O CÁLCULO DE FORMAS DIFERENCIAIS E A EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS-CURVOS

I. Damião Soares

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ÍNDICE

Pág.

INTRODUÇÃO

Podemos considerar que o estudo da interação neutrino-gravitação foi iniciado com os trabalhos de Cartan, Infeld e van der Waerden sobre spinores em uma variedade Riemanniana; posteriormente, muitas outras contribuições à teoria de spinores em espaços-curvos apareceram. Podemos, porém, tomar o artigo de Brill e Wheeler (1957), "Interaction of neutrinos and gravitational fields", como uma referência básica. A importância do estudo de neutrinos em espaços-curvos foi colocada pelos dois autores com a seguinte argumentação. Nosso conhecimento de neutrinos limita-se a processos de emissão e absorção, isto é, ao domínio das transformações das partículas elementares. Por comparação, imaginemos que se soubesse dos elétrons somente a taxa em que eles são produzidos no decaimento beta ou absorvidos em processos como absorção do K-elétron — mas nada se conhecesse sobre o movimento de elétrons em campos elétricos e magnéticos, sobre a ligação dos elétrons nos átomos ou sobre a existência do acoplamento spin-órbita, e muito pouco sobre o tensor momentum-energia do elétron. Para aprender sobre neutrinos tanto quanto se sabe sobre elétrons hoje, temos que considerar forças que influenciam o movimento de neutrinos e que sejam sujeitas a uma análise simples. O neutrino não responde diretamente a campos elétricos ou magnéticos — por isso, temos que fazer uso de campos gravitacionais, cuja interação com o neutrino é passível de uma análise simples. Em outras palavras, é preciso considerar a física de neutrinos em espaços-curvos.

Nos últimos vinte anos, muitos outros argumentos vie ram se somar aos de Brill e Wheeler. Em Cosmologia, neutrinos passaram a ter um papel importante na questão da densidade de energia do Universo e no problema da distinção entre vários modelos cosmológicos: um gás de neutrinos (sem interação com o restante da matéria do Universo) encheria todo o cosmos, contribuindo significativamente para a curvatura do Universo. Embora não haja ainda evidência experimental deste gás de neutrinos, a descoberta da radiação residual de corpo negro de $2{,}7^{o}K$ — remanescente de uma fase inicial quente do Universo — levantou a questão da existência de uma radiação de neutrinos com origem análoga e de uma fase na história do Universo dominada por neutrinos. Também processos astrofísicos ligados à emissão e absorção de neutrinos tem sido extensivamente discutidos, onde, em certos casos (estágios avançados da evolução estelar, etc.) a Teoria da Relatividade Geral deve ser levada em conta.

Neutrinos em interação com a gravitação são descritos por campos spinoriais sobre o espaço-tempo curvo, e devem ser soluções da equação de Dirac no dado espaço-tempo. No presente trabalho, formulamos a equação de Dirac sobre um espaço-tempo Riemanniano, bem como o tensor momentum-energia de um campo de Dirac. Para a descrição de neutrinos, nós usamos aqui spinores a quatro-componentes, do ponto de vista do formalismo de tetradas. A vantagem deste formalismo é que permite uma unificação com o cálculo de formas diferenciais, nos referenciais de Lorentz locais definidos pelas tetradas, que é uma técnica poderosa e extremamente útil no tratamento não somente da equação de Dirac mas do próprio espaço-tempo curvo. Nes te sentido, dedicamos a primeira parte deste trabalho a um estudo mais ou menos completo do cálculo de fórmulas diferenciais (em referenciais de Lorentz locais) sobre uma variedade Riemanniana, cuja utilidade operacional imediata se revela em muitas áreas da Física da Gravitação. Como aplicação, examinamos a dinâmica local de neutrinos em um universo com rotação; neutrinos são calculados para o modelo de Friedmann com seção plana.

1 - *UM POUCO DE GEOMETRIA DIFERENCIAL*

O espaço-tempo da Relatividade Geral (Teoria da Gravitação de Einstein) tem a estrutura de uma variedade Riemanniana 4-dimensional, com uma métrica localmente Lorentziana — conceitos que serão formalizados e discutidos a seguir, de um modo mais ou menos preciso.

Uma variedade n-dimensional é definida por

(i) um conjunto de pontos M.

(ii) uma coleção enumerável $\{U_k\}$ de subconjuntos de M, e que cobre M, i.e., $M = \bigcup_k U_k$.

(iii) para cada U_k existe uma aplicação biunívoca ϕ_k do correspondente U_k em um aberto de $\mathbb{R}^n$

Deste modo, um sistema de coordenadas fica definido sobre cada U_k no sentido de que podemos associar biunivocamente a cada ponto $P \in U_k$, n números reais $\phi_k(P) = (x^1,\ldots,x^n)$. U_k é denominado vizinhança de coordenada e cada (U,ϕ), uma carta; $(x^1,\ldots,x^n)$ são as coordenadas de P na carta (U_k,ϕ_k).

(iv) se $U_k \cap U_\ell$ é não vazio, então a aplicação

$$\phi_k \cdot \phi_\ell^{-1} : \phi_\ell (U_k \cap U_\ell) \to \phi_k(U_k \cap U_\ell)$$

é uma aplicação contínua de um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Para $U_k \cap U_{\overline{k}}$ não vazio, seja $P \in U_k \cap U_{\overline{k}}$. Correspondendo às duas cartas (k) e $(\overline{k})$, P tem coordenadas $(x^1,\ldots,x^n)$ e $(\overline{x}^1,\ldots,\overline{x}^n)$. A propriedade (iv) nos diz que no seu domínio de definição as primeiras podem ser expressas como funções contínuas das últimas, e vice-versa,

$$\bar{x}^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha}(x^{\beta})$$
$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(\bar{x}^{\beta}) \tag{1.1}$$

$\alpha,\beta = 1, \ldots, n$.

Uma coleção de cartas tal que (ii)-(iv) é denominada atlas e determina uma estrutura diferenciável sobre *M*. A variedade será dita diferenciável de classe C^r (r inteiro positivo) se (1.1) tem derivadas contínuas até ordem r. A topologia da variedade é caracterizada pela classe de vizinhanças de coordenadas — os abertos de *M* são definidos como uniões das vizinhanças de coordenadas (U_k). Neste caso, (ϕ_k) e (ϕ_k^{-1}) são contínuas e, portanto, homeomorfismos. No que se segue as variedades são sempre Hausdorff, paracompactos, orientáveis e diferenciáveis de classe C^r, r um inteiro suficientemente grande para fazer nossos resultados válidos. Uma variedade *M* é dita orientável se existe um atlas tal que o Jacobiano das transformações (1.1) é sempre positivo.

Nota 1: Como exemplos básicos de variedades, temos o espaço Euclideano n-dimensional $\mathbb{R}^n$, com o atlas que consiste de uma única carta ($\mathbb{R}^n,\phi$); e a esfera unitária C^n : $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < 1$ em $\mathbb{R}^n$, com a única carta (C^n,ϕ), onde em ambos os casos ϕ é a aplicação identidade.

Seja então *M* uma variedade n-dimensional. Designamos por função f sobre *M*, uma função definida sobre *M*, assumindo valores nos reais,

$$f: M \to \mathbb{R}$$

e que é expressa, numa dada carta (U,ϕ)

$$f(x) = f\cdot\phi^{-1}\ (\phi(U)) \qquad (1.2)$$

onde (x) são as coordenadas dos pontos de U na carta (U,ϕ). Numa outra carta,

$$\bar{f}(\bar{x}) = f\cdot\bar{\phi}^{-1}\ (\bar{\phi}(\bar{U}))$$

As funções f sobre M serão sempre descritas por $f(x)$, de acordo com (1.2), e sob (1.1)

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x(\bar{x}))$$

$$f(x) = \bar{f}(\bar{x}(x))$$

f é dita diferenciável em $U \subset M$ se $f(x)$ for diferenciável em $\phi(U)$.

No que se segue, todas as nossas expressões serão dadas em coordenadas (x) — relativas a uma dada carta (U,ϕ), que cobre pelo menos uma parte finita de M, e a pontos $P \in U$. Vamos designar (x) por sistema de coordenadas admissível em M (ou, pelo menos em uma parte finita de M), a mudança para outro sistema $(\bar{x})$ em P sendo dada por (1.1).

Definimos uma curva Γ em M como uma aplicação de uma parte $u \subset \mathbf{R}^1$ em M,

$$\Gamma : u \subset \mathbf{R}^1 \to M$$

$$\Gamma : \lambda \in u \to \Gamma(\lambda) \in M$$

A curva é dita parametrizada com o parâmetro λ, e num sistema de coordenadas admissível, Γ pode ser descrita por

$$\Gamma : x^\alpha = x^\alpha(\lambda) \qquad (1.3)$$

onde x^α são as coordenadas dos pontos de Γ. A derivada, ao longo de Γ, de uma função f sobre M, calculada em um ponto P de Γ, é dada por

$$D_P\, f = (\frac{dx^\alpha}{d\lambda})_{\lambda=\lambda_0}\; (\frac{\partial f}{\partial x^\alpha})_P \;,\quad P : x^\alpha(\lambda_0) \qquad (1.4)$$

Notemos que em (1.4) $(dx^\alpha/d\lambda)_P$ são as componentes de um vetor contravariante, tangente à curva em P. Como f foi escolhida arbitrária, (1.4) define o <u>operador em P</u>

$$D_P = (\frac{dx^\alpha}{d\lambda})_P\; (\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_P \qquad (1.5)$$

que atua sobre o espaço das funções diferenciáveis definidas em $P \in M$. O operador (1.5) é claramente uma representação invariante (independente de coordenadas) do <u>vetor tangente à curva Γ em P</u>. Por (1.5) podemos ver que para quaisquer funções diferenciáveis f,g definidas em P, e para todo $a,b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D_P\,(a\,f + b\,g) &= a\,D_P\,f + b\,D_P g \\ D_P\,(fg) &= f\,D_P\,g + (D_P\,f)\,g \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Por sugestão de (1.5) e (1.6), somos levados a definir <u>vetor tangente em P</u> como um operador X_P sobre o espaço das funções diferenciáveis em P, com as propriedades de que, para quaisquer funções diferenciáveis f,g, definidas em P, e $a,b \in \mathbb{R}$,

(i) $X_P f \in \mathbb{R}$

(ii) $X_P\,(af + bg) = a\,X_P f + b X_P g$

(iii) $X_P\,(fg) = (X_P f) g + f\,X_P g$

Em particular, para qualquer constante c, $Xc = 0$(*).

<u>O espaço tangente a M em P</u>, denotado por T_P, é o conjunto de todos os vetores tangentes em P. Ele é um espaço vetorial sobre os reais, onde

$$(aX_P + Y_P)\, f = a(X_P f) + Y_P f$$

para X_P, $Y_P \in T_P$, f função diferenciável definida em P, $a \in \mathbb{R}$. Assim de (1.5) e (1.6), segue-se que os <u>vetores</u> $(\partial/\partial x^\alpha)_P$ são vetores tangentes à variedade em P ($(\partial/\partial x^\alpha)_P \in T_P$), e

$$\underset{(A)}{D}{}_P = \lambda^\alpha_{(A)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_P \quad , \quad (\lambda^\alpha_{(A)} \in \mathbb{R}^n / A=1\ldots n) \quad (1.7)$$

são n vetores linearmente independentes de T_P, para $(\lambda^\alpha_{(A)})$ linearmente independentes. Para verificar a independência linear de (1.7) tomamos a combinação linear

$$C^A\, \lambda^\alpha_{(A)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_P = 0$$

e aplicamos às n-funções x^β. Obtemos

$$0 = C^A = \lambda^\alpha_{(A)} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}\right)_P = \delta^\beta_\alpha \lambda^\alpha_{(A)} C^A = \lambda^\beta_{(A)} C^A$$

o que implica, por independência linear de $(\lambda^\alpha_{(A)})$, que $C^A = 0$, $A=1\ldots n$.

