

COSMOLOGIA RELATIVISTA

M. Novello

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
1 - QUANTIDADES CINEMÁTICAS	203
2 - FONTES DA CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO	225
3 - MODELOS COSMOLÓGICOS	245
4 - UNIVERSOS DE FRIEDMANN	271
5 - MODELO COSMOLÓGICO DE KASNER (1921)	313
6 - UNIVERSOS EM ROTAÇÃO	319
7 - ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COSMOLÓGICOS	341
8 - UNIVERSO HOMOGÊNEO ISOTRÓPICO NÃO-SINGULAR	353
BIBLIOGRAFIA	359

1 - QUANTIDADES CINEMÁTICAS

1.1 - Tensor de Projecção

Seja \vec{V} um campo vetorial definido sobre uma variedade espaço-tempo M_4 . Em cada ponto P de M_4 , o vetor \vec{V} determina um sub-espaço tri-dimensional constituído de vetores ortogonais a \vec{V} .

Se \vec{V} é um vetor do tipo tempo, i.é., $V_\mu V_\nu g^{\mu\nu} > 0$, então podemos normalizá-lo

$$V_\mu V_\nu g^{\mu\nu} = 1 \quad (1)$$

Se identificarmos o campo vetorial \vec{V} com uma classe de observadores movendo-se com esta velocidade, o sub-espaço H , determinado pelo conjunto de vetores ortogonais a V , constitui um referencial inercial para o observador correspondente.

Construimos, a partir de \vec{V} , o tensor $(h_{\mu\nu})$ de projecção no tri-espaço H , pela expressão

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad (2)$$

Esse tensor projeta objetos geométricos (tensores) definidos em M_4 no referencial inercial do observador \vec{V} .

É simples mostrar que $h_{\mu\nu}$ tem as características de um projetor, a saber:

$$(i) \quad h^2 = h$$

Com efeito,

$$h_{\alpha\beta} h^\beta{}_\nu = (g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta)(g^\beta{}_\nu - V^\beta V_\nu) = g_{\alpha\nu} - V_\alpha V_\nu = h_{\alpha\nu}$$

(11) h é perpendicular a \vec{V} .

Temos

$$h_{\alpha\beta} v^\beta = g_{\alpha\beta} v^\beta - v_\alpha v_\beta v^\beta = 0$$

Note ademais que $h_{\mu\nu}$ é simétrico:

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} .$$

Podemos então identificar o tensor $h_{\mu\nu}$ com a métrica em H pela geometria de M_4 . Um observador de velocidade \vec{V} , localizado em um dado ponto P de M_4 de coordenadas $x^\alpha(P)$ mede a sua distância a um ponto Q vizinho, de coordenadas $x^\alpha(P) + \Delta x^\alpha$ pela forma:

$$ds^2(PQ) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (V_\mu dx^\mu)^2 \quad (3)$$

A distância de P a Q separa-se em uma parte puramente espacial $d\bar{x} = (h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ e um intervalo de tempo $dt = V_\mu dx^\mu$.

Assim, $h_{\mu\nu}$ determina sobre H uma afinidade métrica $(3)\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

Definimos o operador $(3)\nabla_\mu$ que atua em H segundo a expressão

$$(3)\nabla_\mu W_\lambda \equiv h_\mu^\alpha h_\lambda^\beta \nabla_\alpha W_\beta$$

Tal operação gera um tensor $B_{\mu\lambda} \equiv (3)\nabla_\mu W_\lambda$ que pertence a H . Com efeito, $v^\lambda B_{\mu\lambda} = 0$ e também

$$v^\mu B_{\mu\lambda} = 0 .$$

Um cálculo simples permite mostrar que, a conexão $(3)\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ está associada à métrica $h_{\mu\nu}$ no tri-espaco H , pois

$$(3) \nabla_{\mu} h_{\beta\lambda} = 0$$

Com efeito, temos

$$(3) \nabla_{\mu} h_{\beta\lambda} = h_{\mu}^{\alpha} h_{\beta}^{\sigma} h_{\lambda}^{\rho} \nabla_{\alpha} h_{\sigma\rho} = -h_{\mu}^{\alpha} h_{\beta}^{\sigma} h_{\lambda}^{\rho} \nabla_{\alpha} (V_{\sigma} V_{\rho}) = 0$$

Teremos oportunidade adiante, ao estudarmos modelos cosmológicos homogêneos, de voltar a encontrar o operador

$$(3) \nabla_{\mu}$$

1.2 - Parâmetros Óticos

Consideremos um conjunto de curvas Γ que interceptam H na vizinhança de um ponto arbitrário p de H . Iremos calibrar os valores dos parâmetros afim s_j sobre cada curva de tal modo a que em H os valores desses parâmetros (tempo próprio) coincidam.

Chamamos vetor conexão, e denotamos por \vec{n} , o vetor que liga duas curvas da congruência Γ com o mesmo valor de s .

No caso acima, \vec{n} consiste em um vetor pertencente a H . Podemos estender a definição acima e considerar o vetor conexão como aquele que une duas curvas com o mesmo valor do parâmetro afim s , sem impor necessariamente a condição de que tal vetor seja ortogonal às curvas.

Chamando \vec{V} o vetor (campo vetorial) tangente às curvas $\chi^{\mu} = \chi^{\mu}(s)$ que constituem a congruência Γ podemos construir, a partir de \vec{n} um vetor \vec{n}_{\perp} em H , por meio do projetor h . Temos, por definição,

$$\vec{n}_{\perp}^{\mu} \equiv h^{\mu}_{\lambda} n^{\lambda} \quad (4)$$

Definido o vetor \vec{n} em uma dada superfície H , construímos o campo $\vec{n}(\chi)$ ao longo de Γ , através do transporte de Lie:

$$\frac{\mathcal{L}_{\vec{V}}}{\vec{V}} \vec{n} = 0 \quad (5)$$

Da definição da operação derivação de Lie, temos

$$\left[\frac{\mathcal{L}_{\vec{V}}}{\vec{V}} \vec{n} \right]^\alpha = n^\alpha_{||\mu} V^\mu - v^\alpha_{||\mu} n^\mu$$

Daí, para a restrição do vetor \vec{n} sobre H temos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathcal{L}_{\vec{V}}}{\vec{V}} \vec{n} \right]^\alpha &= \left[\frac{\mathcal{L}_{\vec{V}}}{\vec{V}} (h^\mu_\lambda n^\lambda) \right]^\alpha = (h^\alpha_\lambda n^\lambda)_{||\mu} V^\mu - v^\alpha_{||\mu} h^\mu_\lambda n^\lambda = \\ &= \left[\frac{\mathcal{L}_{\vec{V}}}{\vec{V}} \vec{n} \right]^\alpha = h^\alpha_{\lambda||\mu} V^\mu n^\lambda + h^\alpha_\lambda n^\lambda_{||\mu} V^\mu - v^\alpha_{||\mu} h^\mu_\lambda n^\lambda = \\ &= (\delta^\alpha_\lambda - v^\alpha v_\lambda)_{||\mu} V^\mu n^\lambda + (\delta^\alpha_\lambda - v^\alpha v_\lambda) n^\lambda_{||\mu} V^\mu - \\ &\quad - v^\alpha_{||\mu} (\delta^\mu_\lambda - v^\mu v_\lambda) n^\lambda \\ &= -\dot{v}^\alpha v_\lambda n^\lambda - v^\alpha \dot{v}_\lambda n^\lambda + \dot{n}^\alpha - v^\alpha v_\lambda \dot{n}^\lambda - v^\alpha_{||\lambda} n^\lambda + \dot{v}^\alpha v_\lambda n^\lambda \end{aligned}$$

(usando a eq. (5))

$$\begin{aligned} &= -v^\alpha \dot{v}_\lambda n^\lambda + \dot{n}^\alpha - v^\alpha v_\lambda \dot{n}^\lambda - \dot{n}^\alpha = \\ &= -v^\alpha (\dot{v}_\lambda n^\lambda + v_\lambda \dot{n}^\lambda) \end{aligned}$$

Mas a norma $v^\alpha v_\alpha = 1$ implica $\dot{v}^\alpha v_\alpha = 0$. Daí

$$\left[\begin{array}{c} \dot{\vec{\eta}} \\ \dot{v} \end{array} \right]_{\perp}^{\alpha} = - \dot{v}_{\lambda} \eta^{\lambda} v^{\alpha} \quad (6)$$

Convém notar que $\dot{\vec{\eta}}_{\perp}$ mede o afastamento efetivo de duas curvas vizinhas em H . Podemos obter a velocidade de afastamento v^{α} dessas curvas através da derivação ao longo do parâmetro s .

A velocidade de afastamento dos pontos p e $p+dp$ em H é obtida a partir da restrição de V^{α} em H :

$$v_{(rel)}^{\alpha} \equiv h^{\alpha}_{\mu} \frac{D}{DS} (h^{\mu}_{\lambda} \eta^{\lambda})$$

Usando a restrição (5) de $\dot{\vec{\eta}}$ e notando que temos

$$h^{\alpha}_{\mu} \frac{D}{DS} \eta^{\mu} \equiv h^{\alpha}_{\mu} \dot{\eta}^{\mu} = h^{\alpha}_{\mu} v^{\mu}_{\parallel \lambda} \eta^{\lambda}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} v_{(rel)}^{\alpha} &= h^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}_{\parallel \mu} \eta^{\mu} + h^{\alpha}_{\mu} \eta^{\lambda} \frac{D}{DS} h^{\mu}_{\lambda} = \\ &= h^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}_{\parallel \mu} \eta^{\epsilon} (\delta^{\mu}_{\epsilon} - v^{\mu}_{\nu} v_{\nu \epsilon}) + h^{\alpha}_{\beta} \dot{v}^{\beta}_{\parallel \mu} \eta^{\epsilon} v_{\nu \epsilon} + h^{\alpha}_{\mu} \eta^{\lambda} (-\dot{v}^{\mu}_{\nu} v_{\nu \lambda} - v^{\mu}_{\nu} \dot{v}_{\nu \lambda}) \\ &= h^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}_{\parallel \mu} h^{\mu}_{\epsilon} \eta^{\epsilon} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$v_{(rel)}^{\alpha} = h^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}_{\parallel \mu} \eta^{\mu}_{\perp} \quad (7)$$

A relação (7) mostra que é possível obter a velocidade de afastamento de dois pontos vizinhos p e $p+\Delta p$ da congruência Γ através de uma transformação linear sobre o vetor de co-

nexão η^μ . Com efeito, (7) pode ser escrita como a aplicação linear

$$v_{(rel)}^\alpha = Q^\alpha{}_\mu \eta^\mu \quad (8)$$

com

$$Q^\alpha{}_\mu \equiv h^\alpha{}_\beta h_\mu{}^\lambda v^\beta{}_{||\lambda}$$

Exercício: Calcule a aceleração relativa $a_{(rel)}^\alpha = h^\alpha{}_\mu \frac{D}{DS} v_{(rel)}^\mu$ de uma congruência Γ .

Consideremos o tensor $Q_{\alpha\mu}$ que contém a informação da variação da distância entre dois pontos de Γ . Usando o teorema de decomposição de tensores em partes irredutíveis, podemos escrever

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad (9)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}$ é tensor simétrico de traço nulo e $\omega_{\alpha\beta}$ é tensor anti-simétrico.

Temos

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda v_{\mu||\lambda} \quad (10a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^\mu{}_{[\alpha} h_{\beta]}{}^\lambda v_{\mu||\lambda} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad (10b)$$

$$\theta = h^{\alpha\lambda} v_{\alpha||\lambda} = v^\alpha{}_{||\alpha} \quad (10c)$$

Vemos que os tensores $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ pertencem a H . Com efeito, das definições acima segue:

$$\sigma_{\mu\nu} v^\mu = 0$$

$$\omega_{\mu\nu} v^\mu = 0$$

Podemos então escrever

$$h^\alpha_\beta h^\mu_\lambda v_{\alpha||\mu} = \frac{\theta}{3} h_{\beta\lambda} + \sigma_{\beta\lambda} + \omega_{\beta\lambda} \quad (11)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo temos

$$(\delta^\alpha_\beta - v^\alpha v_\beta)(\delta^\mu_\lambda - v^\mu v_\lambda) v_{\alpha||\mu} =$$

$$= (\delta^\alpha_\beta \delta^\mu_\lambda - \delta^\alpha_\beta v^\mu v_\lambda - v^\alpha v_\beta \delta^\mu_\lambda + v^\alpha v^\mu v_\beta v_\lambda)$$

$$v_{\alpha||\mu} = v_{\beta||\lambda} - \dot{v}_\beta v_\lambda - v_{\alpha||\lambda} v^\alpha v_\beta + \dot{v}_\alpha v^\alpha v_\beta v_\lambda$$

Mas

$$v_{\alpha||\lambda} v^\alpha = 0$$

Daí

$$h^\alpha_\beta h^\mu_\lambda v_{\alpha||\mu} = v_{\beta||\lambda} - \dot{v}_\beta v_\lambda \quad (12)$$

Note que $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$. Temos então

$$e^A_{\alpha||\mu} = -\gamma^A_{BC} e^B_\alpha e^C_\mu \quad (13)$$

O vetor v^A , em repouso no sistema de tetrada, se escreve

$$v^A = \delta^A_0$$

Então,

$$v_A = \eta_{A0}$$

Assim, podemos escrever os parâmetros na base de te-

trada, ou seja:

$$\begin{aligned} \theta &= v_{\alpha}^{\alpha} = v_{\alpha\|\beta} g^{\alpha\beta} = (e_{\alpha}^A v_A)_{\|\beta} g^{\alpha\beta} = \\ &= v_A e_{\alpha\|\beta}^A g^{\alpha\beta} = -v_A \gamma_{BC}^A e_{\alpha}^B e_{\beta}^C g^{\alpha\beta} = \\ &= -\gamma_{BC}^A v_A \eta^{BC} \end{aligned}$$

$$\theta = -\gamma_{BC}^0 \eta^{BC} \quad (14)$$

Para o tensor σ_{AB}

$$\begin{aligned} 2\sigma_{AB} &= h^{\mu}{}_{(\alpha} h^{\lambda}{}_{\beta)} v_{\mu\|\lambda} e^{\alpha}{}_A e^{\beta}{}_B - \frac{2}{3} \epsilon h_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_A e^{\beta}{}_B \\ &= h^{\mu}{}_{\alpha} h^{\lambda}{}_{\beta} e_{\mu\|\lambda}^0 e^{\alpha}{}_A e^{\beta}{}_B - \frac{2}{3} \theta h_{AB} \\ &= -h^{\mu}{}_{\alpha} h^{\lambda}{}_{\beta} \gamma_{MN}^0 e^M{}_{\mu} e^N{}_{\lambda} e^{\alpha}{}_A e^{\beta}{}_B - \frac{2}{3} \theta h_{AB} \\ &= -\gamma_{MN}^0 (e^M{}_{\alpha} - v_{\alpha} v^M) (e^N{}_{\beta} - v_{\beta} v^N) e^{\alpha}{}_A e^{\beta}{}_B - \\ &\quad - \frac{2}{3} \theta h_{AB} \\ &= -\gamma_{MN}^0 (\delta^M{}_A - v_A v^M) (\delta^N{}_B - v_B v^N) - \\ &\quad - \gamma_{MN}^0 (\delta^M{}_B - v_B v^M) (\delta^N{}_A - v_A v^N) - \frac{2}{3} \theta h_{AB} \\ &= -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{AN}^0 v_B v^N + \gamma_{MB}^0 v_A v^M - \\ &\quad - \gamma_{MN}^0 v^M v^N v_A v_B - \gamma_{BA}^0 + \gamma_{BN}^0 v_A v^N + \end{aligned}$$

$$+ \gamma^0_{MA} v_B v^M - \gamma^0_{MN} v^M v^N v_A v_B - \frac{2}{3} \theta h_{AB}$$

$$2\sigma_{AB} = -\gamma^0_{AB} - \gamma^0_{BA} + \gamma^0_{AO} v_B + \gamma^0_{OB} v_A - \\ - 2\gamma^0_{OO} v_A v_B + \gamma^0_{BO} v_A + \gamma^0_{OA} v_B - \frac{2}{3} \theta h_{AB}$$

$$2\sigma_{AB} = -\gamma^0_{AB} - \gamma^0_{BA} + \gamma^0_{AO} \eta_{BO} + \gamma^0_{BO} \eta_{AO} - \frac{2}{3} \theta h_{AB} \quad (15)$$

Para o tensor ω_{AB} :

$$2\omega_{AB} = h_{[\alpha}^{\mu} h_{\beta]}^{\lambda} v_{\mu||\lambda} e^{\alpha}_A e^{\beta}_B \\ = e^{\alpha}_A e^{\beta}_B h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\lambda} e^0_{[\mu||\lambda]} \\ = -\gamma^0_{MN} e^M_{[\mu} e^N_{\lambda]} e^{\alpha}_A e^{\beta}_B h^{\mu}_{\alpha} h^{\lambda}_{\beta} \\ = -\gamma^0_{MN} e^M_{[\mu} e^N_{\lambda]} (e^{\alpha}_A - v^{\mu} v_A) (e^{\lambda}_B - v^{\lambda} v_B) \\ = -\gamma^0_{MN} e^M_{[\mu} e^N_{\lambda]} (e^{\mu}_A e^{\lambda}_B - e^{\mu}_A v^{\lambda} v_B - \\ - e^{\lambda}_B v^{\mu} v_A + v^{\mu} v^{\lambda} v_A v_B) \\ = -\gamma^0_{MN} [\delta^M_A \delta^N_B - \delta^M_B \delta^N_A - \delta^M_A v^N v_B + \\ + \delta^N_A v^M v_B - v^M v_A \delta^N_B + v^N v_A \delta^M_A + v^M v^N v_A v_B - \\ - v^N v^M v_A v_B]$$

$$= -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 + \gamma_{AN}^0 v^N v_B - \gamma_{MA}^0 v^M v_B + \\ + \gamma_{MB}^0 v^M v_A - \gamma_{MN}^0 v^N v_A$$

$$2\omega_{AB} = -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 + \gamma_{AO}^0 v_B - \gamma_{BO}^0 v_A$$

$$2\omega_{AB} = -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 + \gamma_{AO}^0 \delta_B^0 - \gamma_{BO}^0 \delta_A^0 \quad (16)$$

Para a aceleração, temos:

$$\begin{aligned} \dot{v}_A &= e_A^\alpha \dot{v}_\alpha = e_A^\alpha v_{\alpha|\lambda} v^\lambda \\ &= e_A^\alpha e_{\alpha|\lambda}^0 v^\lambda \\ &= -e_A^\alpha \gamma_{MN}^0 e_\alpha^M e_\lambda^N v^\lambda \\ &= -\gamma_{AN}^0 v^N \\ \dot{v}_A &= -\gamma_{AO}^0 \end{aligned} \quad (17)$$

Assim, podemos usar essa expressão da aceleração e re-escrever o tensor ω_{AB} sob a forma

$$2\omega_{AB} = -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 - \dot{v}_A \delta_B^0 + \dot{v}_B \delta_A^0 \quad (16')$$

1.3 - Propagação das Quantidades Cinemáticas

Vamos examinar as equações de evolução dos parâmetros

tros θ , $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ ao longo da congruência Γ .

Da definição de tensor de curvatura, temos

$$V_{\alpha||\beta||\gamma} - V_{\alpha||\gamma||\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon$$

Multiplicando por V^γ temos:

$$(V_{\alpha||\beta})^\cdot - V_{\alpha||\gamma||\beta} V^\gamma = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon V^\gamma$$

onde, como sempre nestas notas, o ponto significa derivação na direção V_α

Mas,

$$\begin{aligned} V_{\alpha||\gamma||\beta} V^\gamma &= (V_{\alpha||\gamma} V^\gamma)_{||\beta} - V_{\alpha||\gamma} V^\gamma_{||\beta} = \\ &= (\dot{V}_\alpha)_{||\beta} - V_{\alpha||\gamma} V^\gamma_{||\beta} \end{aligned}$$

ou, notando indistintamente $\dot{V}_\alpha \equiv a_\alpha^\cdot$, escrevemos:

$$(V_{\alpha||\beta})^\cdot - a_{\alpha||\beta} + V_{\alpha||\gamma} V^\gamma_{||\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon V^\gamma$$

Projetando no espaço H , tem-se:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (V_{\mu||\nu})^\cdot - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu||\nu} + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu V_{\mu||\gamma} V^\gamma_{||\nu} = \\ = R_{\mu\epsilon\nu\gamma} V^\epsilon V^\gamma h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \end{aligned}$$

Ou, usando (12) e a definição (8) de $Q_{\alpha\mu}$:

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (Q_{\mu\nu} + a_\mu V_\nu)^\cdot - h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{\mu||\nu}$$

$$\begin{aligned}
 &+ h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (Q_{\mu\gamma} + a_{\mu} v_{\gamma}) (Q^{\gamma}_{\nu} + a^{\gamma} a_{\nu}) = \\
 &= R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} v^{\epsilon} v^{\gamma}
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 &h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{Q}_{\mu\nu} + a_{\mu} a_{\nu} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\nu}^{\nu} a_{\mu||\nu} + \\
 &+ h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} Q_{\mu\gamma} Q^{\gamma}_{\nu} + h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu} v_{\gamma} Q^{\gamma}_{\nu} = \\
 &= R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} v^{\epsilon} v^{\gamma}
 \end{aligned}$$

Lembrando que $a_{\mu} Q^{\mu}_{\nu} = 0$, obtemos finalmente,

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{Q}_{\mu\nu} + a_{\alpha} a_{\beta} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu||\nu} + Q_{\alpha\gamma} Q^{\gamma}_{\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} v^{\epsilon} v^{\gamma} \quad (18)$$

Esta expressão (18) contém toda informação necessária para a obtenção da evolução dos parâmetros cinemáticos, como veremos a seguir.

1.4 - Equação de Evolução de θ

Contraíndo a equação (18) nos índices α e β , tem-se

$$h_{\mu\nu} \dot{Q}^{\mu\nu} + a_{\alpha} a^{\alpha} - h^{\mu\nu} a_{\mu||\nu} + Q_{\alpha\mu} Q^{\mu\alpha} = R_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}$$

Nas

$$\begin{aligned}
 h^{\mu\nu} \dot{Q}_{\mu\nu} &= (h^{\mu\nu} Q_{\mu\nu})^{\cdot} - \dot{h}_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = \\
 &= (Q^{\mu}_{\mu})^{\cdot} + a^{\mu} v^{\nu} Q_{\mu\nu} + a^{\nu} v^{\mu} Q_{\mu\nu} = (Q^{\mu}_{\mu})^{\cdot}
 \end{aligned}$$

Lembrando a expressão de $Q_{\mu\nu}$, temos

$$Q_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} v_{\mu||\nu}$$

$$Q = Q_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = h^{\mu\nu} v_{\mu||\nu} = v^{\mu}{}_{||\mu} - v^{\mu}v^{\nu}v_{\mu||\nu} = v^{\mu}{}_{||\mu}$$

isto é,

$$Q = \theta$$

Daí, temos

$$\dot{\theta} + a_{\mu} a^{\mu} - a^{\mu}{}_{||\mu} + a_{\mu||\nu} v^{\nu} v^{\mu} + Q_{\alpha\mu} Q^{\mu\alpha} = R_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}$$

Mas

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\mu} Q^{\mu\alpha} &= \left(\frac{\theta}{3} h_{\alpha\mu} + \sigma_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu}\right) \left(\frac{\theta}{3} h^{\mu\alpha} + \sigma^{\mu\alpha} + \omega^{\mu\alpha}\right) = \\ &= \frac{\theta^2}{3} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu\alpha} + \omega_{\alpha\mu} \omega^{\mu\alpha} \end{aligned}$$

Definiremos as normas σ^2 , ω^2 :

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$$

$$\omega^2 \equiv \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}$$

Daí,

$$Q_{\alpha\mu} Q^{\mu\alpha} = \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2$$

Então

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - a^{\mu}{}_{||\mu} + \dot{a}_{\mu} v^{\mu} + a^{\nu} a_{\nu} = R_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}$$

Mas,

$$\dot{a}_\mu v^\mu = (a_\mu v^\mu)' - a_\mu a^\mu = -a_\mu a^\mu$$

Tem-se, finalmente:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta}{3} + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - a^\mu{}_{||\mu} = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad (19)$$

A equação (19) determina a evolução do parâmetro θ ao longo da curva. A equação (19) é conhecida, em Cosmologia, como equação de Raychaudhuri.

1.5 - Equação de Evolução de $\sigma_{\mu\nu}$

Simetrizando a equação (18) podemos escrever:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \frac{\dot{\theta}}{3} h_{\mu\nu} + a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu||\nu} + a_{\nu||\mu}) + \\ + \frac{1}{2} Q_{\alpha\mu} Q^\mu{}_\beta + \frac{1}{2} Q_{\beta\mu} Q^\mu{}_\alpha = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} v^\epsilon v^\nu \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\mu} Q^\mu{}_\beta &= \left(\frac{\theta}{3} h_{\alpha\mu} + \sigma_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu}\right) \left(\frac{\theta}{3} h^\mu{}_\beta + \sigma^\mu{}_\beta + \omega^\mu{}_\beta\right) = \\ &= \frac{\theta^2}{9} h_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \omega_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta + \sigma_{\alpha\mu} \omega^\mu{}_\beta + \\ &+ \frac{\theta}{3} \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta + \omega_{\alpha\mu} \omega^\mu{}_\beta = \\ &= \frac{\theta^2}{9} h_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta + \\ &+ \sigma_{\alpha\mu} \omega^\mu{}_\beta + \omega_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta + \omega_{\alpha\mu} \omega^\mu{}_\beta \end{aligned}$$

Daí

$$Q_{\alpha\mu} Q^{\mu}_{\beta} + Q_{\beta\mu} Q^{\mu}_{\alpha} = \frac{2}{9} \theta^2 h_{\alpha\beta} + \frac{4}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + 2\sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu}_{\beta} + 2\omega_{\alpha\mu} \omega^{\mu}_{\beta}$$

Para simplificar esta expressão, usaremos a definição do vetor de rotação dado por

$$\omega^{\tau} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\rho\tau} \omega_{\alpha\beta} V_{\rho}$$

cuja inversa é dada por

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \omega^{\mu} V^{\nu}$$

Tem-se, então:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\mu} \omega^{\mu\beta} &= \eta_{\alpha\mu\rho\sigma} \omega^{\rho} V^{\sigma} \eta^{\mu\beta\epsilon\tau} \omega^{\epsilon} V^{\tau} \\ &= \delta^{\beta\epsilon\tau}_{\alpha\rho\sigma} \omega^{\rho} \omega_{\epsilon} V^{\sigma} V^{\tau} \\ &= \left[\delta^{\beta}_{\alpha} \delta^{\epsilon}_{\rho} \delta^{\tau}_{\sigma} - \delta^{\beta}_{\alpha} \delta^{\epsilon}_{\sigma} \delta^{\tau}_{\rho} - \delta^{\beta}_{\sigma} \delta^{\epsilon}_{\rho} \delta^{\tau}_{\alpha} - \delta^{\beta}_{\rho} \delta^{\epsilon}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\beta}_{\sigma} \delta^{\epsilon}_{\alpha} \delta^{\tau}_{\rho} + \delta^{\beta}_{\rho} \delta^{\epsilon}_{\sigma} \delta^{\tau}_{\alpha} \right] \omega^{\rho} \omega_{\epsilon} V^{\sigma} V^{\tau} = \\ &= \delta^{\beta}_{\alpha} \omega_{\mu} \omega^{\mu} - \omega^{\mu} \omega_{\mu} V^{\beta} V_{\alpha} - \omega^{\beta} \omega_{\alpha} = \\ &= \omega_{\mu} \omega^{\mu} h^{\beta}_{\alpha} - \omega^{\beta} \omega_{\alpha} \end{aligned}$$

pois, ω^{μ} é um vetor em H , isto é,

$$\omega^{\mu} V_{\mu} = 0$$

Coletando esses cálculos, obtemos

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\theta} + a_{\alpha} a_{\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu||\nu} + a_{\nu||\mu}) + \\ + \frac{\theta^2}{9} h_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu}_{\beta} + \omega_{\mu} \omega^{\mu} h_{\alpha\beta} - \omega_{\beta} \omega_{\alpha} = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^{\epsilon} V^{\nu}$$

Usando a equação de evolução (19) temos:

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \left(-\frac{\theta^2}{3} - 2\sigma^2 + 2\omega^2 + a^{\lambda}{}_{||\lambda} + R_{\lambda} \sigma V^{\lambda} V^{\sigma} \right) h_{\mu\nu} + \\ + a_{\alpha} a_{\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu||\nu} + a_{\nu||\mu}) + \frac{\theta^2}{9} h_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \\ + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu}_{\beta} - \omega^2 h_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^{\epsilon} V^{\nu}$$

ou

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + h_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{3} \omega^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 + \frac{1}{3} a^{\lambda}{}_{||\lambda} + \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \right) + \\ + a_{\alpha} a_{\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu||\nu} + a_{\nu||\mu}) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu}_{\beta} - \\ - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^{\epsilon} V^{\nu}$$

ou ainda

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \left[-\omega^2 - 2\sigma^2 + a^{\lambda}{}_{||\lambda} \right] + a_{\alpha} a_{\beta} - \\ - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu||\nu} + a_{\nu||\mu}) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^{\mu}_{\beta} - \omega_{\alpha} \omega_{\beta} = \\ = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^{\epsilon} V^{\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} h_{\alpha\beta} \quad (20)$$

que é a expressão da equação de evolução de $\sigma_{\mu\nu}$

1.6 - Equação de Evolução de $\omega_{\mu\nu}$

Anti-simetrizando a equação fundamental (18) tem-se:

$$2 h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\omega}_{\mu\nu} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu||\nu} - a_{\nu||\mu}) + \\ + Q_{\alpha\mu} Q^{\mu}_{\beta} - Q_{\beta\mu} Q^{\mu}_{\alpha} = 0$$

Mas

$$Q_{\alpha\mu} Q^{\mu}_{\beta} - Q_{\beta\mu} Q^{\mu}_{\alpha} = \frac{4}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + 2\sigma_{\alpha\mu} \omega^{\mu}_{\beta} - 2\sigma_{\beta\mu} \omega^{\mu}_{\alpha}$$

Então

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu||\nu} - a_{\nu||\mu}) + \\ + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \omega^{\mu}_{\beta} - \sigma_{\beta\mu} \omega^{\mu}_{\alpha} = 0 \quad (21)$$

que é expressão da equação de evolução de $\omega_{\mu\nu}$.

