nu}\{^{\mu}_{\nu\alpha}\} - g^{\mu\nu}\{^{\sigma}_{\nu\alpha}\})\right]_{,\sigma}$$

Observa-se que ${}_{M}t^{\mu}{}_{\alpha}$ depende de $g^{\mu\nu}$, $\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}$ e $\partial^{2}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}$ portanto não se anula localmente.

Outras possíveis escolhas são:

(1) Einstein: pseudo-tensor

$$\sqrt{-g}\ {}_{E}t_{\nu}{}^{\mu} = -\,\delta^{\mu}_{\nu}\,L' + g_{\rho\sigma,\nu}\,\frac{\partial L'}{\partial g_{\rho\sigma,\mu}}$$

onde L' é a densidade Lagrangeana reduzida dependente só de $(g_{\mu\nu}, \partial_{\alpha}g_{\mu\nu})$.

Von Freud provou que o super-potencial associado a

${}_E t_\nu{}^\mu$ é (ver citação anterior)

$$2\kappa \sqrt{-g}\ {}_F U_\nu^{[\mu\rho]} = g_{\nu\sigma}\ (g(g^{\mu\sigma}g^{\rho\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\rho\sigma}))_{,\lambda}$$

ou seja,

$${}_E t_\nu{}^\mu = {}_F U_\nu^{[\mu\rho]}{}_{,\rho}$$

O pseudo-tensor ${}_E t_\nu{}^\mu$ depende só de $g_{\mu\nu}$ e $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$ e pode, portanto, ser feito zero localmente por escolha de coordenadas.

Por outro lado, ${}_M t_\nu{}^\mu$ é livre dessa dificuldade e se mostra que os super-potenciais estão relacionados por

$${}_M U_\mu^{[\nu\sigma]} = 2\,{}_F U_\mu^{[\nu\sigma]} - \delta_\nu^\mu\ \ {}_F U_\rho^{[\rho\sigma]} + \delta_\mu^\sigma\ \ {}_F U_\rho^{[\rho\nu]}$$

(2) Pseudo-tensor de Landau-Lifschitz

$${}_L t^{\mu\nu} = {}_L U^{\mu[\nu\sigma]}{}_{,\sigma} - \text{ também função de } g_{\mu\nu} \text{ e } \partial_\alpha g_{\mu\nu}$$

$${}_L U^{\mu[\nu\sigma]}{}_{,\sigma} = \sqrt{-g}\ g^{\mu\rho}\ {}_F U_\rho^{[\nu\sigma]}{}_{,\sigma}$$

Para referência sobre outros pseudo-tensores ver: J.N. Goldberger - P.Rev. <u>111</u>, 315 (1958); P. G. Bergmann - P.Rev. <u>112</u>, 287 (1958).

Como o que deveria ser conservado em cada caso é o quadrimomentum total do campo+fontes, deve-se obter equações implicando nisso em cada uma das situações vistas antes para os pseudo-tensores $t_\mu{}^\nu$ do campo gravitacional. Vamos mostrar, sucintamente, como se faz isso para o pseudo-tensor de Landau:

Partindo de:

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(T^{\mu}{}_{\nu}\sqrt{-g})}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\nu}} T^{\rho\sigma} = 0$$

que não exprime, tal como está, nenhuma lei de conservação. Mapeando para um sistema localmente geodésico ($\partial_{\sigma}g^{\mu\nu} \to 0$ localmente) se tem um análogo de lei de conservação:

$$\frac{\partial T^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

Usando as equações de campo

$$T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)$$

e a expressão de $R^{\mu\nu}$ no sistema localmente geodésico, se obtem

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left[\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})\right]\right]$$

Logo, o superpotencial de Landau nesse sistema de coordenadas é:

$${}_{L}U^{\mu\boxed{\nu\sigma}} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})\right]$$

ou seja,

$$(-g)T^{\mu\nu} = {}_{L}U^{\mu\boxed{\nu\sigma}}{}_{,\sigma} \qquad (12)$$

Indo de volta para um sistema arbitrário de coordenadas se deve ter em lugar de (12) a equação

$$(-g)(T^{\mu\nu} + {}_{L}t^{\mu\nu}) = {}_{L}U^{\mu\boxed{\nu\sigma}}{}_{,\sigma} \tag{13}$$

onde se observa que necessariamente ${}_{L}t^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}, \{^{\alpha}_{\beta\gamma}\})$ para se ter (12) e portanto, ${}_{L}t^{\mu\nu}$ é um pseudo-tensor. Para calcular seu valor usamos o mesmo processo anterior de trabalhar com as equações

$$T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}R\right)$$

agora envolvendo todos os termos no lado direito, e chega-se ao resultado escrito na pag. 318 do livro de Landau – Lifschitz (Classical Theory of Fields).

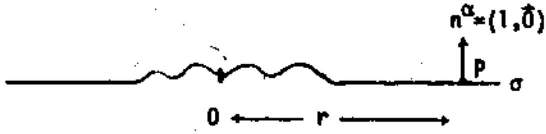
Assim, em geral, qualquer que seja o pseudo-tensor do campo de gravitação, se usa equações de "conservação" da forma global (matéria+campo):

$$\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu} = \sqrt{-g}\,(T_{\mu}{}^{\nu} + t_{\mu}{}^{\nu}) = U_{\mu}{}^{\boxed{\nu\sigma}}{}_{,\sigma}$$

Finalmente se observa que localmente não existe uma forma unívoca de se expressar a lei total de conservação de momentum e energia do sistema campo gravitacional+fontes , pois existem infinitas escolhas de pseudo-tensores da gravitação. Isso em parte está relacionado ao fato que R_4 não possue, em geral, a simetria chata de translações necessária a uma formulação de conservação de quadrimomentum.

(a') <u>Quantidades globalmente conservadas para variedades que possuem vetores de Killing assintóticos</u>

Considere uma hipersuperfície espacial que é assinto ticamente paralela à uma hipersuperfície x^0 = constante.



Em torno do ponto P, assintoticamente, podemos mape ar a métrica na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0\ (\tfrac{1}{r})$$

A equação de Killing nessa região assume a forma

$$\eta_{\mu\rho}\xi^\rho{}_{,\nu} + \eta_{\rho\nu}\xi^\rho{}_{,\mu} + 0(\tfrac{1}{r}) = 0$$

suas soluções são do tipo chato em 1ª ordem

$$\xi^\rho = \xi^\rho_P + 0\ (\tfrac{1}{r})$$

$$\xi^\rho_P = \epsilon^\rho{}_\lambda x^\lambda + \epsilon^\rho$$

Nesse caso teremos para o super-potencial associado ao vetor de Killing ξ^ρ_P (até a ordem $1/r$):

$$\xi_P U^{[\mu\sigma]} = \epsilon^\alpha{}_\lambda U_\alpha{}^{[\mu\sigma]\lambda} + \epsilon^\alpha U_\alpha{}^{[\mu\sigma]}$$

onde

$$\xi_P U^{[\mu\sigma]} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\ (g^{\sigma\nu}\xi_P{}^\mu{}_{;\mu} - g^{\mu\nu}\xi_P{}^\sigma{}_{;\nu})$$

$$\xi_P{}^\mu{}_{;\nu} = \epsilon^\mu{}_\nu + \{{}^{\mu}_{\nu\lambda}\}\ \epsilon^\lambda{}_\alpha x^\alpha + \{{}^{\mu}_{\nu\lambda}\}\ \epsilon^\lambda$$

daí

$$U_\lambda{}^{\boxed{\mu\sigma}\alpha} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\left[g^{\sigma\nu}(\delta^\mu_\lambda\delta^\alpha_\nu + \{{}^{\mu}_{\nu\lambda}\}\, x^\alpha) - g^{\mu\nu}(\delta^\sigma_\lambda\delta^\alpha_\nu + \{{}^{\sigma}_{\nu\lambda}\}x^\alpha)\right] \quad (14)$$

$$U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\left[g^{\sigma\nu}\{{}^{\mu}_{\nu\alpha}\} - g^{\mu\nu}\{{}^{\sigma}_{\nu\alpha}\}\right] \quad (15)$$

Considere a integral

$$P = \int_\sigma \xi_p U^{\boxed{\mu\sigma}}{}_{,\sigma}\, d\sigma_\mu = \varepsilon^\alpha{}_\lambda\, I^\lambda{}_\alpha + \varepsilon^\alpha J_\alpha$$

onde

$$I^\lambda{}_\alpha = \int_\sigma (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu \quad (16)$$

$$J_\alpha = \int_\sigma (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu \quad (17)$$

Pelo teorema de Gauss

$$\oint (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu = \int_\Omega (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma\mu}\, d^4x = 0$$

como o campo métrico no infinito espacial tende a $\eta_{\mu\nu}$ teremos por (14)

$$U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda}\Big|_\infty \to \eta^{\sigma\alpha}\delta^\mu_\lambda - \eta^{\mu\alpha}\delta^\sigma_\lambda$$

que é constante, logo,

$$(U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\Big|_\infty \to 0$$

portanto,

$$\oint (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu = 0$$

implica em

$$\int_{\sigma_1} (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu = \int_{\sigma_2} (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu$$

portanto

$$\int_{\sigma} (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d\sigma_\mu$$

independente da hipersuperfície escolhida para calcular essa integral, portanto tomando em particular $\sigma = x^0$ constante, vem

$$\frac{d}{dx^0} \int_V (U_\alpha{}^{\boxed{o\sigma}\lambda})_{,\sigma}\, d^3x = \theta$$

Similarmente

$$\frac{d}{dx^0} \int (U_\alpha{}^{\boxed{o\sigma}})_{,\sigma}\, d^3x = \frac{d}{dx^0} \int_V t^0{}_\alpha\, d^3x = 0$$

que corresponde às leis assintóticas de conservação do tensor de Momentum-Angular e do quadrimomentum totais dentro do volume V ocupado pelo campo.