Vamos agora mostrar que qualquer vetor $L \in T_P$ pode ser expresso, num sistema de coordenadas admissível em P, como

(*) De fato, de (ii) e (iii) temos
$X(c) = cX(1) = cX(1.1) = c(1X(1) + X(1)1) = 2cX(1) = 2X(c)$.

$$L = L^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_P \quad , \quad L^{\alpha} = Lx^{\alpha} \tag{1.8}$$

Já vimos que, para qualquer função constante c, temos $Lc = 0$. Seja f uma função diferenciável definida em P e sua vizinhança. Para pontos próximos de P, podemos expressar f como

$$f(x) = f(x_P) + c_{\alpha}(x^{\alpha}-x^{\alpha}_P) + (x^{\alpha}-x^{\alpha}_P)\ (x^{\beta}-x^{\beta}_P)\gamma_{\alpha\beta}\ (x)$$

onde $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ são funções diferenciáveis definidas em P, x^{α}_P são as coordenadas de P e $c_{\alpha} = (\partial f/\partial x^{\alpha})_P$. Aplicando L a f, e tendo em conta que é um operador linear, temos

$$Lf = Lf(x_P)\ c_{\alpha}\ L(x^{\alpha}-x^{\alpha}_P) + L((x^{\alpha}-x^{\alpha}_P)(x^{\beta}-x^{\beta}_P)\gamma_{\alpha\beta}(x))$$

Como $f(x_P)$ é constante, o primeiro termo se anula. Usando a propriedade (iii), a última parcela calculada em P é nula porque

$$L((x^{\alpha}-x^{\alpha}_P)(x^{\beta}-x^{\beta}_P)\gamma_{\alpha\beta}(x)) = \left[L(x^{\alpha}-x^{\alpha}_P)\right]\left[(x^{\beta}-x^{\beta}_P)\gamma_{\alpha\beta}\right]_P +$$

$$+ L(x^{\beta}-x^{\beta}_P)\left[(x^{\alpha}-x^{\alpha}_P)\gamma_{\alpha\beta}\right]_P + L(\gamma_{\alpha\beta})\left[(x^{\alpha}-x^{\alpha}_P)\ (x^{\beta}-x^{\beta}_P)\right]_P = 0$$

Temos, então,

$$Lf = (L\ x^{\alpha})\ (\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}})_P$$

o que implica

$$L = (L\ x^{\alpha})\ (\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_P \tag{1.8}$$

Desta forma, os n-vetores linearmente independentes

$\underset{(A)}{D}P$, definidos em (1.7), constituem uma base para T_P. T_P tem portanto dimensão n (a mesma dimensão da variedade) e qualquer $X \in T_P$ pode ser expresso

$$X = \sum_{A=1}^{n} X^A \underset{(A)}{D}P \qquad (1.9)$$

Para $\lambda^{\alpha}_{(A)} = \delta^{\alpha}_{A}$, os vetores (1.7) são denominados vetores de coordenadas, e constituem a chamada base canônica, ou <u>base de coordenadas</u>,

$$\underset{(A)}{D}P = (\frac{\partial}{\partial X^A})_P \qquad (1.10)$$

tangentes às linhas de coordenadas.

<u>Nota 2</u>: Se (y) é uma outra carta em P, podemos utilizar (1.8) para determinar o efeito de transformação de coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = (\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}})_P \frac{\partial}{\partial y^{\beta}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} = (\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{\alpha}})_P \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \qquad (1.11)$$

Lx^{α} e Ly^{α} se transformam inversamente às suas respectivas bases (1.11)

$$Lx^{\alpha} = (\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}})_P \, Ly^{\beta} \quad , \quad Ly^{\alpha} = (\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}})_P \, Lx^{\beta} \qquad (1.12)$$

<u>Um campo de vetores tangentes X em *M*</u> pode ser descrito como uma coleção de vetores tangentes X_P, um em cada ponto $P \in M$. Podemos expressar o campo X como

$$X = \xi^{\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \qquad (1.13)$$

onde $\xi^{\alpha}(x)$ são definidas por $\xi^{\alpha}(x) = Xx^{\alpha}$, que assume os valores $\xi^{\alpha}(x_P)$ para cada $P \in M$. X é também denominado uma transformação infinitesimal sobre M. Um campo vetorial X é diferenciável se as funções $\xi^{\alpha}(x)$ forem diferenciáveis nas coordenadas x^{α}. Sob as transformações de coordenadas (1.1), $\xi^{\alpha}(x) \rightarrow \overline{\xi}^{\alpha}(x) = \dfrac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \xi^{\rho}(x)$.

Seja T_P o espaço vetorial tangente em P e seja $\underset{(A)}{D}{}_P = \delta^{\alpha}_{A} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_P$ a base canônica de T_P. Designaremos <u>espaço dual T^*_P</u> de T_P ao espaço vetorial das aplicações lineares de T_P em $\mathbb{R}$,

$$T^*_P : T_P \rightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

onde para um dado $\xi \in T^*_P$,

$$X \rightarrow \langle X, \xi \rangle \in \mathbb{R}$$

para todo $X \in T_P$. Temos portanto definido o produto bilinear sobre $\mathbb{R}$,

$$\langle X, \xi \rangle \in \mathbb{R}$$

para todo $X \in T_P$, $\xi \in T^*_P$. É um resultado bem conhecido da álgebra linear que T^*_P tem a mesma dimensão de T_P e que, se $\{\underset{(A)}{D}{}_P\}$ é uma base para T_P, existe uma base para T^*_P satisfazendo

$$\langle D_{(B)} , d^{(A)} \rangle = \delta^{A}_{B} \qquad (1.14)$$

$\{d^{(A)}\}$ é chamada base dual da base $\{D_{(A)}\}$ e é univocamente determinada por (1.14).

Toda função f, diferenciável em P, define uma forma linear sobre T_P por

$$X \to Xf = \lambda^{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\right)_P$$

Denotamos esta aplicação de T_P em $\mathbb{R}$ por df. Assim df é o elemento de T_P^* definido por

$$\langle X, df \rangle = Xf \tag{1.15}$$

No sistema de coordenadas considerado em P, os elementos $\{dx^{\alpha}\}$ formam uma base de T_P^*, porque eles pertencem a T_P^* (tome $f \equiv x^{\alpha}$, para um dado α; $dx^{\alpha} \equiv df$) e satisfazem

$$\langle \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} , dx^{\beta} \rangle = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)_P = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{1.16}$$

constituindo portanto uma base dual à base $\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\}$. Os elementos de T_P^* são chamados <u>diferenciais em P</u> e podem ser expressos da forma $\omega = \omega_{\alpha} dx^{\alpha}$. Usando a bilinearidade, temos

$$\langle \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} , \omega \rangle = \omega_{\alpha} \langle \partial_{\rho}, dx^{\alpha} \rangle = \omega_{\rho} \tag{1.17}$$

e daí

$$\omega = \langle \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} , \omega \rangle \, dx^{\rho} \tag{1.18}$$

<u>Exercício</u>: Mostre que para qualquer vetor $X \in T_P$

$$X = \langle X, dx^{\alpha} \rangle \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_P \quad .$$

Podemos claramente ver que T_P^* é o espaço de todos os <u>vetores covariantes</u> em P, análogo ao fato de T_P ser o espaço de todos os <u>vetores contravariantes</u> em P. Notemos que para todos $X \in T_P$, $\omega \in T_P^*$

$$<X,\omega> = X^\alpha \omega_\alpha$$

que é independente do sistema de coordenadas em P, sendo a operação usual de contração de um vetor contravariante com um vetor covariante em P.

Exercício: mostre que, por uma mudança de carta em P, ω_ρ definido em (1.17) se transforma como um vetor covariante.

Uma 1-forma diferencial ω sobre M é, por definição, uma coleção de diferenciais ω_P, uma em cada ponto P. Um exemplo de uma 1-forma é a coleção de diferenciais df, onde f é uma função diferenciável definida sobre M. Esta forma será denotada também por df, sem ambiguidade significando a forma ou seu valor em um ponto particular. Analogamente a um campo de vetores tangentes X, que podíamos expressar por

$$X = \xi^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad (1.13)$$

uma forma ω pode ser expressa

$$\omega = \omega_\alpha(x)\, dx^\alpha \quad , \qquad (1.19)$$

com $< \frac{\partial}{\partial x^\alpha} , dx^\beta> = \delta_\alpha^\beta$ e

$$X = <X,dx^\alpha> \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \omega = <\frac{\partial}{\partial x^\alpha} ,\omega> dx^\alpha \quad .$$

Notemos que $\omega_\alpha(x) = < \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ,\omega>$ está bem definida, no sentido de que, em qualquer ponto particular P da variedade, ela assume o seu valor (1.17), $\omega_\alpha(P) = \langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \omega_P \rangle$. Uma forma ω é dita diferenciável se as funções $\omega_\alpha(x)$ são diferenciáveis.

<u>Produto Exterior</u> - <u>Formas Diferenciais de Ordem Mais Alta</u>

Sejam α e β duas 1-formas em P. Denominamos <u>produto exterior Λ</u> (ou produto de Grassmann) de α por β , em P, à aplicação linear de $T_P x T_P$ em $\mathbb{R}$,

$$(\alpha \Lambda \beta)_P : T_P \Lambda T_P \to \mathbb{R}_1$$

definida por

$$\alpha \Lambda \beta(X_1, X_2) = \langle \alpha, X_1 \rangle \langle \beta, X_2 \rangle - \langle \beta_1 X_1 \rangle \langle \alpha, X_2 \rangle \tag{1.20}$$

para todo $(X_1, X_2) \in T_P \times T_P$. De (1.20) decorrem imediatamente as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \alpha \Lambda \beta &= - \beta \Lambda \alpha \\ (a\alpha+\beta)\Lambda\gamma &= a(\alpha\Lambda\gamma) + \beta\Lambda\gamma \end{aligned} \tag{1.21}$$

para α, β e γ 1-formas, e $a \in \mathbb{R}$. Tomando $\{dx^\alpha\}$ como base para T_P^*, e usando as propriedades (1.21), podemos expressar $(\alpha\Lambda\beta)_P$ como

$$(\alpha\Lambda\beta)_P = (\alpha_\lambda \beta_\rho - \alpha_\rho \beta_\lambda)_P \, dx^\lambda \Lambda dx^\rho \tag{1.22}$$

Em particular, tomando $\left\{ \left[(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_P , (\frac{\partial}{\partial x^\beta})_P \right] \right\}$ como base para $T_P \times T_P$, calculamos por (1.20)

$$dx^\lambda \Lambda dx^\rho \left[(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_P , (\frac{\partial}{\partial x^\beta})_P \right] = \delta^\lambda_\alpha \delta^\rho_\beta - \delta^\rho_\alpha \delta^\lambda_\beta \tag{1.23}$$

e que denotamos por

$$< (\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_P, (\frac{\partial}{\partial x^\beta})_P \Big| dx^\lambda \Lambda dx^\rho > = \delta^\lambda_\alpha \delta^\rho_\beta - \delta^\rho_\alpha \delta^\lambda_\beta \qquad (1.24)$$

Notemos a bilinearidade de (1.24), por construção.

A base $\{dx^\alpha \Lambda dx^\beta | \alpha \neq \beta\}_P$, dual ã base $\left\{ \left[(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}), (\frac{\partial}{\partial x^\beta})_P \right] \right\}$ segundo (1.24), gera o espaço vetorial das <u>2-formas exteriores</u> em P

$$\Omega_{(2)}(P) = \Omega_{\alpha\beta}\ dx^\alpha \ \Lambda\ dx^\beta \qquad (1.25)$$

onde $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$ são coeficientes reais, e podem ser calcula - dos $\Omega_{\alpha\beta} = < (\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_P, (\frac{\partial}{\partial x^\beta})_P \Big| \Omega_{(2)} >$. Definimos uma <u>2-forma diferencial sobre *M*</u> como uma coleção de 2-formas exteriores (1.25), uma em cada ponto P ε *M*, e expressamos

$$\Omega_{(2)} = \Omega_{\alpha\beta}(x)\ dx^\alpha \ \Lambda\ dx^\beta \qquad (1.26)$$

onde $\Omega_{\alpha\beta}(x) = -\Omega_{\beta\alpha}(x)$.

<u>Nota 3</u>: levando em conta (1.19), o lado direito de (1.22) de - determina o campo de aplicações lineares $\alpha\Lambda\beta$ por

$$\alpha\ \Lambda\ \beta = (\alpha_\lambda(x)\beta_\rho(x) - \alpha_\rho(x)\beta_\lambda(x))\ dx^\lambda\ \Lambda\ dx^\rho \qquad (1.27)$$

que em cada ponto P ε *M*, assume o respectivo valor (1.22). Por tanto o produto exterior (1.27), que satisfaz ãs propriedades (1.21), define a <u>2-forma diferencial $\alpha\Lambda\beta$</u> sobre *M* .

Generalizando (1.20), <u>o produto exterior de ordem r</u> em P das r 1-formas dx^α em P ẽ definido como a aplicação linear

$$dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} : \underbrace{T_p \times T_p \times \ldots \times T_p}_{r\text{-vezes}} \to \mathbb{R} \ ,$$

$$dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} (X_1, X_2, \ldots, X_r) = \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_r} <X_1, dx^{\beta_1}> \ldots$$
$$\ldots . <X_r, dx^{\beta_r}> \qquad (1.28)$$

onde o tensor de Kroenecker $\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_r} = +1$, se os índices superiores forem distintos entre si, e uma permutação par dos inferiores; -1, se os índices superiores forem distintos entre si, e uma permutação ímpar dos inferiores; 0, em qualquer outro caso. De (1.28) decorre que os produtos exteriores de ordem r

$$(dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r})_{\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_r}$$

tem as propriedades: (i) linear em cada fator; (ii) completamente anti-simétrico em $(\alpha_1 \ldots \alpha_r)$, e constituem uma base para o espaço vetorial das r-formas exteriores em P,

$$\Omega = \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} \qquad (1.29)$$

onde $\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ são coeficientes reais, completamente anti-simétrico em $(\alpha_1 \ldots \alpha_r)$, e podem ser calculados utilizando-se

$$<\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} , \ldots , \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \Big| \ dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_r}> = \delta^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \qquad (1.30)$$

Uma P-forma diferencial sobre M é uma coleção de p-formas exteriores (1.29), uma em cada ponto $P \in M$, e expressamos

$$\omega = \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) \ dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p} \qquad (1.31)$$

e usando (1.30) para todo $P \in M$, $\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x)$ pode ser calculado

$$\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} , \ldots , \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \middle| \, \omega \right\rangle \qquad (1.32)$$

Pelo que foi visto acima, temos que o produto exterior de uma p-forma $\eta_{(p)}$ por uma q-forma $\mu_{(q)}$ é uma p+q-forma, e as seguintes propriedades podem ser verificadas

(i) $\eta_{(p)} \wedge \mu_{(q)} = (-1)^{pq} \mu_{(q)} \wedge \eta_{(p)}$

(ii) $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$, para ω, η, ξ formas

(iii) para ω_1, ω_2 q-formas e η r-forma, $a \in \mathbb{R}$,

$$(a\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = a(\omega_1 \wedge \eta) + \omega_2 \wedge \eta .$$

<u>Derivada Exterior</u>

A derivada exterior de uma p-forma (1.31) é definida como a p+1-forma

$$d\omega = \frac{\partial \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}{\partial x^\beta} \, dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p} \qquad (1.33)$$

e as seguintes propriedades podem ser verificadas

(i) d é uma operação linear $d(a\omega + b\eta) = a d\omega + b d\eta$, ω, η formas e $a, b \in \mathbb{R}$

(ii) para toda forma ω, $d^2\omega = 0$

(iii) se ω e η são formas, ω de ordem p, então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta .$$

Em particular, notemos que a derivada exterior de uma fun - ção f (0-forma), por (1.33), é a 1-forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha$$

como era de se esperar (cf. (1.15)).