Exercício: Calcule a equação de evolução de ω^{μ} para uma congruência geodésica.

Solução: $\dot{\omega}^{\mu} + \frac{2}{3} \theta \omega^{\mu} = \sigma^{\mu}_{\alpha} \omega^{\alpha}$.

Além das equações (19), (20), (21) que descrevem a evolução dos parâmetros cinemáticos de uma congruência, existem certas relações entre estas quantidades que devem ser satisfeitas independentemente do valor do parâmetro afim sobre a curva $\chi^{\alpha} = \chi^{\alpha}(S)$. Tais relações são, dessa forma, chamadas equações de vínculo. Passemos agora, à tarefa de demonstrá-las.

Da relação de definição do tensor de curvatura,

$$V_{\alpha||\beta||\gamma} - V_{\alpha||\gamma||\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^{\epsilon} \quad (22)$$

Contraíndo α , β e projetando em H , temos

$$h^{\gamma}_{\lambda} (V^{\alpha}_{||\alpha||\gamma})_{||\gamma} - h^{\gamma}_{\lambda} V^{\alpha}_{||\gamma||\alpha} = R_{\epsilon\gamma} V^{\epsilon} h^{\gamma}_{\lambda} \quad (23)$$

Mas

$$\begin{aligned} h^{\gamma}_{\lambda} V^{\alpha}_{||\gamma||\alpha} &= \left(\frac{\theta}{3} h^{\alpha}_{\gamma} + \sigma^{\alpha}_{\gamma} + a^{\alpha} V_{\gamma} \right)_{||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} = \\ &= (\sigma^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\gamma})_{||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} + \frac{1}{3} \theta_{|\alpha} h^{\alpha}_{\lambda} + \frac{\theta}{3} h^{\alpha}_{\gamma||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} + \\ &\quad + a^{\alpha} V_{\gamma||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} \\ &= (\sigma^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\gamma})_{||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} + \frac{1}{3} \theta_{|\alpha} h^{\alpha}_{\lambda} - \frac{\theta}{3} a_{\gamma} h^{\gamma}_{\lambda} + \\ &\quad + a^{\alpha} \left(\frac{\theta}{3} h_{\gamma\alpha} + \sigma_{\gamma\alpha} + \omega_{\gamma\alpha} + a_{\gamma} V_{\alpha} \right) h^{\gamma}_{\lambda} \\ &= (\sigma^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\gamma})_{||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} + \frac{1}{3} \theta_{|\alpha} h^{\alpha}_{\lambda} + a^{\alpha} (\sigma_{\gamma\alpha} + \omega_{\gamma\alpha}) \end{aligned}$$

Daí, usando esse resultado na equação (23) teremos:

$$\frac{2}{3} \theta_{|\mu} h^{\mu}_{\lambda} - (\sigma^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\gamma})_{||\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} - a^{\alpha} (\sigma_{\gamma\alpha} + \omega_{\gamma\alpha}) = R_{\mu\alpha} V^{\mu} h^{\alpha}_{\lambda} \quad (24)$$

que consiste na primeira equação de vínculo.

Passemos agora à segunda relação.

Temos, usando a equação (22) sucessivamente:

$$V_{\alpha||\beta||\gamma} - V_{\alpha||\gamma||\beta} = R_{\alpha\mu\beta\gamma} V^{\mu}$$

$$V_{\beta||\gamma||\alpha} - V_{\beta||\alpha||\gamma} = R_{\beta\mu\gamma\alpha} V^{\mu}$$

$$V_{\gamma||\alpha||\beta} - V_{\gamma||\beta||\alpha} = R_{\gamma\mu\alpha\beta} V^{\mu}$$

Somando,

$$\begin{aligned} & (V_{\alpha||\beta} - V_{\beta||\alpha})_{||\gamma} + (V_{\gamma||\alpha} - V_{\alpha||\gamma})_{||\beta} + \\ & + (V_{\beta||\gamma} - V_{\gamma||\beta})_{||\alpha} = (R_{\mu\alpha\gamma\beta} + R_{\mu\beta\alpha\gamma} + R_{\mu\gamma\beta\alpha}) V^{\mu} \end{aligned}$$

O lado direito dessa expressão é identicamente nulo, devido às propriedades do tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Usando a equação (12) temos

$$\begin{aligned} V_{\alpha||\beta} - V_{\beta||\alpha} &= \omega_{\alpha\beta} + a_{\alpha} V_{\beta} - \omega_{\beta\alpha} - a_{\beta} V_{\alpha} \\ &= 2\omega_{\alpha\beta} + a_{\alpha} V_{\beta} - a_{\beta} V_{\alpha} \end{aligned}$$

Então, temos

$$(2\omega_{\alpha\beta} + a_{\alpha} V_{\beta} - a_{\beta} V_{\alpha})_{||\gamma} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0,$$

ou ainda, devido ao fato do espaço ser Riemanniano (isto é, $g_{\mu\nu||\lambda} = 0$)

$$(\omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda})_{||\gamma} + (a_{\alpha} V_{\beta})_{||\gamma} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0 \quad (25)$$

Multiplicando ainda por V^{λ} temos

$$(\omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda})_{||\gamma} V_{\lambda} + a_{\alpha} V_{\beta||\gamma} V_{\lambda} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$$

Lembrando a definição de $\omega^{\tau} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\rho\tau} \omega_{\alpha\beta} V_{\rho}$, podemos escrever

$$(\omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} v_\lambda)_{||\gamma} - \omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} v_{\lambda||\gamma} + a_\alpha v_\lambda v_{\beta||\gamma} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$$

isto é,

$$-2\omega_{||\alpha}^\alpha - \omega_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} (\omega_{\lambda\gamma} + a_\lambda v_\gamma) + a_\alpha v_\lambda (\omega_{\beta\gamma} + a_\beta v_\gamma) \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$$

ou

$$-2\omega_{||\alpha}^\alpha - \omega_{\alpha\beta} \omega_{\lambda\gamma} \eta^{\alpha\beta\lambda\gamma} - 2\omega^\lambda a_\lambda - 2a_\alpha \omega^\alpha = 0$$

ou ainda

$$\omega_{||\alpha}^\alpha + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0 \quad (26)$$

Finalmente vamos procurar a terceira equação de vínculo.

Multiplicando a equação (22) pelo tensor $\eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon$, temos:

$$v_{\alpha||\beta||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon = \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\gamma} v^\mu \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon \quad (27)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo obtemos

$$v_{\alpha||\beta||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon = \left(\frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + a_\alpha v_\beta\right)_{||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon =$$

$$= (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon + \frac{1}{3} (\theta h_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon +$$

$$+ a_\alpha \left(\frac{\theta}{3} h_{\beta\gamma} + \sigma_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma} + a_\beta v_\gamma\right) \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon =$$

$$= (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon + \frac{1}{3} \theta_{||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon -$$

$$- \frac{1}{3} \theta (v_\alpha v_\beta)_{||\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon + a_\alpha \omega_{\beta\gamma} \eta_\rho^{\gamma\beta\epsilon} v_\epsilon =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} + \frac{1}{3} \theta_{|\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\epsilon} v_{\epsilon} - \\
&\quad - \frac{1}{3} \theta v_{\alpha} \left[\frac{\theta}{3} h_{\beta\gamma} + \sigma_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma} + a_{\beta} v_{\gamma} \right] \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} + 2a_{\alpha} \omega_{\rho} = \\
&= (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} + \frac{1}{3} \theta_{|\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\epsilon} v_{\epsilon} - \\
&\quad - \frac{1}{3} \theta v_{\alpha} \omega_{\beta\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} + 2a_{\alpha} \omega_{\rho} = \\
&= (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} + \frac{1}{3} \theta_{|\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\epsilon} v_{\epsilon} - \frac{2}{3} \theta v_{\alpha} \omega_{\rho} + 2a_{\alpha} \omega_{\rho}
\end{aligned}$$

Usando esse resultado na expressão (27) temos:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{||\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} + \frac{1}{3} \theta_{|\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\epsilon} v_{\epsilon} - \\
&\quad - \frac{2}{3} \theta v_{\alpha} \omega_{\rho} + 2a_{\alpha} \omega_{\rho} = \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\gamma} v^{\mu} v_{\epsilon} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon}
\end{aligned}$$

Simetrizando em α, ρ :

$$\begin{aligned}
&\left[\sigma_{\beta}(\alpha - \omega_{\beta}(\alpha))_{||\gamma} \eta_{\rho}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} - \frac{2}{3} \theta v_{\alpha} \omega_{\rho} \right] + \\
&\quad + 2a_{\alpha} \omega_{\rho} = - \frac{1}{2} R_{\beta\gamma\mu}(\alpha \eta_{\rho})^{\gamma\beta\epsilon} v^{\mu} v_{\epsilon}
\end{aligned} \tag{28}$$

2 - FONTES DA CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO

2.1 - Introdução

Uma das questões mais fundamentais em Cosmologia consiste em procurar estabelecer as propriedades do fluido cósmico responsável pela curvatura do espaço-tempo global. A existência de processos dinâmicos e a própria dependência com o tempo cósmico das propriedades globais do Cosmos sugerem a caracterização de distintas épocas na vida do Universo. Cada uma dessas épocas está associada a um particular tipo de estrutura energética que domina sobre as demais e é assim a principal responsável, naquele período, pela curvatura do espaço-tempo. Embora a caracterização final dessas épocas não tenha sido estabelecida definitivamente, podemos com boa aproximação distinguir algumas fases no Universo representadas por distribuições específicas da energia.

Neste Capítulo, apresentaremos a teoria geral do fluido cósmico, bem como estudaremos a expressão da energia gerada por campos escalar, vetorial, etc., em um espaço de Riemann arbitrário. Deixaremos a discussão da caracterização das diversas fases do nosso Universo para outro lugar.

2.2 - Decomposição do Tensor de Energia

A distribuição de energia de um fluido, medida por um observador com velocidade própria V^{μ} caracteriza-se pelas seguintes partes:

(a) densidade de energia total do fluido (ρ)

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \rho V_\mu V_\nu \quad (1)$$

(b) pressão isotrôpica (p)

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = -p(g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu) = -p h_{\mu\nu} \quad (2)$$

(c) propagação de calor (q^μ)

$$T_{\mu\nu}^{(3)} = q_\mu V_\nu + q_\nu V_\mu \quad (3)$$

(d) pressão não isotrôpica

$$T_{\mu\nu}^{(4)} = \pi_{\mu\nu} \quad (4)$$

Assim, um dado observador V^μ decompõe o tensor de energia $T_{\mu\nu}$ em suas diferentes partes irredutíveis sob a forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} \quad (5)$$

Consideremos o vetor V^μ (tipo-tempo) normalizado

$$V^\mu V^\nu g_{\mu\nu} = +1$$

A decomposição acima nada mais é do que a separação por um observador de velocidade V^μ de um tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ em suas partes irredutíveis. Os tensores q_μ e $\pi_{\mu\nu}$ satisfazem os vínculos

$$\begin{aligned} q_{\mu} v^{\mu} &= 0 \\ \pi_{\mu\nu} v^{\nu} &= 0 \\ \pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 0 \\ \pi_{\mu\nu} &= \pi_{\nu\mu} \end{aligned}$$

Tal decomposição de $T_{\mu\nu}$ não se limita a um fluido especial mas pode ser realizada indistintamente para qualquer configuração, mesmo se estivermos tratando com energia associada a campos de radiação. Adiante mostraremos como realizar essa decomposição para campo eletromagnético, escalar, etc..

Exercício: Mostre que para um tensor energia-momento arbitrário $T_{\mu\nu}$ podemos decompô-lo nas distintas partes independentes ρ , p , q_{μ} , $\pi_{\mu\nu}$, para um observador qualquer (v^{μ}) através das relações

$$\begin{aligned} \rho &= T_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} \quad ; \quad p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad ; \\ q_{\lambda} &= T_{\alpha\beta} v^{\beta} h^{\alpha}_{\lambda} \quad ; \quad \pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + p h_{\mu\nu} \end{aligned}$$

2.3 - Conservação da Energia

A expressão co-variante da conservação local de energia, se escreve

$$T^{\mu\nu} \parallel_{\nu} = 0 \quad (6)$$

Vamos projetar essa equação vetorial, paralela e ortogonalmente ao vetor v^{μ} obtendo dessa forma as equações de variações da densidade de energia com o tempo (medido como parâmetro ao longo da trajetória do observador de velocidade v^{μ}).

e a generalização para o espaço de Riemann da equação de Navier-Stoke.

Multiplicando a equação (3) por V_μ e substituindo a forma geral (1), temos

$$(\rho V^\mu V^\nu)_{||\nu} V_\mu - (ph^{\mu\nu})_{||\nu} V_\mu + (q^\mu V^\nu + q^\nu V^\mu)_{||\nu} V^\mu + \pi^{\mu\nu}{}_{||\nu} V_\mu = 0$$

Desenvolvendo por partes, temos:

$$(\rho V^\mu V^\nu)_{||\nu} V_\mu = \dot{\rho} + \rho\theta$$

onde

$$\dot{\rho} \equiv \rho_{|\mu} V^\mu$$

$$(ph^{\mu\nu})_{||\nu} V_\mu = p_{|\nu} h^{\mu\nu} V_\mu + p (g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu)_{||\nu} V_\mu = -\rho\theta$$

$$(q^\mu V^\nu + q^\nu V^\mu)_{||\nu} V_\mu = \dot{q}^\mu V_\mu + q^\nu{}_{||\nu} + q^\nu V^\mu{}_{||\nu} V_\mu = \dot{q}^\mu V_\mu + q^\mu{}_{||\mu}$$

Pois, temos

$$V^\mu{}_{||\nu} V_\mu = (\theta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \dot{V}^\mu V_\nu) V_\mu = 0$$

E o quarto termo dará

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu}{}_{||\nu} V_\mu &= (\pi^{\mu\nu} V_\mu)_{||\nu} - \pi^{\mu\nu} V_\mu{}_{||\nu} \\ &= -\pi^{\mu\nu} (\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \dot{V}_\mu V_\nu) \\ &= -\pi^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Colectando os diferentes termos, tem-se a equação de conservação de energia:

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \theta + \dot{q}^\mu v_\mu + q^\mu \parallel_\mu - \pi^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

Vamos agora projetar a equação (3) no 3-espaço ortogonal a v^μ (isto é, em \mathcal{H} (conforme Cap. 1)).

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} \parallel_\nu h_{\mu\alpha} = 0$$

Por partes, temos

$$(\rho v^\mu v^\nu) \parallel_\nu h_{\mu\alpha} = \rho \dot{v}^\mu h_{\mu\alpha} = \rho \dot{v}_\alpha.$$

$$\begin{aligned} - (ph^{\mu\nu}) \parallel_\nu h_{\mu\alpha} &= - p \downarrow_\nu h^\nu_\alpha + p (v^\mu v^\nu) \parallel_\nu h_{\mu\alpha} = \\ &= - p \downarrow_\nu h^\nu_\alpha + p \dot{v}^\mu h_{\mu\alpha} \\ &= - p \downarrow_\nu h^\nu_\alpha + p \dot{v}_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (q^\mu v^\nu) \parallel_\nu h_{\mu\alpha} &= q^\mu \theta h_{\mu\alpha} + \dot{q}^\mu h_{\mu\alpha} \\ &= \theta q_\alpha + \dot{q}^\mu h_{\mu\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (q^\nu v^\mu) \parallel_\nu h_{\mu\alpha} &= q^\nu v^\mu \parallel_\nu h_{\mu\alpha} = \\ &= q^\nu (\theta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \dot{v}^\mu v_\nu) h_{\mu\alpha} \\ &= q^\nu (\theta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) h_{\mu\alpha} \\ &= q^\nu \theta^\mu_\nu + q^\nu \omega_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} \parallel_\nu h_{\mu\alpha} &= \pi_\alpha^\nu \parallel_\nu - \pi^{\mu\nu} \parallel_\nu v_\mu v_\alpha \\ &= \pi_\alpha^\nu \parallel_\nu + \pi^{\mu\nu} v_\mu \parallel_\nu v_\alpha \\ &= \pi_\alpha^\nu \parallel_\nu + \pi^{\mu\nu} \theta^{\mu\nu} v_\alpha \end{aligned}$$

Colectando os termos teremos

$$\begin{aligned}
 (\rho+p)\dot{V}_\alpha - p_{|\mu} h^\mu_\alpha + \dot{q}_\mu h^\mu_\alpha + \theta q_\alpha + q^\nu \theta^\mu_\nu + q^\nu \omega_{\alpha\nu} + \pi_\alpha^\nu{}_{|\nu} + \\
 + \pi^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} V_\alpha = 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

As equações (4) e (5) constituem a expressão da lei de conservação de energia e momento e serão utilizadas amplamente nas Seções a seguir.

Particular ênfase será dado a fluidos perfeitos, isto é, àqueles em que a pressão é isotrópica ($\pi_{\mu\nu} = 0$), e não há fluxo de calor ($q_\alpha = 0$), isto é, quando pudermos escrever:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} \tag{9}$$

Neste caso, as leis de conservação (4), (5) reduzem-se às formas simples:

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \theta = 0 \tag{10a}$$

$$p_{|\mu} h^\mu_\alpha = 0 \tag{10b}$$

Na investigação de um modelo idealizado capaz de representar o fluido cósmico, somos levados a considerar equações de estado que estabelecem dependência funcional da pressão com a densidade de energia. Podemos

$$p = p(\rho)$$

De modo geral, consideraremos dependência linear de p com ρ :

$$p = \lambda\rho$$

limitando o valor de λ no domínio $0 < \lambda < 1$. O valor $\lambda = 0$ corresponde à matéria incoerentemente distribuída ($p = 0$) e o limite $\lambda = 1$ é dado pela condição de que a velocidade do som $V_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{entropia constante}}$ não pode exceder à velocidade de luz ($c=1$).

2.4 - Fluido de Stokes

A possibilidade de relacionar grandezas dinâmicas (tais como pressões anisotrópicas, fluxo de calor) com quantidades cinemáticas associadas ao fluido galáctico (tais como dilatação θ^μ_ν , vorticidade ω^μ_ν), constitui o chamado Princípio de Viscosidade Generalizada [Novello, 1977].

Um exemplo bastante utilizado desse princípio constitui o chamado fluido de Stokes e consiste precisamente na definição de fluido dada por Stokes.

Chamamos fluido de Stokes àquele no qual o tensor de tensões π_{ij} é uma função contínua do tensor de dilatação θ_{ij} . Tal fluido representa uma classe de substâncias cuja resposta à deformação é um funcional das alterações provocadas no fluido pelas deformações. Representamos esta situação pela expressão

$$\pi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} [\theta_{\alpha\beta}] \quad (11)$$

Escolhendo sistemas de coordenadas onde $V^\mu = \delta^\mu_0$ e notando índices latinos i, j, k variando no domínio $\{1, 2, 3\}$, podemos escrever

$$\pi^i_j = A\delta^i_j + B\theta^i_j + C\theta^i_k\theta^k_j, \quad (12)$$

onde A, B, C são polinômios dos invariantes principais da matriz θ^i_j . Tais invariantes são dados por

$$\begin{aligned} I &= \theta^i_i \equiv \text{Tr } \theta \equiv \theta \\ II &\equiv \frac{1}{2} (\theta^2 - \theta^i_j \theta^{j_i}) \\ III &\equiv \det \theta^i_j \end{aligned} \quad (13)$$

Exercício: Mostre (usando um conhecido teorema de Cayley de matrizes) que da dependência (11) podemos inferir (12).

Escrevemos assim a forma mais geral de um fluido de Stokes como sendo:

$$\begin{aligned} \pi^i_j &= \left[(\alpha_0 + \alpha_1 I + (\alpha_2 I^2 + \alpha'_2 II)) + \right. \\ &+ (\alpha_3 I^3 + \alpha'_3 III + \alpha''_3 III) + \dots \left. \right] \delta^i_j + \\ &+ \left[\beta_0 + \beta_1 I + (\beta_2 I^2 + \beta'_2 II) + \dots \right] \theta^i_j + \\ &+ \left[\gamma_0 + \gamma_1 I + (\gamma_2 I^2 + \gamma'_2 II) + \dots \right] \theta^i_k \theta^k_j \end{aligned}$$

onde os coeficientes $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ podem depender eventualmente da energia do fluido ρ .

2.5 - Fluidos Não-Stokesianos

Chamaremos fluido não-Stokesiano todo fluido cujo tensor de tensão T^i_j é um funcional ou da matriz de vorticidade Ω^i_j ou da matriz de aceleração A^i_j onde Ω^i_j e A^i_j são

definidos por:

$$\Omega^i_j = \omega^i \omega_j + \frac{1}{3} \omega^2 \delta^i_j \quad (14a)$$

$$A^i_j = a^i a_j + \frac{1}{3} a^2 \delta^i_j \quad (14b)$$

onde ω^i é o vetor de rotação, a^i é a aceleração \dot{v}^i , ω^2 é a norma $-\omega^i \omega_i$ e $a^2 = -a^i a_i$.

Embora não conheçamos em laboratórios terrestres, nenhuma substância capaz de se comportar como um fluido não-Stokesiano, teremos oportunidade de encontrar ao longo do nosso curso, soluções cosmológicas cuja fonte da curvatura constitui exemplos de tais fluidos. Veja, por exemplo, os exercícios que seguem.

Exercício: Mostre que o modelo cosmológico com rotação local descrito pela métrica:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + g(r)d\phi^2 + 2h(r)d\phi dz$$

com

$$g(r) = \left(\frac{\gamma^2 + 2}{\gamma^2 - 2} \right) \cos^2 mr - 1$$

$$h(r) = -2 \sqrt{\gamma^2 - 2} \cos mr$$

(com γ e m constantes), tem como fonte um fluido não-Stokesiano cuja pressão anisotrópica π_{ij} é do tipo -rotação:

$$\pi_{ij} = -\gamma^2 \Omega_{ij}.$$

Mostre em seguida que tal fluido pode ser interpretado como um campo eletromagnético mais uma densidade incoerente de matéria neutra. (Solução de Novel-

10-Rebouças).

Exercício: Mostre que o modelo cosmológico descrito pela métrica

$$ds^2 = (Qr)^{-2} \left[dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]$$

tem como fonte um fluido não-Stokesiano tipo-aceleração:

$$\pi^i_j = -2 A^i_j$$

Mostre em seguida que tal fluido pode ser interpretado como um campo eletromagnético (solução de Bertotti-Robinson).

No Universo, além da matéria concentrada sob forma de galáxias, estrelas, etc., encontramos energia sob formas de radiação, fótons, neutrinos, ondas gravitacionais. Estas formas, de um modo geral, são descritas por campos relativísticos cujas equações e distribuição de energia passaremos a considerar agora.

2.6 - Campo Escalar

A equação de movimento de um campo escalar é dada por

$$\square \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad (15)$$

onde $m = \mu\hbar/c$ é a massa associada do campo escalar e o operador \square é definido pela expressão:

$$\square \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{|\alpha} g^{\alpha\beta})_{|\beta}$$

A equação (15) pode ser obtida a partir da densidade Lagrangeana:

$$L_{\phi} = \phi_{|\alpha} \phi_{|\beta} g^{\alpha\beta} - \mu^2 \phi^2 \quad (16)$$

De posse dessa Lagrangeana podemos obter a expressão do tensor momento energia (gravitacional) pela relação

$$\delta \int \sqrt{-g} L d^4x = \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

Exercício: Mostre que para L_{ϕ} obtemos, variando $g_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}[\phi] = \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L \quad (17)$$

Solução: Use a expressão

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}.$$

A expressão (15) da equação do campo escalar é obtida por generalização da equação correspondente para o caso do espaço de Minkowski. Se a curvatura não é nula, tal generalização consiste no chamado acoplamento mínimo, que permite obter a partir da equação de movimento no espaço de Minkowski uma equação no espaço riemanniano, sem introduzir nenhuma função da curvatura. Claro está que qualquer termo do tipo $f(R)\phi^2$, para uma função f arbitrária, acrescido à Lagrangeana no espaço plano poderia ser admitida como gerando um bom sistema de

equação capaz de conduzir no limite $R_{\alpha\beta\rho\sigma} \rightarrow 0$ às equações do campo escalar no espaço de Minkowski. Infelizmente, essa arbitrariedade não é possível de ser resolvida sem a introdução de um critério adicional como por exemplo, com uma nova invariância para o campo escalar.

Alguns autores, seguindo este caminho, propuseram alterar a Lagrangeana escalar para a forma

$$L_\phi = \phi |_{\alpha} \phi |_{\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{R}{6} \phi^2 - \mu^2 \phi^2 \quad (18)$$

A principal motivação para essa alteração está associada à invariância das equações de movimento obtidas a partir de L_ϕ , quando $\mu = 0$. Variando-se L_ϕ obtemos

$$\square \phi + \frac{R}{6} \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad (19)$$

Exercício: Mostre que a equação (19) é invariante por transformação conforme, no limite $\mu = 0$.