As correspondentes densidades são

$$t^\mu{}_\alpha = (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}})_{,\sigma} = \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \left(g^{\sigma\nu}\{{}^{\mu}_{\nu\alpha}\} - g^{\mu\nu}\{{}^{\sigma}_{\nu\alpha}\}\right)\right\}_{,\sigma}$$

$$M_\alpha{}^{\mu\lambda} = (U_\alpha{}^{\boxed{\mu\sigma}\lambda})_{,\sigma} = \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{} \left(g^{\sigma\lambda}\delta^\mu_\alpha - g^{\mu\lambda}\delta^\sigma_\alpha + g^{\sigma\nu}\{{}^{\mu}_{\nu\alpha}\}x^\lambda - g^{\mu\nu}\{{}^{\sigma}_{\nu\alpha}\}\, x^\lambda\right)\right\}_{,\sigma}$$

Tem-se então assintoticamente leis usuais de conservação, pois aí R_4 apresenta as simetrias de M_4. O fato que $t^{\mu}{}_{\alpha}$ e $M_{\alpha}{}^{\mu\lambda}$ são pseudo-tensores deixa de ter relevância pois nessa região pseudo-tensores são idênticos a tensores.

(b) Radiação Gravitacional

Campos eletromagnéticos de radiação são campos nulos no sentido que seus dois invariantes de Lorentz se anulam

$$I_1 = \eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 0$$

$$I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 0$$

O campo gravitacional possue em geral, quatro invariantes da curvatura, dois deles quadráticos no tensor de Riemann e dois cúbicos. Vamos denotá-los por J_A ($A = 1,\ldots,4$). Na classificação de Petrov, se todos os J_A se anulam, então a geometria $g_{\mu\nu}$ é de um campo gravitacional de radiação.

O fato de que todos os invariantes se anulam simultaneamente é característico do campo de radiação, por exemplo, no caso eletromagnético

$$\begin{cases} \Box A_{\mu} = 0 \\ A_{\mu}{}^{,\mu} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A_{\mu} = \overset{o}{A}_{\mu}\, e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} \\ k^2 = 0 \quad , \quad k^{\alpha}A_{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$F_{\mu\nu} = k_{\nu}A_{\mu} - k_{\mu}A_{\nu}$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (k_{\nu}A_{\mu}-k_{\mu}A_{\nu})(k^{\nu}A^{\mu}-k^{\mu}A^{\nu}) = 0$$

similarmente, I_2 vai ser nulo.

Diversas soluções exatas das equações de Einstein do tipo N são conhecidas:

H. Brinckmann - Math. Ann. 94, 119 (1925)

N. Rosen - Phys., Z. Sowjet - 12, 366 (1937)

I. Robinson - 1956

Na discussão do problema da radiação gravitacional , se usa os conhecimentos que obtemos do mesmo problema em ele - tromagnetismo, mas infelizmente, a teoria da radiação gravitacional se difere em diversos sentidos da teoria eletromagnética correspondente, de forma que essa analogia é significativamente reduzida. Assim, no tocante à interação da radiação com as fontes, ondas eletromagnéticas têm origem nas cargas mas elas não transportam cargas para fora das fontes, enquanto que ondas gravitacionais têm origem na matéria e transportam matéria para fora das fontes, pois levam energia para fora das fontes. Entretanto, se nos restringirmos a ondas planas na zona de radiação não teremos esse problema pois estamos longe das fontes. É interessante fazer um resumo do problema de ondas planas eletromagnéticas: as equações de Maxwell

$$\eta^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}F_{\mu\nu} = 0$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\sigma}F_{\nu\rho} = 0$$

têm soluções

$$F_{\mu\nu} = \overset{0}{F}_{\mu\nu}\, e^{ik.x} \qquad (18)$$

$$k^{\mu}\overset{0}{F}_{\mu\nu} = 0 \qquad (19)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_{\sigma}\overset{0}{F}_{\nu\rho} = 0 \qquad (20)$$

(19) e (20) são lineares e homogêneas em k^{μ} e $\overset{0}{F}_{\mu\nu}$ e prova-se

que elas possuem soluções não triviais para $\overset{o}{F}_{\mu\nu}$ somente se forem satisfeitas as condições

$$\begin{cases} \overset{o}{F}_{\mu\nu}\overset{o}{F}^{\mu\nu} = 0 \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overset{o}{F}_{\mu\nu}\overset{o}{F}_{\rho\sigma} = 0 \\ k^2 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

De fato, em (19) e (20) k^μ poderia ser, em princípio, de três tipos:

(i) temporal

(ii) espacial

(iii) nulo

Caso (i): podemos escolher um referencial tal que $k^\mu = (k^0, 0)$ e se prova diretamente de (19) e (20) que

$$\overset{o}{F}_{\mu\nu} = 0$$

que é uma solução trivial sem interesse.

Caso (ii): existem transformações de Lorentz que levam k^μ à forma: $k^\mu = (0, \vec{k})$. Escolhendo eixos espaciais tais que $k'_2 = k'_3 = 0$ e substituindo em (19) e (20), obtém-se $\overset{o}{F}_{\mu\nu} = 0$.

Caso (iii): existem transformações de Lorentz que levam k_μ à forma $k_\mu = (k_0, k_1, 0, 0)$ com $k_1 = \pm k_0$, e nesse caso, (19) e (20) terão soluções não triviais que satisfazem às condições (21). Por uma transformação de Lorentz, conduzimos k_μ à forma geral proém (21) por serem invariantes, serão válidas em qualquer referencial inercial.

A equação (20) pode ser re-escrita como

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,(k_\sigma \overset{0}{F}_{\nu\rho} - k_\nu \overset{0}{F}_{\sigma\rho}) = 0$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,(\overset{0}{F}_{\rho\nu} k_\sigma - \overset{0}{F}_{\rho\sigma} k_\nu) = 0$$

eqüivalentemente podemos escrever em seu lugar as equações

$$F_{\rho[\nu}\, k_{\sigma]} = 0 \tag{22}$$

pois a diferença entre $\overset{0}{F}$ e F é meramente uma fase.

Campos nulos eletromagnéticos em M_4 satisfazem (19) e (22). Por analogia, definimos campos gravitacionais nulos em relatividade geral, na zona de radiação, pelas condições:

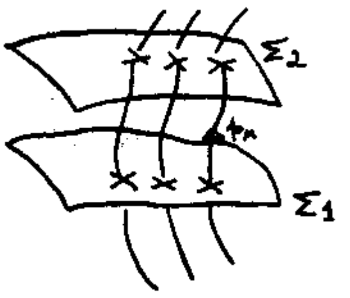
$$\text{(i)} \quad J_A = 0 \quad , \quad G_{\mu\nu} = 0 \tag{23}$$

(ii) existe uma congruência de vetores nulos k_μ tais que

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\, k_\mu = 0 \tag{24}$$

$$R_{\mu\nu[\rho\sigma}\, k_{\lambda]} = 0 \tag{25}$$

As (24) e (25) correspondem as (19) e (22). Em adição, o tensor de Riemann sofre descontinuidades somente através de superfícies nulas que representa a propagação de uma singularidade



$(p^\mu p_\mu = 0)$

da geometria ao longo das normais às hipersuperfícies Σ.

Geodésicas Nulas

O conceito de geodésica nula, associado à propagação da singularidade da geometria associada ao campo de radiação longe das fontes, será aqui tratado de forma resumida. Seja a hipersuperfície $\sigma(x^{\alpha})$ = constante, então

$$d\sigma = \sigma_{,\mu}\, dx^{\mu} = 0$$

tome a normal a essa hipersuperfície como sendo um vetor nulo:

$$k_{\mu} = \sigma_{,\mu} \tag{26}$$

$$k^{2} = 0 \tag{27}$$

De (26) vem: (devido a que os símbolos de Christoffel são simétricos)

$$k_{\mu;\nu} = (\sigma_{,\mu})_{;\nu} = (\sigma_{,\nu})_{;\mu} = k_{\nu;\mu} \tag{28}$$

De (27) temos

$$k_{\mu;\nu}k^{\mu} + k_{\mu}k^{\mu}_{;\nu} = 0$$

por (28) isso vale

$$k_{\nu;\mu}k^{\mu} + k_{\mu}k^{\mu}_{;\nu} = 0 \tag{29}$$

use que $g^{\mu\alpha}_{;\nu} = 0$ para escrever o último termo dessa equação como

$$k_{\mu}g^{\mu\alpha}k_{\alpha;\nu} = k^{\alpha}k_{\alpha;\nu} = k^{\alpha}k_{\nu;\alpha}$$

Portanto, (29) fica simplesmente

$$k^{\mu}k_{\nu;\mu} = 0$$

erguendo o índice $\underline{\nu}$ teremos

$$k^{\mu}k^{\nu}_{;\mu} = 0 \qquad (30)$$

As equações (27) e (30) descrevem a congruência de geodésicas nulas dessa geometria.