Geometria Riemanniana

No contexto do formalismo acima, podemos introduzir uma métrica em M como o operador bilinear e simétrico g, que a todo par de campos vetoriais (X,Y) sobre M associa um número real em cada ponto $P \in M$, i.e.,

$$\begin{aligned} & g(X,Y)(P) \in \mathbb{R} \\ & g(X,Y) = g(Y,X) \quad , \quad \text{bilinear} \end{aligned} \qquad (1.34)$$

Tomando-se a base $\{D_\alpha\}$ para os campos vetoriais sobre M e a base dual $\{\omega^\alpha\}$ para as 1-formas sobre M, podemos expressar (1.34) como

$$g(X,Y)(P) = \Big[g_{\alpha\beta}(x)\langle X,\omega^\alpha\rangle\langle Y,\omega^\alpha\rangle\Big](P) = g_{\alpha\beta}(x)X^\alpha Y^\beta$$

onde $g_{\alpha\beta} = g(D_\alpha,D_\beta) = g_{\beta\alpha}$. Assim g pode ser expresso de um modo mais usual por

$$g = g_{\alpha\beta}(x)\ \omega^\alpha\omega^\beta \qquad (1.35)$$

onde $\omega^\alpha\omega^\beta(X,Y) = \langle X,\omega^\alpha\rangle\langle Y,\omega^\beta\rangle$, para todo par (X,Y) de campos vetoriais sobre M. O operador (1.35) define o elemento de distância de universo ds^2, no sentido de que dados um ponto P e um ponto infinitesimalmente próximo P+dP, conectados pelo vetor $X = dx^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_P$, o elemento de distância é dado por

$$ds^2 = g(X,X)(P) = g_{\alpha\beta}(P)dx^{\alpha}dx^{\alpha}$$

<u>Nota 4</u>: Dado g, podemos agora estabelecer uma relação entre vetores contravariantes e covariantes. Um vetor X é dito ser <u>o equivalente contravariante de ω</u> se

$$g(X,Y) = \omega(Y) \tag{1.36}$$

para todo vetor Y. Desde que g é suposto não singular (quer dizer, em qualquer base, a matriz $g_{\alpha\beta}$ é não singular), X é unicamente determinado por ω e vice-versa. Numa dada base (1.31) se escreve

$$g_{\alpha\beta}\, X^{\alpha}\, Y^{\beta} = \omega_{\alpha}\, Y^{\beta}$$

e, portanto, o equivalente covariante de X^{α} é dado por

$$\omega_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, X^{\beta} \stackrel{\text{def}}{\equiv} X_{\alpha} ,$$

e a relação inversa

$$X^{\beta} = g^{\beta\rho}X_{\rho} .$$

Assim índices contravariantes e covariantes são mudados um no outro respectivamente pelas matrizes $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$.

Uma variedade M com uma métrica g definida (cf. (1.34), (1.35)) é denominada <u>variedade Riemanniana</u>. De modo a representar o espaço-tempo da Relatividade Geral por uma va -

riedade Riemanniana *M* com métrica g, vamos impor as seguintes restrições

(i) *dim M* = 4

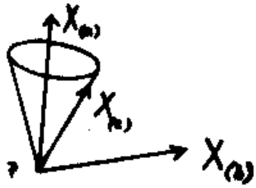
(ii) a variedade *M* é localmente Lorentziana, quer dizer, num dado ponto P é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas (denominadas coordenadas *locais*) *no qual* as componentes da métrica $g_{\alpha\beta}$ assumam localmente (em P) os valores constantes da métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ = = diag (+1, -1, -1, -1).

A condição (ii) poderia ser substituída pela condição equivalente de <u>existência de cones de luz locais</u>. A existência de cones de luz locais implica que a métrica deve ter caráter hiperbólico (assinatura = ±2) e, portanto, pode sempre localmente assumir a forma da métrica Lorentziana da Relatividade Restrita. Quer dizer, numa região suficientemente pequena do espaço-tempo as leis da Relatividade Restrita são válidas e temos a equivalência (local) de efeitos gravitacionais e acelerativos. Estamos assumindo, por princípio, que o campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico $g_{\alpha\beta}(x)$.

<u>Nota 5</u>: a escolha $\eta_{\alpha\beta}$ = diag (+1,-1,-1,-1) é convencional, desde que poderíamos ter tomado diag(-1,+1,+1,+1). O essencial é o caráter hiperbólico que permite a existência de cones de luz locais. Também a forma $\eta_{\alpha\beta}$ = diag(+1,-1,-1,-1) corresponde a tomar localmente coordenadas Cartesianas. Para coordenadas locais tipo nulas e complexas, por exemplo (u,v,x+iy, x-iy), $\eta_{\alpha\beta}$ assume a forma

$$\eta_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 1 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Desde que a variedade admite cones de luz locais (quer dizer, é localmente Lorentziana), num dado ponto P podemos considerar campos de vetores que estão (a) no interior do cone em P; (b) fora do cone em P; (c) sobre o cone em P



Isto equivale a dizer que, num dado ponto P de M, os campos vetoriais em M devem satisfazer

(a') $g(X,X) = g_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta} > 0$; neste caso X é dito ser do tipo-tempo em P, e está no interior do cone local em P;

(b') $g(Y,Y) < 0$. Y é dito ser do tipo-espaço em P e está fora do cone em P.

(c') $g(Z,Z) = 0$. Z é dito ser do tipo nulo, e está sobre o cone em P.

<u>Nota 6</u>: Em geral, vamos considerar aqui campos vetoriais que, se em um ponto ordinário da variedade são de um dado tipo acima, serão do mesmo tipo em toda variedade ou pelo menos uma parte finita dela (um campo vetorial tipo tempo pode -

ria mudar de caráter, ser do tipo nulo , por exemplo,sobre pontos de um horizonte do espaço-tempo).

Vamos selecionar no espaço-tempo M, 4 campos vetoriais ($e_{(A)}$; $A = 0,1,2,3$), sendo $e_{(0)}$ tipo tempo e $e_{(i)}$ ($i = 1,2,3$) tipo-espaço:

$$g(e_{(0)}, e_{(0)}) > 0$$

$$g(e_{(i)}, e_{(i)}) < 0$$

e ortogonais entre si

$$g(e_{(A)}, e_{(B)}) = 0 \tag{1.37}$$

se $A \neq B$.

Sem perda de generalidade, podemos normalizar estes vetores de modo a ter

$$\begin{aligned} g(e_{(0)}, e_{(0)}) &= 1 \\ g(e_{(i)}, e_{(i)}) &= 1 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Usando (1.37) e (1.38) podemos ver que

$$g(e_{(A)}, e_{(B)}) = \eta_{AB} \tag{1.39}$$

onde $\eta_{AB} = \text{diag}(+1,-1,-1,-1)$. Com as propriedades (1.37) e (1.39) podemos ver imediatamente que ($e_{(A)}$; $A = 0,1,2,3$) são linearmente independentes ou, equivalentemente, a matriz 4x4 ($e^{\alpha}_{(A)}$) — construida com as componentes das $e_{(A)}$ na base de coordenadas ($\partial/\partial x^{\alpha}$) — é inversível. Na matriz ($e^{\alpha}_{(A)}$), chamando-se α = índice de linha e (A) = índice de coluna, podemos representar a inversa por

$$(e_{\alpha}^{(A)}) \quad , \quad \begin{array}{l} (A) = \text{índice de linha} , \\ \alpha = \text{índice de coluna} , \end{array} \tag{1.40}$$

(índices latinos maiúsculos e índices gregos minúsculos variam de 0 a 3) de modo que

$$e^{\alpha}_{(A)}\, e^{(A)}_{\rho} = \delta^{\alpha}_{\rho} \tag{1.41}$$

Expressando (1.39) em termos de componentes

$$g_{\alpha\beta}\, e^{\alpha}_{(A)}\, e^{\beta}_{(B)} = \eta_{AB} \tag{1.42}$$

e contraindo com $e^{(A)}_{\rho}$ (já definida via (1.40) e (1.41) temos

$$e^{\beta}_{(B)}\, g_{\rho\beta} = \eta_{AB}\, e^{(A)}_{\rho}$$

ou, finalmente,

$$e_{\rho(B)} \equiv g_{\rho\beta}\, e^{\beta}_{(B)} = \eta_{AB}\, e^{(A)}_{\rho} \tag{1.43}$$

Analogamente, definindo a inversa de η_{AB} por $\eta^{AB} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, obtemos de (1.43)

$$e^{(A)}_{\rho} = \eta^{AB}\, e_{\rho(B)} \tag{1.44}$$

Assim, de (1.43) e (1.44), vemos que os índices latinos maiúsculos — <u>índices de tetradas</u> — são levantados e abaixados respectivamente com as matrizes η^{AB}, η_{AB}, e a contração deles é também feita via matrizes η. Desta forma, relativamente aos índices de tetradas, as matrizes η tem o papel de uma métrica. Na verdade, usando (1.41) em (1.42) temos as relações,

$$\eta_{AB} = e^{\alpha}_{(A)}\, e^{\beta}_{(B)}\, g_{\alpha\beta} \qquad (1.42)$$

$$g_{\alpha\beta} = e^{(A)}_{\alpha}\, e^{(B)}_{\beta}\, \eta_{AB} \quad , \qquad (1.45)$$

que nos permitem a interpretação geométrica de uma tetrada como associada a uma transformação local do sistema de coordenadas (x^{α}) para coordenadas locais ($\overline{X}^{A}$) tal que, *no ponto P considerado*, a métrica assume a forma de Minkowski η_{AB}. Lembrando que, sob $x^{\alpha} \to x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x)$,

$$g_{\alpha\beta} \to g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\beta}}\, g_{\rho\lambda}(x)$$

com transformação inversa

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\, g'_{\rho\sigma} \quad ,$$

em (1.42) e (1.45) podemos identificar, em P,

$$e^{\alpha}_{(A)} \overset{P}{=} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{X}^{A}} \qquad , \qquad e^{(A)}_{\alpha} \overset{P}{=} \frac{\partial \overline{X}^{A}}{\partial x^{\alpha}} \qquad (1.46)$$

onde ($\overline{X}^{A}$) são coordenadas locais, de um referencial de Lorentz local (nele a métrica assume em P os valores η_{AB}). Observadores ligados a tais referências são denominados observadores de Lorentz locais. Notemos que as expressões (1.46) são válidas somente no ponto P e não podem, em geral, ser integradas – quer dizer, *para campos de tetradas* dados $e^{\alpha}_{(A)}(X)$, encontrar as funções de transformação $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\overline{X}^{A})$ e $\overline{X}^{A} = \overline{X}^{A}(x^{\alpha})$. Se isto for possível, as tetradas são ditas integráveis e o espaço-tempo tem curvatura nula; $g_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski expressa em coordenadas curvilíneas x^{α}.

A idéia de referencial local e tetradas constituem um instrumento poderoso no estudo local da geometria do espaço-tempo, e no estudo da interação da métrica com campos de spin 1/2, como veremos adiante.

Nota 7: as condições (1.37) de ortogonalidade reduzem o número de componentes independentes (por ponto) da matriz $e_\alpha^{(A)}(X)$ de 16 para 10, que é o número de componentes independentes da métrica $g_{\alpha\beta}(x)$. Desta forma, dar o campo de tetradas $e_\alpha^{(A)}(x)$ corresponde a dar todas as informações sobre a métrica do espaço-tempo (cf. (1.45)).