Solução: Fazendo a transformação

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \Omega^{-1} \phi$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{\Omega|_{\mu}}{\Omega} \delta^{\alpha}_{\nu} + \frac{\Omega|_{\nu}}{\Omega} \delta^{\alpha}_{\mu} - \frac{\Omega|_{\lambda}}{\Omega} g^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu}$$

Um cálculo direto permite obter para o escalar R de curvatura a transformação

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} \left(R + 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right)$$

Temos também

$$\square \tilde{\phi} = -\Omega^{-4} \phi \square \Omega + \Omega^{-3} \square \phi$$

Daí

$$\square \tilde{\phi} + \frac{R}{6} \tilde{\phi} = \Omega^{-3} \left(\square \phi + \frac{R}{6} \phi \right)$$

Vemos assim que a introdução do fator $\frac{R}{6}$ na Lagrangeana gera uma nova simetria: a invariância da equação do campo escalar por transformação conforme.

2.7 - Campo Vetorial (Maxwell)

A equação do campo vetorial (sem massa) e na ausência de carga é dada por

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 \quad (20a)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu}^* = 0 \quad (20b)$$

A equação (20b) pode ser posta sob a forma

$$F_{\mu\nu}{}_{||\lambda} + F_{\nu\lambda}{}_{||\mu} + F_{\lambda\mu}{}_{||\nu} = 0$$

Ela permite definir um vetor potencial W^μ pela relação (ver a respeito o curso sobre Eletrodinâmica e Espaço de Cartan Restrito por M. Novello, nesta Escola)

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu}{}_{||\nu} - W_{\nu}{}_{||\mu} = W_{\mu|\nu} - W_{\nu|\mu}$$

A equação (20a) pode ser obtida a partir da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (21)$$

Exercício: Mostre que o tensor momento-energia para o campo vetorial se escreve

$$2T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (22)$$

Solução: Temos

$$\begin{aligned} \delta \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}\right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x &= -\frac{1}{4} \int \delta \left[\sqrt{-g}\right] F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \\ &- \frac{1}{4} \int \sqrt{-g} \delta \left[F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\right] d^4x = -\frac{1}{4} \int \left(-\frac{1}{2}\right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} d^4x \\ &- \frac{1}{4} \int \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\alpha}{}^{\nu} \delta g^{\mu\alpha} d^4x - \frac{1}{4} \int \sqrt{-g} F^{\alpha}_{\nu} F_{\alpha\beta} \delta g^{\nu\beta} d^4x = \\ &= \int \left[\frac{1}{8} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\alpha\nu} F^{\nu}_{\beta} \delta g^{\alpha\beta} d^4x \right] \end{aligned}$$

Daí

$$2T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Temos então que para o traço $T \equiv T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$.

Exercício: Mostre que as equações de Maxwell são invariantes por transformação conforme.

Exercício: Considere um campo vetorial acoplado não-minimal -

mente com a gravitação e cuja equação provém da Lagrangeana

$$L = \frac{1}{\kappa} \sqrt{-g} \left(1 + \lambda W_{\mu} W^{\mu} \right) R - \frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + L_m \quad (23)$$

onde L_m é a Lagrangeana que descreve os demais campos materiais.

Obtenha a equação de movimento a partir da variação dessa Lagrangeana.

Solução:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda W^2)(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - \lambda \square W^2 g_{\mu\nu} + \lambda W^2_{||\mu}{}_{\nu} + \\ + \lambda R W_{\mu} W_{\nu} = -\kappa E_{\mu\nu} - \kappa M_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (24)$$

onde $M_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria e $E_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell, dado pela expressão (22).

A equação para $F^{\mu\nu}$ é dada por:

$$F^{\mu\nu}_{||\nu} = -\frac{\lambda}{\kappa} R W^{\mu} + J^{\mu}$$

onde J^{μ} é uma corrente externa.

A lei de conservação da carga assume a forma

$$J^{\mu}_{||\mu} - \frac{\lambda}{\kappa} (R W^{\mu})_{||\mu} = 0$$

Exercício: Usando a decomposição do tensor $F_{\mu\nu}$ em suas partes elétricas (E_{α}) e magnéticas (H_{α}) (para um dado observador v^{μ}) escreva o tensor $T_{\mu\nu}$ em função de E_{α} , H_{α} . Identifique suas componentes ρ , $\pi_{\mu\nu}$ e q_{μ} (con-

forme notação anterior).

Solução: Seja o observador caracterizado pelo vetor tangente à sua linha de Universo V^μ . Normalizando o vetor $V^\mu V^\nu g_{\mu\nu} = 1$, podemos escrever (Novello, II Escola de Cosmologia, CBPF 1978)

$$F_{\mu\nu} = -V_\mu E_\nu + V_\nu E_\mu + \eta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} V_\rho H_\sigma$$

onde os vetores elétrico (E_μ) e magnético (H_μ) são dados por

$$E_\mu = F_{\mu\alpha} V^\alpha$$

$$H_\mu = F_{\mu\alpha}^* V^\alpha = \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} V^\alpha$$

O tensor momento-energia é dado por

$$2T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Calculamos primeiramente o invariante $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ em termos dos vetores elétrico (E_μ) e magnético (H_μ).

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = (-V_\alpha E_\beta + V_\beta E_\alpha + \eta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} V_\mu H_\nu) (-V^\alpha E^\beta + V^\beta E^\alpha + \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} V_\rho H_\sigma)$$

$$= -E^2 - E^2 + \eta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} V^\rho H^\sigma V_\mu H_\nu$$

$$= -2E^2 + (-2)(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) V_\mu V^\rho H_\nu H^\sigma = -2E^2 + 2H^2$$

com $E^2 \equiv -E_\alpha E^\alpha$ e $H^2 \equiv -H_\alpha H^\alpha$ (obs.: Note que E^α e H^α são vetores do tipo espaço. E assim temos $E_\alpha E^\alpha < 0$ e $H^\alpha H_\alpha < 0$).

Daí

$$2T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (E^2 - H^2)$$

Usando o exercício anterior temos as expressões procuradas:

Densidade de energia:

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu V^\mu V^\nu - \frac{1}{4} (E^2 - H^2)$$

$$\rho = -\frac{1}{2} E_\mu E^\mu - \frac{1}{4} (E^2 - H^2)$$

$$\rho = \frac{1}{4} (E^2 + H^2)$$

Pressão isotrópica:

$$p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu) =$$

$$= -\frac{1}{3} T + \frac{1}{3} \rho = \frac{1}{3} \rho$$

pois $T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \equiv T = 0$.

Fluxo de calor (vetor de Poynting)

$$q_\lambda = T_{\alpha\beta} V^\beta h^\alpha{}_\lambda = \frac{1}{2} F_{\alpha\mu} F^\mu{}_\beta V^\beta h^\alpha{}_\lambda - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (E^2 - H^2) V^\beta h^\alpha{}_\lambda =$$

$$= \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^\mu{}_\beta V^\beta - \frac{1}{2} F_{\alpha\mu} F^\mu{}_\beta V^\alpha V^\beta V_\lambda$$

$$= \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} E^\mu + \frac{1}{2} E_\mu E^\mu V_\lambda = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} E^\mu - \frac{E^2}{2} V_\lambda$$

Mas

$$F_{\lambda\mu} E^\mu = (-V_\lambda E_\mu + V_\mu E_\lambda + \eta_{\lambda\mu}{}^{\rho\sigma} V_\rho H_\sigma) E^\mu = E^2 V_\lambda + \eta_{\lambda}{}^{\mu\rho\sigma} V_\rho H_\sigma E_\mu$$

Daí

$$q_\lambda = \frac{1}{2} \eta_{\lambda}{}^{\mu\rho\sigma} E_\mu V_\rho H_\sigma$$

Finalmente, a pressão anisotrópica se escreverá:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + p h_{\mu\nu} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[F_{\alpha\epsilon} F^{\epsilon}_{\beta} - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (E^2 - H^2) \right] h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + p h_{\mu\nu} = \\
 &= \frac{1}{2} F_{\mu\epsilon} F^{\epsilon}_{\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\epsilon} F^{\epsilon}_{\beta} V^{\beta} V_{\nu} - \frac{1}{2} F_{\alpha\epsilon} F^{\epsilon}_{\nu} V^{\alpha} V_{\mu} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} F_{\alpha\epsilon} F^{\epsilon}_{\beta} V^{\alpha} V^{\beta} V_{\mu} V_{\nu} - \frac{1}{4} (E^2 - H^2) h_{\mu\nu} + p h_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F_{\mu\epsilon} F^{\epsilon}_{\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\epsilon} E^{\epsilon} V_{\nu} - \frac{1}{2} F_{\nu\epsilon} E^{\epsilon} V_{\mu} + \frac{1}{2} E^2 V_{\mu} V_{\nu} + p h_{\mu\nu} - \\
 &\quad - \frac{1}{4} (E^2 - H^2) h_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

Calculando por partes:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\epsilon} E^{\epsilon} &= (-V_{\mu} E_{\epsilon} + V_{\epsilon} E_{\mu} + \eta_{\mu\epsilon}^{\rho\sigma} V_{\rho} H_{\sigma}) E^{\epsilon} = \\
 &= E^2 V_{\mu} + \eta_{\mu}^{\epsilon\rho\sigma} E_{\epsilon} V_{\rho} H_{\sigma} = E^2 V_{\mu} + 2 q_{\mu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\epsilon} F^{\epsilon}_{\nu} &= (-V_{\mu} E_{\epsilon} + V_{\epsilon} E_{\mu} + \eta_{\mu\epsilon}^{\alpha\beta} V_{\alpha} H_{\beta}) (-V^{\epsilon} E_{\nu} + V_{\nu} E^{\epsilon} + \\
 &\quad + \eta^{\epsilon}_{\nu\rho\sigma} V^{\rho} H^{\sigma}) = V_{\mu} V_{\nu} E^2 - \eta^{\epsilon}_{\nu\rho\sigma} V^{\rho} E_{\epsilon} H^{\sigma} V_{\mu} - E_{\mu} E_{\nu} + \\
 &\quad + \eta_{\mu}^{\epsilon\alpha\beta} E_{\epsilon} V_{\alpha} H_{\beta} V_{\nu} + \eta_{\mu}^{\epsilon\alpha\beta} V_{\alpha} H_{\beta} \cdot \eta_{\epsilon\nu\rho\sigma} V^{\rho} H^{\sigma} \\
 &= E^2 V_{\mu} V_{\nu} - E_{\mu} E_{\nu} + \eta_{\nu\epsilon\rho\sigma} E^{\epsilon} V^{\rho} H^{\sigma} V_{\mu} + \\
 &\quad + \eta_{\mu\epsilon\rho\sigma} E^{\epsilon} V^{\rho} H^{\sigma} V_{\nu} + \eta^{\alpha\beta}_{\mu}{}^{\epsilon} \eta_{\epsilon\nu\rho\sigma} V_{\alpha} V^{\rho} H_{\beta} H^{\sigma} .
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \eta^{\alpha\beta\mu}_{\epsilon} \eta^{\epsilon}_{\nu\rho\sigma} &= \delta^{\alpha\beta\mu}_{\nu\rho\sigma} = \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\rho} \delta^{\mu}_{\sigma} - \delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\beta}_{\sigma} \delta^{\mu}_{\rho} - \\
 &\quad - \delta^{\alpha}_{\rho} \delta^{\beta}_{\nu} \delta^{\mu}_{\sigma} + \delta^{\alpha}_{\rho} \delta^{\beta}_{\sigma} \delta^{\mu}_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\sigma} \delta^{\beta}_{\rho} \delta^{\mu}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\sigma} \delta^{\beta}_{\nu} \delta^{\mu}_{\rho}
 \end{aligned}$$

Daí

$$\eta^{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V_{\alpha} V^{\rho} H_{\beta} H^{\sigma} = V_{\nu} V_{\mu} H^2 - H_{\mu} H_{\nu} - H^2 g_{\mu\nu}$$

Então

$$F_{\mu\epsilon} F^{\epsilon}_{\nu} = E^2 V_{\mu} V_{\nu} - E_{\mu} E_{\nu} + 2q_{\nu} V_{\mu} + 2q_{\mu} V_{\nu} - H^2 g_{\mu\nu} + \\ + V_{\mu} V_{\nu} H^2 - H_{\mu} H_{\nu}$$

Colectando os termos, obtemos:

$$2\pi_{\mu\nu} = - E_{\mu} E_{\nu} - \frac{1}{3} E^2 h_{\mu\nu} - H_{\mu} H_{\nu} - \frac{1}{3} H^2 h_{\mu\nu} .$$

3 - MODELOS COSMOLÓGICOS

Na investigação das estruturas métricas do Universo, encontramos dois tipos característicos de modelos que denotaremos simplifadamente pelas expressões

a) - Modelo Convencional

b) - Modelo Não-Convencional

Chamamos modelo convencional àquele que admite como fonte principal de curvatura um fluido perfeito (incluindo o vazio); e denotamos modelo não-convencional os demais.

Não deve causar espanto o fato de que modelos convencionais, possuindo uma fonte tão simples, tenham sido historicamente descobertos numa primeira fase da investigação cosmológica, e que os modelos do tipo b tenham uma história mais recente.

Neste Capítulo trataremos somente de alguns modelos convencionais, descobertos por Einstein, Friedmann, Kasner e Gödel.

O tensor momento-energia do fluido cósmico é descrito por:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p (g_{\mu\nu} - V_{\mu} V_{\nu}) \quad (1)$$

onde:

ρ é a densidade total de energia;

V^{μ} é o quadri-vetor velocidade do fluido; e

p é a pressão isotrópica.

Nestes modelos, o estado de movimento da matéria é caracterizado de um modo bastante simples através do valor de

seus parâmetros cinemáticos. O Quadro 1 é elucidativo.

Quadro 1 - Quantidades cinemáticas associadas a modelos cosmológicos.

Modelo Cosmológico	Expansão	Rotação	Deformação
Einstein	Não	Não	Não
Friedmann	Sim	Não	Não
Kasner	Sim	Não	Sim
Gödel	Não	Sim	Não

3.1 - Modelo Cosmológico de Einstein

3.1.1) - A Geometria

A proposta de descrição do Universo por Einstein (1917) partiu da hipótese apriorística de que o Cosmos é estático. A matéria, fonte principal (e única) da curvatura do espaço-tempo quadri-dimensional é descrita por um fluido incoerente (isto é, sem qualquer interação entre suas partes) de densidade ρ , velocidade $V^\mu = \delta_0^\mu$ em um sistema de coordenadas co-movente com o fluido.

O Universo de Einstein não possui nem rotação, nem expansão, nem deformação. Ele é estático. Não tem começo, não tem fim.

O Cosmos não evolue. Tal modelo está associado a uma visão do Mundo de caráter imobilista, cujas longínquas raízes

filosóficas vamos encontrar no eleata Zenão.

Comecemos por mostrar que um universo com tais características é incompatível com as equações de Einstein da gravitação.

Com efeito, a equação de Raychaudhuri (Cap.I(19)) para um fluido sem aceleração, sem deformação, sem rotação e sem expansão, implica

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0 \quad (2)$$

A equação de Einstein se escreve

$$R_{\mu\nu} = - T_{\mu\nu} + \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \quad (3)$$

Daí,

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = - T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \frac{T}{2}$$

Mas como

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu = \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0$$

temos

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = - \frac{\rho}{2} = 0 \quad .$$

mostrando que aquelas propriedades cinemáticas são incompatíveis com uma densidade de matéria distinta de zero.

O desejo de identificar tal modelo como o mais representativo do nosso Cosmos, levou Einstein a alterar suas equações originais da gravitação com a introdução de uma constante cósmica fundamental Λ . Assim, as equações que descrevem a gra-

vitação a longas distâncias deveriam ser distintas das equações gravitacionais local (para distâncias não-cósmicas).

O modo mais simples de alteração das equações originais (1916) de Einstein nos conduz à expressão:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = - T_{\mu\nu} \quad (4)$$

onde Λ tem dimensão (comprimento)⁻².

Equivalentemente, escrevemos:

$$R_{\mu\nu} = - T_{\mu\nu} + \frac{T}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (4')$$

Note que para que a energia se conserve (isto é, para que a divergência covariante de $T_{\mu\nu}$ se anule, $T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$) é preciso que Λ seja uma verdadeira constante.

Com a nova expressão (4'), a equação (2) dará

$$(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}) V^{\mu} V^{\nu} = 0$$

isto é,

$$\rho = 2\Lambda \quad , \quad (5)$$

mostrando assim a possibilidade de compatibilização das novas equações com um fluido estacionário.

O elemento fundamental de comprimento na geometria de Einstein é dado por

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2 \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right] \quad (6)$$

onde α é uma constante e $\sigma(\chi)$ uma função (a única a ser determinada).

Um cálculo direto, deixado como exercício ao leitor, nos dá as componentes não-nulas do tensor R^{μ}_{ν} :

$$\begin{aligned} R^1_1 &= -\frac{2}{\alpha^2} \frac{\sigma''}{\sigma} \\ R^2_2 &= -\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right) \\ R^3_3 &= R^2_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Obtemos então o tensor de Ricci $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, cujas únicas componentes não-nulas são:

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -\frac{3\epsilon}{\alpha^2} \\ G^1_1 &= -\frac{1}{\alpha^2} (2 \frac{\sigma''}{\sigma} + 3\epsilon) \\ G^2_2 &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\sigma''}{\sigma} \\ G^3_3 &= G^2_2 \end{aligned} \quad (8)$$

onde ϵ é dado pela expressão

$$\epsilon = -\frac{1}{6} ({}^3R) \quad (9)$$

A curvatura espacial $({}^3R)$ é dada por:

$$({}^3R) = 4 \frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{2}{\sigma^2} + 2 \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \quad (10)$$

De posse desses valores, podemos escrever as equações de Einstein:

$$\frac{3\epsilon}{\alpha^2} = \rho + \Lambda \quad (\text{componente } 0 - 0) \quad (11a)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \left[2 \frac{\sigma''}{\sigma} + 3\epsilon \right] = \Lambda \quad (\text{componente } 1 - 1) \quad (11b)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -\Lambda \quad (\text{componente } 2 - 2) \quad (11c)$$

Da equação (11c) temos

$$\sigma = \text{sen} \chi \quad (12)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\alpha^2} \quad (13)$$

Usando esses valores em (11b) temos

$$\epsilon = 1$$

e de (11a) a relação já encontrada (5), isto é:

$$\rho = 2\Lambda$$

Assim, a positividade da energia impõe que $\Lambda > 0$.

Finalmente, a métrica de Einstein se escreve:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\Lambda} \left[d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (14)$$

o domínio das variáveis sendo dado por $-\infty < t < +\infty$; $0 < \chi < \pi$;
 $0 < \theta < \pi$; $0 < \phi < 2\pi$.

Uma tal geometria pode ser caracterizada como correspondendo à métrica da hipersuperfície de um cilindro circular imerso em um espaço euclidiano a cinco dimensões E_5 .

Em E_5 , a métrica se escreve

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) - dw^2. \quad (15)$$

A equação do cilindro circular tem a forma

$$r^2 + \omega^2 = \alpha^2 \quad (16)$$

onde α é uma constante.

Derivando a equação (16) tem-se:

$$d\omega = -\frac{r}{\omega} dr$$

A métrica (15) induz na hipersuperfície Σ do cilindro a forma $d\Sigma$ dada por:

$$d\Sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{r^2}{(\alpha^2 - r^2)} dr^2$$

$$d\Sigma^2 = dt^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

O domínio de r é dado por $-\alpha < r < \alpha$. Isso sugere a substituição da variável

$$r = \alpha \operatorname{sen} \chi$$

com

$$-\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}$$

Tem-se então,

$$d\Sigma^2 = dt^2 - \alpha^2 \left[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (17)$$

Comparando com a expressão (14) da métrica de Einstein, obtemos a interpretação geométrica de Λ .

$$\alpha^2 = \frac{1}{\Lambda} \quad (18)$$

Nesta representação, o inverso da constante cosmológica está associado ao quadrado do raio de um cilindro circular

imerso em E_5 ; o espaço-tempo de Einstein coincidindo com a hipersuperfície deste cilindro.

Exercício: Mostre que o volume do universo de Einstein é dado por $V = 2\pi^2 \alpha^3$.

Vemos assim que o volume é finito e independente do tempo. A interpretação geométrica acima e esse valor do volume, permitem afirmar que o universo de Einstein é finito mas ilimitado.

Uma propriedade notável do universo de Einstein está associada ao fato de que seu tensor de Weyl é identicamente nulo, isto é, o Universo é conformalmente plano. Com efeito, isso pode ser demonstrado diretamente por transformação de coordenada.

Façamos a transformação $(t, X) \rightarrow (p, q)$:

$$t = \frac{\alpha}{2} (p + q)$$

$$X = \frac{\alpha}{2} (p - q)$$

A métrica de Einstein ds_E^2 no novo sistema assume a forma:

$$ds_{(E)}^2 = \alpha^2 dp dq - \alpha^2 \sin^2 \theta (p-q) (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Definindo novas variáveis (V, W) pela relação

$$V = \operatorname{tg} p$$

$$W = \operatorname{tg} q$$

tem-se,

$$ds_E^2 = \frac{\alpha^2 dV dW}{(1+V^2)(1+W^2)} - \alpha^2 \frac{(V-W)^2}{(1+V^2)(1+W^2)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) .$$

E, finalmente, uma última transformação para coordenadas (n,r) definidas por

$$n = \frac{1}{2} (V + W)$$

$$r = \frac{1}{2} (V - W)$$

nos conduz à expressão

$$ds_E^2 = \frac{\alpha^2}{\left[1+(n+r)^2\right]\left[1+(n-r)^2\right]} \left[dn^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \quad (19)$$

o que prova ser o Universo de Einstein conforme ao Universo de Minkowski.

3.1.2) - Perturbação

Uma das razões que conduziram os cosmólogos a abandonarem o modelo de Einstein como representação do Universo em que vivemos, está associada à sua alta instabilidade. Com efeito, como mostraremos a seguir, pequenas perturbações presentes neste modelo são amplificadas por um fator dependente da densidade ρ presente no Universo de Einstein, que cresce exponencialmente com o tempo.

A perturbação do fluido é gerada pela modificação na densidade

$$\rho_0 + \rho_0 + \delta\rho$$

e nas quantidades cinemáticas, que no caso em que a quebra de simetria do modelo é mínima, é dada por

$$\theta_0 + \theta_0 + \delta\theta \quad ,$$

onde θ_0 e ρ_0 são os valores do cosmos não perturbado (no caso do cosmos de Einstein, $\theta_0 = 0$).

As expressões (I.19) e (II.7) perturbada, permitem escrever:

$$(\delta\rho)^{\cdot} + \rho_0 = 0$$

$$(\delta\theta)^{\cdot} = \delta (R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu})$$

Mas

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} &= (-T_{\mu\nu} + \frac{T}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) V^{\mu} V^{\nu} = \\ &= -\frac{\rho}{2} + \Lambda \end{aligned}$$

Daí,

$$\delta (R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}) = -\frac{\delta\rho}{2}$$

e então

$$(\delta\theta)^{\cdot} = -\frac{\delta\rho}{2}$$

Derivando a equação de $(\delta\rho)$ temos:

$$(\delta\rho)^{\cdot\cdot} + \rho_0 (\delta\theta)^{\cdot\cdot} = 0$$

Substituindo o valor de $(\delta\theta)^{\cdot}$ dado pela equação de Raychaudhuri perturbada, tem-se

$$(\delta\rho)'' - \frac{\rho_0 \delta\rho}{2} = 0$$

cuja solução (pois $\rho_0 > 0$) é dada por

$$\delta\rho = (\delta\rho)_i e^{\sqrt{\frac{\rho_0}{2}} t} ,$$

como havíamos antecipado. A amplitude de perturbações iniciais da densidade de energia $(\delta\rho)_i$ aumentam sensivelmente com o tempo.

A instabilidade depende tão somente da densidade de matéria presente no modelo original.

Exercício: Analise o caso em que a perturbação é tal que altere o equilíbrio térmico do fluido gerando, conseqüentemente, um fluxo de calor entre distintas regiões do cosmos de Einstein.

3.1.3) - *Campo de Prova no Universo de Einstein*

Consideremos agora o efeito da curvatura do espaço-tempo de Einstein sobre a propagação de um campo escalar.

A equação (conformalmente invariante) de um campo escalar ϕ é dada por

$$\square \phi + \frac{R}{6} \phi = 0 \tag{20}$$

No Universo de Einstein, temos

$$R = T + 4\Lambda = 6\Lambda$$

Daí,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi |_{\alpha} g^{\alpha\beta}) |_{\beta} + \Lambda \phi = 0$$

A equação do campo escalar é separável na geometria de Einstein. Escreveremos

$$\phi = F(\chi) P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t} \quad (21)$$

onde P_{ℓ}^m é a função de Legendre associada. Substituindo essa expressão em (20) temos

$$\begin{aligned} -\omega^2 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{F''}{F} - \frac{2 \cotg\chi}{\alpha^2} \frac{F'}{F} - \frac{1}{\alpha^2 \sin^2\chi} \left(\frac{d^2 P_{\ell}^m}{d\theta^2} \right) \frac{1}{P_{\ell}^m} - \\ - \frac{1}{\alpha^2 \sin^2\chi} \frac{\cotg\theta}{P_{\ell}^m} \frac{d P_{\ell}^m}{d\theta} + \frac{m^2}{\alpha^2 \sin^2\chi \sin^2\theta} + \Lambda = 0 \end{aligned}$$

onde $F' \equiv dF/d\chi$.

A equação de Legendre tem a forma:

$$\frac{d^2 P_{\ell}^m}{d\theta^2} + \cotg\theta \frac{d P_{\ell}^m}{d\theta} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P_{\ell}^m = 0 \quad (22)$$

Usando essa equação na expressão acima temos

$$-\omega^2 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{F''}{F} - \frac{2 \cotg\chi}{\alpha^2} \frac{F'}{F} + \frac{\ell(\ell+1)}{\alpha^2 \sin^2\chi} + \Lambda = 0$$

Isto é,

$$\frac{F''}{F} + 2 \cotg X \frac{F'}{F} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\text{sen}^2 X} + \alpha^2 (\omega^2 - \Lambda) = 0 \quad (23)$$

ou, usando resultado da equação (13):

$$F'' + 2 \cotg X F' - \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{\text{sen}^2 X} + \alpha^2 \omega^2 - 1 \right] F = 0 \quad (23')$$

Escrevendo

$$F(X) = \text{sen}^\ell X W(X) \quad (24)$$

obtemos a equação diferencial para W:

$$W'' + 2(\ell + 1) \cotg X W' - (\ell^2 + 2\ell - \alpha^2 \omega^2 + 1) W = 0 \quad (25)$$

Esta equação, após a substituição da variável X por z definida por

$$z = \cos X$$

se transforma na equação

$$(1 - z^2) \frac{d^2 W}{dz^2} - (2\ell + 3) z \frac{dW}{dz} - (\ell^2 + 2\ell - \alpha^2 \omega^2 + 1) W = 0$$

cuja solução é dada pelos polinômios a dois parâmetros de Gegenbauer (também chamados polinômios ultra-esféricos) do tipo

$$C_{n-\ell}^{(\lambda)}$$

com

$$\lambda = \ell + 1$$

$$n = -1 + \alpha \omega$$

onde o espectro de valores de n são os números naturais

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

As auto-freqüências ω_n são então dadas por

$$\omega_n = \frac{n+1}{\alpha} \quad (26)$$

Notando que $n-\ell \geq 0$ vemos que para cada n , ℓ pode variar desde 0 até n . Assim, a degenerescência do estado n \bar{e} dada pela soma dos n primeiros ímpares, isto é,

$$\sum_{\ell=0}^n (2\ell + 1) = (n + 1)^2$$

pois a degenerescência dos polinômios de Legendre \bar{e} dada por $(2\ell+1)$ para um dado ℓ fixo. Assim, sendo ω_n a energia do estado n de multiplicidade $(n+1)^2$, a energia total deste estado será dada por:

$$E_n = (n+1)^2 \omega_n N_n = \frac{(n+1)^3}{\alpha} N_n$$

onde N_n \bar{e} o número de ocupação do estado n . Para calcular o valor médio da energia, podemos utilizar a expressão de $\langle N_n \rangle$ dada pela estatística de Bose-Einstein, a saber

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{\omega_n/\alpha T} - 1}$$

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{(n+1)/\alpha T} - 1}$$

Daí, para a energia média total temos

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle E_n \rangle$$

$$\langle E_n \rangle = \frac{(n+1)^3}{\alpha} \frac{1}{e^{n+1/\alpha} - 1} \quad (27)$$

Trata-se então de calcular a expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{\alpha} \frac{1}{e^{n+1/\alpha} - 1} = \langle E \rangle \quad (28)$$

Para realizar este cálculo é conveniente utilizar a fórmula de Poisson

$$\frac{1}{2} F_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) = \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} f(2\pi m) \right] \quad (29)$$

onde $F_c(n)$ é a transformada de Fourier (via coseno) de $f(t)$.