Aproximação do Campo Fraco Radiante

Soluções exatas representando radiação foram citadas antes e não serão consideradas devido ao pouco tempo disponível para esse curso. Entretanto, soluções aproximadas podem ser discutidas de modo resumido. Einstein foi a primeira pessoa que discutiu a possibilidade de existência de radiação gravitacional (A. Einstein - Sb. Preuss. Ak. Wiss. 154 (1918)) na aproximação do campo fraco. Na discussão desse fenômeno aparecem logo dificuldades que devem ser resolvidas: Se se deseja observar efeitos de radiação gravitacional na teoria da relatividade geral, deve-se ter:

(i) Um processo de se medir fluxo de energia radiando para fora da fonte.

(ii) Consequentemente deve-se ter uma equação tipo continuidade $t^{\mu}_{,\mu} = 0$ que dê

$$\frac{d}{dx^0}\int_V t^0 dV + \oint_S t^r n_r dS = 0$$

(iii) Entretanto $t^{\mu}_{,\mu} = 0$ não é uma forma covariante, e portan to tal medida dependerá da escolha de referencial. Paralelamente, as integrais representando o "fluxo de energia" em geral irão depender da geometria da superfície S que em relatividade geral é um elemento dinâmico, e isso implica que o "fluxo" não é bem definido pois irá variar com S e não somente com $\frac{d}{dx^0} \int_V t^0 \, dV$.

Segue-se então que devemos tomar modelos simples para campos gravitacionais radiantes que gerem geometrias tais que esses problemas não apareçam. Um desses modelos é o campo fraco que possue os vetores de Killing do espaço chato e métrica $\eta_{\mu\nu}$ dada, nessa geometria (Minkowski) existe trivialmente, hipersuperfícies x^0 = constante, ou sejam: volumes V (seções , ou partes finitas da hipersuperfície x^0 = constante) e seus contornos S fixos. Outra possibilidade é tomar para campos fortes a região assintótica onde ele é aproximadamente fraco. O próximo passo é definir t^μ. Einstein para isso usou o pseudo - -tensor (aqui um tensor pois estamos na aproximação do campo fraco) ${}_E t_\nu{}^\mu$ e fez:

(a) Resolveu as equações de campo linearizadas na Gauge Harmônica de coordenadas:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}\gamma$$

$$\eta^{\lambda\nu}\gamma_{\mu\lambda,\nu} = 0$$

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = \kappa \, T_{\mu\nu} \, (\vec{x}, x^0)$$

(b) Expandiu a solução $\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}, \tilde{x}^0)$ em série de multipolos, onde $\tilde{x}^0 = x^0 - \frac{r}{c}$ corresponde à solução retardada das equações de onda não-homogêneas.

(c) Substituir essas componentes na expressão do tensor ${}_E t_\nu{}^\mu$ e calculou

$$E = \int_V {}_E t_0{}^0 \, dV = f(t)$$

e obteve

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{k}{45c^5} \left(\frac{d^3Q_{rs}}{dt^3}\right) \left(\frac{d^3Q_{uv}}{dt^3}\right) \delta_{vs} \, \delta_{ur}$$

onde Q_{rs} é o momento de quadrupolo da fonte

$$Q_{rs} = \int_V \rho \, (\vec{x}, x^0 - \frac{r}{c}) \, (3x^r x^s - r^2 \delta^{rs}) \, dV \quad ,$$

daí segue-se:

(i) O valor numérico dessa perda de energia pela fonte, mesmo para objetos astronômicos, é muito pequeno, tão pequeno que seu efeito sobre o movimento desses corpos mesmo em intervalos de tempo cósmico é negligível — para estrelas duplas (que têm momento de quadrupolo) a perda de energia em um ano é $\sim 10^{-12}$ de sua energia total).

(ii) O fator de perda de energia gravitacional por radiação é proporcional a $1/c^5$, em contraste, o mesmo fator em eletromagnetismo é proporcional a $1/c^3$ — isso implica que para um sistema de corpos num campo gravitacional existe uma Lagrangeana que descreve o movimento self-acoplado do sistema até a ordem

$(v/c)^4$, em contraste, em eletromagnetismo a Lagrangeana existe até a ordem v^2/c^2 pois a partir daí o sistema irradia energia ($\partial L/\partial t \neq 0$) e já não forma um sistema fechado. Em ordens superiores a v^2/c^2 (v^5/c^5) deve-se formar a Lagrangeana para o sistema cargas (massas) e campo de radiação eletromagnético(gravitacional).

(iii) Eddington calculou a energia irradiada por uma barra em rotação e achou

$$P = \frac{32}{5} \frac{kI^2\omega^6}{c^5}$$

I é o momento de inércia da barra. Se seu comprimento é 1 m e ela gira tão rápido quanto possível para não gerar stresses internos, radiará 10^{-30} ergs/seg , que é um valor demasiadamente pequeno.

(iiii) Para poder se observar efeitos de radiação gravitacional, deve-se,portanto, ter corpos muito pesados, acelerados, na escala astronômica e que possuam momento de quadrupolo.

Condições Assintóticas para Radiação Gravitacional

Se o campo não é fraco, ainda podemos usar métodos assintóticos para discutir a radiação gravitacional. A primeira contribuição importante nesse sentido, foi feita por Trautman (Bull. Ac. Polon. Sci. 6, 403 (1958)). Ele supõe que o campo gravitacional radiante define um escalar $\mu(x)$ tal que $u(x)$ = constante é uma hipersuperfície nula. Então $k_\mu = u_{,\mu}$ é um vetor nulo e é usado para definir uma congruência de geodésicas nulas.

Assintoticamente, existe um mapeamento tal que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu}\ (\tfrac{1}{r}) \qquad (31)$$

a quantidade

$$\lambda^{*}_{\mu\nu} = \lambda_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\ \lambda$$

por decorrência das equações de campo satisfaz à equação de ondas na ordem (1/r), e às condições de gauge

$$\Box\lambda^{*}_{\mu\nu} = 0(\tfrac{1}{r^2})\ ,\ \lambda^{*}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0\ (\tfrac{1}{r^2})$$

A equação de ondas implica que na ordem (1/r) as derivadas são obtidas multiplicando-se as funções pelo vetor nulo k_μ:

$$g_{\mu\nu,\rho} = \lambda_{\mu\nu,\rho} + 0\ (\tfrac{1}{r^2}) = i_{\mu\nu}k_\rho + 0\ (\tfrac{1}{r^2}) \qquad (32)$$

por exemplo, se:

$$\lambda_{\mu\nu} = \overset{o}{\lambda}_{\mu\nu}\ \frac{e^{ik.x}}{r}$$

$$\lambda_{\mu\nu,\rho} = ik_\rho\overset{o}{\lambda}_{\mu\nu}\ \frac{e^{ikx}}{r} + 0\ (\tfrac{1}{r^2}) = i_{\mu\nu}k_\rho + 0\ (\tfrac{1}{r^2}) \quad .$$

Com (31) e (32) calcula-se o pseudo-tensor de Einstein na região assintótica

$${}_{E}t_{\nu}{}^{\mu} = t\ k^{\mu}\ k_{\nu} + 0\ (\tfrac{1}{r^3})$$

onde

$$t = \frac{1}{32\pi k}\ i^{\mu\nu}(i_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}i_{\rho\sigma}) = 0\ (\tfrac{1}{r^2}) \quad ,$$

pois, por (32) $i_{\mu\nu} = i_{\mu\nu}(\frac{1}{r})$. Uma integral de superfície de ${}_E t_0{}^r$ do tipo anterior, será finita e representará o fluxo de energia de acordo com os resultados vistos antes. Cornish (Proc. Roy. Soc. (London) A282, 358 (1964)) mostrou que o valor dessa integral é insensitivo em relação ao tipo de pseudo-tensor usado, desde que as condições de contorno (31), (32) e a gauge de radiação na ordem $(\frac{1}{r})$ $(\lambda^{*}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0(\frac{1}{r^2}))$ sejam satisfeitas.

Portanto, esse é um método para se ter teoricamente valores adequados para fluxo de energia radiante na região assintótica em relação às fontes.