Nota 8: associada à estrutura local de Minkowski (1.42), existe uma arbitrariedade local na escolha da base de tetradas $e_\alpha^{(A)}(x)$. As expressões (1.42) e (1.45) ficam inalteradas por transformações de Lorentz locais $L^A{}_B(x)$ definidas por

$$L^A{}_B(x)\ \eta_{AC}\ L^C{}_D(x) = \eta_{BD} \tag{1.47}$$

que correspondem a uma transformação da base local

$$e_\alpha^{(A)} \to \bar{e}_\alpha^{(A)}(x) = L^A{}_B(x)\ e_\alpha^{(B)}(x) \tag{1.48}$$

de modo que (1.45) pode ser equivalentemente escrita

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha^{(A)}\ e_\beta^{(B)}\ \eta_{AB} = \bar{e}_\alpha^{(A)}\ \bar{e}_\beta^{(B)}\ \eta_{AB} \quad .$$

2 - *CÁLCULO COM FORMAS*

Num sistema de coordenadas admissível em M, vamos considerar o operador distância dado por

$$g = g_{\alpha\beta}(x)\ dx^{\alpha}\ dx^{\beta} \tag{2.1}$$

onde dx^{α} são as 1-formas duais aos elementos da base natural $(\partial/\partial x^{\alpha})$. Por uma escolha de tetradas tal que

$$g_{\alpha\beta}(x)\ dx^{\alpha}\ dx^{\beta} = \eta_{AB}$$

podemos sempre expressar (2.1) como

$$ds^2 = \eta_{AB}\ \theta^A\ \theta^B \tag{2.2}$$

onde

$$\theta^A = e^{(A)}_{\alpha}\ dx^{\alpha} \quad . \tag{2.3}$$

e, inversamente,

$$dx^{\alpha} = e^{\alpha}_{(A)}\ \theta^A \tag{2.4}$$

<u>Nota 9</u>: embora muitas expressões obtidas a seguir prescindam do uso de um sistema de coordenadas, o uso de coordenadas é operacional desde que, na prática, sempre usamos um sistema de coordenadas para calcular.

Tínhamos definido derivada exterior de uma P-forma por

$$d\Omega_{(P)} = \frac{\partial\Omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)}{\partial x^{\beta}}\ dx^{\beta} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p}$$

Como nos restringimos sempre a uma variedade em que a conexão é simétrica $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$, a definição acima não se altera se substituirmos a derivação simples por derivação covariante

$$d\Omega_{(P)} = \Omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p\|\beta}(x)\, dx^{\beta} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p} \tag{2.5}$$

Diferenciando (2.3) exteriormente,

$$d\theta^{A} = e^{(A)}_{\alpha\|\beta}\, dx^{\beta} \wedge dx^{\alpha} \quad , \tag{2.6}$$

e, usando (2.4) podemos expressar (2.6) em termos dos θ's,

$$d\theta^{A} = e^{\beta}_{(B)}\, e^{\alpha}_{(C)}\, e^{(A)}_{\alpha\|\beta}\, \theta^{B} \wedge \theta^{C} \tag{2.7}$$

Definindo os objetos

$$\gamma^{A}{}_{BC} = -\, e^{(A)}_{\alpha\|\beta}\, e^{\alpha}_{(B)}\, e^{\beta}_{(C)} \quad , \tag{2.8}$$

denominados <u>coeficientes de rotação de Ricci</u>, (2.7) pode ser expressa

$$d\theta^{A} = \gamma^{A}{}_{BC}\, \theta^{B} \wedge \theta^{C} \tag{2.9}$$

Notemos de (2.8) que, pela escolha η_{AB} constantes,

$$\gamma_{ABC} = -\, \gamma_{BAC} \tag{2.10}$$

Definindo as <u>1-formas de rotação</u>

$$\omega^{A}{}_{B} = \gamma^{A}{}_{BC}\, \theta^{C} \quad , \tag{2.11}$$

(2.9) pode ser reescrita

$$d\theta^A = - \omega^A{}_B \wedge \theta^B \tag{2.12}$$

que é chamada a <u>Primeira Equação de Estrutura de Cartan</u>.

<u>Nota 10</u>: consideremos uma base de 1-formas θ^A, associada a uma base de tetradas $e^{(A)}_\alpha(x)$ ($\theta^A = e^{(A)}_\alpha\, dx^\alpha$). Nesta base, a métrica assume componentes

$$g_{AB} = e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)}\, g_{\alpha\beta}$$

Diferenciando exteriormente

$$d(g_{AB}) = e^\alpha_{(A)\|\rho}\, e^\beta_{(B)}\, g_{\alpha\beta}\, dx^\rho + e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)\|\rho}\, g_{\alpha\beta}\, dx^\rho \tag{2.13}$$

Notemos que, como g_{AB} é um escalar,

$$d(g_{AB}) = g_{AB|\rho}\, dx^\rho \equiv g_{AB\|\rho}\, dx^\rho$$

e foi a última igualdade que usamos. Notemos também que $g_{\alpha\beta\|\rho} = 0$. Se tivéssemos tomado a primeira igualdade

$$\begin{aligned} d(g_{AB}) &= e^\alpha_{(A)|\rho}\, e^\beta_{(B)}\, g_{\alpha\beta}\, dx^\rho + e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)|\rho}\, g_{\alpha\beta}\, dx^\rho + \\ &+ e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)}\, g_{\alpha\beta|\rho}\, dx^\rho = (e^\alpha_{(A)|\rho}\, e^\beta_{(B)} + e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)|\rho}) g_{\alpha\beta} dx^\rho + \\ &+ e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)}\, (g_{\alpha\lambda}\, \Gamma^\lambda_{\beta\rho} + g_{\beta\lambda}\, \Gamma^\lambda_{\alpha\rho})\, dx^\rho = (e^\alpha_{(A)\|\rho}\, e^\beta_{(B)} + \\ &+ e^\alpha_{(A)}\, e^\beta_{(B)\|\rho})\, g_{\alpha\beta}\, dx^\rho \end{aligned}$$

que reproduz (2.13). Usando a definição de γ_{ABC} podemos escrever

$$d(g_{AB}) = \omega_{AB} + \omega_{BA} \tag{2.14}$$

onde $\omega_{AB} = g_{AC}\,\omega^{C}{}_{B}$. Como estamos sempre tomando $(e_{\alpha}^{(A)})$ tal que g_{AB} = constante, temos de (2.14)

$$\omega_{AB} = -\,\omega_{BA} \tag{2.15}$$

que reproduz (2.10).

<u>Nota 11</u>: numa base em que as tetradas são escolhidas $e_{\alpha}^{(A)} = \delta_{\alpha}^{A}$, de (2.8) podemos identificar

$$\gamma^{A}{}_{BC} = \left\{{A \atop BC}\right\}$$

quer dizer, neste referencial $\theta^{A} = dx^{A}$, os coeficientes de rotação de Ricci são identificados com os símbolos de Christoffel.

Os coeficientes $\omega^{A}{}_{B}$ estão unicamente definidos — para uma dada base θ^{A} — por (2.12) e (2.15). De fato, de (2.12) podemos ler diretamente

$$C_{ABC} = \gamma_{ABC} - \gamma_{ACB}\ , \tag{2.16}$$

onde estamos expressando $d\theta^{A} = \frac{1}{2}\,C^{A}{}_{BC}\,\theta^{B}\wedge\theta^{C}$. Para $\omega_{AB} = \gamma_{ABC}\,\theta^{C} = -\,\omega_{BA}$, (2.16) pode ser resolvido unicamente para γ_{ABC}. Para isto escrevemos

$$C_{ABC} = \gamma_{ABC} - \gamma_{ACB}$$
$$C_{BAC} = \gamma_{BAC} - \gamma_{BCA}$$
$$C_{CAB} = \gamma_{CAB} - \gamma_{CBA}$$

Calculando

$$- C_{ABC} + C_{BAC} + C_{CAB} = (-\gamma_{ABC}+\gamma_{BAC}) + (\gamma_{ACB}+\gamma_{CAB}) - (\gamma_{BCA}+\gamma_{CBA})$$

e usando a simetria $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$, que decorre de (2.15), temos

$$\gamma_{ABC} = \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CAB}) \qquad (2.17)$$

<u>Exercício</u>: Usando que $C_{ABC} = -C_{ACB}$, mostre que γ_{ABC}, definido por (2.17), tem a simetria $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$.

<u>Nota 12</u>: Em geral, para determinar as 1-formas $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ não usamos (2.17), desde que podemos intuir, de modo mais ou menos direto, suas expressões a partir de (2.12). Este não é o caso para métricas com termos cruzados, onde a expressão (2.17) se torna indispensável.

Seja a 1-forma de rotação

$$\omega^A{}_B = \gamma^A{}_{BC}\ \theta^C = \gamma^A{}_{BC}\ e^{(C)}_\alpha\ dx^\alpha \qquad (2.18)$$

Diferenciando exteriormente (2.18)

$$d\omega^A{}_B = (\gamma^A{}_{BC}\ e^{(C)}_\alpha)_{\|\rho}\ dx^\rho \wedge dx^\alpha \qquad (2.19)$$

Em (2.19), vamos desenvolver $(\gamma^A{}_{BC}\ e^{(C)}_\alpha)_{\|\rho}$:

$$(\gamma^A{}_{BC}\ e^{(C)}_\alpha)_{\|\rho} = -(e^{(A)}_{\mu\|\nu}\ e^\mu_{(B)}\ e^\nu_{(C)}\ e^{(C)}_\alpha)_{\|\rho} = -(e^{(A)}_{\mu\|\alpha}\ e^\mu_{(B)})_{\|\rho} =$$

$$= - e^{(A)}_{\mu\|\alpha\|\rho}\, e^{\mu}_{(B)} - e^{(A)}_{\mu\|\alpha}\, e^{\mu}_{(B)\|\rho}$$

e voltando a (2.19)

$$d\omega^{A}{}_{B} = - e^{(A)}_{\mu\|\alpha\|\rho}\, e^{\mu}_{(B)}\, dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} - e^{(A)}_{\mu\|\alpha}\, e^{\mu}_{(B)\|\rho}\, dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} \qquad (2.20)$$

O tensor de curvatura $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\rho}$ é definido por

$$V_{\mu\|\alpha\|\beta} - V_{\mu\|\beta\|\alpha} = + R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}\, V_{\lambda} \qquad (2.21)$$

para qualquer campo vetorial V. Usando (2.21) em (2.20), bem como $dx^{\alpha} = e^{\alpha}_{(A)}\, \theta^{A}$, obtemos

$$d\omega^{A}{}_{B} = - \frac{1}{2} R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\rho}\, e^{(A)}_{\lambda}\, e^{\mu}_{(B)}\, e^{\rho}_{(F)}\, e^{\alpha}_{(P)}\, \theta^{F} \wedge \theta^{P} +$$

$$- e^{(A)}_{\mu\|\alpha}\, e^{\mu}_{(B)\|\rho}\, e^{\rho}_{(F)}\, e^{\alpha}_{(P)}\, \theta^{F} \wedge \theta^{P}$$

ou

$$d\omega^{A}{}_{B} = - \frac{1}{2} R^{A}{}_{BPF}\, \theta^{F} \wedge \theta^{P} - \gamma^{AD}{}_{Q}\, \gamma_{BDP}\, \theta^{P} \wedge \theta^{Q}$$

ou

$$\frac{1}{2} R^{A}{}_{BCD}\, \theta^{C} \wedge \theta^{D} = d\omega^{A}{}_{B} + \omega_{BD} \wedge \omega^{AD} \qquad (2.22)$$

Definindo as <u>2-formas de curvatura</u> por

$$\Omega^{A}{}_{B} = \frac{1}{2} R^{A}{}_{BCD}\, \theta^{C} \wedge \theta^{D} \qquad (2.23)$$

(2.22) pode ser escrita

$$\Omega^{A}{}_{B} = d\omega^{A}{}_{B} + \omega^{A}{}_{C} \wedge \omega^{C}{}_{B} \qquad (2.24)$$

(2.24) é denominada a <u>Segunda Equação de Estrutura de Cartan</u>.

$\Omega^A{}_B$ pode ser diretamente obtido quando se tem calculado $d\omega^A{}_B$ e $\omega^A{}_B$; e, por (2.23), podemos obter por uma leitura direta todas as componentes da curvatura $R^A{}_{BCD}$.

Exercício: prove a simetria $\Omega_{AB} = - \Omega_{BA}$.

Identidades e Condições de Integrabilidade

Uma p-forma Ω é dita integrável (ou exata) se existe uma (p-1)-forma ω tal que

$$\Omega = {}^{*}d\omega \tag{2.25}$$

A condição de integrabilidade da forma Ω pode então ser expressa

$$d\Omega = d^2\omega = 0 \tag{2.26}$$

Assim, a condição de integrabilidade das 2-formas $d\theta^A$ é expressa pela identidade

$$d^2\theta^A = 0 \tag{2.27}$$

que é equivalente à condição de os coeficientes de rotação de Ricci serem integráveis. Desenvolvendo (2.27)

$$d^2\theta^A = d(d\theta^A) = d(-\omega^A{}_B \wedge \theta^B)$$

ou

$$d^2\theta^A = - d\omega^A{}_B \wedge \theta^B - (-1)\ \omega^A{}_B \wedge d\theta^B = 0$$

Usando (2.24)

$$(-\Omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B) \wedge \theta^B + \omega^A{}_B \wedge (-\omega^B{}_C \wedge \theta^C) = 0$$

ou

$$\Omega^A{}_B \wedge \theta^B = 0 \qquad (2.28)$$

A expressão (2.28) é equivalente à condição de integrabilidade de $d\theta^A$, e contém uma identidade para o tensor de curvatura. De fato, usando (2.23) em (2.28) obtemos

$$R_{ABCD}\ \theta^C \wedge \theta^D \wedge \theta^B = 0$$

ou

$$R_{A[BCD]} = 0 \qquad (2.29)$$

Nota 13: uma p-forma Ω é dita fechada se ela satisfaz $d\Omega = 0$.