Daí, no nosso caso, com

$$F_c(n) = \frac{n^3}{e^{n/\alpha} - 1}$$

temos, usando (29):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n/\alpha} - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{x/\alpha} - 1} dx + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{x/\alpha} - 1} e^{2im\pi x} dx . \end{aligned}$$

Calculemos estas integrais separadamente. Para isso, vamos lançar mão da função Zeta de Riemann, definida pela relação

$$\zeta(s) = \sum_{s=1}^{\infty} k^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

para $s > 1$.

Daí,

$$\zeta(4) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

ou, substituindo variáveis na integral X por $X/\alpha T$,

$$\zeta(4) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 T^4} \frac{x^3}{e^{x/\alpha T} - 1} dx$$

Temos então

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{x/\alpha T} - 1} dx = \zeta(4) \Gamma(4) \alpha^4 T^4$$

Mas sabemos que (Abramowitz-Stegun, pág. 807)

$$\Gamma(4) = 4! = 24$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Resta calcular a outra integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{x/\alpha T} - 1} e^{2im\pi x} dx$$

A função Zeta de Riemann a dois parâmetros pode ser escrita como

$$\zeta(s, q) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-qt}}{1 - e^{-t}} dt$$

Fazendo

$$q = 1 - 2im\pi T$$

$$s = 4$$

temos

$$\zeta(4, 1 - 2im\pi T) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 T^4} \frac{x^3 e^{2imx}}{e^{x/\alpha T} - 1} dx$$

E daí,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{2imx}}{e^{x/\alpha T} - 1} dx = \zeta(4, 1 - 2im\pi T) \Gamma(4) \alpha^4 T^4$$

Dai, finalmente, a energia total (28) é dada por

$$\langle E \rangle_T = \frac{24 \pi^4}{90} \alpha^3 T^4 + 48 \alpha^3 T^4 \sum \text{Re } \zeta(4, 1 - 2im\pi T)$$

Dividindo pelo volume do Universo de Einstein $V = 2\pi^2 \alpha^3$ obtemos a densidade média de energia para o campo escalar:

$$\langle \rho \rangle_T = \frac{2\pi^2}{15} T^4 + \frac{24 T^4}{\pi} \sum \text{Re } \zeta(4, 1 - 2im\pi T)$$

É importante notar que essa expressão para $\langle \rho \rangle_T$ não inclui a energia do vácuo à temperatura $T = 0$. Se levarmos em conta o vácuo a $T = 0$, obtemos

$$\langle \rho \rangle_{T=0} = \frac{1}{480 \pi^2 \alpha^4}$$

A densidade de energia total se escreve assim,

$$\langle \rho \rangle \equiv \frac{1}{480 \pi^2 \alpha^4} + \frac{2\pi^2}{15} T^4 + 24 T^4 \sum \text{Re } \zeta(4, 1 - 2i\pi\alpha T)$$

Exercício: Estude a equação do campo escalar numa métrica do tipo:

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2 \chi^2 - \alpha^2 \sigma^2 (\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) .$$

(Einstein: $\sigma = \text{sh}\chi$). Discuta o caso $\sigma = \text{sh}\chi$.

Solução: Temos

$$\square \phi + \frac{1}{6} R \phi = 0$$

$$R = -\frac{2}{\alpha^2} \left[\frac{2\sigma''}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right]$$

Separando a dependência de $\phi(\chi)$ sob a forma

$$\phi = F(\chi) P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}$$

Temos

$$\frac{1}{\sigma^2 \text{sen}\theta} \left[\sigma^2 \text{sen}\theta \phi_{|\alpha} g^{\alpha\beta} \right]_{|\beta} + \frac{R}{6} \phi = 0$$

ou

$$F'' + \frac{2\sigma'}{\sigma} F' - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2} + \alpha^2 \frac{R}{6} - \alpha^2 \omega^2 \right] F = 0$$

Especializando para $\sigma = \text{sh}\chi$, temos:

$$R = -\frac{6}{\alpha^2}$$

Note que no caso de Einstein (Universo fechado) a massa do campo ϕ cedida pelo campo gravitacional é positiva ($\frac{R}{6} = 1/\alpha^2$). No presente caso (a topologia não é a de um Universo fechado, como no modelo de Einstein, mas sim aberta) temos que a massa de ϕ é imaginária ($\frac{R}{6} < 0$).

Fazendo a substituição

$$F(X) = \text{sh}^\ell X \cdot Y$$

temos para a equação de Y:

$$Y'' + 2(\ell + 1) \coth X Y' + \left[\ell^2 + 2\ell + \alpha^2 \omega^2 + \alpha^2 \right] Y = 0$$

Substituindo a variável X por z através da relação

$$z = \cosh X$$

temos

$$(1 - z^2) \frac{d^2 Y}{dz^2} - (2\ell + 3) z \frac{dY}{dz} - \left[\ell^2 + 2\ell + \alpha^2 \omega^2 + \alpha^2 \right] Y = 0$$

cujas soluções são dadas, como no caso do Universo de Einstein, pelos polinômios de Gegenbauer

$$C_{n-\ell}^{\ell+1}$$

com

$$n = -1 + \sqrt{1 - \alpha^2 (1 + \omega^2)}$$

É importante observar que, contrariamente ao caso anterior, onde α estava associado ao raio do Universo de Einstein,

o parâmetro α agora não admite interpretação análoga pois a topologia da nova geometria em questão não é fechada.

Escolhendo-se $\alpha = 1$ temos para a energia ω_n o valor

$$\omega_n^2 = - (n + 1)^2$$

Isso significa que a função $e^{-i\omega t} = e^{(n+1)t}$ não é periódica no tempo, mas sim uma expressão monótona de valor crescente, cuja taxa de crescimento depende do valor de n .

Exercício: Mostre que a fonte de geometria do exercício anterior não pode ser um fluido perfeito que satisfaça às condições de energia usuais.

3.1.4) - *Universo de Einstein Deformado*

Vimos na Seção 3.1.2 que a seção do cilindro gerador da geometria de Einstein é uma circunferência de círculo. Vamos estudar aqui a possibilidade de deformar a seção ao longo de um eixo, tornando-a uma elipse de equação dada por

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} = 1$$

(com α, β constantes)

ou, em notação anterior,

$$\frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} = 1$$

Derivando,

$$d\omega = -\frac{r}{\omega} \frac{\beta^2}{\alpha^2} dr$$

Chamemos

$$\frac{\beta}{\alpha} \equiv \epsilon$$

e será dita a excentricidade da elipse.

Um tal cilindro elíptico mergulhado em um espaço Euclídeano de métrica $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - d\omega^2$ herda a geometria

$$d\Sigma^2 = dt^2 - \left[1 + \frac{\epsilon^2 r^2}{\alpha^2 - r^2} \right] dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Note que:

$$\omega^2 = \epsilon^2 (\alpha^2 - r^2)$$

são possíveis, se r for limitado à região

$$-\alpha < r < \alpha$$

Pondo

$$r = \alpha \operatorname{sen} \chi$$

temos

$$d\Sigma^2 = dt^2 - \alpha^2 \left[(1 - \gamma \operatorname{sen}^2 \chi) d\chi^2 - \operatorname{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right],$$

onde definimos γ pela relação

$$\gamma \equiv 1 - \epsilon^2$$

com

$$0 < \epsilon < 1$$

Tal geometria, coincide com o Universo de Einstein no limite $\gamma \rightarrow 0$.

Um cálculo direto (deixado ao leitor) permite obter as componentes não-nulas do tensor R^μ_ν :

$$R^1_1 = -\frac{2(1-\gamma)}{\alpha^2} \left[1 - \gamma \operatorname{sen}^2 X \right]^{-2}$$

$$R^2_2 = -\frac{(1-\gamma)}{\alpha^2} (2 - \gamma \operatorname{sen}^2 X)(1 - \gamma \operatorname{sen}^2 X)^{-2}$$

$$R^3_3 = R^2_2$$

As equações de Einstein se escrevem:

$$T^0_0 = \frac{1-\gamma}{\alpha^2} \frac{(3 - \gamma \operatorname{sen}^2 X)}{(1 - \gamma \operatorname{sen}^2 X)^2} + \Lambda$$

$$T^1_1 = \frac{1-\gamma}{\alpha^2} \frac{1}{1 - \gamma \operatorname{sen}^2 X} + \Lambda$$

$$T^2_2 = \frac{1-\gamma}{\alpha^2} \frac{1}{(1 - \gamma \operatorname{sen}^2 X)^2} + \Lambda$$

$$T^3_3 = T^2_2$$

Exercício: O tensor T^μ_ν acima, representa alguma distribuição de energia que você reconheceu? Qual?

3.1.5) - Solução Estática Inomogênea

Vimos que a solução apresentada por Einstein, é estática e homogênea. Embora ela não represente o Universo em que

vivemos, tal modelo permite investigação teórica de algumas questões de modo particularmente simples. Dessa forma, ela tem sido utilizada como laboratório matemático na qual interações entre o resto da física e a gravitação podem ser investigados globalmente, como um estágio preliminar a investigações mais realistas (e certamente, mais complexas) a serem feitas usando o modelo expansionista de Friedmann.

Analogamente, iremos agora estudar um modelo cosmológico estático, não-homogêneo que pretende desempenhar um papel semelhante ao modelo de Einstein, já agora com respeito a soluções mais realistas, isto é, expansionistas e inomogêneas.

A geometria é dada pela expressão

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$$

como no modelo de Einstein.

Aí, tínhamos obtido para o escalar de curvatura

$$R = \frac{6}{\alpha^2} = \text{constante}$$

para $\sigma = \text{sen}\chi$.

Vamos agora procurar obter nova geometria com $\sigma \neq \text{sen}\chi$ de tal modo que a curvatura escalar dependa de χ . Isso significa introduzir inomogeneidades na métrica.

A fonte da geometria inomogênea considerada será um campo escalar ϕ que satisfaz a equação

$$\square \phi = 0$$

isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{|\alpha} g^{\alpha\beta})_{|\beta} = 0$$

Como a geometria é estática e esfericamente simétrica, $\phi = \phi(X)$.

Dai, a equação de ϕ se reduz à forma:

$$\sigma^2 \phi' = \sqrt{2} M = \text{constante}$$

(o fator $\sqrt{2}$ é posto por conveniência).

O tensor momento energia do campo escalar ϕ é dado por

$$T_{\mu\nu} = \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{|\lambda} \phi_{|\tau} g^{\lambda\tau}$$

As únicas componentes não-nulas são:

$$T^0_0 = \frac{M^2}{\alpha^2 \sigma^4}$$

$$T^1_1 = \frac{M^2}{\alpha^2 \sigma^4}$$

$$T^2_2 = \frac{M^2}{\alpha^2 \sigma^4}$$

$$T^3_3 = T^2_2$$

As equações de Einstein se escrevem:

Componente 0 - 0 :

$$3\varepsilon = \frac{M^2}{\sigma^4}$$

Componente 1 - 1 :

$$3\varepsilon = -2 \frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{M^2}{\sigma^4}$$

Componente 2 - 2 :

$$\sigma^3 \sigma'' = -M^2$$

A solução é imediatamente obtida:

$$\sigma(X) = \sqrt{X^2 - M^2}$$

o que dará para o campo ϕ o valor

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{X-M}{X+M}$$

O escalar de curvatura R vale, então

$$R = -\frac{4\sigma''}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2} - \frac{2\sigma'^2}{\sigma^2}$$

isto é,

$$R = \frac{2M^2}{\sigma^4}$$

Vemos assim que, como havíamos antecipado, a geometria não é homogênea. Note que, para $X \rightarrow M$ o escalar R diverge. Neste ponto a geometria desenvolve uma singularidade.

4 - UNIVERSOS DE FRIEDMANN

4.1 - A Geometria de Friedmann

Os últimos anos fizeram aumentar a confiança dos cos-
mólogos de que vivemos em um Universo homogêneo e isotrópico.

A descrição matemática de um tal universo foi elabo-
rada há sessenta anos pelo matemático russo A. Friedmann.

A geometria de Friedmann possui um elemento infinite-
simal de comprimento dado por

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1)$$

A isotropia do modelo pode ser demonstrada do seguin-
te modo:

Consideremos um observador gaussiano, isto é, tal que
no sistema de coordenadas (t, χ, θ, ϕ) seu vetor tangente tem com-
ponentes

$$v^\mu = \delta^\mu_0 \quad (2)$$

Definindo o projetor no tri-espaço ortogonal a V^μ como anteri-
ormente

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu$$

temos

$$h_{00} = 0$$

$$h_{0i} = 0$$

$$h_{ij} = g_{ij}$$

Da expressão (10b) do Cap. 1, temos

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{(\alpha}{}^\mu h_{\beta)}{}^\lambda v_{\mu||\lambda} - \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta}$$

isto é,

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} h_{(\alpha}{}^{\mu} h_{\beta)}{}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\epsilon} v_{\epsilon} - \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta}$$

ou

$$\sigma_{ij} = -\Gamma_{ij}^0 - \frac{\theta}{3} h_{ij}$$

$$\sigma_{\alpha 0} = 0$$

Mas

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} g^{0\alpha} (g_{i\alpha|j} + g_{j\alpha|i} - g_{ij|\alpha}) = -\frac{1}{2} g_{ij|0}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{A}}{A} g_{ij}$$

E também

$$\theta = v^{\alpha}{}_{||\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} v^{\alpha})_{|\alpha} = \dot{V} = 3 \frac{\dot{A}}{A}$$

Daí,

$$\sigma_{ij} = 0$$

Isso significa que para o observador co-movente $V^{\mu} = \delta^{\mu}_0$ o Universo de Friedmann é isotrópico.

Exercício: Mostre que $V^{\mu} = \delta^{\mu}_0$ é uma geodésica para a métrica de Friedmann.

Mostre também que a congruência gerada por essa geodésica não possui rotação.

Vamos agora calcular o tensor de curvatura desta geometria numa base de tetrada inercial^(*)

^(*) Veja a respeito as notas de I. Soares nesta Escola.

Escrevemos

$$ds^2 = \theta^A \theta^B \eta_{AB} = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

onde

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= dX \\ \theta^2 &= A\sigma(X)d\theta \\ \theta^3 &= A\sigma(X)\text{sen}\theta d\phi \end{aligned} \quad (3)$$

Derivando

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= 0 \\ d\theta^1 &= \dot{A} dt \wedge dX = \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= \dot{A} dt \wedge \sigma d\theta + A\sigma' dX \wedge d\theta \\ &= \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^2 + A\sigma' \frac{\theta^1}{A} \wedge \frac{\theta^2}{\sigma A} \\ d\theta^2 &= \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= A dt \wedge \sigma \text{sen}\theta d\phi + A\sigma' dX \wedge \text{sen}\theta d\phi + \\ &\quad + A\sigma \text{cos}\theta d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\text{cotg}\theta}{A\sigma} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

Tem-se:

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B = -\gamma^A_{BC} \theta^C \wedge \theta^B$$

Uma simples inspeção darã os valores dos coeficientes de Ricci:

$$\gamma^1_{01} = \frac{\dot{A}}{A}$$

$$\gamma^2_{02} = \frac{\dot{A}}{A}$$

$$Y_{03}^3 = \frac{\dot{A}}{A}$$

$$Y_{12}^2 = -\frac{\sigma'}{A\sigma}$$

$$Y_{13}^3 = \frac{\sigma'}{A\sigma}$$

$$Y_{23}^3 = \frac{\cotg\theta}{A\sigma}$$

E então para os ω_{AB} :

$$\omega_{01} = \frac{\dot{A}}{A} \theta^1$$

$$\omega_{02} = \frac{\dot{A}}{A} \theta^2$$

$$\omega_{03} = \frac{\dot{A}}{A} \theta^3$$

$$\omega_{12} = \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^2$$

$$\omega_{13} = \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^3$$

$$\omega_{23} = \frac{\cotg\theta}{A\sigma} \theta^3$$

Derivando esses ω_{ab} exteriormente, temos

$$d\omega_{01} = \frac{\ddot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1 = \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} \right) \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\omega_{02} = \frac{\ddot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{A}}{A} \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d\omega_{03} = \frac{\ddot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{A}}{A} \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{A}}{A} \frac{\cotg\theta}{A\sigma} \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\omega_{12} = -\frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\dot{A}}{A^2} \theta^0 \wedge \theta^2 + \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{A} \frac{\theta^1}{A} \wedge \theta^2 +$$

$$+ \frac{\sigma'}{A\sigma} \left[\frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \Lambda \theta^2 + \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \Lambda \theta^2 \right] = \theta^0 \Lambda \theta^2 \left[-\frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\dot{A}}{A^2} + \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\dot{A}}{A^2} \right] +$$

$$+ \theta^1 \Lambda \theta^2 \left[\frac{\sigma''}{A^2 \sigma} - \frac{\sigma'^2}{A^2 \sigma^2} + \frac{\sigma'^2}{A^2 \sigma^2} \right]$$

$$d\omega_{12} = \theta^1 \Lambda \theta^2 \left[\frac{\sigma''}{A^2 \sigma} \right]$$

$$d\omega_{13} = -\theta^0 \Lambda \theta^3 \frac{\sigma' \dot{A}}{\sigma A^2} + \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{A} \frac{\theta^1}{A} \Lambda \theta^3 + \frac{\sigma'}{A\sigma} \left[\frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \Lambda \theta^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \Lambda \theta^3 + \frac{\cotg \theta}{A\sigma} \theta^2 \Lambda \theta^3 \right]$$

$$d\omega_{13} = \theta^1 \Lambda \theta^3 \left[\frac{\sigma''}{A^2 \sigma} \right] + \theta^2 \Lambda \theta^3 \left[\frac{\sigma'}{A^2 \sigma^2} \cotg \theta \right]$$

$$d\omega_{23} = -\frac{\cotg \theta}{\sigma} \frac{\dot{A}}{A^2} \theta^0 \Lambda \theta^3 - \frac{\cotg \theta}{A} \frac{\sigma'}{\sigma^2} \frac{\theta^1}{A} \Lambda \theta^3 -$$

$$- \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{A\sigma} \frac{\theta^2}{A\sigma} \Lambda \theta^3 + \frac{\cotg \theta}{A\sigma} \left[\frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \Lambda \theta^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma'}{A\sigma} \theta^1 \Lambda \theta^3 + \frac{\cotg \theta}{A\sigma} \theta^2 \Lambda \theta^3 \right]$$

$$d\omega_{23} = -\frac{1}{A^2 \sigma^2} \theta^2 \Lambda \theta^3$$

Finalmente, para a 2-forma curvatura

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B$$

Temos

$$\Omega^0_1 = d\omega^0_1 + \omega^0_2 \wedge \omega^2_1 + \omega^0_3 \wedge \omega^3_1 = \theta^0 \wedge \theta^1 \frac{\ddot{A}}{A}$$

$$\Omega^0_2 = d\omega^0_2 + \omega^0_1 \wedge \omega^1_2 + \omega^0_3 \wedge \omega^3_2 =$$

$$= \theta^0 \wedge \theta^2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} \right) + \frac{\dot{A}}{A^2} \frac{\sigma^i}{\sigma} \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\sigma^i}{A\sigma} \theta^1 \wedge \theta^2 = \theta^0 \wedge \theta^2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} \right)$$

$$\Omega^0_3 = d\omega^0_3 + \omega^0_1 \wedge \omega^1_3 + \omega^0_2 \wedge \omega^2_3 = \frac{\ddot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^1_2 = d\omega^1_2 + \omega^1_0 \wedge \omega^0_2 + \omega^1_3 \wedge \omega^3_2 = \left[\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\sigma''}{A^2\sigma} \right] \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1_3 = d\omega^1_3 + \omega^1_0 \wedge \omega^0_3 + \omega^1_2 \wedge \omega^2_3 = \left[\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{\sigma''}{A^2\sigma} \right] \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^2_3 = d\omega^2_3 + \omega^2_0 \wedge \omega^0_3 + \omega^2_1 \wedge \omega^1_3 = \left[\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{1}{A^2\sigma^2} - \frac{\sigma'^2}{A^2\sigma^2} \right] \theta^2 \wedge \theta^3$$

Obtidas essas formas, podemos calcular as componentes de tetrada do tensor de Riemann, pela fórmula

$$-\frac{1}{2} R^A{}_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = \Omega^A{}_B$$

$$R^0{}_{101} = -\frac{\ddot{A}}{A}$$

$$R^0{}_{202} = -\frac{\ddot{A}}{A}$$

$$R^0{}_{303} = -\frac{\ddot{A}}{A}$$

$$R^1{}_{212} = -\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\sigma''}{A^2\sigma}$$

$$R^1{}_{313} = -\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\sigma''}{A^2\sigma}$$

$$R^2{}_{323} = -\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{1}{A^2\sigma^2} + \frac{\sigma'^2}{A^2\sigma^2}$$

De posse desses valores, obtemos os R_{AB} :

$$R_{AB} = R^C_{ACB}$$

$$R_{00} = R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030}$$

Mas

$$R^1_{010} = -R_{1010} = -R_{0101} = -R^0_{101}$$

Daí

$$R_{00} = + 3 \frac{\ddot{A}}{A}$$

$$R_{11} = R^0_{101} + R^2_{121} + R^3_{131}$$

Mas

$$R^2_{121} = -R_{2121} = -R_{1212} = R^1_{212}$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot{A}}{A} - 2 \frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2 \frac{\sigma''}{A^2 \sigma}$$

$$R_{22} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^3_{232}$$

$$R_{22} = -\frac{\ddot{A}}{A} - 2 \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{1}{A^2} \left[\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \right]$$

$$R_{33} = R_{22}$$

Exercício: Mostre que as demais componentes de R_{AB} são identicamente nulas.

O escalar R de curvatura é dado por

$$R = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3$$

$$R = + 6 \frac{\ddot{A}}{A} + 6 \frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{2}{A^2} \left[\frac{2\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right]$$

Chamando $(3)R$ o escalar de curvatura do 3-espaço $t =$ constante, temos

$$(3)R \equiv (-2) \left[\frac{2\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right]$$

e pondo

$$\epsilon \equiv \frac{1}{6} (3)R$$

temos

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\epsilon}{A^2} \right] \quad (4)$$

Podemos então obter as componentes

$$G^A_B \equiv R^A_B - \frac{1}{2} R \delta^A_B$$

Os únicos não-nulos, posto que R^A_B é diagonal, são:

$$G^0_0 = -3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - 3 \frac{\epsilon}{A^2}$$

$$G^1_1 = -2 \frac{\ddot{A}}{A} - \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - \frac{3\epsilon}{A^2} - \frac{2}{A^2} \frac{\sigma''}{\sigma}$$

$$G^2_2 = -2 \frac{\ddot{A}}{A} - \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{1}{A^2} \frac{\sigma''}{\sigma}$$

$$G^3_3 = G^2_2$$

4.2 - Tensor Momento Energia

Vamos considerar aqui um modelo simples para representar o conteúdo energético do Universo por um fluido perfeito de densidade de energia ρ e pressão (isotrópica) p . Sendo

V^μ a velocidade do fluido, temos

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu}$$

onde

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$$

Na base de tetradas, as componentes do tensor T_{AB} são

$$T^0_0 = \rho$$

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p$$

As equações de Einstein com termo cosmológico se escrevem

$$R^A_B - \frac{1}{2} R \delta^A_B = -T^A_B + \Lambda \delta^A_B$$

isto é,

$$3 \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{3\varepsilon}{A^2} = \rho - \Lambda \quad (5a)$$

$$\frac{2\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \frac{1}{A^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -p - \Lambda \quad (5b)$$

$$\frac{2\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{3\varepsilon}{A^2} + \frac{2}{A^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -p - \Lambda \quad (5c)$$

Subtraindo (5b) e (5c) tem-se

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} = 0 \quad (6)$$

Esta equação possui três soluções simples, a saber:

$$\sigma = X \quad (7a)$$

$$\sigma = \text{sen } X \quad (7b)$$

$$\sigma = \text{sh } X \quad (7c)$$

Tais valores de σ correspondem aos seguintes valores para ϵ :

$$\epsilon = 0 \quad (8a)$$

$$\epsilon = 1 \quad (8b)$$

$$\epsilon = -1 \quad (8c)$$

isto \bar{e} , a curvatura da tri-seção corresponde a

$${}^{(3)}R = 0 \quad (9a)$$

$${}^{(3)}R > 0 \quad (9b)$$

$${}^{(3)}R < 0 \quad (9c)$$

respectivamente.

A única função da geometria a ser ainda determinada, \bar{e} $A(t)$.

Obtêm-se uma grande simplificação, ao resolver as equações (5), fazendo apelo à equação de Raychaudhuri que, no caso em questão, se escreve

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \theta = 0$$

isto \bar{e} ,

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{A}}{A} = 0 \quad (10)$$

Considerando um fluido de equação de estado dado pela relação linear

$$p = \lambda \rho$$

com $0 \leq \lambda \leq 1$, temos de (10) a dependência de ρ com $A(t)$:

$$\rho = \rho_0 A^{-3(1+\lambda)} \quad (11)$$

$$\sigma = \text{sen } X \quad (7b)$$

$$\sigma = \text{sh } X \quad (7c)$$

Tais valores de σ correspondem aos seguintes valores para ϵ :

$$\epsilon = 0 \quad (8a)$$

$$\epsilon = 1 \quad (8b)$$

$$\epsilon = -1 \quad (8c)$$

isto \bar{e} , a curvatura da tri-seção corresponde a

$${}^{(3)}R = 0 \quad (9a)$$

$${}^{(3)}R > 0 \quad (9b)$$

$${}^{(3)}R < 0 \quad (9c)$$

respectivamente.

A única função da geometria a ser ainda determinada, \bar{e} $A(t)$.

Obtém-se uma grande simplificação, ao resolver as equações (5), fazendo apelo à equação de Raychaudhuri que, no caso em questão, se escreve

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \theta = 0$$

isto \bar{e} ,

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{A}}{A} = 0 \quad (10)$$

Considerando um fluido de equação de estado dado pela relação linear

$$p = \lambda \rho$$

com $0 \leq \lambda \leq 1$, temos de (10) a dependência de ρ com $A(t)$:

$$\rho = \rho_0 A^{-3(1+\lambda)} \quad (11)$$

onde ρ_0 é uma constante arbitrária.

Vamos agora examinar os casos especiais de um fluido constituído de radiação ($\lambda = 1/3$) ou de matéria incoerente - mente distribuída ($\lambda = 0$), a que chamaremos de poeira cósmica, e onde a constante cosmológica é nula.

Caso I: POEIRA ($\lambda = 0$)

Distinguiremos os três possíveis valores de ϵ em separado.