Prova-se ainda que na ordem $(\frac{1}{r})$ as condições de Trautman implicam num tensor de Riemann do tipo radiante, visto antes (ondas planas gravitacionais):

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}k^{\mu} = 0\ (\frac{1}{r^2})$$

$$R_{\mu\nu[\rho\sigma}k_{\lambda]} = 0\ (\frac{1}{r^2})$$

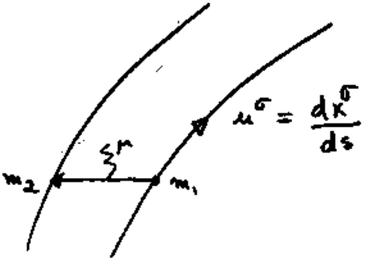
Para finalizar esse resumo sobre radiação gravitacional, nota-se que teoricamente pode-se predizer um fluxo de energia radiante na região assintótica(*), ou então o fluxo correspondente emitido por campos radiantes fracos perto das fontes. Em cada caso tem-se o problema que a energia emitida é muito pequena (para massas astronômicas usuais) para poder ser observada dentro dos padrões convencionais.

Como última informação, falamos brevemente no proces

(*) (onde o conceito de energia e momentum do campo gravitacional é bem definido).

so de absorção dessas ondas; esse é um efeito de curvatura gerado pela equação do desvio geodésico

$$\frac{\partial \xi^{\mu}}{\delta S^{2}} + R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \frac{dx^{\mu}}{dS} \frac{\partial x^{\rho}}{\delta S} \frac{dx^{\sigma}}{dS} = 0$$



$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ gera um "desvio" entre duas geodésicas vizinhas de acordo com essa equação, dado por: $\xi^{\mu} = \delta x^{\rho}/\delta S$. Se m_1, m_2 são partes de uma "antena" para medir essa radiação, e formam um meio elástico, eles entram em vibração ao detectar a onda gravitacional e transformam a energia gravitacional da onda em energia de vibração do corpo elástico. Weber usa quartzo piezoelétrico para medir essas vibrações em seu aparelho.

9 - *PROBLEMAS DE QUANTIZAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL*

Introdução

Sozinha, entre todas as teorias clássicas, a gravitação tem se negado a ser colocada sob forma quântica, apesar de todos os esforços atē hoje feitos, os quais já datam de 40 anos atrás. Em vista do fato que as equações clássicas de campo permitem a existência de soluções homogêneas que podem ser interpretadas como radiação gravitacional, ē muito difícil de se compreender, que a radiação gravitacional, quando eventualmente observadas, não iria transferir sua energia, momentum e momentum angular em quantas. Assim, nós temos toda razão em esperar que de fato exista uma teoria quântica da gravitação que desse conta de tais fenômenos.

Mesmo que eventualmente fosse encontrado que campos gravitacionais não transferem energia em quanta, a importância de tal descoberta não seria completamente inteligível sem uma teoria quântica da gravitação com a qual fosse comparado esse fato.

A teoria clássica da gravitação é uma teoria enormemente complexa. Ela possui dez equações não lineares para as dez componentes do potencial gravitacional, elas são sujeitas a um grupo de gauge dependente de 4 funções que implica que 4 das equações são constraints (vínculos) sobre as condições iniciais. Consequentemente, tem sido provado ser muito difícil obter-se um conjunto local, não redundante de variáveis canônicas que pudessem ser usadas para nelas se aplicar a quantização por correspondência (quantização canônica).

Nessas 4 últimas décadas várias formulações foram sugeridas, ou para resolver essas dificuldades, ou para evitá-las, porém todas elas encontraram pouco sucesso e nada conseguiram quando aplicadas ao desenvolvimento de uma teoria quântica da gravitação.

Apesar de que as dificuldades técnicas de ordem matemática são admitidamente enormes, após 40 anos no deserto deveríamos suspeitar que talvez, em adição a tais dificuldades, questões fundamentais de princípio estão barrando nosso caminho para "a terra prometida".

Por essa razão, antes de irmos adiante, é necessário examinar os fundamentos do processo usualmente empregado para se construir a quantização de uma dada teoria clássica. A secção que se segue trata sobre esse assunto. Na 3ª secção, usaremos os resultados obtidos para a quantização das soluções que são assintoticamente flat. O método assim obtido poderá ser aplicado à quantização de um sistema acoplado de teorias clássicas de campo de partículas de massa nula. A 4ª secção será devotada à uma consideração da versão de Hamilton-Jacobi da relatividade clássica. Em vista do fato que temos toda razão em considerar que o funcional de Hamilton-Jacobi corresponda à aproximação WKB do vetor de estado de Schrodinger (ainda não determinado):

$$\Psi \sim \Psi_0 \, e^{-\frac{i}{\hbar} S}$$

que no limite $\hbar \to 0$ dá a transição

Eq. Schrodinger → Eq. Hamilton-Jacobi

Isso nos permitirá inferir umas conclusões interes - santes concernentes às novas características de uma eventual teoria quântica.

9.1 - *O Programa de Quantização*

As variáveis dinâmicas de uma teoria clássica desempenham um papel dual, de um lado elas são usadas atributivamente, isto é, elas denotam atributos do sistema físico sob con - sideração, tais como locação, momentum, energia, etc. Por outro lado, elas são usadas como operadores, isso é, elas geram transformações canônicas infinitesimais.

$$(p,q) \rightarrow (P,Q)\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} \end{cases}$$

tal que

$$L \rightarrow L + \frac{dF}{dt} \quad , \quad F = F_0 + \epsilon\phi(q,p) \quad , \quad F_0 = qp$$

F_0 é a geratriz da transf. identidade. Então,

$$\begin{cases} p = p + \epsilon\frac{\partial\phi}{\partial q} \\ Q = q + \epsilon\frac{\partial\phi}{\partial p} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \delta p = p - p = -\epsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial q} = \epsilon|p,\phi| \\ \delta p = Q - q = \epsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial p} = \epsilon\ q,\phi \end{cases}$$

ou seja, qq.f.$\phi(q,p)$ gera tr. can. infinit.

O uso <u>atributivo</u> é o mais imediato e natural, e consequentemente, foi empregado muito antes que o aspecto de operador das variáveis dinâmicas fosse reconhecido.

Entretanto, quando consideramos que ao empregar transformações canônicas podemos mapear teorias umas nas outras, torna-se evidente que o aspecto de operador de uma variável dinâmica é vital. Para esclarecer melhor esse ponto, lembre que transf. canônicas mantêm a forma das equações de Hamilton invariantes:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} = - \frac{\partial K}{\partial Q} \end{cases} \quad ; \; K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

porém as equações de Hamilton em verdade são muito mais que a simples tradução de uma teoria, elas são em verdade uma <u>representação</u>. Assim, uma dada "teoria" pode ser por exemplo , um <u>oscilador harmônico linear</u> nas variáveis (q,p):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kq^2 \rightarrow \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} = -kq$$

existem transf. canônicas tais que levam essa sistema na <u>partícula</u> livre: $\dot{P} = 0$, de fato, derivando a equação da transf. no tempo:

$$\dot{p} = \dot{P} + \epsilon \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{\partial \phi}{\partial g} \dot{q} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right]$$

$$\therefore \quad \dot{p} = \dot{P} + \epsilon \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} \dot{p} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial g \partial t}\right]$$

fazendo

$$\dot{P} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial g\partial p} = 1 \\ \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\dfrac{p}{m} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial q\partial t} = 0 \end{cases}$$

Deve-se então provar que $\exists$ sols. para $\phi(q,p)$, satisfazendo essas relações. Temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = K - H$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial q\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\left[K - H\right] = \frac{\partial K}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial K}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}$$

mas

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P} = 0 \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} = \dot{Q}_0 \text{ (cte)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial q\partial t} = \dot{Q}_0\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} = \dot{Q}_0\left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\right) + \dot{p} = -\dot{Q}_0\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2} - kq$$

logo, temos as condições

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial q\partial p} = 1 \\ \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\left(\dfrac{p}{m} - \dot{Q}_0\right) = kq \end{cases}$$

Solução da 2ª equação é:

$$\phi = \frac{mkq^3}{6(p-m\dot{Q}_0)} + q\Psi(p) + f(q)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\phi}{\partial_q} = \frac{mkq^2}{2(p-m\dot{Q}_0)} + \Psi(p)$$

$\therefore \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial_q\partial_p} = 1$ é uma condição que determina $\Psi(p)$. Consequentemente, $\exists$ uma tr. canônica tal que leva uma teoria na outra:

oscilador harmônico linear $\rightarrow$ partícula livre

O que acontece é que uma dada "teoria" é aqui representada pelas equações de Hamilton mais o valor da Hamiltoniana, tal que dele decorre um certo valor para p, num caso $p = -kg$, no outro $p = \theta$. Esse esquema ou "teoria" nem sempre é mantido invariante mesmo se a equação de Hamilton mantenha sua forma, basta que o valor da Hamiltoniana varie de modo a não preservar o valor original de p, e transf. canônicas podem fazer isso.