Uma forma exata é sempre fechada, mas o inverso nem sempre vale, quer dizer, $d\Omega = 0$ não implica necessariamente que existe globalmente uma (p-1)-forma Ω tal que $\Omega = d\omega$. Com relação ao problema inverso local, temos o denominado Lema de Poincaré: "sobre um conjunto aberto $U \subset M$, homeomorfo a $\mathbf{R}^n$, todas as p-formas fechadas ($p \geq 1$) são exatas". Desde que uma variedade tem localmente a estrutura de $\mathbf{R}^n$, localmente sempre existe uma (p-1)-forma ω — associada a uma p-forma Ω fechada — tal que $\Omega = d\omega$, mas globalmente tal ω não existe em geral. Isto porque, para alguns domínios topologicamente mais complicados que $\mathbf{R}^n$, o lema de Poincaré não é válido. Vamos ilustrar isto com um exemplo. Vamos considerar uma variedade espaço-tempo com métrica expressa em coordenadas locais (t,r,θ,ϕ), $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r < \infty$,

$$ds^2 = \eta_{AB}\ \theta^A\ \theta^B \quad .$$

onde

$$
\begin{aligned}
\theta^0 &= A_0(dt - 2\lambda_1 \cos\theta d\phi)\\
\theta^1 &= B(r)d\theta\\
\theta^2 &= B(r)\sin\theta d\phi\\
\theta^3 &= dr
\end{aligned}
\qquad (2.30)
$$

A variedade tem a topologia $S^3 \times R$, quer dizer, as seções tipo-tempo r = const. tem a estrutura da 3-esfera S^3. (2.30) é solução das equações de Einstein-Maxwell, para $B^2 = r^2 + 6A_0^2\lambda_1^2$, onde A_0, λ_1 são constantes que aparecem em (2.30). O campo eletromagnético F_{AB}, no referencial local determinado por (2.30), tem as componentes não nulas

$$F_{23} = \frac{\Sigma}{B^2} \qquad , \qquad k\,\Sigma^2 = 8\,A_0{}^2\,\lambda_1{}^2$$

e é solução das equações de Maxwell neste espaço-tempo,

$$F_{[\alpha\beta\|\lambda]} = 0 \qquad (2.31)$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} = j^\alpha \qquad (2.32)$$

onde $j^\alpha = -\dfrac{2\lambda_1\Sigma}{B^4}\,\delta^\alpha_0$. Expressando $F_{\alpha\beta} = e^{(A)}_\alpha e^{(B)}_\beta F_{AB}$ como a 2-forma $F = F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta = \Sigma \sin\theta d\theta \wedge d\phi$, (2.31) se escreve

$$dF = 0 \qquad (2.33)$$

quer dizer, F é uma <u>forma</u> <u>fechada</u>. Notando que F é proporcional ao elemento de superfície da esfera unitária σ, temos do teorema de Stokes que

$$\int_V dF = \int_\sigma F = 4\pi\Sigma \qquad (2.34)$$

e que é diferente de zero porque $\Sigma \neq 0$. O resultado (2.34) é a base da demonstração de que monopolos magnéticos estão presentes como fonte dos campos eletromagnéticos, e isto é uma consequência direta de o Lema de Poincaré não valer globalmente sobre o espaço-tempo.

Exercício: Mostre que todas as simetrias do tensor de curvatura estão contidas em

$$\Omega_{AB} = -\Omega_{BA} \quad , \quad \Omega^A{}_B \wedge \theta^B = 0$$

Uma outra identidade pode ser obtida a partir de (2.24) — são as identidades de Bianchi. Diferenciando exteriormente (2.24),

$$d\Omega^A{}_B = d(d\omega^A{}_B) + d(\omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B)$$

ou

$$d\Omega^A{}_B = d\omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B - \omega^A{}_C \wedge d\omega^C{}_B$$

e, usando novamente (2.24)

$$d\Omega^A{}_B = (\Omega^A{}_C - \omega^A{}_F \wedge \omega^F{}_C) \wedge \omega^C{}_B - \omega^A{}_C \wedge (\Omega^C{}_B - \omega^C{}_F \wedge \omega^F{}_B)$$

ou, finalmente

$$d\Omega^A{}_B = \Omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B - \omega^A{}_C \wedge \Omega^C{}_B \tag{2.35}$$

Exercício: mostre que as identidades (2.30) são equivalentes às identidades de Bianchi

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta\|\lambda]} = 0 \qquad (2.36)$$

<u>Nota 14</u>: a identidade (2.28) pode ser analogamente expressa

$$0 = d\left(\frac{1}{2}\, C^{A}{}_{BC}\, \theta^{B} \wedge \theta^{C}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{BC\|\rho}\, e^{\rho}_{(N)}\, \theta^{N}\wedge\theta^{B}\wedge\theta^{C} + \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{BC}\, (d\theta^{B} \wedge \theta^{C}) - \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{BC}\theta^{B} \wedge d\theta^{C}$$

e, após alguma manipulação,

$$\left\{\partial_{N}\, C^{A}{}_{BC} - \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{QC}\, C^{Q}{}_{BN} - \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{QN}\, C^{Q}{}_{CB}\right\} \theta^{N} \wedge \theta^{B} \wedge \theta^{C} = 0$$

ou

$$-\,\partial_{[N}\, C^{A}{}_{BC]} + \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{Q[C}\, C^{Q}{}_{BN]} + \frac{1}{2}\, C^{A}{}_{Q[N}\, C^{Q}{}_{CB]} = 0 \qquad (2.37)$$

onde $\partial_{N}\, C^{A}{}_{BC} = e^{\alpha}_{(N)}\, C^{A}{}_{BC\|\alpha}$. No caso de a variedade ser um grupo de Lie e a base (θ^{A}) ter sido escolhida dual à base dos geradores (X_{A}) da álgebra do grupo, $\langle X_{B},\theta^{A}\rangle = \delta^{A}{}_{B}$, $C^{A}{}_{BC}$ são as constantes de estrutura da álgebra e (2.37) se reduz a

$$C^{A}{}_{[QC}\, C^{Q}{}_{BN]} = 0 \qquad (2.38)$$

que é denominada a identidade de Jacobi da álgebra (X_{A}).

3 - *O GRUPO DE LORENTZ LOCAL E A ESTRUTURA SPINORIAL LOCAL*

Como já vimos, o caráter hiperbólico ou Lorentziano do espaço-tempo da Relatividade Geral permite definir referenciais de Lorentz locais, associados a uma escolha de tetradas $(e^{(A)}_{\alpha})$, tal que localmente a métrica assuma os valo. constantes da Relatividade Restrita

$$\eta_{AB} = g_{\alpha\beta}\, e^{\alpha}_{(A)}\, e^{\beta}_{(B)} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1) \tag{3.1}$$

(cf. (1.37) e (1.40)) e o operador distância pode ser expresso

$$g = \eta_{AB}\, \theta^{A}\, \theta^{B} \tag{3.2}$$

Na verdade, a base de tetradas pode sempre ser escolhida <u>independentemente</u> em cada ponto do espaço-tempo e, associada à estrutura local de Minkowski (3.1), (3.2), existe uma arbitrariedade nesta escolha da base de tetradas e/ou dos (θ^{A}). As expressões (3.1), (3.2) ficam inalteradas por transformações de Lorentz locais definidas por

$$L^{A}{}_{D}(x)\, \eta_{AB}\, L^{B}{}_{F}(x) = \eta_{DF} \tag{3.3}$$

que correspondem a uma transformação na base local

$$\theta^{A} \rightarrow \overline{\theta}^{A} = L^{A}{}_{B}(x)\, \theta^{B} \tag{3.4}$$

Deste modo as tetradas (base local) ficam definidas a menos de uma transformação de Lorentz local, <u>que pode ser feita independentemente em cada ponto da variedade</u>.

Tendo em vista a estrutura Minkowskiana (3.2) e o grupo de Lorentz local, podemos então transportar, naturalmente e independentemente para cada ponto da variedade, toda a teoria de representação do grupo de Lorentz.

Nota 15: é um fato bem conhecido que a álgebra dos geradores do trupo de Lorentz restrito(*) pode ser construída a partir de duas sub álgebras disjuntas, isomorfas à álgebra dos geradores do grupo das rotações espaciais. Assim todas as representações irredutíveis de dimensão finita do grupo de Lorentz restrito podem ser obtidas diretamente, uma vez que se conheçam as representações irredutíveis do grupo de rotações. Estas últimas podem ser caracterizadas por um único número j, que assume valores inteiros ou semi-inteiros de 0 a ∞. O espaço base para a representação de ordem j tem dimensão $2j + 1$. Desta forma, as representações irredutíveis de dimensão finita do grupo de Lorentz restrito podem ser caracterizadas por dois inteiros ou semi-inteiros (j,j'), que assumem valores de 0 a ∞, e cujo espaço-base correspondente tem dimensão $(2j+1)(2j'+1)$. As representações (1/2, 0) e (0, 1/2) definem spinores a duas componentes: spinores a duas componentes são objetos que se transformam sob matrizes de Lorentz das representações (1/2, 0) e (0, 1/2). A representação (1/2,1/2) corresponde à representação usual das matrizes de Lorentz 4 x 4 e atua sobre vetores de 4 componentes. A representação (0,0) é a representação

(*) Vamos nos restringir ao grupo de Lorentz homogêneo, próprio (det $L=+1$) e ortócrono ($L_0^0 \geq 1$), ao qual nos referimos como grupo de Lorentz restrito.

escalar. Com relação às operações de inversão espacial e conjugação complexa, temos: (i) se um objeto se transforma sob uma matriz da representação (j,j'), após uma inversão espacial ele vai se transformar sob (j',j); (ii) se um objeto se transforma sob uma matriz da representação (j,j'), por uma conjugação complexa ele vai se transformar sob (j',j). Então se quisermos incluir inversão espacial e conjugação complexa, devemos ter um espaço base de dimensão $2(2j+1)(2j'+1)$, soma direta $(j,j') \oplus (j',j)$ dos espaços base de representação (jj') e $(j'j)$. Embora as representações $(0,1/2)$ e $(1/2,0)$ não sejam equivalentes, pela propriedade (ii) acima é sempre possível encontrar uma base de representação (ou, equivalentemente, uma transformação de similaridade) tal que $(0, 1/2)^* \equiv (1/2, 0)$, onde $*$ indica conjugação complexa. Neste caso a representação $(1/2, 0)$ é dita representação conjugada de $(0, 1/2)$ e, neste sentido, temos dois tipos de spinores a duas componentes que, na literatura, são geralmente chamados de spinores pontuados e não-pontuados, sendo um o complexo-conjugado do outro. <u>Spinores a quatro componentes</u> são objetos do espaço base de representação $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$. Sob o ponto de vista de transformação, não existe distinção entre um spinor de 4-componentes e seu complexo-conjugado. É este o espaço base onde estão definidos os spinores de Dirac e no qual as matrizes constantes de Dirac (γ^A ; $A = 0,1,2,3$) constituem uma representação da álgebra de Clifford associada à métrica de Minkowski η^{AB}, e que tomaremos como uma estrutura local independente em cada ponto da variedade.

<u>Spinores de Dirac num Espaço-Tempo Riemanniano</u>

Vamos tomar, independentemente em cada ponto da variedade, uma estrutura spinorial local de Dirac. Definimos spinores de Dirac como objetos de 4-componentes que, sob o grupo das transformações de Lorentz locais (3.3), se transformam como os seus correspondentes em espaço plano

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(L(x))\psi(x) \tag{3.5a}$$

e seu conjugado correspondente

$$\tilde{\psi}(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x)\ S^{-1}\ (L(x)) \tag{3.5b}$$

onde $S(L(x))$ é uma matriz 4×4 representação da transformação de Lorentz $L^{\alpha}{}_{\beta}(x)$, com a restrição

$$\det S = 1$$

Em termos de componentes, podemos escrever (3.5a,b) como

$$\psi^{a}(x) \rightarrow \psi'^{a}(x) = S^{a}{}_{b}(x)\ \psi^{b}(x) \tag{3.5a'}$$

$$\psi_{a}(x) \rightarrow \psi'_{a}(x) = \psi_{b}(x)\ (S^{-1})^{b}{}_{a} \tag{3.5b'}$$

Spinores de ordem mais alta se transformam como produto direto de spinores de primeira ordem do tipo (3.5a,b).

Sob transformações de coordenadas sobre a variedade, $x^{\alpha} \rightarrow x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x)$, os spinores se transformam como escalares

$$\psi'(x') = \psi(x) \tag{3.6}$$

Neste caso não existe relação entre o grupo de transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e o grupo local de Lorentz (3.3). Diferentemente da variedade plana da Relatividade Restrita, onde o grupo de transformações (3.5) pode constituir uma representação do grupo de transformações lineares e homogêneas sobre a variedade, no caso de um espaço-tempo curvo a estrutura Lorentziana local existe independentemente em cada ponto e as transformações locais (3.5) não podem constituir uma representação das transformações gerais sobre a variedade.