Caso (Ia) $\epsilon = 0$ (Secção Euclídeana)

Neste caso, obtemos de (11)

$$\rho = \rho_0 A^{-3}$$

A única equação que precisa ser satisfeita é dada por (5a) que se reduz neste caso a:

$$3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \rho$$

ou seja,

$$A(t) = A_0 t^{2/3} \tag{12}$$

E, então,

$$\rho = \frac{4}{3} t^{-2}$$

Caso (Ib) $\epsilon = 1$ (Secção Fechada)

A equação (5a) reduz-se à expressão

$$3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{3}{A^2} = \frac{\rho_0}{A^3}$$

cuja solução sob forma paramétrica é dada por

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 (1 - \cos n) \\
 t &= A_0 (n - \operatorname{senn}) \\
 \rho &= \frac{6A_0}{A^3} = \frac{6}{A_0^2 (1 - \cos n)^3}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Caso (Ic) $\epsilon = -1$ (Seção Aberta)

A equação (5a) se reduz à expressão

$$3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \frac{3}{A^2} = \frac{\rho_0}{A^3}$$

cuja solução pode ser escrita

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 (\operatorname{cosh} n - 1) \\
 t &= A_0 (\operatorname{sh} n - n) \\
 \rho &= \frac{6}{A_0^2 (\operatorname{cosh} n - 1)^3}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Vamos agora estudar os 3 casos em que a matéria do fluido galáctico consiste em radiação.

Caso II: RADIAÇÃO ($\lambda = 1/3$)

Neste caso, a conservação de energia dará

$$\rho = \rho_0 A^{-4}$$

Consideremos os três possíveis casos

Caso (IIa): Seção Euclídeana ($\epsilon = 0$)

A equação (5a) nos dá

$$3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{\rho_0}{A}$$

cuja solução é dada por

$$A(t) = A_0 t^{1/2} \quad (15)$$

e conseqüentemente,

$$\rho(t) = \frac{3}{4} \frac{1}{t^2} \quad (15)$$

Caso (IIb): $\epsilon = 1$ (Seção Fechada)

Neste caso, tem-se

$$3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{3}{A^2} = \frac{\rho_0}{A^4}$$

e a solução dará

$$\begin{aligned} A &= A_0 \operatorname{sen} \eta \\ t &= A_0 (1 - \operatorname{cos} \eta) \end{aligned} \quad (16)$$

Daí

$$\rho = \frac{3}{A_0^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^4 \eta}$$

Caso (IIc): $\epsilon = -1$ (Seção Aberta)

$$3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \frac{3}{A^2} = \frac{\rho_0}{A^4}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} A &= A_0 \operatorname{sh} \eta \\ t &= A_0 (\operatorname{cosh} \eta - 1) \end{aligned} \quad (17)$$

e então

$$\rho = \frac{3}{A_0^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^4 \eta}$$

4.3 - Densidade Crítica

Quando a constante cosmológica Λ é nula, podemos caracterizar a topologia do modelo cosmológico, através de uma medida da densidade de energia contida no Universo.

Com efeito, da equação (5a) temos ($\Lambda = 0$)

$$\epsilon = \frac{\rho}{3} A^2 - \dot{A}^2$$

Definindo uma densidade crítica ρ_c pela relação

$$\rho_c = 3\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 \quad (18)$$

podemos escrever (5a) sob a forma

$$\epsilon = \frac{A^2}{3} (\rho - \rho_c) \quad (19)$$

Vemos então de (19) que o sinal de $\rho - \rho_c$ caracteriza a topologia do modelo. Com efeito,

$$\rho > \rho_c \implies \epsilon > 0 \implies \epsilon = 1$$

$$\rho = \rho_c \implies \epsilon = 0$$

$$\rho < \rho_c \implies \epsilon < 0 \implies \epsilon = -1$$

A densidade ρ_c caracteriza assim uma situação limite. A topologia do modelo (isto é, o sinal de ϵ) depende da quantidade de energia contida no Universo.

4.4 - Modelos Cosmológicos de Lemaître

Por volta de 1920, o belga Lemaître estudou modelos

cósmicos homogêneos e isotrópicos nos quais o fator cosmológico Λ não era desprezado.

Vamos examinar aqui algumas propriedades desses modelos.

Começamos por considerar o caso no qual a densidade de energia da matéria é desprezível, comparada com o valor da constante Λ . A razão de discutirmos aqui esse caso limite é simples: somente estes modelos permitem um tratamento analítico completo. As equações que descrevem o modelo permitem solução fechada sob forma de funções analíticas conhecidas.

As equações neste caso se escrevem (cf. eq. (5))

$$3\left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)^2 + \frac{3\varepsilon}{\Lambda^2} = -\Lambda \quad (20a)$$

$$2\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda} + \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)^2 - \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = -\Lambda \quad (20b)$$

Analisemos separadamente os três possíveis valores de ε .

Caso I: Seção Euclídeana ($\varepsilon = 0$; $\sigma = X$)

Temos, neste caso:

$$3\left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)^2 = -\Lambda \quad (21a)$$

$$2\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda} + \left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)^2 = -\Lambda \quad (21b)$$

De (21a) vemos que o modelo será compatível se $\Lambda < 0$. As equações (21) são facilmente integráveis. Obtemos

$$\Lambda(t) = A_0 e^{\sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} t} \quad (22)$$

Neste caso, a expansão $\theta = 3 \frac{\dot{A}}{A}$ se reduz a uma constante:

$$\theta = \sqrt{-3\Lambda}$$

Esta geometria é conhecida com o nome de Universo de de Sitter e constituiu durante bastante tempo um modelo cosmológico competitivo com os modelos expansionistas.

Exercício: Calcule os vetores de Killing (10) da geometria de Sitter.

Calcule em seguida as álgebras associadas. Compare com a álgebra das isometrias do espaço de Minkowski.

Caso II: Seção Aberta ($\epsilon = -1$; $\sigma = \sinh X$)

Temos (de (20)):

$$3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - \frac{3}{A^2} = -\Lambda$$

$$2 \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - \frac{1}{A^2} = -\Lambda$$

cuja solução depende do sinal da constante cosmológica.

Se $\Lambda < 0$, temos:

$$A(t) = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t \right)$$

e, conseqüentemente

$$\theta = \sqrt{3|\Lambda|} \operatorname{coth} \left[\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t \right]$$

Se $\Lambda > 0$, a solução para $A(t)$ é dada por:

$$A(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right),$$

e para a expansão:

$$\theta = \sqrt{3\Lambda} \operatorname{cotg} \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right]$$

Caso III: Seção Fechada ($\epsilon = 1$, $\sigma = \operatorname{sen} X$)

Temos as equações:

$$3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{3}{A^2} = -\Lambda$$

$$2 \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{1}{A^2} = -\Lambda$$

A solução é dada por

$$A(t) = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t \right)$$

Note que como consequência da equação,

$$3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 = -\frac{3}{A^2} - \Lambda$$

a constante cosmológica, neste caso, não pode ser positiva.

Exercício: Nos modelos de Friedmann (com $\Lambda = 0$) vemos que aparece uma singularidade para um dado valor de t (identificado com a origem $t = 0$). Esta singularidade,

aparece tanto na geometria (o raio do Universo $A(t)$ se anula para $t = 0$, os invariantes geométricos divergem) quanto na matéria (a densidade ρ de energia diverge para $t = 0$). Mostre que a presença da constante cosmológica, no modelo de Lemaître, evita o aparecimento da singularidade.

4.5 - Desvio para o Vermelho

Escrevamos a métrica de Friedmann na forma

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[\frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + \frac{\epsilon}{4} r^2\right)^2} \right]$$

A propagação de um raio luminoso nesta geometria é dado pondo-se $ds = 0$ ao longo do caminho do fóton.

Para um raio luminoso radial ($d\theta = d\phi = 0$) temos:

$$\frac{dt}{A(t)} = \pm \frac{dr}{1 + \frac{\epsilon}{4} r^2}$$

O sinal depende do sentido da direção de propagação do fóton.

Integrando esta expressão desde um tempo t_e (tempo de emissão) até um tempo t_o (tempo de observação), temos:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{A(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{1 + \frac{\epsilon r^2}{4}} = f(r_e)$$

Consideremos um segundo raio luminoso deixando a estrela em questão um pequeno intervalo de tempo após o primei-

ro ($t'_e = t_e + \Delta t_e$). Este segundo raio chegará até nós no tempo $t_0 + \Delta t_0$, onde

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_e)$$

onde a função $f(r_e)$ é a mesma nos dois casos.

Subtraindo essas expressões, e considerando as aproximações $\Delta t_0 \ll t_0$ e $\Delta t_e \ll t_e$, temos

$$\frac{\Delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{R(t_e)}$$

Se ν_e é a frequência de radiação emitida e ν_0 é a frequência observada, temos

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t_0} = \frac{R(t_e)}{R(t_0)}$$

Considerando o desvio espectral medido por Z

$$Z \equiv \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}$$

temos

$$1 + Z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$$

Um desvio para o vermelho implica que a função $R(t)$ é crescente: o Universo se encontra em expansão.

4.6 - Horizonte na Métrica de Friedmann

Consideremos a métrica de Friedmann sob a forma:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[\frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + \frac{\epsilon}{4} r^2\right)^2} \right]$$

Seja o caminho de um fóton radial dado por $ds = 0$, $d\theta = d\phi = 0$, isto é,

$$\frac{dt}{A(t)} = \pm \frac{dr}{1 + \frac{\epsilon}{4} r^2}$$

onde o sinal + é para um fóton emergente e o sinal - para um fóton incidente.

Vamos seguir Rindler e definir a variável $\sigma(r)$ para medir distâncias, dada por

$$\sigma(r) = \int_0^r \frac{dr'}{1 + \frac{\epsilon}{4} r'^2}$$

A distância real entre a origem espacial e uma partícula situada em r_1 , no tempo t , é dada por

$$l(t) = A \int_0^{r_1} \frac{dr'}{1 + \frac{\epsilon}{4} r'^2}$$

isto é,

$$l(t) = A(t) \sigma(r_1)$$

Um fóton emitido radialmente ($d\theta = d\phi = 0$) em direção à origem tem sua equação de movimento dada por

$$\int_{t_e}^t \frac{dt}{A(t)} = - \int_{r_e}^r \frac{dr'}{1 + \frac{\epsilon}{4} r'^2}$$

onde t_e é o tempo de emissão de um fóton situado no ponto de coordenada r_e . Daí,

$$\int_{t_e}^t \frac{dt}{A(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr'}{1 + \frac{\epsilon r'^2}{4}} - \int_0^r \frac{dr'}{1 + \frac{\epsilon r'^2}{4}}$$

E daí,

$$\sigma(r) = \sigma(r_e) - \int_{t_e}^t \frac{dt}{A(t)}$$

Vamos supor que a integral do lado direito é limitada, isto é,

$$\int_{t_e}^{\infty} \frac{dt}{A(t)} < \infty$$

e converge para o valor finito σ_0 .

Logo, para cada valor do tempo, digamos t_0 , existe uma distância r_0 tal que

$$\sigma(r_0) = \sigma_0$$

isto é, tal que o fóton emitido em r_0 no instante t_0 atinge a origem (o observador ali colocado) em um tempo infinito. Com efeito,

$$\sigma(r) = 0 = \sigma(r_0) - \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{A(t)} = \sigma(r_0) - \sigma_0 = 0$$

Fótons emitidos no instante t_0 , e afastados da origem de uma distância $\sigma(r) > \sigma(r_0)$ nunca serão observados pelo observador situado na origem. Dessa maneira, $\sigma(r_0) = \sigma_0$ define uma região chamada horizonte, pois ela separa eventos observáveis de eventos para sempre inobserváveis.

Exemplo de Universo onde esse fenômeno ocorre é dado pela geometria de de Sitter, cujo elemento de linha pode se escrever como:

$$ds^2 = dt^2 - e^{Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2) .$$

Neste caso, com $H = \text{constante}$,

$$\int_{t_0}^{\infty} dt e^{-Ht} = \frac{e^{-Ht_0}}{H} = \sigma_0 .$$

Vamos agora voltar nossa atenção para fenômenos já observados desde a origem dos tempos ($t = 0$), até um dado valor t_0 .

Um fenômeno arbitrário terá sido observado por um observador se a distância $\sigma(r)$ se anulou.

Temos agora

$$\sigma(r) = \sigma(r_e) - \int_0^{t_0} \frac{dt}{A(t)}$$

Para o instante t_0 , as partículas afastadas da origem por um valor $\sigma(r_e) > \int_0^{t_0} dt/A(t)$ ainda não foram observadas (pelo observador na origem).

A região definida pelo valor $\sigma_0 = \int_0^{t_0} dt/A(t)$ caracteriza, como a expressão análoga anterior, um horizonte.

À medida que o tempo passa, mais e mais partículas vão sendo observadas. Se todas serão observadas, isto é, se conheceremos no futuro toda a região espacial para um dado t , depende do valor de $\int_0^{\infty} dt/A(t)$ ser convergente ou não.

4.7 - Teoria das Perturbações

Nesta Seção iremos estudar a questão da estabilidade de modelos cosmológicos.

Perturbações do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ geram modificações na geometria. Devido à não linearidade dessas equações, a métrica perturbada $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ não satisfaz necessariamente às equações de Einstein.

Nesta Seção, no entanto, limitaremos nosso estudo a variações δT^{μ}_{ν} do tensor momento-energia que estão acopladas à métrica $\delta g_{\mu\nu}$ através das equações de Einstein perturbadas:

$$\delta R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} (\delta R) \delta^{\mu}_{\nu} = -k \delta T^{\mu}_{\nu} \quad (1)$$

As quantidades básicas perturbadas com as quais trabalharemos são:

- (i) Tensor Métrico: $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$
- (ii) Densidade de Energia: $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho = \tilde{\rho}$
- (iii) Velocidade do Fluido: $V^{\mu} \rightarrow V^{\mu} + \delta V^{\mu} = \tilde{V}^{\mu}$
- (iv) Pressão: $p \rightarrow p + \delta p = \tilde{p}$

Nessas expressões, $\delta\rho$, δp , δV^{μ} e $\delta g^{\mu\nu}$ serão considerados quantidades pequenas. Isto é, $(\delta\rho)^2 \ll \delta\rho$, $(\delta p)^2 \ll \delta p$, etc.

Como consequência dessas modificações, quantidades funcionais associadas sofrem alterações, que serão sempre consideradas na aproximação linear da perturbação.

Há basicamente dois esquemas perturbativos:

(a) - Geral

(b) - Conforme

O esquema geral, mais direto, usa as equações de Einstein perturbadas, sob a forma (1). No esquema conforme, as equações da gravitação são escritas na forma quase-Maxwelliana (*).

Ao tratar perturbação de modelos conformalmente planos, como por exemplo, no caso do Universo de Friedmann, é particularmente conveniente usar o método (b) de perturbação.

Acoplada às equações quase-Maxwellianas, as modificações induzidas sobre as quantidades cinemáticas (expansão, etc) e conseqüentemente, as equações de evolução dessas grandezas, permitem obter uma informação completa sobre o estado de movimento da matéria perturbada. Examinemos primeiramente, as quantidades cinemáticas.

4.7.1 - Perturbação das Quantidades Cinemáticas

Expansão θ :

$$\tilde{\theta} = \theta + \delta\theta$$

Pela definição,

$$\tilde{\theta} = \tilde{V}^{\mu}{}_{;\mu} = \tilde{D}_{\mu}\tilde{V}^{\mu}$$

na qual o símbolo \sim sobre o operador derivação covariante significa que a derivada deve ser tomada na geometria perturbada

$\tilde{g}_{\mu\nu}$:

(*) As equações quase-Maxwellianas foram apresentadas na I Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF. Ver Referências em Ellis, M. Novello, J. M. Salim.

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &= (V^\mu + \delta V^\mu)_{|\mu} + \tilde{\Gamma}_{\epsilon\mu}^\mu (V^\epsilon + \delta V^\epsilon) \\ &= V^\mu_{|\mu} + (\delta V^\mu)_{|\mu} + (\Gamma_{\epsilon\mu}^\mu + \delta\Gamma_{\epsilon\mu}^\mu)(V^\epsilon + \delta V^\epsilon) \\ &= V^\mu_{|\mu} + (\delta V^\mu)_{|\mu} + \Gamma_{\epsilon\mu}^\mu V^\epsilon + \Gamma_{\epsilon\mu}^\mu \delta V^\epsilon + (\delta\Gamma_{\epsilon\mu}^\mu)V^\epsilon\end{aligned}$$

Daí

$$\delta\theta = \delta V^\mu_{|\mu} + \Gamma_{\epsilon\mu}^\mu \delta V^\epsilon + (\delta\Gamma_{\epsilon\mu}^\mu)V^\epsilon \quad (2)$$

Rotação $\omega_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\mu\nu} &= \omega_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu} \\ \tilde{\omega}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \tilde{h}_\mu^\lambda \tilde{h}_\nu^\epsilon \tilde{V}[\lambda|\epsilon] = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{h}_\mu^\lambda \tilde{h}_\nu^\epsilon \tilde{V}[\lambda|\epsilon]\end{aligned}$$

onde o projetor perturbado \tilde{h}_μ^ν é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{h}_\mu^\lambda &= \delta_\mu^\lambda - \tilde{V}_\mu \tilde{V}^\lambda \\ \tilde{h}_\mu^\lambda &= \delta_\mu^\lambda - (V_\mu + \delta V_\mu)(V^\lambda + \delta V^\lambda)\end{aligned}$$

Note que definimos o vetor co-variante \tilde{V}_μ pela expressão:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= \tilde{V}^\alpha g_{\alpha\mu} = (V^\alpha + \delta V^\alpha)(g_{\alpha\mu} + \delta g_{\alpha\mu}) \\ \tilde{V}_\mu &= V_\mu + V^\alpha \delta g_{\alpha\mu} + (\delta V^\alpha) g_{\alpha\mu}\end{aligned}$$

ou

$$\delta V_\mu = (\delta V^\alpha) g_{\alpha\mu} + V^\alpha \delta g_{\alpha\mu} \quad (3)$$

que poderia ser notada

$$\delta V_\mu = \delta(V^\alpha g_{\alpha\mu}) = (\delta V^\alpha) g_{\alpha\mu} + V^\alpha \delta g_{\alpha\mu}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\mu^\lambda &= \delta_\mu^\lambda - (V_\mu + (\delta V^\alpha)g_{\alpha\mu} + V^\alpha\delta g_{\alpha\mu})(V^\lambda + \delta V^\lambda) = \\ \tilde{h}_\mu^\lambda &= \delta_\mu^\lambda - V_\mu V^\lambda - V_\mu \delta V^\lambda - V^\lambda (\delta V^\alpha)g_{\alpha\mu} - V^\lambda V^\alpha \delta g_{\alpha\mu} \end{aligned} \quad (4)$$

isto é,

$$\tilde{h}_\mu^\lambda = h_\mu^\lambda - V_\mu \delta V^\lambda - V^\lambda \delta V_\mu$$

Usando na expressão de $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (h_\mu^\lambda - V_\mu \delta V^\lambda - V^\lambda \delta V_\mu)(h_\nu^\epsilon - V_\nu \delta V^\epsilon - V^\epsilon \delta V_\nu) \\ &\quad (V_{[\lambda} + \delta V_{\lambda]} | \epsilon] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (h_\mu^\lambda h_\nu^\epsilon - h_\mu^\lambda V_\nu \delta V^\epsilon - h_\mu^\lambda V^\epsilon \delta V_\nu - h_\nu^\epsilon V_\mu \delta V^\lambda - h_\nu^\epsilon V^\lambda \delta V_\mu - \\ &\quad - h_\nu^\epsilon V_\mu \delta V^\lambda)(V_{[\lambda} + \delta V_{\lambda]} | \epsilon] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} h_\mu^\lambda h_\nu^\epsilon V_{[\lambda} | \epsilon] + \frac{1}{2} h_\mu^\lambda h_\nu^\epsilon \delta V_{[\lambda} | \epsilon] - \\ &\quad - \frac{1}{2} h_\mu^\lambda V_\nu \delta V^\epsilon V_{[\lambda} | \epsilon] - \frac{1}{2} h_\mu^\lambda V^\epsilon \delta V_\nu V_{[\lambda} | \epsilon] - \\ &\quad - \frac{1}{2} h_\nu^\epsilon V_\mu \delta V^\lambda V_{[\lambda} | \epsilon] - \frac{1}{2} h_\nu^\epsilon V^\lambda \delta V_\mu V_{[\lambda} | \epsilon] \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \delta\omega_{\mu\nu} &= \tilde{\omega}_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_\mu^\lambda h_\nu^\epsilon \delta V_{[\lambda} | \epsilon] - \frac{1}{2} h_\mu^\lambda V_{[\lambda} | \epsilon] \delta(V_\nu V^\epsilon) - \\ &\quad - \frac{1}{2} h_\nu^\epsilon V_{[\lambda} | \epsilon] \delta(V^\lambda V_\mu) \end{aligned} \quad (5)$$

Tensor de Dilatação $\sigma_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{h}_{\mu}^{\alpha} \tilde{h}_{\nu}^{\beta} \tilde{V}_{(\alpha||\beta)} - \frac{1}{3} \tilde{\theta} \tilde{h}_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu}^{\alpha} - \delta(V_{\mu} V^{\alpha}) \right] \left[h_{\nu}^{\beta} - \delta(V_{\nu} V^{\beta}) \right] \left[V_{(\alpha||\beta)} + \right. \\ \left. + \delta V_{(\alpha||\beta)} - 2\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} V_{\epsilon} \right] - \frac{1}{3} \tilde{\theta} \tilde{h}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \delta\sigma_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h_{\nu}^{\beta} \delta(V_{\mu} V^{\alpha}) V_{(\alpha||\beta)} - \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} \delta(V_{\nu} V^{\beta}) V_{(\alpha||\beta)} + \\ + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \delta V_{(\alpha||\beta)} - h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} (\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon}) V_{\epsilon} - \\ - \frac{1}{3} (\delta\theta) h_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \theta \delta(h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (6)$$

Aceleração ($a^{\mu} \equiv \dot{V}^{\mu}$)

$$\tilde{a}^{\mu} = \tilde{V}^{\mu} \parallel_{\lambda} \tilde{V}^{\lambda}$$

$$\tilde{a}^{\mu} = \left[(V^{\mu} + \delta V^{\mu}) \parallel_{\lambda} + (\Gamma_{\epsilon\lambda}^{\mu} + \delta\Gamma_{\epsilon\lambda}^{\mu}) (V^{\epsilon} + \delta V^{\epsilon}) \right] (V^{\lambda} + \delta V^{\lambda})$$

$$\tilde{a}^{\mu} = V^{\mu} \parallel_{\lambda} V^{\lambda} + V^{\mu} \parallel_{\lambda} \delta V^{\lambda} + \delta V^{\mu} \parallel_{\lambda} V^{\lambda} + \Gamma_{\epsilon\lambda}^{\mu} \delta V^{\epsilon} V^{\lambda} + (\delta\Gamma_{\epsilon\lambda}^{\mu}) V^{\epsilon} V^{\lambda}$$

$$\tilde{a}^{\mu} = a^{\mu} + \delta a^{\mu}$$

$$\delta a^{\mu} = V^{\mu} \parallel_{\lambda} \delta V^{\lambda} + (\delta V^{\mu})' + (\delta\Gamma_{\epsilon\lambda}^{\mu}) V^{\epsilon} V^{\lambda} \quad , \quad (7)$$

onde, como sempre, o ponto significa derivada direcional na direção V^{μ} .

4.7.2 - *Perturbação das Equações Quase-Maxwellianas* (*)

Consideremos o problema de estudar perturbações do Universo de Friedmann.

Usando a liberdade de gauge do sistema de coordenadas, imporemos a condição

$$\delta g_{0\alpha} = 0 \quad (8)$$

A normalização do campo de velocidades V^μ impõe

$$\delta(g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu) = 0 \quad (9)$$

Daí,

$$(\delta g_{\mu\nu}) V^\mu V^\nu + 2g_{\mu\nu} V^\mu \delta V^\nu = 0$$

Mas como

$$V^\mu = \delta^\mu_0$$

temos

$$\delta g_{00} + 2g_{0\nu} \delta V^\nu = 0$$

isto é,

$$\delta V^0 = 0 \quad (10)$$

Note que embora o sistema de coordenadas continue sendo gaussiano (isto é, $g_{0i} + \delta g_{0i} = 0$) ele não é mais co-mo-

(*) Esta Seção pode ser deixada para uma leitura posterior por aqueles que não possuem conhecimento da forma quase-Maxwelliana das equações de Einstein. Esses leitores podem passar diretamente ao estudo (independente) da perturbação da densidade, na Seção seguinte.

vente, isto é, $\delta V^1 \neq 0$.

Usando a gauge (8) nas expressões perturbadas das quantidades cinemáticas, temos para a expansão

$$\delta\theta = \delta V^\mu{}_{|\mu} + \Gamma_{\epsilon\mu}^\mu \delta V^\epsilon + (\delta\Gamma_{\epsilon\mu}^\mu) V^\epsilon$$

$$\delta\theta = \delta V^k{}_{|k} + \Gamma_{i\mu}^\mu \delta V^i + \delta\Gamma_{0\mu}^\mu$$

Mas, na métrica de Friedmann $\Gamma_{i0}^0 = 0$, então

$$\delta\theta = \delta V^k{}_{|k} + \Gamma_{ik}^k \delta V^i + \delta\Gamma_{0\mu}^\mu \quad (11)$$

Para a rotação:

$$\begin{aligned} \delta\omega_{ij} = & \frac{1}{2} h_i^\lambda h_j^\epsilon \delta V_{[\lambda|\epsilon]} - \frac{1}{2} h_i^\lambda v_{[\lambda|\epsilon]} \delta(V_j V^\epsilon) - \\ & - \frac{1}{2} h_j^\epsilon v_{[\lambda|\epsilon]} \delta(V^\lambda v_i) \end{aligned}$$

$$\delta\omega_{ij} = \frac{1}{2} \delta V_{[i|j]} \quad (12)$$

Para a dilatação

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij} = & -\frac{1}{2} h_i^\alpha \delta(V_j V^\beta) v_{(\alpha||\beta)} - \frac{1}{2} h_j^\alpha \delta(V_i V^\beta) v_{(\alpha||\beta)} + \\ & + \frac{1}{2} h_i^\alpha h_j^\beta \delta V_{(\alpha||\beta)} - h_i^\alpha h_j^\beta (\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon) v_\epsilon - \\ & - \frac{1}{3} \delta\theta h_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta(h_{ij}) \end{aligned}$$

Na geometria não-perturbada ($\omega_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = 0$, $a_\mu = 0$) temos

$$v_{\alpha||\beta} = \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta}$$

$$v_{\alpha||0} = 0$$

$$v_{0||\beta} = 0$$

$$v_{i||j} = \frac{\theta}{3} g_{ij}$$

Daí,

$$\delta\sigma_{ij} = -\frac{1}{2} h_i^\alpha (\delta v_j) v_{(\alpha||0)} - \frac{1}{2} h_j^\alpha (\delta v_i) v_{(\alpha||0)} + \frac{1}{2} \delta v_{(i||j)} - \delta\Gamma_{ij}^0 - \frac{1}{3} (\delta\theta) g_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta g_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta (v_i v_j)$$

$$\delta\sigma_{ij} = -\frac{1}{2} \delta v_j v_{(i||0)} - \frac{1}{2} \delta v_i v_{(j||0)} + \frac{1}{2} \delta v_{(i||j)} - \delta\Gamma_{ij}^0 - \frac{1}{3} (\delta\theta) g_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta g_{ij}$$

$$\delta\sigma_{ij} = -\frac{\theta}{3} \delta g_{ij} - \frac{1}{3} (\delta\theta) g_{ij} + \frac{1}{2} \delta v_{(i||j)} - \delta\Gamma_{ij}^0$$

Podemos ainda simplificar mais essa expressão, escrevendo $\delta\Gamma_{ij}^0$ em termos de $\delta g_{\alpha\beta}$. Com efeito,

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \delta g^{0\lambda} (g_{i\lambda|j} + g_{j\lambda|i} - g_{ij|\lambda}) + \frac{1}{2} g^{0\lambda} (\delta g_{i\lambda|j} + \delta g_{j\lambda|i} - \delta g_{ij|\lambda})$$

isto é,

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \delta g_{ij|0}$$

pois $\delta g^{0\alpha} = 0$, segue da relação $\delta g_{0\alpha} = 0$. Daí,

$$\delta\sigma_{ij} = -\frac{\theta}{3} \delta g_{ij} - \frac{1}{3} g_{ij} \delta\theta + \frac{1}{2} \delta v_{(i||j)} + \frac{1}{2} \delta g_{ij|0} \quad (13)$$

Para a aceleração temos:

$$\delta a^\mu = v^\mu_{||\lambda} \delta v^\lambda + (\delta v^\mu)^\cdot + (\delta\Gamma_{\epsilon\lambda}^\mu) v^\epsilon v^\lambda$$

$$\delta a^\mu = \frac{\theta}{3} h^\mu_\lambda \delta V^\lambda + (\delta V^\mu)^* + \delta \Gamma_{00}^\mu$$

$$h^\mu_\lambda = \delta^\mu_\lambda - V^\mu V_\lambda$$

E para o modelo de Friedmann com $V^\mu = \delta^\mu_0$, temos

$$h^0_0 = 0$$

$$h^j_0 = 0$$

$$h^i_j = \delta^i_j$$

$$\delta a^0 = 0$$

$$\delta a^k = \frac{\theta}{3} \delta V^k + (\delta V^k)^* + \delta \Gamma_{00}^k$$

(14)

Mas,

$$\delta \Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (2\delta g_{0\ell}|_0 - \delta g_{00|\ell}) + \frac{1}{2} \delta g^{k\ell} (2g_{0\ell}|_0 - g_{00|\ell}) = 0$$

Daí,

$$\delta a^k = \frac{\theta}{3} \delta V^k + \delta V^k|_0$$

Mas

$$\begin{aligned} \delta V^k|_0 &= \delta V^k|_0 + \Gamma_{\epsilon 0}^k \delta V^\epsilon \\ &= \delta V^k|_0 + \Gamma_{10}^k \delta V^1 \end{aligned}$$

Mas

$$\Gamma_{10}^k = \frac{\dot{A}}{A} \delta^k_1$$

$$\delta a^k = \frac{\theta}{3} \delta V^k + \delta V^k|_0 + \frac{\dot{A}}{A} \delta V^k$$

Lembrando que $\theta = 3 \frac{\dot{A}}{A}$, temos

$$\delta a^k = 2 \frac{\dot{A}}{A} \delta v^k + \delta v^k|_0 \quad (15)$$

Isso encerra a questão das perturbações das quantidades cinemáticas.

