"STRINGS" NA RELATIVIDADE ESPECIAL E NA RELATIVIDADE GERAL

Patricio A. Letelier Sotomayor

Departamento de Física
Universidade de Brasília

ÍNDICE

Pág.

1 - *O CONCEITO DE "STRING"*

Para descrever fisicamente um contínuo unidimensional (corda) é preciso conhecer suas variáveis cinemáticas $\chi^{\mu} = \chi^{\mu}(\tau^0,\tau^1)$ e suas variáveis dinâmicas, densidade de massa, tensão, temperatura etc.[1]. $\chi^{\mu} = \chi^{\mu}(\tau^0,\tau^1)$ representa a trajetória da corda no espaço de Minkowski (folha-mundo). τ^0 e τ^1 são dois parâmetros não necessariamente invariantes ante as transformações de Lorentz. τ^0 representa um parâmetro de evolução e τ^1 um parâmetro que descreve os diferentes pontos da corda.

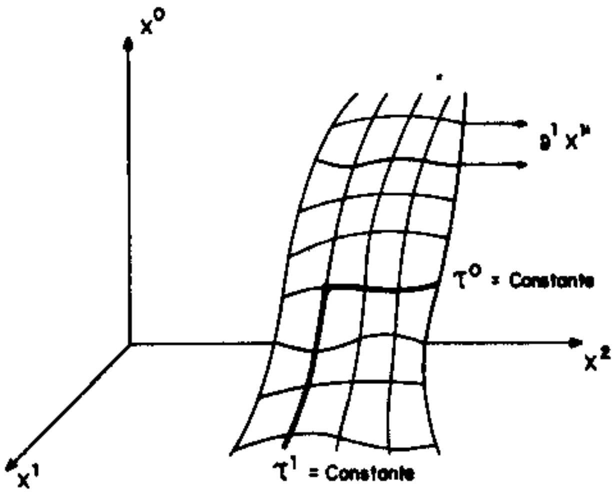

Figura 1

Uma descrição de cordas, alternativa a da mecânica usual dos meios contínuos, é dada por uma ação da forma

$$I = \int L\ (\chi^{\mu},\ \partial_A\chi^{\mu},\ \partial_A\partial_B\chi^{\mu},\ \tau^A)d^2\tau \qquad (1.1)$$

$$\partial_A\chi^{\mu} \equiv \frac{\partial\chi^{\mu}}{\partial\tau^A} \quad ; \quad \tau^A \equiv (\tau^0,\tau^1)$$

$$d^2\tau \equiv d\tau^0 d\tau^1$$

Postulando que a ação é um ponto estacionário para uma variação da folha-mundo, pode-se determinar as equações de evolução dos X^μ. Logo, pode-se determinar o tensor de energia-momentum e daí as variáveis dinâmicas. Obviamente a escolha de um L particular descreverá um tipo de corda particular.

Agora imporemos à ação as seguintes condições:

(i) Invariância de I ante uma reparametrização da folha-mundo, i.é., invariância ante a transformação

$$\tau^A \to \tau^{A'} = \tau^{A'}(\tau^B) \tag{1.2}$$

Esta invariância denomina-se também, invariância de calibre ou "gauge".

(ii) Invariância de I ante uma transformação de Lorentz.

(iii) Que as equações $\delta I = 0$ (Euler) sejam equações de segunda ordem em X^μ.

Resulta que L deve ter a forma

$$L_0 = M\sqrt{-\gamma} \tag{1.3}$$

onde

$$\gamma \equiv \det \gamma_{AB} \quad ; \quad \gamma_{AB} \equiv \eta_{\mu\nu}\partial_A X^\mu \partial_B X^\nu \quad . \tag{1.4}$$

M é uma constante com dimensões de ação por unidade de comprimento ao quadrado. Para descrever uma folha-mundo como a descrita na Fig. 1, temos que $\partial_0 X^\mu$ é um vetor tipo tempo e $\partial_1 X^\mu$

um vetor tipo espaço, ambos vetores como caso limite, podem ser nulos, i.ẽ.,

$$\gamma_{00} = \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu > 0 \qquad (1.5)$$

$$\gamma_{11} = \partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu < 0 \qquad (1.6)$$

O determinante γ ẽ,

$$\gamma = \gamma_{00}\gamma_{11} - (\gamma_{01})^2 < 0 \qquad (1.7)$$

A corda particular descrita por (1.3) — (1.7) denomina-se "string" (fio de Nambu).