Em particular, o aspecto de operador é caracterizado pela álgebra das P.B.,que por sua vez provê uma realização da álgebra de Lie do Grupo Canônico da teoria em questão.

Para transformações canônicas inteiramente reais, a prop. de grupo diz que

$$\underset{(3)}{\phi} = \varepsilon\left[\underset{(1)}{\phi}, \underset{(2)}{\phi}\right] \begin{cases} \nearrow \underset{(2)}{\delta}\ \underset{(1)}{\phi} = \varepsilon\left[\underset{(1)}{\phi}\ \underset{(2)}{\phi}\right] = \underset{(3)}{\phi} \\ \searrow = -\ \underset{(1)}{\phi}\ \underset{(2)}{\phi} \end{cases}$$

pois:

$$(q,p) \xrightarrow{F_1} (\bar{q},\bar{p}) \xrightarrow{F_2} (\bar{\bar{q}}.\bar{\bar{p}})$$

$$\xrightarrow{F_2} (\bar{q}',\bar{p}') \xrightarrow{F_1} (\bar{\bar{q}}',\bar{\bar{p}}')$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \bar{\bar{q}} - \bar{\bar{q}}' = \varepsilon^2 \left\{ \left[\left[q, \underset{(1)}{\phi}\right], \underset{(2)}{\phi}\right] - \left[\left[q, \underset{(2)}{\phi}\right], \underset{(1)}{\phi}\right] \right\} \\ \bar{\bar{p}} - \bar{\bar{p}}' = \varepsilon^3 \left\{ \left[\left[p, \underset{(1)}{\phi}\right], \underset{(2)}{\phi}\right] - \left[\left[p, \underset{(2)}{\phi}\right], \underset{(1)}{\phi}\right] \right\} \end{cases}$$

pela identidade de Jacobi,

$$\begin{rcases} \bar{\bar{q}} - \bar{\bar{q}}' = \varepsilon^2 \left[q, \left[\underset{(1)}{\phi}, \underset{(2)}{\phi}\right]\right] \\ \bar{\bar{p}} - \bar{\bar{p}}' = \varepsilon^2 \left[p, \left[\underset{(1)}{\phi}, \underset{(2)}{\phi}\right]\right] \end{rcases} \longrightarrow \begin{array}{c} \varepsilon^2 \left[\underset{(1)}{\phi}, \underset{(2)}{\phi}\right] = \varepsilon \underset{(3)}{\phi} \\ \Big\downarrow \\ \underset{(3)}{\phi} = \varepsilon \left[\underset{(1)}{\phi}, \underset{(2)}{\phi}\right] \end{array}$$

Com a transição para a teoria quântica, o aspecto dual das variáveis dinâmicas se separa. O aspecto de operador das variáveis é realizado por um operador Hermitiano sobre um espaço vetorial linear, enquanto que o aspecto atributivo é realizado pelos auto-valores desses operadores. O procedimento de quantização canônica consiste em relacionar as variáveis clássicas com operadores Hermitianos de tal forma que um sub-conjunto da álgebra dos P.B. é preservado como uma álgebra de comutadores dos correspondentes operadores lineares.

Assim, se o observável clássico α corresponde o operador Hermitiano A, então

$$\alpha \rightarrow A$$
$$\beta = f(\alpha) \rightarrow B = f(A)$$

porém aí existe uma diferença marcante:

$$\alpha \to A \longleftrightarrow \begin{cases} \text{atributo } (\alpha) \to \text{ eigenvalue } A \text{ ou } \langle A \rangle \\ \\ \text{"operador" } \alpha \to A \end{cases}$$

$$\beta = f(\alpha) \to B = f(A)$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} \text{atributo } \beta \longrightarrow \text{ eigenvalue de } B \text{ ou } \langle B \rangle \\ \\ \text{"operador" } \beta \to B \end{cases}$$

Do ponto de vista de operador, os mapeamentos no espaço de fases gerados por α e $f(\alpha)$ não são trivialmente relatados tais como o são seus atributos, assim, se $\alpha = p$, $\beta = \alpha^2$. α gera uma translação ao longo de um eixo de configuração, porém gera uma transformada canônica que só pode ser expressa no espaço de fases:

$$\delta\Psi = \left[\Psi(q,p), p\right] = \frac{\partial\Psi}{\partial q} \qquad \text{(translação)}$$

$$\delta'\Psi = \left[\Psi(q,p), p^2\right] = 2\,\frac{\partial\Psi}{\partial q}\,p \qquad \text{(transf. no plano q-p)}$$

Dada uma certa "teoria" clássica, pode acontecer que α seja um operador que mantenha a teoria invariante (ou covariante), porém $\beta = f(\alpha)$ pode não ser um operador desse tipo. Daí decorre que na passagem para a teoria quântica deve-se procurar qual o sub-grupo do grupo canônico que deve ser preservado como uma álgebra de comutadores de operadores Hermitianos. Uma inspeção nas teorias quânticas existentes revela que elas foram obtidas pela preservação da <u>álgebra de comutação do grupo</u>

de simetrias do espaço-tempo. Assim:

Grupo Galileano para a teoria não-relativística (física não relativística), grupo de Poincaré para a relatividade especial. É por essa razão que a quantização procede mais facilmente em coordenadas retangulares, desde que essas coordenadas são adaptadas às direções de Killing da variedade espaço-tempo.

(É possível quantizar um sistema clássico, por exemplo, em coordenadas polares, nesse caso entretanto, devemos expressar as direções de Killing em termos de coordenadas polares e impôr que a álgebra de movimentos nas direções de Killing sejam representadas por operadores lineares no espaço de Hilbert da teoria quântica). Como exemplo, na teoria não-relativística, o gerador do grupo de Galileu contém como um elemento o gerador de transf. de Galileu,

$$G(q,p) = - vpt + mvq$$

que mantém invariante as equações de movimento de Newton

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial g} = 0 \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ H = \dfrac{p^2}{2m} \end{cases}$$

De fato, na nova representação

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} \\ \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = q + [q,G] = q - vt \\ P = p + [p,G] = p - vm \\ K = H + \dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases}$$

$$\therefore \quad K = H - pv = \frac{p^2}{2m} - pv = \frac{1}{2m}\,(P+mv)^2 - v(P+mv)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \longrightarrow \dot{P} = 0$$

inclusive da lei de transformação vem, por derivação no tempo que

$$\dot{P} = \dot{p}$$

e que,

$$\dot{Q} = \dot{q} - v$$

o que também se tira de

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P+mv}{m} - v = \frac{p}{m} - v = \frac{p-mv}{m} = \frac{P}{m} = \dot{q} - v \quad .$$

Porém, se modificarmos G, acrescentando um novo parâmetro de aceleração $\underline{a}$:

$$G \to \mathcal{G} = G(q,p) + \frac{1}{2}\,at^2.p - at.qm$$

$$\longrightarrow \begin{cases} Q = q + [q,\mathcal{G}] = q - vt + \frac{1}{2}\,at^2 \\ \\ P = p + [p,\mathcal{G}] = p - mv + atm \end{cases}$$

Agora, a Hamiltoniana varia como:

$$K = H + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} - pv + at.p + amq =$$

$$= \frac{(P+mv-amt)^2}{2m} - v\,(P+mv-amt) + at\,(P+mv-amt)$$

$$- am(Q + vt - \frac{1}{2}\,at^2)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial K}{\partial Q} \neq 0 \longrightarrow \dot{P} \neq 0$$

e as equações de movimento não são mantidas invariantes.

9.2 - *Quantização Assintótica*(*)

Na seção anterior enfatizamos o aspecto crítico para quantização desempenhado pelas simetrias do espaço-tempo. Em relatividade geral encontramos que o grupo de simetrias do R^4 é o grupo de Einstein, isso é, o grupo de transformações de coordenadas curvilíneas em quatro dimensões. Esse grupo, sendo um grupo que depende de funções, implica (teorema de Noether) que cada teoria derivável de um princípio de Ação invariante deve necessariamente ter 4 equações de campo que são vínculos sobre as condições iniciais. Além disso, os 4 vínculos geram (do ponto de vista operacional) mapeamentos canônicos que correspondem às transformações de coordenadas do grupo de Einstein. Em vista do fato que os observáveis de uma teoria, quando vistos em seu aspecto operacional, devem gerar transformações canônicas compatíveis com as equações de movimento, as quais no presente caso incluem os 4 vínculos, segue-se que observáveis da teoria da relatividade geral devem comutar com os vínculos, e consequentemente, com os geradores do grupo de Einstein.