Vamos agora considerar as modificações induzidas no sistema de equações quase-Maxwellianas.

Como a métrica não perturbada é conformalmente plana, as componentes elétrica e magnética do tensor de Weyl se anulam. A primeira equação (*) nos dá:

$$E_{\alpha\mu||\nu} h^{\mu\nu} h^\alpha{}_\lambda + 3H_{\alpha\lambda} \omega^\alpha + n_{\lambda\beta\epsilon\sigma} H^{\sigma\nu} v^\beta \sigma^\epsilon{}_\nu = \frac{1}{3} \rho|_\alpha h^\alpha{}_\lambda, \quad ,$$

onde $E_{\alpha\mu} = H_{\alpha\mu} = \omega_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = 0$.

Perturbando essa expressão, e chamando

$$\delta E_{\alpha\mu} \equiv \epsilon_{\alpha\mu}$$

$$\delta H_{\alpha\mu} \equiv H_{\alpha\mu}$$

obtemos

$$\epsilon_{\alpha\mu||\nu} h^{\mu\nu} h^\alpha{}_\lambda = \frac{1}{2} (\delta\rho)|_\alpha h^\alpha{}_\lambda + \frac{1}{3} \rho|_\alpha \delta(h^\alpha{}_\lambda), \quad ,$$

ou,

$$\epsilon_{ij||k} h^{jk} = \frac{1}{2} (\delta\rho)|_i h^\alpha{}_i - \frac{1}{3} \rho|_0 \delta(v^0 v_i), \quad ,$$

isto é

$$\epsilon_i{}^j{}_{||j} = \frac{1}{2} (\delta\rho)|_i - \frac{1}{3} \dot{\rho} \delta v_i \quad (16)$$

(*) Ver em M. Novello - J. Salim. As equações de Einstein na forma quase - Maxwelliana.

Consideremos agora a segunda equação projetada:

$$H_{\alpha\mu||\nu} h^{\mu\nu} h^\alpha_\epsilon - 3E_{\alpha\epsilon}\omega^\alpha - \eta_{\epsilon\beta\lambda\tau} E^{\tau\mu}\sigma_\mu{}^\beta v^\lambda = (\rho + p) \omega_\epsilon$$

Temos

$$H_{\alpha\mu||\nu} h^{\mu\nu} h^\alpha_\epsilon = (\rho + p) \delta\omega_\epsilon$$

ou

$$H_i^j{}_{||j} = (\rho + p) \delta\omega_i \quad (17)$$

com

$$\delta\omega^i = \frac{1}{2} \eta^{jk0i} \delta\omega_{jk} = \frac{1}{2} \eta^{ijk} \delta\omega_{jk}$$

Para a terceira equação projetada, temos

$$\begin{aligned} \dot{H}^\lambda{}_\alpha h_\alpha^\sigma h_\lambda{}^\rho + \frac{1}{2} E_\beta{}^\mu{}_{||\alpha} h_\mu (\sigma_n{}^\rho)^\lambda{}_{\alpha\beta} v_\lambda + \theta H^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} H_\nu (\rho_\theta^\sigma)^\nu - \\ - \frac{1}{2} H_\nu (\rho_\omega^\sigma)^\nu - a_\alpha E_\beta (\rho_n^\sigma)^\lambda{}_{\alpha\beta} v_\lambda - \eta^{\sigma\nu\lambda\delta} \eta^{\rho\mu\alpha\beta} v_\lambda v_\mu H_{\alpha\delta} \theta_{\beta\nu} = 0 \end{aligned}$$

Perturbando, temos:

$$\begin{aligned} \dot{H}^\lambda{}_\alpha h_\alpha^\sigma h_\lambda{}^\rho + \frac{1}{2} \epsilon_\beta{}^\mu{}_{||\alpha} \delta_\mu (i_n{}^\rho)^\lambda{}_{\alpha\beta} v_\lambda + \theta H^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} H_\nu (\rho_h^\sigma)^\nu \frac{\theta}{3} - \\ - \eta^{\sigma\nu\lambda\delta} \eta^{\rho\mu\alpha\beta} v_\lambda v_\mu H_{\alpha\delta} \frac{\theta}{3} h_{\beta\nu} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}^{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_\beta{}^\mu{}_{||\alpha} \delta_\mu (i_n{}^j)^\lambda{}_{\alpha\beta} v_\lambda + \theta H^{ij} - \frac{\theta}{3} H_\nu (j_g^i)^\nu - \\ - \frac{\theta}{3} \eta^{i\nu 0m} \eta^{j0n}{}_\nu H_{mn} = 0 \end{aligned}$$

Mas,

$$\eta^{i\nu 0m} \eta^{j0n}{}_\nu = -\eta^{i0m} \eta^{j0n}{}_\nu = -g^{ij} g^{mn} + g^{in} g^{mj}$$

Mas

$$g^{mn} H_{mn} = 0$$

nos dará

$$\dot{H}^{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{\ell} (i \parallel_m \eta^j) 0m\ell + \frac{\theta}{3} H^{ij} = 0 \quad (18)$$

Finalmente, a quarta projeção se escreve:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\alpha\mu} h^{\mu\rho} h^{\alpha\sigma} + \theta E^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} E_{\nu} (\sigma \theta^{\rho})_{\nu} - \frac{1}{2} E_{\nu} (\sigma \omega^{\rho})_{\nu} - \\ - \eta^{\sigma\nu\delta\tau} \eta^{\rho}_{\lambda\alpha\beta} V_{\delta} V^{\lambda} E_{\tau}^{\alpha} \theta^{\beta}_{\nu} - \frac{1}{2} H^{\alpha\mu} \parallel_{\nu} h_{\mu} (\rho \eta^{\sigma})_{\lambda\nu\alpha} V^{\lambda} + \\ + a^{\lambda} V^{\beta} H^{\delta} (\sigma \eta^{\rho})_{\beta\lambda\delta} = - \frac{1}{2} (\rho+p) \sigma^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Perturbando, temos

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\alpha\mu} h^{\mu\rho} h^{\alpha\sigma} + \theta e^{\sigma\rho} - \frac{\theta}{6} \epsilon_{\nu} (\sigma h^{\rho})_{\nu} - \eta^{\sigma\nu\delta\tau} \eta^{\rho}_{0\alpha\beta} E_{\tau}^{\alpha} \frac{\theta}{3} h^{\beta}_{\nu} - \\ - \frac{1}{2} H^{\alpha\mu} \parallel_{\nu} h_{\mu} (\rho \eta^{\sigma})_{0\nu\alpha} = - \frac{1}{2} (\rho+p) \delta\sigma^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Isto é,

$$\dot{e}^{ij} + \frac{\theta}{3} e^{ij} - \frac{1}{2} H_{\ell} (i \parallel_m \eta^j) 0m\ell = 0 \quad (19)$$

As equações (16), (17), (18) e (19) constituem o conjunto quase-Maxwelliano que descreve perturbações da geometria para um fluido perfeito.

A essas equações devemos adicionar aquelas obtidas perturbando-se a evolução das quantidades cinemáticas, que faremos a seguir.

Vimos, em Capítulo anterior, que a equação da expansão é dada por:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + \sigma^2 + 2\omega^2 - a^{\alpha}{}_{||\alpha} = R_{\alpha\mu} V^{\alpha} V^{\mu}$$

No caso do fluido perfeito

$$\begin{aligned} R_{\alpha\mu} V^{\alpha} V^{\mu} &= -T_{\alpha\mu} V^{\alpha} V^{\mu} + \frac{T}{2} g_{\alpha\mu} V^{\alpha} V^{\mu} = \\ &= -(\rho V_{\alpha} V^{\alpha} - p h_{\alpha\mu}) V^{\alpha} V^{\mu} + \frac{(\rho - 3p)}{2} = -\frac{\rho}{2} - \frac{3}{2} p \end{aligned}$$

Particularizando para o modelo de Friedmann:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{\rho}{2} - \frac{3p}{2}$$

Daf, perturbando:

$$(\delta\theta)^{\cdot} + \frac{2}{3} \theta \delta\theta - (\delta a^{\alpha})_{||\alpha} = -\frac{\delta\rho}{2} - \frac{3}{2} \delta p \quad (20)$$

A equação de evolução para a dilatação $\sigma_{\mu\nu}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} + a_i a_j - \frac{1}{2} a_{(i||j)} + \sigma_{ik} \sigma^k{}_j + \\ + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ij} - \omega_i \omega_j + \frac{1}{3} g_{ij} [a^{\mu}{}_{||\mu} + \omega^2 - \sigma^2] = \\ = R_{i\mu j\nu} V^{\mu} V^{\nu} - \frac{1}{3} h_{ij} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} R_{i\mu j\nu} V^{\mu} V^{\nu} &= \left[W_{i\mu j\nu} + \frac{1}{2} (g_{ij} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R_{ij} - \right. \\ &\quad \left. - g_{i\nu} R_{\mu j} - g_{\mu j} R_{i\nu}) - \frac{R}{6} (g_{ij} g_{\mu\nu} - g_{i\nu} g_{\mu j}) \right] V^{\mu} V^{\nu} \end{aligned}$$

Por partes,

$$W_{i\mu j\nu} V^{\mu} V^{\nu} = -E_{ij}$$

$$\begin{aligned} g_{ij} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} &= g_{ij} (-T_{\mu\nu} + \frac{T}{2} g_{\mu\nu}) V^{\mu} V^{\nu} = \\ &= g_{ij} \left[-\rho V_{\mu} V_{\nu} + p h_{\mu\nu} + \frac{\rho-3p}{2} g_{\mu\nu} \right] V^{\mu} V^{\nu} \\ &= g_{ij} \left[-\frac{\rho}{2} - \frac{3}{2} p \right] \end{aligned}$$

$$g_{\mu\nu} R_{ij} V^{\mu} V^{\nu} = R_{ij}$$

$$g_{i\nu} R_{\mu j} V^{\mu} V^{\nu} = V_i R_{\mu j} V^{\mu}$$

$$g_{\mu j} R_{i\nu} V^{\mu} V^{\nu} = V_j R_{i\nu} V^{\nu}$$

Daí:

$$\begin{aligned} R_{i\mu j\nu} V^{\mu} V^{\nu} &= -E_{ij} - \frac{1}{4} (\rho - 3p) g_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} R_{ij} - \frac{1}{2} R_{\mu j} V^{\mu} V_i - \frac{1}{2} R_{\mu i} V^{\mu} V_j - \frac{R}{6} g_{ij} + \\ &+ \frac{R}{6} V_i V_j = -E_{ij} - \frac{1}{2} \rho V_i V_j - \\ &- \frac{1}{2} R_{\mu j} V^{\mu} V^i - \frac{1}{2} R_{\mu i} V^{\mu} V^j - \frac{R}{6} g_{ij} + \frac{R}{6} V_i V_j \end{aligned}$$

Perturbando e usando as relações anteriores, temos:

$$\begin{aligned} \delta(R_{i\mu j\nu} V^{\mu} V^{\nu}) &= -\delta E_{ij} - \frac{R}{6} \delta g_{ij} - \frac{(\delta R)}{6} g_{ij} = \\ &= -\delta E_{ij} - \frac{(\rho-3p)}{6} \delta g_{ij} - \frac{(\delta\rho-3\delta p)}{6} g_{ij} \end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} \delta(R_{i\mu j\nu} V^{\mu} V^{\nu} - \frac{1}{3} h_{ij} R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}) &= -\delta E_{ij} - \frac{(\rho-3p)}{6} \delta g_{ij} - \\ &- \frac{1}{6} (\delta\rho-3\delta p) g_{ij} + g_{ij} \frac{(\delta\rho+3\delta p)}{6} + \frac{1}{6} (\rho+3p) \delta h_{ij} = \\ &= -\delta E_{ij} + p\delta g_{ij} + (\delta p) g_{ij} \end{aligned}$$

Finalmente, a equação de $\delta\sigma_{ij}$ ficará sendo:

$$(\delta\sigma_{ij})^* - \frac{1}{2} \delta a_{(i||j)} + \frac{2}{3} \theta \delta\sigma_{ij} + \frac{1}{3} g_{ij} \delta a^k{}_{||k} = -\delta E_{ij} + \delta(pg_{ij}) \quad (21)$$

A equação da perturbação de vorticidade ω_{ij} ficará sendo:

$$(\delta\omega_{ij})^* - \frac{1}{2} \delta a_{[i||j]} + \frac{2}{3} \theta \delta\omega_{ij} = 0 \quad (22)$$

O vetor $\delta\omega_i$ é definido por

$$\begin{aligned} \delta\omega^i &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta 0i} \delta\omega_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{mn0i} \delta\omega_{mn} \end{aligned}$$

ou, inversamente:

$$\delta\omega_{mn} = \eta_{mn i 0} \delta\omega^i$$

Daf,

$$(\delta\omega^k)^* - \frac{1}{2} \delta a_{i|j} \eta^{1j0k} + \frac{2}{3} \theta \delta\omega^k = 0 \quad (22')$$

Exercício: Calcule as equações de vínculo perturbadas.

Finalmente, para completar o conjunto de equações necessárias ao estudo da evolução das perturbações em um Universo de Friedmann resta somente estabelecer a perturbação das equações de conservação do tensor energia-momento.

Da equação de conservação de energia de um fluido perfeito, temos

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0$$

Daí,

$$(\delta\rho)' + (\rho + p)\delta\theta + (\delta\rho + \delta p)\theta = 0 \quad (23)$$

é a equação perturbada.

A equação de Navier-Stokes generalizada é dada por:

$$(\rho + p)a_{\alpha} - p|_{\mu}h^{\mu}_{\alpha} = 0$$

isto é, perturbando

$$(\rho + p)\delta a_k - (\delta p)|_k + \dot{p}\delta v_k = 0 \quad (24)$$

o que completa o conjunto de equações necessárias ao estudo da evolução das perturbações.

4.8 - Equações Básicas de Perturbação da Densidade de Energia

De um modo geral, ocorre não estarmos interessados no conjunto completo de equações da perturbação, mas sim em somente um sub-conjunto capaz de conter informação fechada sobre uma determinada variável (ou conjunto de variáveis). Isso acon

tece, por exemplo, quando estudamos a questão da evolução das inhomogeneidades presentes em nosso Cosmos, com o propósito de entender o mecanismo de formação de galáxias, estrelas, etc. Nesta Seção veremos como é possível conhecer a evolução do parâmetro de contraste definido pela razão $\delta\rho/\rho$ que mede a perturbação da densidade de energia por densidade não perturbada.

Consideremos um caso simples onde o fluido galáctico é constituído por um gás incoerente sem pressão ($p = 0$).

Seja $Q(x^i)$ uma base completa de funções no 3-espaço $t = \text{constante}^{(*)}$. Por exemplo, no caso da seção ser euclídeana podemos identificar $Q(x^i)$ com a base de Fourier.

A densidade perturbada $\delta\rho$ e a perturbação da velocidade δV^i podem ser expandidas na base Q . Escrevemos para cada componente desta expansão a forma:

$$\delta\rho = N(t) Q \quad (25a)$$

$$\delta V_k = M(t) Q_{|k} \quad (25b)$$

(onde $Q_{|k} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x^k}$).

Temos

$$\delta V^i = \delta(V_g g^{ik}) = (\delta V_g) g^{ik}$$

pois $V^\alpha = \delta^\alpha_0$.

A expressão de aceleração nos dá:

(*) Estas funções são chamadas esféricos harmônicos quadridimensionais. Ver em Novello-Soares.

Note que o alfabeto latino $\{i, j, \dots\}$ tem o domínio espacial $\{1, 2, 3\}$.

$$\delta a^i = 2 \frac{\dot{A}}{A} \delta V^i + \delta V^i|_0 = 2 \frac{\dot{A}}{A} (\delta V_m) g^{mi} + (\delta V_m)|_0 g^{mi} + (\delta V_m) g^{mi}|_0$$

Mas

$$g^{mi}|_0 = -2 \frac{\dot{A}}{A} g^{mi}$$

Daí,

$$\delta a^i = \dot{N} Q|_m g^{mi} \quad (26)$$

Usando a equação (23) temos

$$\dot{N} + \rho \delta \theta + N \theta = 0$$

Daí podemos escrever

$$\delta \theta = \left[\begin{array}{c} -\dot{N} - N\theta \\ \rho \end{array} \right] Q \quad (27)$$

Da equação de conservação (24) temos

$$\delta a_k = 0$$

A equação de Raychaudhuri perturbada (eq. (20)) dará:

$$(\delta \theta)' + \frac{2}{3} \theta \delta \theta + \frac{1}{2} \delta \rho = 0$$

Daí, usando o valor de $\delta \theta$ da eq. (27) temos,

$$\ddot{N} + \frac{8}{3} \dot{N} \theta + \frac{4}{3} N \theta^2 - N \rho = 0 \quad (28)$$

Vemos assim, que a equação de evolução da densidade se desacopla das demais equações.

Consideremos o caso em que a geometria não perturbada tem a seção espacial euclídeana. Neste caso, temos

$$\rho = \frac{4}{3} t^{-2}$$

$$\theta = 2 t^{-1}$$

E a equação (28) se torna

$$\ddot{N} t^2 + \frac{16}{3} \dot{N} t + 4N = 0$$

cuja solução é dada por

$$N(t) = \alpha t^{-4/3} + \beta t^{-3}$$

com α e β constantes.

Podemos então escrever para o fator de contraste

$$\mu \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{3}{4} \alpha t^{2/3} + \frac{3}{4} \beta t^{-1}$$

Vemos assim que, além do fator evanescente, existe um termo que cresce com a potência 2/3 do tempo, responsável pela instabilidade do modelo de Friedmann.

Exercício: Calcule $\delta\rho$ para os casos da seção espacial aberta e fechada.

5 - MODELO COSMOLÓGICO DE KASNER (1921)

Embora o estágio atual do nosso Universo seja bastante isotrópico, um período não-isotrópico pode ter ocorrido na história do Cosmos.

Argumentos nesse sentido foram dados, entre os quais podemos destacar o seguinte. Vimos que modelos homogêneos isotrópicos possuem horizonte. Isso significa a existência de uma região espacial na qual distintas regiões (do espaço) não poderiam trocar informações e conseqüentemente homogeneizar seu processo de isotropização. Assim, o mecanismo pelo qual essas regiões calibram sua taxa de isotropia não poderia ser regulado por leis físicas usuais.

Uma possível saída dessa dificuldade seria admitir uma fase anisotrópica inicial que (devido a processos físicos a serem determinados) evoluiria no sentido de eliminação da dilatação.

Um modelo anisotrópico típico foi encontrado pelo russo Kasner, já em 1921. Ele representa uma região do espaço-tempo no qual a participação da matéria na criação de curvatura é desprezível: a curvatura se sustenta a si própria (não-linearidade em jogo).

A métrica de Kasner se escreve sob a forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2 \quad (1)$$

Escolhendo as 1-formas diferenciáveis θ^A como

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt & \theta^2 &= b(t) dy \\ \theta^1 &= a(t) dx & \theta^3 &= c(t) dz \end{aligned} \quad (2)$$

onde $\theta^A = e^A_{\alpha} dx^{\alpha}$; e $\{\theta^A_{\alpha}\}$ constitui uma base de tetradas em cada ponto da variedade.

Derivando e lembrando que

$$d\theta^A = -\omega^A_B \theta^B \quad (3)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 \\ \omega^0_2 &= \frac{\dot{b}}{b} \theta^2 \\ \omega^0_3 &= \frac{\dot{c}}{c} \theta^3 \end{aligned} \quad (4)$$

Derivando uma vez mais, e notando que

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (5)$$

obtêm-se:

$$\begin{aligned} \Omega^0_1 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \\ \Omega^0_2 &= \frac{\ddot{b}}{b} \theta^0 \wedge \theta^2 \\ \Omega^0_3 &= \frac{\ddot{c}}{c} \theta^0 \wedge \theta^3 \\ \Omega^1_2 &= \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega^1_3 &= \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^2_3 &= \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (6)$$

Dai, obtemos as componentes não-nulas da curvatura na base de tetrada:

$$\begin{aligned}
 R_{101}^0 &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\
 R_{202}^0 &= -\frac{\ddot{b}}{b} \\
 R_{303}^0 &= -\frac{\ddot{c}}{c} \\
 R_{212}^1 &= -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} \\
 R_{313}^1 &= -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \\
 R_{323}^2 &= -\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Contraíndo,

$$\begin{aligned}
 R_0^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \\
 R_1^1 &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \\
 R_2^2 &= \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \\
 R_3^3 &= \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

As equações de Einstein para o vácuo são

$$R_{AB} = 0 \tag{9}$$

Kasner propõe uma solução dessas equações sob a forma de potências de t . Ponhamos

$$\begin{aligned}
 a(t) &= t^{p_1} \\
 b(t) &= t^{p_2} \\
 c(t) &= t^{p_3}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

onde p_1, p_2, p_3 são constantes. As únicas relações entre elas,

impostas por (9) dão (faça como exercício)

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (11a)$$

$$(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1 \quad (11b)$$

Podemos observar logo que um desses p_k é negativo e os outros dois positivos. Ademais, o domínio deles pode ser descrito facilmente analisando-se a eq. (11). Vamos denotar os números p_k em uma ordem tal que sempre teremos $p_1 < p_2 < p_3$. Então devemos ter para o domínio dos p_k os valores:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &\leq p_1 \leq 0 \\ 0 &\leq p_2 \leq \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} &\leq p_3 \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Note que quando $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$ a geometria se reduz ao espaço plano de Minkowski (isso se vê trivialmente, substituindo-se esses valores em (10)).

Vamos agora calcular os parâmetros de congruência da geodésica $V^\alpha = \delta_0^\alpha$. (Deixamos ao leitor a demonstração de que essa curva é realmente uma geodésica da geometria de Kasner.)

Temos, da definição da expansão θ :

$$\theta = V^\alpha_{;\alpha} = V^\alpha_{|\alpha} + \Gamma^\alpha_{\epsilon\alpha} V^\epsilon = \Gamma^\alpha_{0\alpha}$$

$$\theta = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = \frac{(\dot{abc})}{abc}$$

Daí

$$\theta = \frac{\dot{V}}{V} .$$

onde definimos o volume $V \equiv abc$.

Calculemos agora a dilatação σ_{ij} .

Temos

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (V_{\mu||\nu} + V_{\nu||\mu}) - \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu}$$

$$V_{1||1} = -\Gamma_{11}^0 = -a\dot{a}$$

$$h_{11} = g_{11} = -a^2$$

$$\sigma_{11} = -a\dot{a} + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} a^2$$

ou

$$\sigma_1^1 = \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}$$

e, analogamente

$$\sigma_2^2 = \frac{\dot{b}}{b} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}$$

$$\sigma_3^3 = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}$$

Note que $\sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 = 0$, como deveria ser.

Da definição de rotação, temos imediatamente que:

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{3} V [\underline{\mu} | \underline{\nu}] = 0$$

Assim, a geometria de Kasner representa um Universo sem matéria (o campo gravitacional se auto-alimenta) com expansão distinta segundo três eixos ortogonais, isto é, possui anisotropia, mas não possui rotação.

A análise do comportamento do Universo nas vizinhan

ças da singularidade admite duas atitudes, a saber:

(i) Admite-se que o modelo de Friedmann do Universo atual pode ser extrapolado para o passado sem qualquer limite.

(ii) Admite-se que o modelo de Friedmann é um estágio ulterior de um processo inicial (eventualmente) caótico no qual todos os possíveis comportamentos deveriam/poderiam co-existir.

A posição (i) tradicionalista choca-se com a evidente dificuldade de representação do ponto singular - e a total ausência de continuidade de leis físicas. Os números que caracterizam nosso Universo (como por exemplo, o número total de Baryons existentes, etc.) são condições iniciais e estão para sempre fora de nosso controle. Procurar suas "causas" não é então tarefa para os físicos.

A posição (ii), menos convencional, requer a elaboração de um modelo eficiente de processos físicos que conduziriam (univocamente ?) o Cosmos de um possível estágio caótico ao seu estágio bem-comportado atual (*).

(*) Ver a respeito M. Novello "Algumas Questões Cosmológicas" CBPF/1979.

6 - UNIVERSOS EM ROTAÇÃO

6.1 - Modelo de Gödel

Em 1949, K. Gödel apresenta um modelo cosmológico que viria a desempenhar um importante papel na história da Cosmologia Relativista. Neste modelo descreve-se um Universo contendo matéria incoerentemente distribuída no espaço, cujo estado de movimento, independente do tempo, possui a propriedade de ter rotação não-nula. Como veremos adiante, o modelo de Gödel possui propriedades particularmente interessantes e que coloca uma série de questões profundas sobre a estrutura topológica do espaço-tempo.