O estudo dos "strings" na fĩsica emerge da fĩsica de partĩculas, em especial no estudo dos modelos de ressonância dual(2). Trata-se de descrever o espectro de excitação dos modelos de partĩculas como um espectro de vibração de um "string"(2). Tambẽm as cordas jogam um papel nas teorias que descrevem monopolos magnẽticos(3) e como um mecanismo para confinar quarks(4), em geral estas cordas não são "strings"(5). Ẽ interessante o fato de que superfĩcies minimais tenham sido amplamente estudadas pelos geõmetras, mais o espaço base onde as superfĩcies estão submersas ẽ um espaço euclĩdeo ou riemanniano, e não um espaço pseudoeuclideo ou pseudoriemanniano que são os espaços com maior interesse fĩsico(6).

2 - *"STRINGS" LIVRES*

Antes de estudar as equações de movimento para um "string" explicitaremos os intervalos de variação dos parâme - tros τ^0 e τ^1. O intervalo de τ^0 é $-\infty < \tau^0 < \infty$ e o intervalo de τ^1 é $\alpha \leq \tau^1 < \beta$ para um "string" fechado e $\overline{\alpha} \leq \tau^1 \leq \overline{\beta}$ para um "string" aberto. Para um "string" fechado tem-se que $\chi^\mu(\tau^0,\alpha) = \chi^\mu(\tau^0,\beta)$ e para um "string" aberto $\chi^\mu(\tau^0,\overline{\alpha})$ e $\chi^\mu(\tau^0,\overline{\beta})$ são as bordas da folha-mundo, neste caso restringiremos a liberdade de gauge requerendo que

$$\left.\frac{\partial\tau^{1'}}{\partial\tau^0}\right|_{\tau^1 = \overline{\alpha},\overline{\beta}} = 0 \ , \tag{2.1}$$

para que ante uma transformação de gauge as direções $\partial^1\chi^\mu$ se - jam preservadas.

As equações de movimento dos "strings" obtêm-se re - querendo que a ação $I^0 \equiv I|L_0|$ seja estacionária diante da variação[7]

$$\chi^\mu(\tau^4) \to \chi^\mu(\tau^A) + \delta\chi^\mu(\tau^A) \tag{2.2a}$$

$$\delta\chi^\mu(\tau^0 = \pm\infty,\tau^1) = 0 \tag{2.2b}$$

$$\delta\chi^\mu(\tau^0,\tau^1 = \alpha) = \delta\chi^\mu(\tau^0,\tau^1 = \beta) \tag{2.2c}$$

$$\delta\chi^\mu(\tau^0,\tau^1 = \overline{\alpha},\overline{\beta}) \neq 0 \ . \tag{2.2d}$$

As variações $\delta\chi^\mu(\tau^0,\tau^1 = \overline{\alpha})$, $\delta\chi^\mu(\tau^0,\tau^1 = \overline{\beta})$ e $\delta\chi^\mu(\tau^A)$ em geral são independentes. Ademais nós supomos que

$$\left.\frac{\partial\chi^\mu}{\partial\tau^1}\right|_{\tau^1 = \alpha} = \left.\frac{\partial\chi^\mu}{\partial\tau^1}\right|_{\tau^1 = \beta} \ , \tag{2.3}$$

i.ẽ, que os "strings" fechados não tenham "cusps" ("kinks").