Em termos mais rigorosos, deve-se ter que observáveis $O_A(g_{mn}, p^{mn})$ formam uma álgebra de Lie com os vínculos $H_\mu(g_{mn}, p^{mn}) \approx 0$ (geradores do grupo de Einstein):

(*) Essa seção se baseia essencialmente num artigo do Prof. A. Komar.

$$\left[O_A, H_\mu\right] = \lambda_{A\mu}{}^{\alpha}\, H_\alpha = 0$$

que correspondem à definição de variáveis de 1ª classe na notação de Dirac. Conceitualmente, isso coloca um problema do ponto de vista de operadores. Voltando atrás, vimos que em teorias Poincaré-covariantes, os <u>observáveis</u> da teoria eram P_μ , $M_{\mu\nu}$, tais que estavam de um lado associados às simetrias do espaço-tempo e de outro lado eram identificados como elementos do grupo de Poincaré (operacionalmente correspondem a elementos da álgebra de Lie do grupo de Poincaré). Aqui, observáveis da teoria <u>não</u> representam uma realização do grupo de Einstein, pois apesar deles formarem uma álgebra de Lie com os geradores $H_\alpha(g,p)$ elas não são por si-mesmos geradores desse grupo:

$$\delta\Psi = \left[\Psi(g,p), O_A\right] \neq \delta\Psi$$

gerado pelo grupo de Einstein. Os observáveis que geram os elementos do grupo de Einstein são os $H_\alpha(g,p)$ eles próprios, porém eles são nulos!

$$\left[H_\alpha, H'_\mu\right] = \rho^{\tau}_{\alpha\mu}\, H_\tau$$

Consequentemente, a primeira dificuldade encontrada, em comparação às teorias Poincaré-covariantes é que os observáveis da teoria em relatividade geral não formam uma realização do grupo de Simetrias, no caso o grupo de Einstein. Consequentemente não temos em mãos o critério que tínhamos em Poincaré-Inv. para construir os observáveis como os <u>geradores do grupo de simetrias do espaço-tempo</u>, daí vem que a especificação ex -

plícita de observáveis em relatividade geral não é determinada, em princípio pode-se ter uma ∞ dessas quantidades. Isso implica que a priori quantização canônica já entra em dificuldades. Desse esquema segue-se que, em princípio, podemos construir diversas inequivalentes teorias quânticas da gravitação, cada uma com um diferente conjunto de observáveis.

(Observáveis não são mais diretamente determinados como estando associados aos geradores P_{μ}, $M_{\mu\nu}$ do grupo de simetrias tal como em relatividade restrita.)

Um possível recurso seria abandonar a relação entre:

estrutura algébrica a ser preservada	$\longleftrightarrow$	grupo no espaço-tempo que é selecionado como de simetrias

e, meramente aliviar para:

estrutura algébrica a ser preservada	$\longleftrightarrow$	sub-álgebra de observáveis a serem escolhidas $\{\Phi\} \subset \{\Lambda\}$ determinada por algum critério razoavel.

$\{\Lambda\}$: conjunto total de observáveis (∞ elementos).

Então faríamos(*) (a menos de dificuldades de ordenamento de fatores)

$$\{\Phi\} \longrightarrow \{\hat{\Phi}\} \quad \text{(operadores quânticos Hermitianos)}$$

Poderíamos chamar uma tal formulação de uma "teoria quântica" da gravitação. Porém existe toda razão para suspeitar que tal

(*) Selecionar um $\{\Phi\} \subset \{\Lambda\}$ não implica necessariamente em restringir as simetrias do R^4, pois $\{\Phi\}$ também serve para o full Einstein group.

construção não seria unívoca. De fato, sem o princípio de correspondência para guiar essa seleção do $\{\Phi\}$, muitas escolhas inequivalentes seriam feitas.

Em vez de explorar esse ponto em mais detalhes, iremos propor que se imponha uma simetria privilegiada no espaço-tempo.

Quando se constroi uma teoria quântica é conveniente primeiro selecionar um conjunto independente de variáveis dinâmicas clássicas cuja álgebra canônica é preservada na transposição. Usualmente, como lidamos com equações de campo hiperbólicas, isso é feito selecionando-se uma hipersuperfície space-like de Cauchy, adaptada à simetria do R^4 (determinada pelas direções de Killing) e sobre essa região selecionar os dados canônicos de Cauchy. Entretanto, com a finalidade de se obter um conjunto completo(*) e independente de variáveis dinâmicas, basta que a superfície seja de Cauchy, ela não necessita ser space-like. As equações de campo de Einstein sendo não-lineares não temos a possibilidade de formar superposições lineares que se comportem razoavelmente no ∞. Para especificar completamente a teoria, iremos adicionar às equações de campo de Einstein a condição de que suas soluções devem ser assintoticamente flat, pode-se então ter:

(a) uma hipersuperfície nula de Cauchy

(b) essa superfície está no ∞ onde os modos independentes de radiação do campo gravitacional são facilmente identificáveis e onde os fatores não-lineares se tornam menos efe-

(*)Por completo queremos dizer que qq. observável da teoria de uma função desse conjunto de variáveis.

tivos, pois eles tendem a zero mais rapidamente com a distância do que os fatores lineares;

(c) a superfície de Cauchy no ∞ tem um grupo preferencial (privilegiado) no R^4, o grupo BMS que contém o grupo de Poincaré como um sub-grupo;

(d) a álgebra(*) das <u>condições-nulas-de Cauchy</u> na superfície do ∞ pode ser arranjada de modo a prover uma <u>realização</u> do grupo de BMS.

É evidente que o conjunto de variáveis dinâmicas definido sobre a superfície de Cauchy no ∞ são idealmente adequados para a quantização.

Suas relações de comutação clássica, correspondente aos PB da teoria usual, sendo especificadas sobre uma hipersuperfície nula e não mais sobre uma hipersuperfície espace-like já não apresentam os problemas de serem possivelmente incompatíveis com as equações de movimento devido à não-linearidade das mesmas (Self Coupling Effects). Como um exemplo simples, considere as equações de movimento,

$$\Box_{(1)} \underset{(1)}{\phi}(x_{(1)}) = \underset{(2)}{\phi}^2 (x_{(1)}) \quad \Box_{(2)} \underset{(2)}{\phi}(x_{(2)}) = \underset{(1)}{\phi}^2 (x_{(2)})$$

para dois observáveis da teoria, nos pontos $x_{(1)}, x_{(2)}$ de uma hipersuperfície space-like. Suponha que sua regra clássica(PB) de comutação fosse:

(*) Essa álgebra não é, evidentemente, a dos PB pois o PB é determinado num instante fixo e, portanto, só serve sobre superfície <u>tipo-espaço</u>.

$$\left[\underset{(1)}{\phi}(x_{(1)}),\underset{(1)}{\phi}(x_{(2)})\right]_{PB} = 0 \quad ; \quad \left[\underset{(2)}{\phi}(x_{(1)}),\underset{(2)}{\phi}(x_{(2)})\right]_{PB} = 0$$

$$\left[\underset{(1)}{\phi}(x_{(1)}),\underset{(2)}{\phi}(x_{(2)})\right]_{PB} = f\,(x_{(1)} - x_{(2)}) \neq 0$$

onde

$$\underset{(i)}{\phi}(x_{(k)}) \equiv \underset{(i)}{\phi}(g_{mn}(x_{(k)}),\ p^{mn}(x_{(k)})$$

Essas regras são incompatíveis com as equações de movimento , pois por exemplo,

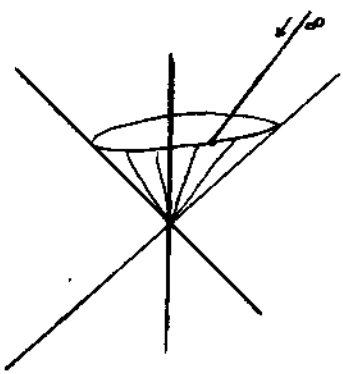
$$\underset{(1)}{\phi}(x_{(1)}) = \frac{1}{\Box_{(1)}}\ \underset{(2)}{\phi}^{2}\,(x_{(1)})$$

$$\therefore\ 0 = \left[\underset{(1)}{\phi}(x_{(1)}),\underset{(1)}{\phi}(x_{(2)})\right] = \frac{1}{\Box_{(1)}}\left[\underset{(2)}{\phi}^{2}(x_{(1)}),\underset{(1)}{\phi}(x_{(2)})\right] =$$

$$= 2\,\frac{1}{\Box_{(1)}}\ {}_{(2)}(x_{(1)})\left[-f(x_{(1)} - x_{(2)})\right] \neq 0$$

Porém, essas regras de comutação são as regras usuais dos PB fundamentais! Daí inclusive, vemos diretamente que os PB fundamentais não são compatíveis com as equações de movimento não-lineares e não podem, portanto, representar a relação de comutação a ser quantizada por correspondência. Dito de outro modo, os $g_{mn}(x), p^{mn}(x)$ não são adequados como variáveis canônicas a serem quantizados por correspondência. Qualquer que seja o processo a ser usado elas devem ser mais sofisticadas (elaboradas). Agora, temos uma hipersuperfície nula no ∞ onde a não-linearidade já é desprezível, e temos mais confiança de impôr sobre os modos independentes da radiação gravitacional regras de comutação de campos livres que são então traduzidas em termos de operadores em espaços de Hilbert (A. Komar -Phys. Rev. 134, B1430 (1964)). Daí, é possível aplicar os processos usuais de quantização (Fock - Space-quantiz.) e tratar problemas como o espalhamento de gravitons.