O campo de matrizes de Dirac pode ser definido da seguinte forma. As matrizes constantes de Dirac

$$\gamma^A = (\gamma^{A\ a}{}_b)$$

satisfazem à relação de anti-comutação

$$\gamma^A\gamma^B + \gamma^B\gamma^A = 2\ \eta^{AB}\ \mathbb{1} \tag{3.7}$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 4 x 4. Com a operação (3.7), estas matrizes constituem, na base dos spinores de Dirac, uma representação para a álgebra de Clifford associada à métrica de Minkowski local η_{AB}. Usando a base de tetradas $(e_\alpha^{(A)}(x))$, podemos definir sobre a variedade o campo de matrizes

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_{(A)}(x)\ \gamma^A \tag{3.8}$$

que satisfazem, devido a (1.34) e (3.7),

$$\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x)\gamma^\mu(x) = 2\ g^{\mu\nu}(x)\ \mathbb{1} \tag{3.9}$$

constituindo uma álgebra de Clifford associado à métrica $g^{\mu\nu}(x)$ da variedade.

<u>Nota 16</u>: Para as matrizes de Dirac constantes, estamos utilizando uma representação onde

$$(\gamma^A)^+ = \gamma^0 \gamma^A \gamma^0$$

com $(\gamma^0)^2 = -(\gamma^k)^2 = 1$, $k = 1,2,3$ e $\gamma^5 = i \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

<u>Nota 17</u>: Um conjunto de números hipercomplexos satisfazendo $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ é chamado uma álgebra de Clifford. Pode-se mostrar que uma álgebra de Clifford existe para todo espaço com uma métrica $g^{\mu\nu}$.

Sob o grupo de transformações (3.5) as matrizes $\gamma^\mu(x)$ se transformam

$$(\gamma'^{\mu})^a{}_b = S^a{}_c\, (S^{-1})^d{}_b \gamma^{\mu\,c}{}_d = (S(x)\gamma^\mu(x)\, S^{-1})^a{}_b \qquad (3.10)$$

No presente formalismo de tetradas, a transformação (3.10) é gerada dando-se à base de tetradas uma rotação de Lorentz local conveniente,

$$(L^{-1})^A{}_B(x)\, \gamma^B = S(x)\, \gamma^A\, S^{-1}(x) \qquad (3.11)$$

(cf. (3.8) e (3.4)). A condição (3.11) implica que o spinor $\bar\psi = \psi^+\gamma^0$ — onde ψ^+ indica o hermitiano conjugado de ψ e γ^0 é a matriz constante de Dirac — se transforma como um spinor conjugado (3.5b), desde que (3.11) implica $\gamma^0 S^+ \gamma^0 = S^{-1}$. Notemos que as matrizes constantes de Dirac γ^A são supostas não se alterar nas transformações (3.11), como usualmente.

Com relação a transformações de coordenadas, as matrizes (3.8) se transformam como um 4-vetor contravariante

$$\gamma'^{\mu}(x)' = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \gamma^{\alpha}(x) \quad .$$

Derivada Covariante de um Spinor

Desde que o grupo local depende de ponto, o transporte de objetos (que se transformam sob o grupo) de um ponto P para um ponto P+dP deve conter um termo de afinidade de modo que em P+dP o objeto transportado ainda se transforme sob o grupo local. Em outras palavras, devido ao fato de que as matrizes do grupo de transformações (3.5) são funções de ponto, a derivada de um spinor não se transforma como um spinor. Assim somos levados a definir a derivada covariante de um spinor por

$$\nabla_{\alpha}\psi^{a}(x) = \partial_{\alpha}\psi^{a}(x) - \Gamma_{\alpha}{}^{a}{}_{b}\, \psi^{b}(x) \tag{3.12}$$

de tal forma que, sob o grupo (3.5), (3.12) se transforme como um spinor,

$$\nabla_{\alpha}\psi^{a'} = S^{a}{}_{b}(x)\, \nabla_{\alpha}\psi^{b} \tag{3.13}$$

Nota 18: Na presente formulação, a invariância da equação de Dirac em Relatividade Geral sob transformações de similaridade (3.5), (3.10) é, de fato, pela escolha (3.11), invariância sob rotações dos referenciais locais definidos por (2.2), (2.3) e (3.4). Passando da base de coordenadas $(\partial/\partial x^{\alpha})$ para a base local $X_A = e^{\alpha}_{(A)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$, (3.12) se escreve

$$\nabla_A \psi = X_A(\psi) - \Gamma_A \psi \tag{3.14}$$

onde $\Gamma_A = e^{\alpha}_{(A)} \Gamma_{\alpha}$.

Da lei de transformação (3.13) segue que Γ_{α} se transforma como

$$\Gamma'{}_{\alpha}{}^{a}{}_{b} = S^{a}{}_{d}\, \Gamma_{\alpha}{}^{d}{}_{f}\, (S^{-1})^{f}{}_{b} + S^{a}{}_{d|\alpha}\, (S^{-1})^{d}{}_{b} \tag{3.15}$$

ou

$$\Gamma'_{\alpha} = S\, \Gamma_{\alpha}\, S^{-1} + S_{|\alpha}\, S^{-1}$$

A segunda parcela do lado direito de (3.15) é a parte não homogênea da transformação da afinidade. No entanto, sob transformações gerais de coordenadas, Γ_{α} se transforma como um covetor (cf. comentários após expressão (3.6)). As quantidades Γ_{α} são denominadas afinidades spinoriais ou conexões internas.

A expressão $\psi_a \psi^a = \tilde{\psi}\psi$ é um escalar sob transformações (3.5), e isto implica (utilizando-se a propriedade padrão $\nabla_{\alpha}(AB) = (\nabla_{\alpha}A)B + A(\nabla_{\alpha}B)$)

$$\nabla_{\alpha}\psi_a(x) = \partial_{\alpha}\psi_a(x) + \psi_b(x)\, \Gamma_{\alpha}{}^{b}{}_{a}(x) \tag{3.16}$$

ou, na base local $X_A = e^{\alpha}_{(A)} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha}}$

$$\nabla_A \tilde{\psi} = X_A(\tilde{\psi}) + \tilde{\psi}\Gamma_A \tag{3.17}$$

Para um objeto com índices spinoriais e tensoriais (quer dizer, com leis de transformações bem definidas, sob transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e sob rotações dos referenciais locais) a derivada covariante é dada por

$$\nabla_\alpha F^{\lambda a}{}_b = \partial_\alpha F^{\lambda a}{}_b + \{{}^{\lambda}_{\alpha\beta}\} F^{\beta a}{}_b - \Gamma_\alpha{}^a{}_d F^{\lambda d}{}_b + \Gamma_\alpha{}^d{}_b F^{\lambda a}{}_d \quad , \tag{3.18}$$

que generaliza a derivada covariante usual. Notando que $\nabla_\alpha \delta^a{}_b = 0$, a condição $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ implica, a partir de (3.9), que

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \left(\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\gamma_\nu(x)\right) = 0 \tag{3.19}$$

Uma condição suficiente para (3.19) é

$$\nabla_\alpha \gamma_\mu = \partial_\alpha \gamma_\mu - \{{}^{\lambda}_{\mu\alpha}\}\ \gamma_\lambda + \gamma_\mu \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \gamma_\mu = 0 \tag{3.20}$$

Usando (3.8) e as propriedades da álgebra de Dirac gerada pelas matrizes constantes γ^A, podemos resolver (3.20) para Γ_α:

$$\Gamma_\alpha = A_\alpha \mathbb{1} - \frac{1}{8}\left[\gamma^\mu(\partial_\alpha\gamma_\mu) - (\partial_\alpha\gamma_\mu)\gamma^\mu - \{{}^{\rho}_{\mu\alpha}\}\ (\gamma^\mu\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma^\mu)\right] \tag{3.21}$$

onde A_α é um campo vetorial real arbitrário (e que pode eventualmente ser interpretado como potencial eletromagnético externo, em acoplamento mínimo com o campo ψ). Para neutrinos, tomamos $A_\alpha = 0$, desde que neutrinos não tem carga elétrica.

<u>Nota 19</u>: Existem outras arbitrariedades na determinação de Γ_α.

A imposição (3.20) é suficiente para garantir que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ mas não é, de forma nenhuma necessária. De fato, tomando

$$\nabla_\alpha \gamma_\mu = \left[V_\alpha, \gamma_\mu\right] \tag{3.22}$$

para qualquer V_α pertencendo à álgebra de Pauli das matrizes $\gamma^\mu(x)$, a condição de termos uma afinidade métrica $(\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0)$ é preservada. A afinidade spinorial Γ_μ, por (3.22), deve satisfazer

$$\partial_\mu \gamma_\nu - \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}\, \gamma_\lambda - \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \Gamma_\mu = V_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu V_\mu$$

Contraindo esta expressão, respectivamente, com γ^ν à esquerda e γ^ν à direita, e subtraindo uma da outra obtemos

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{FI} - V_\mu + \frac{1}{4}\left(\gamma^\nu \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma^\nu V_\mu \gamma_\nu\right) \tag{3.23}$$

onde Γ_μ^{FI} é dado por (3.21). Uma solução possível para (3.23) é

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{FI} - V_\mu$$

que satisfaz identicamente (3.23). Neste caso, a derivada covariante (3.12) se expressa

$$\nabla_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - \Gamma_\alpha^{FI} \psi + V_\alpha \psi \tag{3.24}$$

Expandindo $V_\alpha(x)$,

$$V_\alpha(x) = A_\alpha(x)\ \mathbb{1} + B_{\alpha\beta}(x)\gamma^\beta(x) + C_{\alpha\beta\lambda}\ \gamma^{[\beta}\gamma^{\lambda]}(x) + \ldots \tag{3.25}$$

onde $B_{\alpha\beta}(x)$ etc. devem ser funcionais da métrica, não temos , em geral, critério para decidir entre (3.20) e (3.22). A escolha (3.20) parece, porém, ser a mais simples no tratamento da interação neutrino-gravitação — por exemplo, o tensor momentum-energia do campo de Dirac em interação com a gravitação, para (3.20), tem a sua forma da Relatividade Restrita, a menos da substituição $\partial_\alpha \to \nabla_\alpha$.

No que se segue, nossa escolha será (3.20), com Γ_α dado por (3.21) e $A_\alpha = 0$. As afinidades spinoriais (3.21) são denominadas coeficientes de Fock-Ivanenko.

Com a noção de derivada covariante (3.18) em relação a transformações gerais de coordenadas e transformações de Lorentz locais, a equação de Dirac da Relatividade Restrita pode ser generalizada para uma variedade Riemanniana pela prescrição

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$$

A equação de Dirac, covariante sob os grupos de Lorentz local (3.5), (3.11) e o grupo de transformações gerais de coordenadas, tem a forma

$$(i\ \gamma^\mu(x)\nabla_\mu - m)\psi = 0 \tag{3.26}$$

ou

$$(i\ \gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m)\psi = 0$$

Para neutrino (m = 0) a equação de Dirac se reduz a

$$\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu)\psi = 0 \tag{3.27}$$

<u>Nota 20</u>: A generalização (3.26) da equação de Dirac em um espaço-tempo curvo apresenta diferenças fundamentais da equação de Dirac em RR. No caso da Relatividade Restrita, o spinor de Dirac pertence ao espaço-base de uma representação do grupo de Lorentz (a representação $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$) que é o grupo de simetria do próprio espaço-tempo, enquanto que, no caso da Relatividade Geral, o spinor ψ é definido com relação à estrutura local de Lorentz, que existe independentemente em cada ponto da variedade, sem nenhuma relação com o grupo de transformações gerais de coordenadas sobre a variedade. Relativo a este último, ψ se transforma como um escalar, por definição.

<u>As Equações Acopladas de Einstein-Dirac e o Tensor Momentum-Energia para o Neutrino</u>

A equação de Dirac para o neutrino (3.27) e sua conjugada podem ser derivadas do princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-g}\, L\, d^4x = 0$$

por variação independente de ψ e $\bar{\psi}$, ou, equivalentemente, das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial\psi} (\sqrt{-g}\, L) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\psi)} (\sqrt{-g}\, L) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}} (\sqrt{-g}\, L) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} (\sqrt{-g}\, L) = 0$$

onde

$$L = i\{\bar{\psi}\gamma^\alpha(x)\nabla_\alpha\psi - (\nabla_\alpha\bar{\psi})\, \gamma^\alpha(x)\, \psi\} \qquad (3.28)$$

Aqui, g é o determinante da métrica e $\overline{\Psi}$ é o spinor conjugado de Pauli, $\overline{\Psi} = \psi^{+}\gamma^{0}$, onde ψ^{+} indica o hermitiano conjugado e γ^{0} é a matriz constante de Dirac.