A variação I^0 ẽ

$$\delta I^0 = \int d^2\tau \; M \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau^A} \left[(-\gamma)^{\frac{1}{2}} \partial^A \chi_\mu \delta\chi^\mu \right] - \square^2 \chi_\mu \right\} \delta\chi^\mu \qquad (2.4)$$

onde

$$\square^2 \chi^\mu \equiv (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \nabla_A \nabla^A \chi^\mu$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau^A} \left[(-\gamma)^{\frac{1}{2}} \gamma^{AB} \frac{\partial}{\partial \tau^B} \chi^\mu \right] \qquad (2.5)$$

$$(\gamma^{AB} \gamma_{BC} = \delta^A{}_C) \quad .$$

Das condições $\delta I^0 = 0$, (2.2) e (2.3) para "strings" fechados obtemos

$$M \square^2 \chi^\mu = 0 \quad , \qquad (2.6)$$

e para "strings" abertos a mais de (2.6) temos

$$M(-\gamma)^{\frac{1}{2}} \partial^1 \chi^\mu \Big|_{\tau^1 = \bar{\alpha}, \bar{\beta}} = 0 \quad . \qquad (2.7)$$

A equação (2.5) ẽ a equação de onda escalar no espaço de Riemann de duas dimensões da folha-mundo para as equações paramétricas da folha-mundo mesma.

A equação (2.7) implica que os extremos de um string aberto movem-se com a velocidade da luz. Isto pode-se deduzir da seguinte forma: M e $\partial^1\chi^\mu$ são diferentes de zero, jã que M ẽ uma constante e $\partial^1\chi^\mu\Big|_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$ ẽ um vetor que aponta fora da folha-mundo (ver Fig. 1). Nota-se que a direção de $\partial\chi^\mu\Big|_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$ ẽ invariante de gauge, portanto tem-se que

$$\gamma\Big|_{\tau^1 = \overline{\alpha},\overline{\beta}} = 0 \qquad (2.8)$$

De (1.4) — (1.7) e (2.8) resulta que,

$$\gamma_{00} = \partial_0 X^\mu \partial_0 X_\mu = 0 \quad \text{em} \quad \tau^1 = \overline{\alpha},\overline{\beta} \qquad (2.9)$$

A condição (2.7) disse-nos que o momento canônico não escapa da folha-mundo, i.é, o sistema é fechado(7).

As soluções gerais das equações (2.6) e (2.7) conhecem-se(2). As mais simples são um anel de raio oscilando harmonicamente com amplitude $1/\omega$ ("string" fechado) e uma barra rodando em torno de um eixo que passa pelo meio da barra tal que sua velocidade angular e seu comprimento estão relacionados por $\omega L = 2$.

Na "gauge" ortogonal definido por

$$\gamma_{01} = 0 \qquad (2.10a)$$

$$\gamma_{00} + \gamma_{11} = 0 \qquad (2.10b)$$

As equações (2.6) e (2.7) são equivalentes a

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^{0^2}} X^\mu - \frac{\partial^2}{\partial\tau^{1^2}} X^\mu = 0 \quad , \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau^1}\Big|_{\tau^1 = \overline{\alpha},\overline{\beta}} = 0 \quad . \qquad (2.12)$$

A equação (2.11) lembra-nos da equação clássica para uma corda vibrante. Costuma-se definir as quantidades

$$P^{\mu} \equiv M(-\gamma)^{\frac{1}{2}}\, \gamma^{0A}\partial_A \chi^{\mu} \quad , \tag{2.13}$$
$$= M(-\gamma)^{\frac{1}{2}}\, \partial^0 \chi^{\mu} \quad .$$

$$\Pi^{\mu} \equiv M(-\gamma)^{\frac{1}{2}}\, \gamma^{1A}\partial_A \chi^{\mu} \quad , \tag{2.14}$$
$$= M(-\gamma)^{\frac{1}{2}}\, \partial^1 \chi^{\mu} \quad .$$

Então as equações de movimento dos "strings" podem ser escri tas como.

$$\frac{\partial}{\partial \tau^0} P^{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau^1} \Pi^{\mu} = 0 \quad . \tag{2.15}$$

(2.15) é equivalente a

$$\oint d\tau^1 \, P^{\mu} - d\tau^0 \, \Pi^{\mu} = 0 \quad . \tag{2.16}$$

equação que representa a conservação de momentum[8].