O campo gravitacional em pontos finitos de R^4 é obtido como funcional dos dados-nulos-de-Cauchy por integração das equações completas não-lineares, desde o ∞ até esse ponto



$g(x) = \mathcal{F}$ (null Cauchy data from ∞ to x)

Na transição para a teoria quântica, onde os null-Cauchy-data se transformam em operadores, parece que conseguimos obter uma formulação quântica adequada para esses campos gravitacionais (radiação) de modo consistente com todas as imposições usadas. Acontece que apesar disso funcionar univocamente na teoria clássica, a relação entre o campo g(x) em pontos x finitos e seus dados-nulos-de-Cauchy, na teoria quântica quando tentamos integrar equações não-lineares envolvendo operadores incorremos no sério problema de não-univocidade nas soluções devido à questão de ordenamento dos fatores (factor ordering).

Dessa forma, para se ter uma teoria unívoca, quântica, devemos tomar x sobre a superfície nula no ∞ ou próximo dela (weak field approximation), onde pode-se estudar efeitos usuais estudados na teoria quântica de campos Poincaré-covariante, tal como scattering gravitation - graviton, etc. Ainda , essa formulação só absorve campos em interação com a gravitação que tenham massa nula, devido à invariante conforme que foi usada para transferir a superfície de Cauchy ao ∞ . Dentro de todas essas limitações, essa formulação funciona nessa região. A única novidade é o aparecimento do grupo BMS como o grupo privilegiado de simetrias de R^4 nessa região.

9.3 - *Teoria de Hamilton-Jacobi-Einstein*

O "approach" assintótico à quantização é particularmente apropriado ao tratamento de espalhamentos graviton-graviton. Entretanto, não é provável que nossa tecnologia irá se desenvolver tanto, em futuro próximo, a ponto que possa se observar os valores teóricos preditos para tais seções de choque nessa teoria.

Portanto nosso interesse na teoria quântica da gravitação é primeiramente motivada pela esperança que tal teoria possa prover novos resultados de interesse nas teorias quânticas já conhecidas, e ajudar a resolver seus problemas crônicos de divergência e ambiguidades, especialmente tendo em vista que a gravitação é uma interação universal.

Inicialmente vamos fazer um resumo breve sobre a formulação Hamiltoniana da relatividade geral, a qual foi estabelecida por Dirac (P.A.M. Dirac - Phys. Rev. 114, 924 (1959)). As equações de Einstein são 10 equações de derivadas parciais não-lineares nas componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$, o qual dualmente também desempenha o papel de potencial na versão de campo da teoria

$$G_{\mu\nu} = 0$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R$$

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \; ; \; R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

$$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}$$

que seguem o princípio variacional

$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad ; \quad S = \int \sqrt{-g}\; R\; d_4x$$

Dessa densidade Lagrangeana, podemos isolar um termo de superfície e ficarmos somente com a densidade

$$L = \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \left[\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}\right]$$

O momento canônico (densidade) conjugado ao potencial $g_{\mu\nu}$ é

$$p^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{\mu\nu}}$$

Entre as 24 variáveis $g_{\mu\nu}(x), p^{\mu\nu}(x)$ existem 4 relações decorrência das (Identidades de Bianchi) devido ao fato que a teoria é covariante para tratar arbitrariedades de coordenadas. Essas relações são do tipo: (vínculos primários)

$$p^{4\mu} + \phi^{\mu}\,(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,i}) = 0 \qquad \text{(A)}$$

Na formulação Hamiltoniana é essencial que se obtenha todas as velocidades ($\dot{g}_{\alpha\beta}$) em termos dos momenta, para se ter a densidade Hamiltoniana como

$$H = p^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} - L = H\,(g_{\alpha\beta}, p^{\alpha\beta})$$

porém de (A) decorre que não podemos resolver para as velocidades $\tilde{\dot{g}}_{4\beta}$ em termos das $p^{4\mu}$. Portanto H não pode ser descrita como função só de $g_{\alpha\beta}, p^{\alpha\beta}$, irá ficar um termo:

$$p^{4\mu}\dot{g}_{4\mu}$$

nessa forma ($\dot{g}_{4\mu}$ não é F. de $p^{4\mu}$).

Dirac resolveu essa dificuldade somando à uma divergência:

$$L_D = L + D$$

a adição de D modifica a expressão das momenta, e é de tal forma que faz:

$$p_D^{4\mu} = \frac{\partial L_D}{\partial \dot{g}_4} = 0$$

que agora substitue as (A), ou seja: as identidades de Bianchi p/L_D implicam em $p_D^{4\mu} = 0$.

Açha-se que a Hamiltoniana é

$$H_D = \int d^3x \; (p_D^{ij} \, \dot{g}_{ij} - \mathcal{L}_D)$$

$$p_D^{ij} = \sqrt{-^3g} \;\; (e^{i\ell} \, e^{jm} - e^{ij} e^{\ell m}) \;\; \frac{\{{}^{0}_{ij}\}}{\sqrt{g^{44}}}$$

explicitamente:

$$\mathcal{H}_D = (g^{44})^{-1/2} \, \mathcal{H}_L + g_{4r} \, \mathcal{H}^r$$

$$\mathcal{H}_L = K^{-1} \left[p^{rs} p_{rs} - \frac{1}{2} \, p^r_r p^s_s \right] + K_e{}^{rs} \, S_{rs}$$

$$\mathcal{H}^r = - 2 \, p^{ru}{}_{|u}$$

com

$$K^2 = - \, ^3g \;\; ; \; S_{rs} \quad : \quad \underline{\text{Ricci curvature para 3-geometria}}$$

As Hamiltonianas parciais $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}^r$ só dependem das variáveis dinâmicas (g_{mn}, p^{mn}). As g_{4r}, g_{44} não são variáveis dinâmicas $(p_D^{4\mu} = 0)$, porém aparecem como 4 parâmetros arbitrários (sem problema de Cauchy det.) em $\mathcal{H}$.

Os 4 vínculos primários $p^{4\mu}(\vec{x}, x^0) = 0$ são mantidos por qq. instante de tempo por efeito das equações de movimento:

$$\left[p^{4\mu}(\vec{x}, x_0) \quad , \quad \mathcal{H}_D(x^0) \right] = 0$$

pois isso implicará que:

$$\left[p^{4k}, \mathcal{H}_D \right] = \mathcal{H}^k + \frac{1}{2} \;\; \frac{g^{k0}}{\sqrt{g^{00}}} \;\; \mathcal{H}_L \;\; = \;\; 0$$

$$\left[p^{44}, \mathcal{H}_D \right] = \frac{1}{2} \;\; \sqrt{g^{00}} \, \mathcal{H}_L \;\; = \;\; 0$$

e

$$\mathcal{H}_L = 0, \mathcal{H}^k = 0$$

nada mais são que 4 das equações do campo:

$$G^4_\mu = 0 \begin{cases} \mathcal{H}_L = 0 \\ \mathcal{H}^k = 0 \end{cases} \qquad \text{(vínculos secundários)}$$

portanto, 4 das equações de campo não são equações de propagação, porém são vínculos sobre os dados de Cauchy $g_{mn}p^{mn}$ na hipersuperfície espacial inicial, as quais têm que valer, mesmo antes da propagação se efetuar

Os 4 vínculos secundários formam uma álgebra de Lie e são uma realização do grupo de Einstein que é um sub-grupo do full canonical groups

$$\left[\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}'_\beta\right] = \mathcal{H}_\lambda(\delta^r_\beta\delta^\lambda_\alpha - \delta^r_\alpha\delta^\lambda_\beta)\ \delta_{,r}\ (\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\mathcal{H}_\alpha = \ell_\alpha\ \mathcal{H}_L + Q^r{}_\alpha g_{rk}\ \mathcal{H}^k$$

$$\ell_\alpha = \frac{\delta^4_\alpha}{\sqrt{g^{44}}} \quad ; \quad Q^r{}_\alpha = \delta^r_\alpha - \ell^r\ell_\alpha$$

As equações Hamiltonianas

$$\dot{g}_{mn} = \frac{\delta H}{\delta p^{mn}} \qquad , \qquad \dot{p}^{mn} = -\frac{\delta H}{\delta g_{mn}}$$

em princípio, determinam a propagação das 12 variáveis g_{mn}, p^{mn}, acontece que como H depende das 4 variáveis arbitrárias $g^{4\mu}$, essa propagação será arbitrária (modulo as $g^{4\mu} \longleftrightarrow$ modulo S.C.).

Além disso, em cada instante de tempo só 8 variáveis são realmente independentes devido às relações de vínculo

$$H_\mu \, (g_{mn} \, , \, p^{mn}) \;=\; 0$$

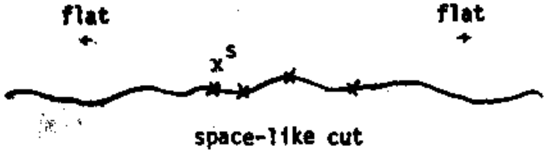
As grandes dificuldades inerentes na formulação Hamiltoniana, quais sejam:

(i) Presença de vínculos que não permitem a determinação do espaço de fases real, ou espaço reduzido adequado a spin 2 e massa nula.