O elemento de linha da métrica de Gödel em coordenadas (t, x, y, z) se escreve

$$ds^2 = dt^2 + 2e^{cx} dy dt + \frac{1}{2} e^{2cx} dy^2 - dx^2 - dz^2 \quad (1)$$

Assim, o tensor métrico tem a forma matricial seguinte:

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{cx} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{cx} & 0 & \frac{1}{2} e^{2cx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

A sua inversa é facilmente obtida:

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2e^{-cx} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-cx} & 0 & -2e^{-2cx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Daí, o determinante g tem o valor dado por

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{cx} \quad (4)$$

Vamos escolher um sistema de tetradas de tal modo a podermos escrever a métrica (1) sob a forma Minkowskiana.

$$ds^2 = \theta^A \theta^B \eta_{AB} = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (5)$$

As 1-formas diferenciáveis são dadas pelas relações

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + e^{cx} dy \\ \theta^1 &= dx \\ \theta^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{cx} dy \\ \theta^3 &= dz \end{aligned} \quad (6)$$

Um cálculo direto permite mostrar que as 1-formas (6) substituídas em (5) reduzem (5) à expressão (1).

De posse dessas 1-formas, as tetradas $e^A_{(\alpha)}$ são obtidas pela relação $\theta^A = e^A_{(\alpha)} dx^\alpha$. Obtemos

$$\begin{aligned} e^0_{(0)} &= 1 \\ e^0_{(2)} &= e^{cx} \\ e^1_{(1)} &= 1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$e^2_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{cx}$$

$$e^3_{(3)} = 1$$
(7)

Os demais elementos das tetradas são nulos.

De (7) obtemos as tetradas inversas, definidas por $e^A_{\alpha} e_{AB} = g_{\alpha\beta}$. É possível também obter-se as tetradas inversas $e^{(\alpha)}_A$ pela relação $dx^{\alpha} = e^{(\alpha)}_A \theta^A$. Temos:

$$e^{(0)}_0 = 1$$

$$e^{(0)}_2 = -\sqrt{2}$$

$$e^{(1)}_1 = 1$$

$$e^{(2)}_2 = \sqrt{2} e^{-cx}$$

$$e^{(3)}_3 = 1$$
(8)

Derivando exteriormente as 1-formas θ^A , um cálculo direto permite obter ω_{AB} . Os únicos elementos não-nulos são da dos por:

$$\omega^0_1 = \frac{c}{\sqrt{2}} \theta^2$$

$$\omega^0_2 = \frac{-c}{\sqrt{2}} \theta^1$$

$$\omega^1_2 = \frac{c}{\sqrt{2}} \theta^0 - c\theta^2$$
(9)

Os coeficientes de Ricci são obtidos imediatamente:

$$Y_{012} = -Y_{102} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$Y_{021} = -Y_{201} = \frac{-c}{\sqrt{2}}$$

$$Y_{120} = -Y_{210} = -\frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$Y_{122} = -Y_{212} = c$$
(10)

Finalmente, para a curvatura Ω_B^A encontramos:

$$\Omega_1^0 = d\omega_1^0 + \omega_2^0 \wedge \omega_1^2$$

Por partes,

$$d\omega_1^0 = \frac{c}{\sqrt{2}} d\theta^2 = \frac{c^2}{\sqrt{2}} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\omega_2^0 \wedge \omega_1^2 = \frac{-c}{\sqrt{2}} \theta^1 \wedge \left[\frac{-c}{\sqrt{2}} \theta^0 + c\theta^2 \right] = \frac{c^2}{2} \theta^1 \wedge \theta^0 - \frac{c^2}{\sqrt{2}} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega_1^0 = \frac{c^2}{\sqrt{2}} \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{c^2}{2} \theta^0 \wedge \theta^1 - \frac{c^2}{\sqrt{2}} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega_1^0 = -\frac{c^2}{2} \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\Omega_2^0 = d\omega_2^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_2^1$$

Mas

$$d\omega_2^0 = -\frac{c}{\sqrt{2}} d\theta^1 = 0$$

$$\omega_1^0 \wedge \omega_2^1 = \frac{c}{\sqrt{2}} \theta^2 \wedge \left[\frac{c}{\sqrt{2}} \theta^0 - c\theta^2 \right] = -\frac{c^2}{2} \theta^0 \wedge \theta^2$$

Logo,

$$\Omega_2^0 = -\frac{c^2}{2} \theta^0 \wedge \theta^2$$

$$\Omega_2^1 = d\omega_2^1 + \omega_0^1 \wedge \omega_2^0$$

Temos:

$$d\omega_2^1 = \frac{c}{\sqrt{2}} d\theta^0 - c d\theta^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{2}} \right) c \sqrt{2} \theta^1 \wedge \theta^2 - c^2 \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d\omega_2^1 = 0$$

$$\omega_0^1 \wedge \omega_2^0 = \frac{c}{\sqrt{2}} \theta^2 \wedge \left(-\frac{c}{\sqrt{2}} \right) \theta^1 = \frac{c^2}{2} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega_2^1 = \frac{c^2}{2} \theta^1 \wedge \theta^2$$

Finalmente, as curvaturas de Riemann R_{ABCD} na base das tetradas acima valem

$$R_{101}^0 = \frac{c^2}{2} \quad (11a)$$

$$R_{202}^0 = \frac{c^2}{2} \quad (11b)$$

$$R_{212}^1 = -\frac{c^2}{2} \quad (11c)$$

Vamos agora calcular o tensor de curvatura contraído R_{AB} . Um cálculo direto nos dará

$$R_{00} = -c^2 \quad (12)$$

os demais são nulos. Assim, o escalar da curvatura R assume então a expressão

$$R = R_{00} = -c^2 \quad (13)$$

Vamos agora voltar nossa atenção para a fonte dessa geometria. Dissemos acima que no modelo de Gödel, a fonte de curvatura é um fluido de densidade de energia ρ sem pressão. No sistema de tetradas que estamos utilizando podemos escrever para o tensor momento-energia a expressão

$$T_{AB} = \rho \delta_A^0 \delta_B^0, \quad (14)$$

onde a velocidade V_A no sistema inercial local vale $V_A = \delta_A^0$.

A equação de Einstein com termo cosmológico se escreve:

$$R_{AB} = -\kappa T_{AB} + \frac{\kappa}{2} T \eta_{AB} + \Lambda \eta_{AB} \quad (15)$$

Consideramos as diversas componentes dessa equação.

Componente 0 - 0:

$$c^2 = \frac{\kappa \rho}{2} - \Lambda \quad (16)$$

Componente 1 - 1:

$$0 = -\kappa p - 2\Lambda \quad (17)$$

As demais componentes diagonais repetem a expressão de 1-1.

Temos então que

$$\kappa p = -2\Lambda = c^2 \quad (18)$$

A positividade da energia está assegurada ($c^2 > 0$) e temos então que Λ deve ser negativa. Para entender o significado da constante c vamos estudar as congruências de curvas co-moventes com o fluido.

6.2 - Quantidades Cinemáticas

Das relações acima podemos calcular os parâmetros cinemáticos do espaço-tempo de Gödel.

(i) Expansão:Da definição de expansão Θ

$$\Theta = - \gamma_{MN}^0 n^{MN}$$

Temos

$$\Theta = - \gamma_{12}^0 n^{12} - \gamma_{21}^0 n^{21} = 0$$

(ii) Deformação:

Temos

$$2\sigma_{AB} = -\gamma_{AB}^0 - \gamma_{BA}^0 + \eta_{BO} \gamma_{AO}^0 + \gamma_{BO}^0 \eta_{AO} - \frac{2}{3} \Theta h_{AB}$$

Utilizando os coeficientes γ_{BC}^A calculados atrás em
contramos $\sigma_{AB} = 0$.

(iii) Rotação:

Da definição

$$2\omega_{AB} = -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 + \gamma_{AO}^0 \delta_B^0 - \gamma_{BO}^0 \delta_A^0$$

o único termo não-nulo será dado por

$$2\omega_{12} = -\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 = -\sqrt{2} c$$

isto é,

$$\omega_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} c \quad (19)$$

Para o vetor de rotação ω^A encontramos

$$\omega^A = (0, 0, 0, \omega_{12}) = \left(0, 0, 0, -\frac{c}{\sqrt{2}} \right) \quad (19')$$

Chamando de $-\Omega^2$ a norma de ω^A (lembre que ω^A é vetor do tipo espaço), teremos

$$\Omega^2 = -\omega^A \omega_A = \frac{c^2}{2} \quad (20)$$

Assim, escreveremos

$$\omega^A = (0, 0, 0, -\Omega)$$

Esse resultado permite escrever então que vale a relação

$$\kappa_\rho = 2\Omega^2 \quad (18')$$

isto é, a densidade de energia do espaço-tempo de Gödel mede a intensidade de sua rotação.

6.3 - *Sistemas de Coordenadas Cilíndrico*

Algumas das propriedades da geometria de Gödel aparecem mais evidente quando estudadas em um sistema de coordenadas cilíndrico. Vamos assim considerar a métrica (1) no sistema (t, r, ϕ, z) onde o elemento infinitesimal de linha assume a forma

$$ds^2 = a^2 \left[dt^2 - dr^2 - dz^2 + g(r) d\phi^2 + 2h(r) d\phi dt \right], \quad (21)$$

onde a é uma constante.

Escolhamos o seguinte sistema inercial local de tetradas dado implicitamente pelas 1-formas

$$\theta^0 = a (dt + h d\phi)$$

$$\theta^1 = a dr$$

$$\theta^2 = a \Delta d\phi$$

$$\theta^3 = a dz$$

onde definimos Δ pela relação $\Delta \equiv \sqrt{h^2 - g}$.

Explicitando e _{α} ^A temos:

$$\begin{aligned} e^0_{(0)} &= a \\ e^0_{(2)} &= ah \\ e^1_{(1)} &= a \\ e^2_{(2)} &= a\Delta \\ e^3_{(3)} &= a \end{aligned} \tag{23}$$

E também as inversas

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= \frac{1}{a} \\ e^{(0)}_2 &= -\frac{h}{\Delta} \frac{1}{a} \\ e^{(1)}_1 &= \frac{1}{a} \\ e^{(2)}_2 &= \frac{1}{a} \frac{1}{\Delta} \\ e^{(3)}_3 &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{24}$$

Um cálculo direto permite obter as formas ω^a_b :

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} \theta^2 \\ \omega^0_2 &= -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} \theta^1 \\ \omega^1_2 &= \frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} \theta^0 - \frac{1}{a} \frac{\Delta'}{\Delta} \theta^2 \end{aligned}$$

onde $h' \equiv dh/dr$.

Os coeficientes de Ricci valem:

$$\gamma_{012} = -\gamma_{102} = \frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta}$$

$$\gamma_{021} = -\gamma_{201} = -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta}$$

$$\gamma_{120} = -\gamma_{210} = -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta}$$

$$\gamma_{122} = -\gamma_{212} = \frac{1}{a} \frac{\Delta'}{\Delta}$$

(25)

Calculemos agora as curvaturas Ω^A_B .

Temos:

$$\Omega^0_1 = d\omega^0_1 + \omega^0_2 \wedge \omega^2_1$$

$$d\omega^0_1 = \frac{1}{2a} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]' dr \wedge \theta^2 + \frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} d\theta^2$$

$$d\omega^0_1 = \frac{1}{2a^2} \frac{h''}{\Delta} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\begin{aligned} \omega^0_2 \wedge \omega^2_1 &= \frac{1}{a^2} \left[-\frac{1}{2} \frac{h'}{\Delta} \theta^1 \right] \wedge \left[-\frac{1}{2} \frac{h'}{\Delta} \theta^0 + \frac{\Delta'}{\Delta} \theta^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \theta^0 \wedge \theta^1 - \frac{1}{2a^2} \frac{h' \Delta'}{\Delta^2} \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

$$\Omega^0_1 = -\frac{1}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{1}{2a^2} \left[\frac{h''}{\Delta} - \frac{h' \Delta'}{\Delta^2} \right] \theta^1 \wedge \theta^2$$

Cálculo de Ω^0_2

$$d\omega^0_2 = 0$$

$$\omega^0_1 \wedge \omega^1_2 = \frac{1}{a^2} \frac{1}{2} \frac{h'}{\Delta} \theta^2 \wedge \left[\frac{1}{2} \frac{h'}{\Delta} \theta^0 - \frac{\Delta'}{\Delta} \theta^2 \right]$$

Daí,

$$\Omega^0_2 = -\frac{1}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \theta^0 \wedge \theta^2$$

Cálculo de Ω^1_2

$$d\omega^1_2 = \frac{1}{2a} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]' dr \wedge \theta^0 + \frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} d\theta^0 - \frac{1}{a} \frac{\Delta'}{\Delta} dr \wedge \theta^2 - \frac{1}{a} \frac{\Delta'}{\Delta} d\theta^2$$

$$d\omega^1_2 = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right] \theta^1 \wedge \theta^0 + \frac{1}{2a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{a^2} \frac{\Delta''}{\Delta} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\omega^1_0 \wedge \omega^0_2 = \frac{1}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \theta^1 \wedge \theta^2$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Omega^1_2 = & -\frac{1}{2a^2} \left[\frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right] \theta^0 \wedge \theta^1 - \frac{1}{a^2} \frac{\Delta''}{\Delta} \theta^1 \wedge \theta^2 + \\ & + \frac{3}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

Daí, obtemos as curvaturas R_{ABCD} :

$$R^0_{101} = \frac{1}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2$$

$$R^0_{112} = -\frac{1}{2a^2} \left[\frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right]$$

$$R^0_{202} = \frac{1}{4a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2$$

$$R^1_{212} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{3}{4} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 \right]$$

Para os tensores contraídos R_{AB} , encontramos os valores:

$$R_{00} = -\frac{1}{2a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2$$

$$R_{11} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{\Delta^2} \right]$$

$$R_{22} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{\Delta^2} \right] = R_{11}$$

$$R_{02} = \frac{1}{2a^2} \left[-\frac{h''}{\Delta} + \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right]$$

Os demais termos são nulos.

6.4 - A Solução de Gödel

Vamos procurar encontrar soluções das equações de Einstein para a geometria acima. Estudaremos aqui, primeiramente, o caso de um fluido perfeito (estudado preliminarmente por Gödel) e depois consideraremos o efeito da existência de pressões anisotrópicas.

A inexistência de fluxo de calor impõe

$$R_{02} = 0 .$$

De (27) temos

$$\frac{h'}{\Delta} = \text{constante} \quad (28)$$

As demais equações de Einstein se escrevem:

$$R_{AB} = -\kappa T_{AB} + \kappa T \eta_{AB} + \Lambda \eta_{AB}$$

$$R_{00} = -\frac{\kappa \rho}{2} - \frac{3}{2} \kappa p + \Lambda$$

$$R_{11} = -\frac{\kappa \rho}{2} + \frac{1}{2} \kappa p - \Lambda$$

$$R_{22} = -\frac{\kappa \rho}{2} + \frac{1}{2} \kappa p - \Lambda$$

$$R_{33} = -\frac{\kappa\rho}{2} + \frac{1}{2}\kappa\rho - \Lambda$$

De $R_{33} = 0$ e de $p = 0$, segue

$$\kappa\rho = -2\Lambda \quad , \quad (30)$$

e também

$$\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 = 0 \quad (31)$$

Uma solução de (31), encontrada por Gödel, é dada por

$$h = \sqrt{2} \sinh^2 r \quad (32a)$$

$$\Delta = \sinh r \cosh r \quad (32b)$$

Assim, temos da equação 0 - 0:

$$-\frac{1}{2a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 = -\frac{\kappa\rho}{2} + \Lambda$$

$$-\frac{1}{2a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 = -\kappa\rho$$

Mas

$$h' = 2\sqrt{2} \sinh r \cosh r = 2\sqrt{2} \Delta$$

e então,

$$\kappa\rho = \frac{4}{a^2} \quad (33)$$

Lembrando que a rotação ω^A vale

$$\omega^A = \frac{1}{2} \epsilon^{ABC} \omega_{BC}$$

e que o tensor de rotação vale $\omega_{12} = -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta}$, temos:

$$\omega^A = \left[0, 0, 0, -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Lambda} \right] = \left[0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{a} \right] \quad (34)$$

De $\Omega^2 = -\omega^A \omega_A$, temos:

$$\Omega^2 = \frac{2}{a^2} \quad (35)$$

e, daí

$$\kappa \rho = 2\Omega^2 \quad (36)$$

que foi o resultado obtido anteriormente (cf. eq. (18')).

6.5 - Outras Soluções

Vamos considerar aqui soluções das equações de Einstein para a curvatura (27) com tensor momento-energia mais geral.

Consideraremos que T_{AB} é dado por

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + \Pi_{AB} \quad (37)$$

onde a matriz de pressão anisotrópica tem a forma:

$$\Pi_{AB} = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Neste caso, as equações se escrevem:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{\kappa \rho}{2} - \frac{3}{2} \kappa p + \Lambda \\ R_{11} &= -\frac{\kappa \rho}{2} + \frac{1}{2} \kappa p - \alpha - \Lambda \end{aligned} \quad (39)$$

$$R_{22} = -\frac{\kappa\rho}{2} + \frac{\kappa\rho}{2} - \beta - \Lambda \quad (39)$$

$$R_{33} = -\frac{\kappa\rho}{2} + \frac{\kappa\rho}{2} + \alpha + \beta - \Lambda$$

Usando (27) temos que $R_{11} = R_{22}$ implica

$$\alpha = \beta$$

Construamos agora a matriz de rotação Ω^A_B dada por

$$\Omega^A_B = \omega^A \omega_B + \frac{1}{3} \Omega^2 h^A_B \quad (40)$$

onde $\Omega^2 = -\omega^A \omega_A$.

Teremos:

$$\Omega^A_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \Omega^2 & & \\ & \frac{1}{3} \Omega^2 & \\ & & -\frac{2}{3} \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Da relação $\alpha = \beta$ a matriz de anisotropia se escreve

$$\Pi^A_B = \begin{pmatrix} -\alpha & & \\ & -\alpha & \\ & & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Vemos então que Π^A_B é proporcional a Ω^A_B (isto é, um fluido não-Stokesiano). Escreveremos

$$\Pi^A_B = -\gamma^2 \Omega^A_B \quad (42)$$

Daí

$$\alpha = \frac{1}{3} \gamma^2 \Omega^2$$

As equações de Einstein se reduzem às seguintes:

$$-\frac{1}{2a^2} \left[\frac{h'}{\Delta} \right]^2 = -\frac{\kappa\rho}{2} - \frac{3}{2} \kappa p + \Lambda$$

$$\frac{1}{a^2} \left[\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{\Delta^2} \right] = -\frac{\kappa\rho}{2} + \frac{\kappa p}{2} - \frac{1}{3} \gamma^2 \Omega^2 - \Lambda \quad (43)$$

$$\frac{h'}{\Delta} = \text{constante}$$

$$-\frac{\kappa\rho}{2} + \frac{\kappa p}{2} - \Lambda = \frac{2}{3} \gamma^2 \Omega^2$$

Uma solução desse sistema de equações pode ser obtida fazendo

$$\Delta = \text{sen}(mr) \quad (44)$$

$$h = -\frac{2}{\sqrt{\kappa\gamma^2 - 2}} \cos(mr)$$

Com efeito, temos

$$\frac{h'}{\Delta} = +\frac{2}{\sqrt{\kappa\gamma^2 - 2}} m = \text{constante}$$

Vamos fazer aqui $a = 1$.

Isso não introduz nenhuma alteração nas equações, pois se trata somente de uma gradação das coordenadas.

Temos então

$$\begin{aligned} \kappa\rho &= -\Lambda + (1 + \kappa\gamma^2) \Omega^2 \\ \kappa p &= \Lambda + \left[1 - \frac{\kappa}{3} \gamma^2 \right] \Omega^2 \\ m^2 &= (\kappa\gamma^2 - 2) \Omega^2 \end{aligned} \quad (45)$$

A positividade da energia e da pressão é garantida se, como no caso anterior, tivermos a constante cosmológica

negativa (ou nula) e se o coeficiente de viscosidade γ satisfizer a desigualdade

$$2 < \kappa\gamma^2 < 3 \quad (46)$$

De (44) e da definição de Δ

$$\Delta^2 = h^2 - g$$

temos

$$\begin{aligned} g &= h^2 - \Delta^2 = \frac{4}{(\kappa\gamma^2 - 2)} \cos^2(mr) - \sin^2(mr) \\ &= \left[\frac{4}{\kappa\gamma^2 - 2} + 1 \right] \cos^2(mr) - 1 \\ g &= \left[\frac{\kappa\gamma^2 + 2}{\kappa\gamma^2 - 2} \right] \cos^2(mr) - 1 \end{aligned} \quad (47)$$

6.6 - Acausalidade e Universos em Rotação

Uma propriedade particularmente intrigante da geometria de Gödel está associada à existência nesta geometria de curvas do tipo tempo fechadas.

De (32) e da definição de Δ temos que, na geometria de Gödel

$$\begin{aligned} g &= h^2 - \Delta^2 = 2 \sinh^4 r - \sinh^2 r \cosh^2 r \\ &= 2 \sinh^4 r - \sinh^2 r (1 + \sinh^2 r) \\ &= \sinh^4 r - \sinh^2 r \end{aligned}$$

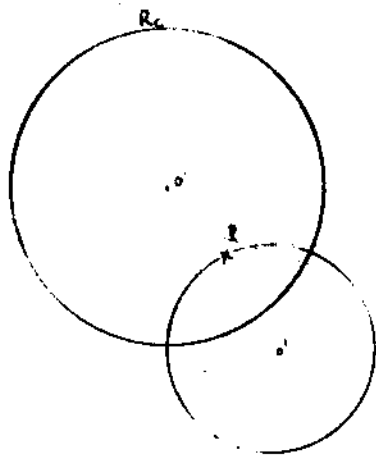
Seja R_C o raio crítico tal que $\sinh R_C = 1$.

Para os valores de r_I tais que $0 < r_I < R_C$ temos $g < 0$, e para $r_{II} < R_C$ tem-se $g > 0$. Isto é, o círculo nulo ($g = 0$) definido por $z = \text{constante}$, $t = \text{constante}$, $r = R_C$ separa o espaço-tempo de Gödel em duas regiões que chamaremos C e A (iniciais de causal e acausal, respectivamente). Na região interna a R_C , isto é, região C, as curvas fechadas são do tipo espaço. No entanto, em A, os círculos definidos por $t = \text{constante}$, $r = \text{constante}$, $z = \text{constante}$, são do tipo tempo. Isto é, um observador real poderia nesta região influenciar o seu passado.

Como a geometria de Gödel é homogênea, devemos concluir que por cada ponto passa uma curva acausal. Considere, no entanto, o observador centrado em O. Pelo que vimos acima, as curvas fechadas só ocorrem para $r > R_C$.

Como conciliar esse resultado com a homogeneidade da geometria de Gödel?

Seja P um ponto vizinho de O. Existe, pelo que vimos acima, uma curva de raio constante passando por P centrado em O' tal que para o observador em O', a curva por P está além de seu raio crítico



R'_C . Ocorre que a curva por P que viola causalidade cruza duas vezes a fronteira R_C de O, penetrando assim na região acausal de O. Se limitarmos nossas observações em O ao interior de seu raio crítico, não podemos verificar violação de causa-

idade pela curva em P. Isto está evidenciando o caráter global, isto é, não local, da causalidade. Dificuldades nessa geometria de Gödel ocorrem se o observador caminha além de seu raio crítico. Aí, a questão da violação da causalidade aparece inevitavelmente.

Vamos agora investigar a questão da causalidade na geometria dada por (44) - (47).

A linha nula $g = 0$ é dada pelas soluções r_n da equação

$$\frac{\kappa\gamma^2 + 2}{\kappa\gamma^2 - 2} \cos^2(mr) = 1$$

As soluções dessa equação são dadas pelos r_n tais que:

$$m r_n = \arccos \sqrt{\frac{\kappa\gamma^2 - 2}{\kappa\gamma^2 + 2}} + n\pi$$

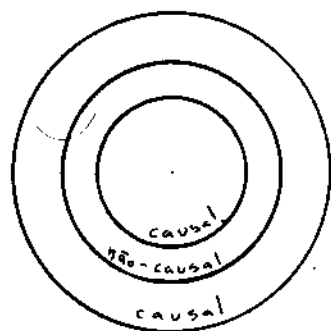
Concluimos que a geometria em questão possui regiões concêntricas onde causalidade e não-causalidade se alternam.

Assim, podemos distinguir:

região I: $0 < r < r_0 \Rightarrow g(r) < 0$
(região causal)

região II: $r_0 < r < r_1 \Rightarrow g(r) > 0$
(região não-causal).

região III: $r_1 < r < r_2 \Rightarrow g(r) < 0$, e assim sucessivamente,
(região causal)



as regiões causal - não-causal vão se alternando. Note entretanto, que como a solução é homogênea, vale a mesma observação feita anteriormente com respeito à geometria de Gödel.

Exercício: Calcule as curvaturas do elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 + g \frac{\sin^2 \theta}{r^2} d\phi^2 + \frac{2h}{r} d\phi dt$$

Solução:

Escolhendo

$$\theta^0 = dt + \frac{h}{r} d\phi$$

$$\theta^1 = dr$$

$$\theta^2 = r d\theta$$

$$\theta^3 = \Delta d\phi$$

Com

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \sqrt{h^2 - g \sin^2 \theta}$$

teremos

$$\omega^0_1 = \alpha \theta^3$$

$$\omega^0_3 = -\alpha \theta^1$$

$$\omega^1_2 = -\frac{1}{r} \theta^2$$

$$\omega^1_3 = \alpha \theta^0 - \frac{\Delta'}{\Delta} \theta^3$$

$$\omega^2_3 = -\frac{1}{r} \frac{\Delta_\theta}{\Delta} \theta^3$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{1}{2\Delta} \left(\frac{h}{r} \right)'$$

$$\Delta_\theta \equiv \frac{\partial \Delta}{\partial \theta}$$

O vetor de rotação vale

$$\omega^A = (0, 0, \alpha, 0)$$

As curvaturas contraídas na base de tetradas acima valem

$$R_{00} = -2\alpha^2$$

$$R_{11} = -2\alpha^2 + \frac{\Delta''}{\Delta}$$

$$R_{22} = \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_{\theta\theta}}{\Delta} + \frac{1}{r} \frac{\Delta'}{\Delta}$$

$$R_{33} = R_{11} + R_{22}$$

$$R_{03} = -\alpha' - \frac{\alpha}{r}$$

$$R_{12} = \frac{\Delta'}{r\Delta} - \frac{\Delta_{\theta}}{r^2\Delta}$$

Impondo que os elementos fora da diagonal se anulam, podemos escrever:

$$\Delta = L r' \cos\theta$$

$$h = L r^2$$

Daí,

$$g = L^2 r^4$$

Note que $g > 0$ sempre. Isso implica que as curvas $\theta = c^{te}$, $t = c^{te}$, $r = c^{te}$, são do tipo tempo fechado.

Escrevendo para a pressão anisotrópica

$$\Pi^A_B = -\gamma^2 \Omega^A_B$$

encontramos, via equações de Einstein:

$$\rho = \frac{3}{r^2 \cos^2\theta}$$

$$\rho = \frac{1}{g} \rho$$

$$\gamma = 2\sqrt{2}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{1}{r \cos\theta}$$

Observação: analise as curvas fechadas acima. Verifique se existe uma região acausal (como em Gödel e na solução -I acima).

Dos exemplos examinados acima, podemos concluir a dependência da existência de violação da causalidade com a topologia associada. Com efeito, a não-causalidade está sempre (nos exemplos acima) associada a uma variável cíclica. Em Gödel, por exemplo (e nos demais casos acima verifica-se que o mesmo ocorre), a identificação dos pontos $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$ é responsável pelo fechamento da curva tipo-tempo acausal. Se pudéssemos abrir o cilindro, que é a geometria de Gödel, poderíamos impedir a existência de curvas não-causais. Entretanto, as simetrias da métrica de Gödel impedem tal operação.

Exercício: Calcule os vetores de Killing da métrica de Gödel.