Se levarmos em conta que o campo de neutrinos não somente é atuado pelo campo gravitacional mas também é fonte de curvatura, a interação neutrino-gravitação é descrita pelo conjunto de equações acopladas de Einstein-Dirac. Estas são obtidas da Lagrangeana

$$\sqrt{-g}\ \left(\frac{1}{K} R + L(\psi) + L(\text{matéria})\ \right) \tag{3.29}$$

onde K é a constante gravitacional, R o escalar de curvatura, L é dado por (3.28), e L(matéria) é a densidade da Lagrangeana de outro qualquer tipo de matéria eventualmente presente e também fonte de curvatura. Desde que R não depende de ψ, pela variação independente de ψ e $\overline{\psi}$ na ação correspondente a (3.29), obtemos a equação de Dirac (3.27) e a conjugada associada, respectivamente. O princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-g}\ \left(\frac{1}{K} R + L(\psi) + L(\text{matéria})\right) d^4x = 0 \quad ,$$

para variações independentes de $g_{\alpha\beta}$, nos dá as equações de campo de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = K(T_{\alpha\beta}(\psi) + T_{\alpha\beta}(\text{matéria})\ ) \tag{3.30}$$

onde os tensores momentum-energia $T_{\alpha\beta}$ são definidos

$$\int T_{\alpha\beta}(\psi)\delta\, g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\ d^4x = \delta \int L(\psi) \sqrt{-g}\ d^4x \tag{3.31}$$

$$\int T_{\alpha\beta}(\text{matéria})\delta\, g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d^4x = \delta \int L(\text{matéria}) \sqrt{-g}\, d^4x \; . \quad (3.32)$$

Notando que a variação de $g_{\alpha\beta}$ se reflete em variação das $\gamma_\alpha(x)$ (de modo que a relação (3.9) seja preservada) e em correspondentes variações dos coeficientes de Fock-Ivanenko, o tensor momentum-energia para o neutrino, de (3.31), é dado por

$$T_{\alpha\beta} = i \left\{ \bar{\psi}\gamma_\alpha \nabla_\beta \psi + \bar{\psi}\gamma_\beta \nabla_\alpha \psi - (\nabla_\alpha \bar{\psi})\gamma_\beta \psi - (\nabla_\beta \bar{\psi})\gamma_\alpha \psi \right\} \qquad (3.33)$$

Notemos que a invariância da ação

$$\int \sqrt{-g}\; i \left\{ \bar{\psi}\gamma^\alpha(x) \nabla_\alpha \psi - (\nabla_\alpha \bar{\psi})\gamma^\alpha(x)\psi \right\} d^4x$$

sob transformações de coordenadas implica

$$\nabla_\nu T_\mu{}^\nu = 0$$

Utilizando a equação de Dirac para o neutrino, podemos verificar diretamente que o traço do tensor momentum-energia do neutrino se anula. Deste modo, as equações acopladas de Einstein-Dirac (3.27), (3.30), (3.33), na ausência de matéria, podem ser escritas

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= K\, T_{\alpha\beta} \\ \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi &= 0 \qquad\qquad (3.34) \\ T_{\alpha\beta} &= i \left\{ \bar{\psi}\gamma_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \psi - \nabla_{(\alpha} \bar{\psi}\, \gamma_{\beta)} \psi \right\} \end{aligned}$$

O conjunto de equações (3.34) constitui a base do estudo da interação dos campos gravitacional e de neutrinos.

Do ponto de vista de cálculo, o sistema de equações acopladas de Einstein-Dirac é extremamente complicado. Com o conceito de referenciais de Lorentz locais e o cálculo de formas nestes referenciais, estamos de posse de uma técnica matemática poderosa que nos permite tratar, de modo unificado, não somente o campo de Dirac em um espaço-tempo curvo, bem como o próprio espaço-tempo. Em outras palavras, descrevendo a estrutura do espaço-tempo em termos dos referenciais locais e com a utilização do cálculo de formas da Seção 2, a equação de Dirac pode ser formulada e calculada mais simplesmente e mais diretamente que em qualquer outra descrição do espaço-tempo.

Com a escolha dos referenciais locais

$$\theta^{A} = e_{\alpha}^{(A)}\ dx^{\alpha} \tag{2.3}$$

tal que (1.34), definimos o campo de matrizes $\gamma^{\mu}(x)$ por

$$\gamma^{\mu}(x) = e^{\mu}_{(A)}\ \gamma^{A} \tag{3.8}$$

que assume localmente a expressão das matrizes de Dirac constantes γ^{A}. Como já vimos, a derivada covariante de um spinor é definida por

$$\nabla_{\alpha}\psi = \partial_{\alpha}\psi - \Gamma_{\alpha}\psi \tag{3.12}$$

onde o termo de afinidade $\Gamma_{\alpha}\psi$ é devido à exigência de invariância da equação de Dirac sob rotações de Lorentz dos referenciais locais. Expressando (3.12) na base (2.3) temos

$$\nabla_{A}\psi = e^{\alpha}_{(A)}\partial_{\alpha}\psi - e^{\alpha}_{(A)}\Gamma_{\alpha}\psi$$

Deste modo, a equação de Dirac para o neutrino assume, localmente, a forma

$$\gamma^{A}\left[e^{\alpha}_{(A)}\partial_{\alpha}\psi - e^{\alpha}_{(A)}\Gamma_{\alpha}\psi\right] = 0 \tag{3.35}$$

onde γ^{A} são as matrizes de Dirac constantes. De (3.21) e (3.8) temos

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8}\left\{e^{\mu}_{(A)}e_{\mu(B)|\alpha} - \left\{{}^{\rho}_{\mu\alpha}\right\} e^{\mu}_{(A)}e_{\rho(B)}\right\}(\gamma^{A}\gamma^{B}-\gamma^{B}\gamma^{A})$$

ou

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8}\, e^{\mu}_{(A)}e_{\mu(B)\|\alpha}\,(\gamma^{A}\gamma^{B}-\gamma^{B}\gamma^{A}) \tag{3.36}$$

Da definição (2.8) dos coeficientes de rotação de Ricci γ_{ABC}, podemos expressar (3.36) por

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{4}\,\gamma_{ABC}\,\gamma^{A}\gamma^{B}\,e^{(C)}_{\alpha} \tag{3.37}$$

onde usamos a propriedade de simetria $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$. Denotando $\Gamma_{C} = e^{\alpha}_{(C)}\Gamma_{\alpha}$,

$$\Gamma_{C} = -\frac{1}{4}\,\gamma_{ABC}\,\gamma^{A}\gamma^{B} \tag{3.38}$$

que, substituído em (3.35), resulta

$$\nabla_{A}\psi = e^{\alpha}_{(A)}\partial_{\alpha}\psi + \frac{1}{4}\,\gamma_{MNA}\gamma^{M}\gamma^{N}\psi \tag{3.39}$$

e, para a equação de Dirac,

$$\gamma^{A}e^{\alpha}_{(A)}\partial_{\alpha}\psi + \frac{1}{4}\,\gamma_{MNA}\gamma^{A}\gamma^{M}\gamma^{N}\psi = 0 \tag{3.40}$$

Analogamente, o tensor momentum-energia (3.33) se expressa localmente

$$T_{AB} = i\left\{ \bar{\Psi}\gamma_{(A} \nabla_{B)}\Psi - \nabla_{(A} \bar{\Psi}\gamma_{B)}\Psi \right\} \qquad (3.41)$$

Assim, de acordo com a Seção 2, passagens intermediárias no cálculo das curvaturas do espaço-tempo nos fornecem todos os elementos para um cálculo imediato de (3.39) e (3.40), e consequentemente (3.41). De fato, dado g, a escolha dos θ^A — tais que g assuma a fórma (2.2) — nos fornece de imediato ($e_{\alpha}^{(A)}$) e sua inversa ($e^{\alpha}_{(A)}$); e da derivação exterior dos θ^A, obtemos — a partir da primeira equação de estrutura de Cartan — os $\omega^A{}_B$ e portanto os $\gamma^A{}_{BC}$, por leitura imediata de $\omega^A{}_B = \gamma^A{}_{BC}\theta^C$.

A seguir, vamos utilizar o formalismo acima para descrever a dinâmica local de neutrinos em um universo com rotação, bem como fazer um cálculo de neutrinos em modelos de Friedmann, e mostrar que neutrinos num espaço-gempo tipo Friedmann não podem gerar curvatura compatível com o alto grau de simetria destes modelos.

4 - *NEUTRINOS NO UNIVERSO DE GÖDEL — NEUTRINOS EM MODELOS DE FRIEDMANN*

Vamos considerar o modelo de Gödel, com métrica

$$g = dt^2 + 2\, e^{\omega x^1}\, dt dx^2 + \frac{1}{2}\, e^{2\omega x^1}\, (dx^2)^2 - (dx^1)^2 - (dx^3)^2 \qquad (4.1)$$

que é solução das equações de Einstein com constante cosmológica, para um tensor momentum-energia de matéria incoerente $T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta$. O campo de velocidades da matéria V_α tem a propriedade importante de ter vorticidade não nula (notemos que $V^\alpha = \delta^\alpha_0$),

$$\omega^\alpha = (0,0,0,\omega)$$

Tomamos o referencial local

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + e^{\omega x^1}\, dx^2 \\ \theta^1 &= dx^1 \\ \theta^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{\omega x^1}\, dx^2 \\ \theta^3 &= dx^3 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

de modo que (4.1) é expresso

$$g = \eta_{AB}\theta^A\theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

De (4.2) podemos ler diretamente as tetradas $e^{(A)}_\alpha$, cujas componentes não nulas são dadas por

$$\begin{array}{ccc} & e^{(0)}{}_0 = 1 & e^{(0)}{}_2 = e^{\omega x^1} \\ e^{(1)}{}_1 = 1 & e^{(2)}{}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{\omega x^1} & e^{(3)}{}_3 = 1 \end{array} \qquad (4.3)$$

com inversas dadas pelas expressões (cf. (4.2))

$$
\begin{aligned}
dt &= \theta^0 - \sqrt{2}\,\theta^2 \\
dx^1 &= \theta^1 \\
dx^2 &= \sqrt{2}\, e^{-\omega x^1}\,\theta^2 \\
dx^3 &= \theta^3
\end{aligned}
\qquad (4.4)
$$

de modo que

$$
e^0{}_{(0)} = 1 \qquad e^0{}_{(2)} = -\sqrt{2}
$$

$$
e^1{}_{(1)} = 1 \qquad e^2{}_{(2)} = \sqrt{2}\, e^{-\omega x^1} \qquad e^3{}_{(3)} = 1 \qquad (4.5)
$$

Derivando exteriormente as 1-formas (4.2) e usando (4.4),(4.5) obtemos

$$
\begin{aligned}
d\theta^0 &= \sqrt{2}\omega\theta^1 \wedge \theta^2 \\
d\theta^1 &= 0 \\
d\theta^2 &= \omega\theta^1 \wedge \theta^2 \\
d\theta^3 &= 0
\end{aligned}
\qquad (4.6)
$$

Os coeficientes de rotação de Ricci podem ser obtidos a partir de (2.17), onde os C_{ABC} são lidos diretamente de (4.6), e tem componentes não-nulas

$$
\gamma_{120} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega \qquad \gamma_{122} = \omega
$$

$$
\gamma_{012} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\omega \qquad \gamma_{021} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\omega \qquad (4.7)
$$

De (4.7), os coeficientes de Fock-Ivanenko (3.38) são calculados

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega\gamma^1\gamma^2 \\
\Gamma_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega\gamma^2\gamma^0 \\
\Gamma_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega\gamma^0\gamma^1 - \frac{\omega}{2}\,\gamma^1\gamma^2 \\
\Gamma_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

<u>Nota 21</u>: no que se segue, vamos tomar a representação particular

$$
\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad ,
$$

consistente com a Nota (16).

Desde que o espaço-tempo (4.1) admite $\partial/\partial t$ como vetor de Killing, tomamos

$$
\psi = \psi(\vec{x})\, e^{-i\epsilon t} \quad , \tag{4.9}
$$

que são modos de energia do campo invariantemente definidos. Denotando $\gamma^k e^{\alpha}_{(k)} = \vec{\gamma}.\vec{e}^{\alpha}$, tendo em conta que $e^{\alpha}_{(0)} = \delta^{\alpha}_{0}$ para o espaço-tempo (4.1), e usando resultados já calculados, podemos escrever a equação de Dirac para o neutrino, no espaço-tempo (4.1),

$$
-i\epsilon\gamma^0\psi = -\vec{\gamma}.\vec{e}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi - \frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega\gamma^0\gamma^1\gamma^2\psi - \frac{\omega}{2}\,\gamma^1\psi \tag{4.10}
$$

Tomando ψ como auto estado de γ^5,

$$
\gamma^5\psi = L\psi \quad , \quad \psi = \binom{\phi}{L\phi} \quad , \qquad L^2 = 1 \tag{4.11}
$$

e definindo a matriz de spin $\vec{\Sigma} = \gamma^5\gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, podemos ex -

(4.10) como

$$\epsilon L\psi = \vec{\Sigma} \cdot \left[- i\vec{e}^{\alpha}\partial_{\alpha} - \frac{i\omega}{2}\vec{n}_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\vec{\Omega}\gamma^5 \right]\psi$$

ou

$$\epsilon L\psi = \Sigma \cdot \vec{\pi}\psi \tag{4.12}$$

onde

$$\vec{\pi} = - i\vec{e}^{\alpha}\partial_{\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{4}\vec{\Omega}\gamma^5 - \frac{i\omega}{2}\vec{n}_1 \tag{4.13}$$

Aqui $\vec{\Omega}$ é o vetor vorticidade $(0,0,\omega)$, no referencial local determinado por (4.2), e $\vec{n}_1 = (1,0,0)$. De (4.12) podemos considerar $L\vec{\Sigma}\cdot\vec{\pi}$ como a Hamiltoniana do sistema, expressa em termos de objetos definidos no referencial local determinado por (4.2). Com relação a esta Hamiltoniana, $\vec{\Sigma}\cdot\vec{\pi}$ é conservado, isto é, a projeção do spin $\vec{\Sigma}$ sobre a direção do momentum $\vec{\pi}$ é conservada e, neste sentido, L está bem definido como a helicidade do estado ψ de neutrinos.