(ii) Séria dificuldade na determinação do conjunto de observáveis para cada métrica g_{mn}, e a decorrente ambiguidade na determinação das quantidades físicas, associadas à teoria (quânticas atributivas da teoria),

levaram a que se procurasse um novo approach clássico que conduzisse de forma mais coerente à uma quantização do sistema. A partir de 1965, Bergmann e Komar iniciaram estudos de um subproduto da formulação Hamiltoniana, qual seja, a teoria de Hamilton-Jacobi.

O funcional de Hamilton-Jacobi, $S(g_{mn})$ é definido como um funcional cujo domínio é o conjunto de funções tensoriais $g_{mn}(x^s)$ que são positivas definidas sob cada hiperplano, x^0 = cte (q.q.s. $x^s \in$ esse hiperplano) e que caracterizam variedades Riemannianas tri-dimensionais que podem ser por exemplo, assintoticamente flat



como,

$$p^{mn} = \frac{\delta S}{\delta g_{mn}}$$

segue-se que S satisfaz às 4 equações funcionais

$$H_{\mu}\left(g_{mn}, \frac{\delta S}{\delta g_{mn}}\right) = 0$$

Nesse estágio, a limitação -] antes, da presença de vínculos no espaço de fases desaparece, agora trabalhamos unicamente no espaço de configurações onde os vínculos são transformados em equações de movimento.

Se *tomarmos, por exemplo*, $g_{0\alpha} = \delta_{0\alpha}$ (Sistema Gaussiano), então $H_{\mu} \rightarrow H_L$ (coeficiente de H_s é nulo) e a equação de H-J toma a forma:

$$\frac{1}{(^3g)}\left[\frac{1}{2}\, g_{rs}g_{mn} - g_{rm}g_{sn}\right] \frac{\delta S}{\delta g_{rs}} \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} + {}^3R = 0$$

*As seguintes propriedades do funcional de H-J têm si*do provadas.

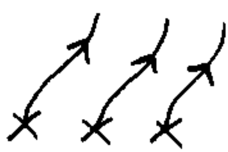
(1) $S(g_{mn})$ não é uma funcional explícita das coordenadas (x^S, x^0), *ele depende exclusivamente* das variáveis de configuração g_{mn} (P.G. Bergmann - Phys. Rev. 144, 1078, (1966)).

(2) Sob Ação do grupo gerado pelos vínculos H_{μ} a forma funcional de $S(g_{mn})$ é invariante (Phys. Rev.).

(3) A família completa de trajetórias clássicas determinadas por um dado $S(g_{mn})$, isto é, o conjunto de $g_{mn}, p^{mn} = \frac{\delta S}{\delta g_{mn}}$ para um dado $S(g_{mn})$ que satisfazem o prolongamento a partir de condições dadas no instante inicial:

$$g_{mn}\,(x_1^s\,,\,x_0^{(0)})\,,\,p^{mn}(x_1^s\,,\,x_0^{(0)}) =$$

$$= (\frac{\delta S}{\delta g_{mn}})_0$$



espaços fases

é completamente determinada por 2 x ∞3 <u>constante</u> <u>do</u> <u>movimento</u> que comutam entre si: $\alpha_A(x^s)$ (A = 1,2), porém não comutam com

$$g_{mn}(x^s)\;:\;\left[\alpha_1(x^s)\,,\,\alpha_2(x^s)\right]_{x^0} = 0$$

$$\left[\alpha_A(x^s)\,,\,g_{mn}(x'^s)\right]_{x^0} \neq 0$$

(α'^s <u>são</u> <u>variáveis</u> <u>de</u> <u>momentum</u>)

$$\dot{\alpha}_A = \left[\alpha_A(x^s)\,,\,H(x^0)\right]_{x^0} = 0 \longrightarrow \alpha_A(x^s)$$

<u>são</u> <u>observáveis</u> da teoria.

Em outras palavras, a família de 4-dimensão Ricci - -Flat Riemann spaces det. por $S(g_{mn})$ têm em comum um sistema completo de observáveis que comutam: $\alpha_A(x^s)$.

$$S = S\,(g_{mn}, \alpha_A)$$

$S = S(q_i, \alpha^A)$ com $\beta^A = \frac{\delta S}{\delta \alpha_A}$ $\longrightarrow$ cada elemento é um Ricci-flat, 4-dim. Riemannian manifold.

Formam com os α_A um conjunto de $4 \times \infty^3$ observáveis que é completo(*), independente, porém não comutante, e que determina um único Ricci-flat 4-dim. Riemannian manifold. (A. Komar - Phys. Rev. 170, 1195, (1968)).

Infelizmente não se dispõe de uma expressão explícita para esses observáveis (não $\exists$ nenhum grupo de simetrias para o qual eles sejam os geradores).

9.4 - *Discussão Final*

Na extensão em que o funcional $S(g_{mn}, \alpha_A)$ de fato corresponde ao limite WKB do vetor de estado de Schrodinger da teoria quântica, concluimos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vetor estado de} \\ \text{Schrodinger} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{WKB}]{} \left\{ \begin{array}{l} \text{infinitamente grande famí-} \\ \text{lia de 4-geometrias que} \\ \text{têm em comum um conjunto} \\ \text{completo de observáveis} \\ \text{comutantes} \end{array} \right\}$$

α_A

teoria quântica — teoria clássica

α_A

(*) Por exemplo, todos escalares de Weyl devem ser funções dos α_A, β^A.

Para escolher um dado elemento dessa família de 4-geometrias, selecionamos um $\beta^A(x^s)$. Isso sugere que um processo <u>adequado</u> para construir uma teoria quântica (que terá limite clássico correto) seria selecionar um par $\alpha_A(x^s)$, $\beta^A(x^s)$ e representar sua álgebra por meio de operadores Hermitianos em um espaço de Hilbert:

$$\hat{\alpha}_A(x^s) \ , \ \hat{\beta}^A(x^s) \leftarrow \alpha_A(x^s) \ , \ \beta^A(x^s)$$

(4) Os observáveis $\beta^A(x^s)$ que são canonicamente conjugados aos $\alpha_A(x^s)$,

$$\beta^A(x^s) = \frac{\delta S}{\delta\alpha_A(x^s)} \quad ,$$

Recordamos que em mecânica analítica, na formulação H-J, S = S $(q_i,\ p^i = \alpha^i)$ dá uma família de trajetórias. Porém, para determinarmos um particular elemento dessa família, precisamos da outra constante de movimento, $Q_i = \beta_i$, tal que

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$

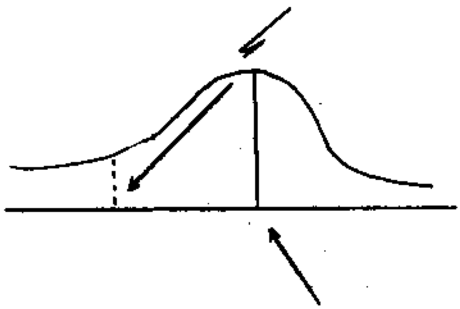
cada elemento da família é determinado dando-se $\beta_A(x^s)$

espaço de 3-geometrias
(seção)

Como cada elemento é um par $g_{mn}, p^{mn} = \frac{\delta S}{\delta g_{mn}}$, para

Deve-se esperar então que $<\alpha_A(x^s)>, <\beta^A(x^s)>$ corres - ponda ao valor máximo de um pacote de ondas descrevendo o estado quântico associado a uma 4-geometria Ricci-flat

$<\hat{\alpha}_A(x^s)>$, $<\hat{\beta}^{(j)A}(x^s)>$ $\quad j \neq i$



(uma outra Ricci-flat 4-geometrias)

(pacote de ondas associado a geometrias)

$<\hat{\alpha}_A(x^s)>, <\hat{\beta}_A^{(i)}(x^s)>$

Descrição da 4-geometrias Ricci-flat associada a $(\alpha_A(x^s)\ ,\ \beta^{iA}(x^s))$

ou: $\alpha_A(x^s)\ ,\ \beta^{(i)A}(x^s) \longleftrightarrow$ dada Ricci-flat 4-geometria.

Nesse sentido, essa teoria quântica satisfaz o <u>princípio de Ehrenfest</u>; ao vator de estado corresponde uma família de 4-geometrias, devemos então superpôr diversos estados, de modo a formar um pacote de ondas, o qual se comportaria na forma acima para uma 4-geometria tipo "(i)".

Para encerrar, citamos que também $\exists$ é um outro approach que retém o 4º vínculo $\mathcal{H}_L \approx 0$ e o transforma diretamente numa equação de Schrodinger fazendo

$$p^{mn} \longrightarrow -i\hbar \frac{\delta}{\delta g_{mn}}$$

não é claro se esse approach é consistente com o apresentado aqui (H-J Theory), ou se ele satisfaz o princípio de Ehrenfest.