7 - ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COSMOLÓGICOS

Nos capítulos anteriores, introduzimos alguns modelos cosmológicos que são soluções exatas das equações de Einstein. Tais modelos constituem idealizações de configurações simples que permitem tratamento matemático através de funções analíticas simples. Modelos mais realistas certamente afastar-se-iam de estruturas tipo fluido perfeito. Neste Capítulo discutiremos uma classe de soluções das equações de Einstein na qual a fonte de curvatura é um fluido com viscosidade. Ao invés de procurar soluções exatas, estudaremos o sistema de equações diferenciais resultante usando para isso o método de análise qualitativa. É, sem dúvida, um fato notável, que as equações da gravitação possam se reduzir em alguns casos a um sistema autônomo (cf. adiante), permitindo a discussão do comportamento das curvas integrais em um espaço de fase associado, sem o conhecimento explícito da forma analítica daquelas soluções.

Começemos por considerar a métrica correspondente a um modelo homogêneo e isotrópico:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} r^2\right)^2} \right] \quad (1)$$

onde ε pode assumir valores +1, -1 ou 0.

O tensor momento-energia é dado por um fluido viscoso do tipo de Stokes:

$$T_{AB} = \rho v_A v_B - \tilde{p} (\eta_{AB} - v_A v_B) \quad (2)$$

Iremos restringir nossa análise, neste curso, ao caso em que

\tilde{p} se escreve segundo a relação linear de Cauchy:

$$\tilde{p} = p - \alpha \theta$$

Para a geometria (1) e um observador co-movente $V^\alpha = \delta^\alpha_0$ temos para a dilatação θ o valor $\theta = 3\dot{A}/A$.

As equações de Einstein para este sistema se escrevem:

$$3 \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{3\varepsilon}{A^2} = \rho$$

$$2 \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{A^2} = -\tilde{p}$$

ou, usando a expressão de θ :

$$\frac{\theta^2}{3} + \frac{3\varepsilon}{A^2} = \rho \quad (3a)$$

$$\frac{2}{3} \dot{\theta} + \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{\varepsilon}{A^2} = -\tilde{p} \quad (3b)$$

Ao invés de discutirmos esse sistema utilizaremos a equação proveniente da conservação de $T_{\mu\nu}$ (que já está contida no sistema acima) dada por:

$$\dot{\rho} + (\rho + \tilde{p}) \theta = 0$$

ou seja, o sistema agora se escreve:

$$\dot{\theta} = \rho - \frac{3}{2} \omega - \frac{\theta^2}{3} + \frac{3}{2} \alpha \theta \quad (4a)$$

$$\dot{\rho} = -\omega \theta + \alpha \theta^2 \quad (4b)$$

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} + \frac{3\varepsilon}{A^2} \quad (4c)$$

onde definiu-se a entalpia $\omega \equiv p + \rho$.

Posto sob essa forma, nas variáveis (θ, ρ) , o sistema assume forma autônoma, não-linear, do tipo

$$\dot{\theta} = F(\rho, \theta)$$

$$\dot{\rho} = G(\rho, \theta)$$

permitindo assim um tratamento qualitativo de investigação de suas soluções no espaço de fase (θ, ρ) .

Os pontos singulares desse sistema, isto é, aqueles pontos (ρ_0, θ_0) que anulam simultaneamente o lado direito dessas equações, são dados por

$$\frac{\omega_0}{\theta_0} = \alpha$$

$$\rho_0 = \frac{\theta_0^2}{3}$$

Da teoria dos fluidos viscosos, podemos extrair que α pode possuir dependência na densidade ρ de forma determinada pelo processo viscoso. Iremos assumir, genericamente, uma dependência do tipo potência, isto é,

$$\alpha = m \rho^\mu \quad (5)$$

onde m e μ são constantes arbitrárias, com $m > 0$. A equação de estado que relaciona a pressão p com a densidade ρ será dada por:

$$\omega = \gamma \rho \quad (6)$$

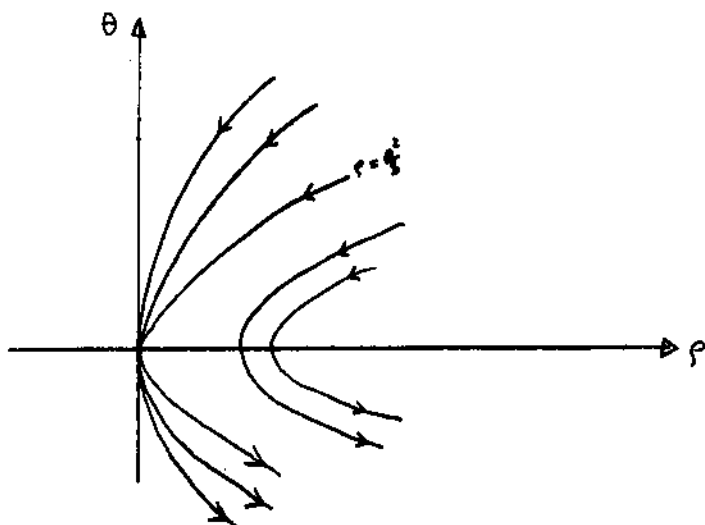
onde γ é uma constante de valor limitado ao domínio $1 \leq \gamma \leq 2$.

Note que os pontos singulares do sistema (3) estão situados sobre a parábola $\theta^2 = 3\rho$.

Exercício: Trace os gráficos, no espaço de fase (θ, ρ) , do sis

tema de equações de Einstein na ausência de viscosidade.

Solução: Calcule explicitamente as soluções $\theta = \theta(t)$ e $\rho = \rho(t)$ e tendo t como um parâmetro trace $\theta = \theta(\rho)$. O resultado é dado abaixo



Observação: Neste caso, o único ponto singular é a origem $(\theta_0, \rho_0) = (0,0)$. A curva $\rho = \theta^2/3$ que consiste (de acordo com a equação (4c)) no caso Euclidiano, isto é, $\epsilon = 0$, separa o comportamento das curvas em duas regiões. A região interna, com $\rho - \frac{\theta^2}{3} < 0$ consiste uma série de modelos abertos (pois da relação $\rho - \frac{\theta^2}{3} = \frac{3\epsilon}{A^2} < 0$ segue que $\epsilon < 0$) e a região externa, com $\rho - \frac{\theta^2}{3} > 0$, que consiste numa série de soluções fechadas.

Note que quando $\theta = \rho = 0$, isto é, no ponto $(0,0)$ os diferentes modelos fechados desenvolvem uma singularidade. Is-

so é consequência direta da equação (4c) pois para $c \neq 0$, quando $\theta = \rho = 0$ concluímos que o raio do Universo diverge, isto é, $A(\theta = \rho = 0) = \infty$.

Vamos examinar o ponto singular distinto da origem.

Desenvolvendo as funções F e G nas vizinhanças de (θ_0, ρ_0) temos:

$$F(\theta, \rho) = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_0 \theta + \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 \rho + \dots$$

$$G(\theta, \rho) = \left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_0 \theta + \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 \rho + \dots$$

onde o subscrito $()_0$ significa que a função deve ser calculada no ponto (θ_0, ρ_0) .

No caso geral, temos

$$F(\theta, \rho) = \left(\frac{3}{2} \alpha - \frac{2}{3} \theta\right)_0 \theta + \left(1 - \frac{3}{2} \omega' + \frac{3}{2} \alpha' \theta\right)_0 \rho + \dots \quad (7a)$$

$$G(\theta, \rho) = \left(-\omega + 2\alpha\theta\right)_0 + \left(-\omega' \theta + \alpha' \theta^2\right)_0 \rho + \dots \quad (7b)$$

onde $\omega' \equiv d\omega/d\rho$.

Formemos a matriz $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \alpha_0 - \frac{2}{3} \theta_0 & 1 - \frac{3}{2} \omega'_0 + \frac{3}{2} \alpha'_0 \theta_0 \\ -\omega_0 + 2\alpha_0 \theta_0 & -\omega'_0 \theta_0 + \alpha'_0 \theta_0^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

No caso especial em questão, usando as relações (5)-

-(6), e substituindo em (8), obtemos:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} m \rho_0^\mu - \frac{2}{\sqrt{3}} \rho_0^{1/2} & 1 - \frac{3}{2} \gamma + \frac{3}{2} m \mu \rho_0^{\mu-1} \theta_0 \\ -\gamma \rho_0 + 2m \rho_0^\mu \theta_0 & -\gamma \theta_0 + m \mu \rho_0^{\mu-1} \theta_0^2 \end{pmatrix}$$

Mas notando que $\gamma \rho_0 = m \rho_0^\mu \theta_0$ escrevemos:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} m \rho_0^\mu - \frac{2}{\sqrt{3}} \rho_0^{1/2} & 1 + \frac{3}{2} \gamma (\mu - 1) \\ \gamma \rho_0 & \gamma \theta_0 (\mu - 1) \end{pmatrix}$$

o determinante $\Omega \equiv \det \hat{\Omega}$ é dado por

$$\Omega = \frac{3}{2} m \rho_0^\mu \gamma \theta_0 (\mu - 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\theta_0}{\sqrt{3}} \gamma \theta_0 (\mu - 1) - \gamma \rho_0 - \frac{3}{2} \gamma \rho_0 (\mu - 1)$$

$$\Omega = -2\gamma \rho_0 (\mu - 1) - \gamma \rho_0$$

$$\Omega = \gamma \rho_0 (1 - 2\mu)$$

A análise da vizinhança desse ponto pode ser feita usando os teoremas (cf. apêndice). Obtemos:

Se $\mu > \frac{1}{2}$ então $\Omega < 0$: isto é, a singularidade é um ponto de sela.

Se $\mu < \frac{1}{2}$ então $\Omega > 0$: a singularidade é um nó com duas tangentes.

A demonstração de que quando $\mu < \frac{1}{2}$ trata-se de um nó com 2 tangentes, está ligada ao cálculo do sinal de $I^2 - 4\Omega$,

onde $I = \text{Traço } \hat{\Omega}$.

Temos

$$I = \theta_0 \left[\gamma \left(\mu - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} \right]$$

$$I^2 - 4\Omega = \theta_0^2 \left[\frac{\gamma}{2} (2\mu - 1) - \frac{2}{3} \right]^2 - \frac{4\gamma}{3} \theta_0^2 (1 - 2\mu)$$

Para que $I^2 - 4\Omega > 0$ temos a condição

$$\gamma^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2}{3} \gamma (2\mu - 1) + \frac{4}{9} > 0 \quad ,$$

o que é correto, como se pode verificar facilmente.

Note que o n.º é estável se $I < 0$, e será instável se $I > 0$.

O traçado dos gráficos que correspondem a soluções do sistema autônomo requer o conhecimento das curvas onde a derivada $d\theta/d\rho$ é constante. Chamamos de J_q a curva dos lugares em que $d\theta/d\rho = q = \text{constante}$.

Particularmente importante são as curvas J_0 e J_∞ onde as soluções autônomas possuem derivadas paralelas aos eixos ortogonais.

Estudemos agora o comportamento do espaço de fase na vizinhança da origem. Neste caso, temos

$$\Omega(0,0) = 0 \quad .$$

Quando o determinante da aproximação linear se anula no ponto singular, dizemos que se trata de uma singularidade múltipla.

Um exame das curvas J_0 e J_∞ permite representá-las

graficamente, como na figura abaixo:

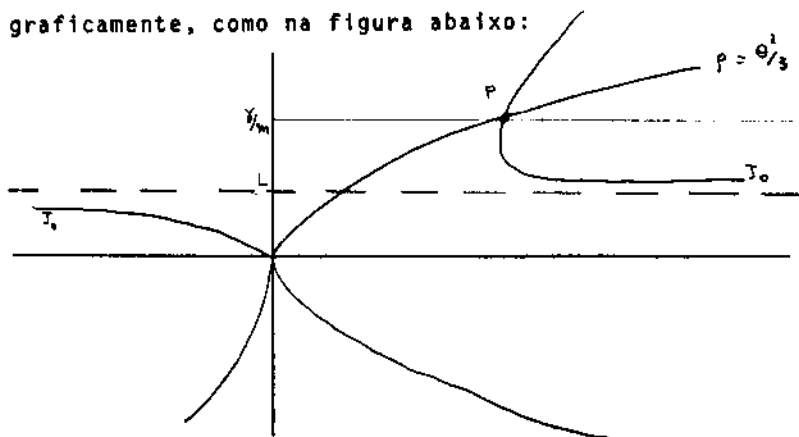


Fig. 1 - Representação das curvas $d\theta/d\rho = q = \text{constante}$, para $q = 0$ e $q = \infty$. O ponto P é o ponto singular. A constante $L \equiv \frac{\gamma}{m} - \frac{2}{3m}$.

Para simplificar a análise do espaço de fase na vizinhança da origem, iremos examinar somente o caso em que $\mu = 1$. Uma análise semelhante (embora um pouco mais longa), poderá ser feita sem grande dificuldade para os demais valores possíveis de μ .

Temos

$$q \equiv \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho(1 - \frac{3}{2}\gamma) - \frac{\theta^2}{3} + \frac{3}{2}m\rho\theta}{-\gamma\rho\theta + m\rho\theta^2}$$

A curva J_∞ , onde $q = \infty$, corta a curva $\rho = \theta^2/3$ no ponto singular. Com efeito, temos

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \infty$$

implica

$$-\gamma\rho\theta + m\rho\theta^2 = 0$$

isto é,

$$\theta = \frac{\gamma}{m}$$

ou

$$\theta = 0.$$

Mas, no ponto P , temos também que vale:

$$\gamma \rho_0 = m \rho_0 \theta_0$$

isto é,

$$\theta_0 = \frac{\gamma}{m}.$$

A curva J_0 , onde $q = 0$, é dada por:

$$\rho \left(1 - \frac{3}{2} \gamma \right) - \frac{\theta^2}{3} + \frac{3}{2} m \rho \theta = 0$$

$$\rho \left[1 - \frac{3}{2} \gamma + \frac{3}{2} m \theta \right] = \frac{\theta^2}{3}$$

Esta curva também intercepta $\rho = \theta^2/3$ no ponto singular.

Com efeito, as duas curvas são dadas por:

$$\rho = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\rho = \frac{\theta^2/3}{1 - \frac{3}{2} \gamma + \frac{3}{2} m \theta}$$

e daí, no ponto de contato temos:

$$\theta_0 = \frac{\gamma}{m}$$

Consideremos a figura 1. Ao atravessarmos J_0 no sentido de ρ crescente vemos que q troca de sinal: de negativo pasa a positivo. Assim, conforme o teorema das equações diferenciais (Andronov et. al.) as curvas que se aproximarem da origem, ou tendem para ela permanecendo tangentes ao eixo θ ou não atingem a origem.

De posse dessas informações, podemos facilmente traçar o gráfico no espaço de fase.

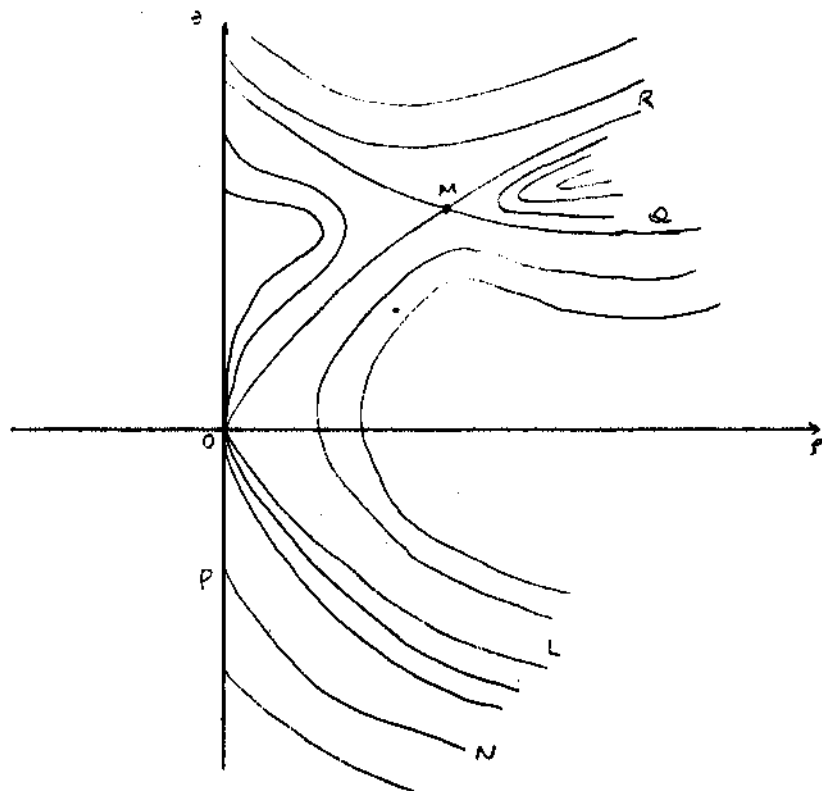


Fig. 2 - Espaço de fase do sistema de Universos de Friedmann com viscosidade linear.

Exercício: Complete a análise acima para a região $p < 0$ (Cf. artigo Novello - R. Acioli).

Vamos examinar um pouco esse gráfico. Começemos por notar que cada curva deste gráfico é uma integral do sistema

autônomo. Assim, cada curva representa uma determinada solução das equações de Einstein, isto é, um modelo cosmológico.

Podemos distinguir na Fig. 2 algumas regiões típicas, que passaremos a analisar.

Região 1: Limitada inferiormente pela curva SMR, estendendo -se até $\theta = \infty$.

Tais soluções representam Cosmos que se iniciam abruptamente com um certo valor de θ e com energia nula. Com o nascimento desse Cosmos aparece a energia que pode ser pensada como tendo sido criada pela geometria do espaço. O modelo evolue com valores de ρ crescente e terminando com θ e ρ infinitos.

É talvez importante notar aqui que nestes modelos (bem como em vários outros que discutiremos a seguir) a limitação da investigação do espaço de fase (θ, ρ) à região de ρ positivo torna difícil a compreensão do aparecimento desses modelos. Principalmente se notarmos que para $\rho = 0$ eles não possuem singularidade. Em verdade, a compreensão desses modelos depende intimamente do modelo de viscosidade^(*).

Região 2: Compreendida pela curva RMQ.

Um modelo típico de Universo desta região pode ser descrito como tendo início ($t = -\infty$) com $\theta > 0$ e ρ infinito. A densidade de energia decresce, atinge um valor mínimo (no ponto M) a partir do qual começa a crescer. θ segue crescendo. No final ($t = \infty$) desse Universo ρ e θ assumem valores infinitos.

(*) Ver in Cosmologia Relativista: M. Novello-I.D. Soares..

Região 3: Compreendida entre o eixo $\theta = 0$ e a curva SM0.

Modelo típico: o Universo "nasce" abruptamente com um valor (arbitrário) de θ positivo e sem energia. Como na região I, energia aparece concomitantemente com a evolução do modelo. A energia cresce então a partir do zero até um valor máximo (distinto para cada modelo) e a partir daí, decresce até atingir novamente o valor zero para $t = \infty$. Neste ponto o modelo tem uma singularidade ($A \rightarrow \infty$).

Região 4: Compreendida no interior da curva QMOL.

Modelo de Universo desta região tem início ($t = -\infty$) com densidade infinita e θ finito positivo. À medida que o tempo passa, energia decresce, até atingir um valor mínimo a partir do qual começa novamente a crescer, mas o modelo passa a entrar numa fase de colapso (θ se torna negativo). O futuro desses Universos ($t \rightarrow +\infty$) corresponde a um valor infinito para a densidade de energia e uma contração infinita.

Região 5: Compreendida entre LOPN

O Universo nesta região tem seu início ($t = -\infty$) na singularidade $\rho = \theta = 0$, $A = \infty$. A partir desse início, ele começa a se contrair ($\theta < 0$) indefinidamente.

8 - UNIVERSO HOMOGENEO ISOTRÓPICO NÃO SINGULAR

8.1 - Cosmos Não Singular

A comunidade dos cosmólogos acredita em que a existência de singularidade nos modelos expansionistas de Friedmann constitui uma grave dificuldade inerente a estes universos.

A razão dessa dificuldade está associada ao fato de que a singularidade requer o abandono da descrição contínua e completa do Universo ao longo de sua história.

Embora o significado desta questão não esteja totalmente compreendida, alguns cosmólogos continuam por se questionar sobre a inevitabilidade daquela singularidade^(*)

8.2 - Fótons Não-Lineares

A gravitação curva o espaço-tempo e afeta consequentemente a propagação de fótons em sua trajetória. Como se manifesta a influência desta curvatura sobre o campo eletromagnético e vice-versa ?

De um modo bastante geral, os físicos têm se manifestado de comum acordo em aceitar como hipótese de trabalho que a interação eletromagnética com a gravitação obedece ao princípio do acoplamento mínimo.

(*) Não iremos aqui discutir essa questão. Deixaremos isso para outro lugar. Veremos somente em seguida, como é possível gerar solução expansionista não-singular como consequência da existência de fótons não-lineares no Universo.

Tal princípio requer que a alteração, devido à curvatura do espaço-tempo, na dinâmica de qualquer processo físico, seja feita somente pela substituição das derivadas simples por derivadas co-variantes, na função Lagrangeana que descreve o processo. Isto é, exclui-se da Lagrangeana qualquer funcional da curvatura do espaço-tempo.

Para o campo de Maxwell, este princípio induz à equação

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = J^{\mu} \quad (1)$$

proveniente da Lagrangeana

$$L = \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_{\mu} W^{\mu} \right\} \quad (2)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu||\nu} - W_{\nu||\mu} = W_{\mu||\nu} - W_{\nu||\mu}.$$

Entretanto, pode-se argumentar que na presença de campos gravitacionais intensos, acoplamentos envolvendo funcionais da curvatura poderiam alterar o sistema de equações do Eletromagnetismo. Essa idéia foi desenvolvida recentemente por Novello e Salim. Eles argumentaram que, para campos fortes (isto é, quando a curvatura do espaço-tempo é grande) a dinâmica do processo é descrita pela Lagrangeana não-mínima:

$$L = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\kappa} R W_{\mu} W_{\nu} g^{\mu\nu} + \beta R_{\mu\nu} W^{\mu} W^{\nu} + L_E + L_M \right] \quad (3)$$

onde

$$\dim \lambda \equiv [\lambda] = [\kappa]$$

$$[\beta] = 0$$

L_E é a Lagrangeana de Einstein $\equiv \sqrt{-g} \frac{R}{\kappa}$

L_μ é a Lagrangeana que descreve os demais campos.

Vamos examinar aqui o caso em que a constante β é nula. O termo adicional não-mínimo da Lagrangeana, isto é, $RW_\mu W^\mu$ pode ser interpretado como um termo de massa m_γ para o fóton (gerada pela gravitação), com $m_\gamma \sim \sqrt{R}$.

As equações de movimento induzidas pela Lagrangeana (3) reduzem-se à forma:

$$(1 + \lambda W^2) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - \lambda \square W^2 g_{\mu\nu} + \lambda W^2 |_{\mu} |_{\nu} + \lambda R W_\mu W_\nu = -k E_{\mu\nu} - k M_{\mu\nu} \quad (4a)$$

$$F^{\mu\nu} |_{\nu} = -\frac{\lambda}{k} R W^\mu + J_{\text{ext}}^\mu \quad (4b)$$

onde $E_{\mu\nu}$ é o tensor de energia de Maxwell

$$2E_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$M_{\mu\nu}$ é o tensor de energia da matéria, e

$$W^2 \equiv W^\mu W_\nu g_{\mu\nu}$$

J_{ext}^μ representa a corrente não-gravitacional que gera o campo eletromagnético.

Tomando a divergência de (4b) temos

$$J_{\text{ext}}^\mu |_{\mu} = \frac{\lambda}{k} (R W^\mu) |_{\mu}$$

Impondo a condição de Lorentz generalizada

$$(RW^\mu)_{||\mu} = 0 \quad (5)$$

vemos que a corrente J_{ext}^μ é conservada.

Tomando agora o traço da equação (4a) temos:

$$R = k M - 3\lambda \square W^2 \quad (6)$$

onde $M = M_{\mu\nu}g^\mu$.

Substituindo esse valor de R na expressão (4b) temos:

$$F^{\mu\nu}_{||\nu} = -\lambda MW^\mu + \frac{3\lambda^2}{k} \square W^2 W^\mu + J_{ext}^\mu \quad (7)$$

A equação (7) exhibe explicitamente o caráter não-linear da interação eletromagnética induzida pela curvatura do espaço-tempo. Vemos dessas equações que para campos fracos, o modelo de Novello-Salim coincide com a teoria usual ($\lambda = 0$), que nesse esquema constitui uma primeira aproximação da interação entre os campos eletromagnético e gravitacional.

8.3 - Solução Cósmica Homogênea e Isotrópica

Vamos procurar uma solução do sistema de equações (4a,b) tal que a geometria seja descrita pela expressão

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[dx^2 + \sigma^2(x) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]$$

Como não existe direção privilegiada no espaço na qual os campos elétrico e magnético possam estar dirigidos, concluímos

que estes se anulam. Consequentemente, na ausência de matéria (e corrente externa), o escalar de curvatura se anula:

$$R = 0 \quad (8)$$

A equação (4) se reduz à expressão:

$$(1 + \lambda W^2) R_{\mu\nu} + \lambda W^2 |u||v| = 0 \quad (9)$$

Vamos definir a variável Ω pela relação

$$\Omega \equiv 1 + \lambda W^2 \quad (10)$$

Daí, a equação (9) se reduz a

$$R_{\mu\nu} = - \frac{\Omega}{|u||v|} \quad (11)$$

onde, por (8)

$$\square \Omega = 0 \quad (12)$$

As curvaturas calculadas anteriormente e substituindo em (11) conduzem às equações:

$$3 \frac{\ddot{A}}{A} = - \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \quad (13a)$$

$$+ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\dot{A}^2}{A^2} - \frac{2}{A^2} \frac{\sigma''}{\sigma} = - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (13b)$$

$$+ \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\dot{A}^2}{A^2} - \frac{1}{A^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\sigma^2} \right) = - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (13c)$$

De (13b,c) vemos que σ só pode assumir os valores: χ , $\operatorname{sen} \chi$ ou $\operatorname{senh} \chi$.

Substituindo esses valores, nas equações (13), vemos que as soluções para Ω e A podem ser postas na forma:

$$A(t) = \sqrt{-\epsilon t^2 + bt + c} \quad (14a)$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 \frac{(-2\epsilon t + b)}{A} \quad (14b)$$

com

$$\epsilon \equiv \frac{1}{6} (3)R = -\frac{1}{3} \left[2 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right]$$

Vemos da eq. (14) que, por exemplo, quando

$$b^2 + 4\epsilon c < 0$$

a função $A(t)$ não se anula.

Conseqüentemente, o raio do Universo mantém-se finito, assim como os invariantes do campo.

Uma inspeção na função $A(t)$ mostra que um tal caso só pode existir se o modelo for aberto ($\epsilon = -1$). Neste caso, no limite $t \rightarrow \infty$, a geometria tende para o espaço de Minkowski.

O modelo acima mostra um comportamento não-singular, conseqüência direta do acoplamento não-mínimo do fóton com a gravitação.

Um tal exemplo, sugere a necessidade de se desenvolver modelos menos simplistas da interação gravitacional com a matéria.

Bibliografia

1. M. Novello, I.D. Soares - Cosmologia Relativista (livro em fase de publicação).
2. M. Novello, J. Salim - Equações Quase-Maxwellianas de Gravitação (I Escola de Cosmologia do CBPF, 1978).
3. M. Novello - Algumas Questões Cosmológicas - CBPF, 1979.
4. M. Novello, M. Rebouças - Phys. Rev. D, June 1979.
5. M. Novello, R. Acioli - (a ser publicado).
6. M. Novello, J. Salim - Phys. Rev. D - Mol. 20, 377 (1979).
7. Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems - Andronov et al. (John Wiley, 1973).
8. S. Hawking, G.F.R. Ellis - The Large Scale Structure of Space Time - (1976).