Vamos agora determinar o movimento local de $\vec{\pi}$. Temos

$$\dot{\pi}_k = i\left[\pi_k \, , \, L\vec{\Sigma}\cdot\vec{\pi}\right] \quad , \tag{4.14}$$

que é uma equação de operadores sobre os auto-estados de helicidade e energia, $\psi_L = \binom{\phi}{L\phi}e^{-i\epsilon t}$, dos neutrinos. Desde que $\vec{\Sigma}$ comuta com γ^5, resulta de (4.14)

$$\dot{\pi}_k = iL\Sigma^{\ell}\left[\pi_k \, , \, \pi_{\ell}\right]$$

ou, após algum cálculo,

$$\dot{\pi}_k = iL\Sigma^{\ell}\left(\gamma^A{}_{k\ell} - \gamma^A{}_{\ell k}\right) e^{\lambda}_{(A)}\partial_{\lambda} \tag{4.15}$$

Usando em (4.15) os coeficientes de Ricci (4.7) de Gödel, no referencial local (4.2), temos

$$\dot{\pi}_k = i\ \sqrt{2}\ L\ \varepsilon_{kj\ell}\ \Sigma^j \Omega^\ell \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.16}$$

Finalmente, levando em conta que (4.16) atua sobre os auto-estados de helicidade e energia dos neutrinos,

$$\dot{\vec{\pi}} = \sqrt{2}\ \varepsilon\ L\ \vec{\Sigma} \wedge \vec{\Omega} \tag{4.17}$$

Desde que $\vec{\Sigma}\cdot\vec{\pi}$ se conserva, a equação (4.17) nos dá que, para um dado sinal de ε, o spin $\vec{\Sigma}$ precessa localmente em torno da direção $\vec{\Omega}$, com uma velocidade angular proporcional a $\sqrt{2}\,\varepsilon$ e cujo sentido independe do sinal de L (quer dizer, independe de ser neutrino ou anti-neutrino). Isto está ligado intuitivamente ao fato de que o spin do neutrino é definido relativamente a um referencial de Lorentz local, e que tal referencial deve precessar num universo com rotação.

Vamos agora discutir neutrinos em modelos de Friedmann. Vamos considerar o espaço-tempo de Friedmann com seção plana, e um sistema de coordenadas no qual a métrica assume a forma

$$g = dt^2 - a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{4.18}$$

A escolha mais natural de um referencial local é dada por

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= a(t)dx \\ \theta^2 &= a(t)dy \\ \theta^3 &= a(t)dz \end{aligned} \tag{4.19}$$

de modo que

$$g = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 = \eta_{AB}\theta^A\theta^B \qquad (4.20)$$

De (4.19) podemos ler diretamente a matriz de tetradas $e_\alpha^{(A)}$, cujas componentes não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} e_0^{(0)} &= 1 & \qquad e_2^{(2)} &= a(t) \\ e_1^{(1)} &= a(t) & \qquad e_3^{(3)} &= a(t) \end{aligned} \qquad (4.21)$$

com inversas dadas pelas expressões (de (4.19)),

$$\begin{aligned} dt &= \theta^0 \\ dx &= a^{-1}\ \theta^1 \\ dy &= a^{-1}\ \theta^2 \\ dz &= a^{-1}\ \theta^3 \end{aligned} \qquad (4.22)$$

de modo que

$$\begin{aligned} e^0_{(0)} &= 1 & \qquad e^2_{(2)} &= a^{-1} \\ e^1_{(1)} &= a^{-1} & \qquad e^3_{(3)} &= a^{-1} \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Derivando as 1-formas (4.19) exteriormente, e usando (4.22), obtemos

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= 0 \\ d\theta^1 &= \frac{\dot{a}}{a}\ \theta^0 \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= \frac{\dot{a}}{a}\ \theta^0 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \frac{\dot{a}}{a}\ \theta^0 \wedge \theta^3 \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Uma inspeção direta em (4.24) nos dá imediatamente que as componentes não nulas de $\omega^A{}_B$ são

$$\omega^1{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\,\theta^1$$
$$\omega^2{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\,\theta^2 \qquad (4.25)$$
$$\omega^3{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\,\theta^3$$

<u>Exercício</u>: mostre que (4.25), substituída na 1ª equação de estrutura de Cartan $d\theta^A = -\omega^A{}_B \wedge \theta^B$, reproduz corretamente (4.24). Portanto, para a escolha (4.19), o conjunto (4.25) é único.

De (2.11) e (4.25), obtemos as componentes não nulas dos coeficientes de rotação de Ricci,

$$\gamma^1{}_{01} = \dot{a}/a$$
$$\gamma^2{}_{02} = \dot{a}/a \qquad (4.26)$$
$$\gamma^3{}_{03} = \dot{a}/a$$

Na base local (4.2), os coeficientes de Fock-Ivanenko (3.38) são então imediatamente obtidos,

$$\Gamma_0 = 0$$
$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^1\gamma^0$$
$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^2\gamma^0 \qquad (4.27)$$
$$\Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^3\gamma^0$$

Com (4.23) e (4.27), podemos calcular a derivada covariante de um spinor ψ e seu conjugado de Pauli, $\overline{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0}$, na base (4.2). Temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_0\psi &= \dot{\psi} \\
\nabla_1\psi &= \frac{1}{a}\,\psi_x - \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^1\gamma^0\psi \\
\nabla_2\psi &= \frac{1}{a}\,\psi_y - \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^2\gamma^0\psi \\
\nabla_3\psi &= \frac{1}{a}\,\psi_z - \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^3\gamma^0\psi
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\nabla_0\overline{\psi} &= \dot{\overline{\psi}} \\
\nabla_1\overline{\psi} &= \frac{1}{a}\,\overline{\psi}_x + \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\overline{\psi}\gamma^1\gamma^0 \\
\nabla_2\overline{\psi} &= \frac{1}{a}\,\overline{\psi}_y + \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\overline{\psi}\gamma^2\gamma^0 \\
\nabla_3\overline{\psi} &= \frac{1}{a}\,\overline{\psi}_z + \frac{1}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\overline{\psi}\gamma^3\gamma^0
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

A equação de Dirac

$$\gamma^A\nabla_A\psi + im\psi = 0$$

no espaço-tempo de Friedmann (4.18) resulta

$$\gamma^0\dot{\psi} + \frac{1}{a}\,(\gamma^1\psi_x + \gamma^2\psi_y + \gamma^3\psi_z) + \frac{3}{2}\,\frac{\dot{a}}{a}\,\gamma^0\psi + im\psi = 0 \tag{4.30}$$

Analogamente, as componentes do tensor momentum-energia (3.41) são calculadas, usando (4.28) e (4.29),

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= 2i\ (\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi)\\
T_{01} &= i\ \left[\dot{\bar{\psi}}\gamma^1\psi - \bar{\psi}\gamma^1\dot{\psi} + \frac{1}{a}\ (\bar{\psi}\gamma^0\psi_x - \bar{\psi}_x\gamma^0\psi)\right]\\
T_{02} &= i\ \left[\dot{\bar{\psi}}\gamma^2\psi - \bar{\psi}\gamma^2\dot{\psi} + \frac{1}{a}\ (\bar{\psi}\gamma^0\psi_y - \bar{\psi}_y\gamma^0\psi)\right]\\
T_{03} &= i\ \left[\dot{\bar{\psi}}\gamma^3\psi - \bar{\psi}\gamma^3\dot{\psi} + \frac{1}{a}\ (\bar{\psi}\gamma^0\psi_z - \bar{\psi}_z\gamma^0\psi)\right]\\
T_{11} &= \frac{2i}{a}\ (\bar{\psi}_x\gamma^1\psi - \bar{\psi}\gamma^1\psi_x)\\
T_{12} &= \frac{i}{a}\left\{(\bar{\psi}_y\gamma^1\psi - \bar{\psi}\gamma^1\psi_y) + (\bar{\psi}_x\gamma^2\psi - \bar{\psi}\gamma^2\psi_x)\right\}\\
T_{13} &= \frac{i}{a}\left\{(\bar{\psi}_z\gamma^1\psi - \bar{\psi}\gamma^1\psi_z) + (\bar{\psi}_x\gamma^3\psi - \bar{\psi}\gamma^3\psi_x)\right\}\\
T_{22} &= \frac{2i}{a}\ (\bar{\psi}_y\gamma^2\psi - \bar{\psi}\gamma^2\psi_y)\\
T_{23} &= \frac{i}{a}\left\{(\bar{\psi}_z\gamma^2\psi - \bar{\psi}\gamma^2\psi_z) + (\bar{\psi}_y\gamma^3\psi - \bar{\psi}\gamma^3\psi_y)\right\}\\
T_{33} &= \frac{2i}{a}\ (\bar{\psi}_z\gamma^2\psi - \bar{\psi}\gamma^2\psi_z)
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

A incompatibilidade de um spinor geral $\psi(\vec{x},t)$ como fonte de curvatura do presente modelo de Friedmann (4.18) fica evidente das expressões (4.31), do tensor momentum-energia do neutrino, tendo-se em conta o fato de que o tensor de Ricci R_{AB} para a métrica (4.18) é diagonal. Um spinor $\psi(x^i,t)$, i = fixo, correspondendo a uma onda plana se propagando na direção x^i, terá sempre a componente T_{0i}, do tensor momentum-energia correspondente, não nula. O caso mais simétrico seria

$$
\psi = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \\ \sigma^i\phi(t) \end{pmatrix} \tag{4.32}
$$

correspondendo a uma corrente $j^A = \bar{\psi}\gamma^A\psi$, ao longo dos cones de luz na direção i. Neste caso, também a componente T_{0i} correspondente seria não nula.

Para finalizar, vamos examinar uma classe especial de spinores $\psi(t)$ que são soluções da equação de Dirac (4.30), com corrente $j^A = \bar{\psi}\gamma^A\psi$ não identicamente nula, mas cujo tensor momentum-energia correspondente é identicamente nulo. Vamos expressar

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \\ \eta(t) \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Neste caso, a equação de Dirac se reduz a

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\psi + im\,\gamma^0\psi = 0 \tag{4.34}$$

A dependência puramente temporal de (4.33) e a equação de Dirac (4.18) implicam imediatamente que a única componente não nula de T_{AB} (cf. (4.31)) é

$$T_{00} = 4\,m\,\bar{\psi}\psi \tag{4.35}$$

de modo que qualquer solução da equação de Dirac em (4.18), com $m = 0$ e com dependência puramente temporal, corresponde a um neutrino com corrente $j^\alpha = \bar{\psi}\gamma^\alpha(x)\psi$ não nula mas cujo tensor momentum-energia é identicamente nulo. Tais campos de neutrinos — que são denominados, na literatura, de neutrinos-fantasmas — não são passíveis de gerar curvatura, mas reagem ao campo gravitacional, sendo de fato atuados por eles. É possível mostrar que vários modelos cosmológicos de diferentes tipos na classificação de Bianchi admitem soluções de neutrinos fantasmas (do tipo algébrico (4.32)). Desde que o tensor momentum-energia é não linear nos campos, uma combinação linear de neutrinos fantasmas não é mais um neutrino fantasma. Esta propriedade foi usada por Novello para construir — com neutrinos fantasmas — uma base para campos de neutrinos em modelos cosmológicos tendo neutrino como fonte de curvatura.

Para finalizar, notemos que (4.34) admite soluções de fermions ($m \neq 0$) fantasmas $\psi(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$, para ψ satisfazendo (cf. (4.35))

$$\bar{\psi}\psi = 0$$

ou

$$\phi^{+}\phi = \eta^{+}\eta \quad .$$

REFERÊNCIAS

Algumas referências básicas para o texto são:

- "Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields"
  D.R. Brill e J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 29, 465 (1957).

- Notes on Differential Geometry
  Noel J. Hicks, Van Nostrand Reinhold, London 1971.

- Differential Forms
  H. Flanders, Academic Press, New York 1963.

- Tensors, Differential Forms and Variational Principles
  D. Lovelock, John Wiley and Sons, New York (1975).

Para outras aplicações, ver por exemplo

- Neutrino Cosmology
  M. Novello e I. Damião Soares, Phys. Lett. 56A, 431 (1976).

- Ghost Basis for Neutrinos
  M. Novello, Phys. Lett. 58A, 75 (1976)

- I. Damião Soares, Tese de Doutorado, CBPF, Rio de Janeiro ,
  1976.

- Relativistic Model of a Spherical Star Emmitting Neutrinos
  Phys. Rev. D17, 1924 (1978).

- D.R. Brill e J.M. Cohen, J. Math. Phys. 7, 238 (1966).