Das definições (2.13) e (2.14) obtêm-se

$$\psi_0 \equiv P^{\mu}P_{\mu} + M^2 \partial_1 \chi^{\mu} \, \partial_1 \chi_{\mu} = 0 \tag{2.17}$$

$$\psi_1 \equiv P^{\mu} \, \partial_0 \chi_{\mu} = 0 \tag{2.18}$$

$$\Pi^{\mu}\Pi_{\mu} + M^2 \, \partial_0 \chi^{\mu} \, \partial_0 \chi_{\mu} = 0 \tag{2.19}$$

As identidades (2.17) e (2.18) são a base da formulação canôni ca para os "strings"[8] e (2.19) é uma identidade entre variá- veis dinâmicas.

Os "strings" em interação têm sido amplamente estuda dos. Um resultado interessante é que se a ação que descreve a interação exige as propriedades (i) - (iii) do primeiro Capítulo, as pontas dos "strings" abertos não são freadas, continuando a se moverem com a velocidade da luz[7].

3 - *"STRINGS" EM RELATIVIDADE GERAL*

Temos, principalmente, duas razões para estudar os "strings" na Relatividade Geral. Primeiro, os "strings" servem para construir modelos de interação para partículas elementares; como uma prova da consistência desses modelos, o campo gravitacional dos "strings" deve ter um comportamento razoável. Segundo, o Universo pode ser representado como uma coleção de objetos estendidos[9], portanto uma cosmologia baseada no conceito de "string" pode servir para estudar propriedades relacionadas com esse fato.

O sistema de partículas mais simples estudado na Relatividade Geral é uma núvem de pó, i.é, partículas que não interatuam entre elas. O tensor de energia-momentum para a núvem é

$$T^{\mu\nu} = \rho \, u^{\mu} u^{\nu} \quad , \tag{3.1}$$

onde ρ é a densidade própria da massa e u^{μ} é a velocidade do fluxo das partículas.

Estudaremos o análogo de (3.1) para os "strings". Primeiramente devemos encontrar o análogo da velocidade u^{μ} para os "strings". u^{μ} é o vetor tangente à linha-mundo das partículas, portanto, para os "strings" o objeto equivalente é o bivetor

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \, \partial_A x^{\mu} \, \partial_B x^{\nu} \tag{3.2}$$

$$(\epsilon^{01} = - \epsilon^{10} = 1 \quad , \quad \epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0) \quad .$$

Tal como no caso das partículas, usamos a velocidade u^{μ} para descrever o fluido; usaremos, no entanto, o bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$

para descrever o fluido de "strings" independentemente de sua representação (3.2). O fato de que $\Sigma^{\mu\nu}$ expanda a folha-mundo do "string" pode ser caracterizado matematicamente pelas condições,

$$\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad , \tag{3.3}$$

$$\nabla_\mu \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad , \tag{3.4}$$

$[\cdots]$ representa antisimetrização. (3.3) é a condição para que o bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ seja simples, i.é, $\Sigma^{\mu\nu} = a^{[\mu} b^{\nu]}$ e (3.4) é a condição para que este bivetor forme uma superfície[10], i.é, tenha a forma (3.2).

A generalização de (3.1) para o caso dos "strings" é

$$\overset{*}{T}^{\mu\nu} = \overset{*}{\rho}\, \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha{}^\nu \quad . \tag{3.5}$$

Mas, para o caso das partículas temos a normalização $u^\mu u_\mu = 1$. Para os "strings" temos que

$$\Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} = -2\gamma \quad , \tag{3.6}$$

isto nos sugere definir um $T^{\mu\nu}$ normalizado da forma seguinte[11]

$$T^{\mu\nu} = \rho_s \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha{}^\nu/(-\gamma) \quad . \tag{3.7}$$

Note-se que o $T^{\mu\nu}$ dado por (3.7) é invariante de gauge. O $T^{\mu\nu}$ da equação (3.7) também pode ser obtido diretamente da generalização da densidade lagrangeana $\mathcal{L}_0 = M(-\gamma)^{1/2}$ para o caso de uma núvem de "strings". ρ_s é a densidade invariante de gauge dos "strings"[12].

As equações de Einstein para uma nũvem de "strings" são

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - \rho_s \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha{}^\nu/(-\gamma) \qquad (3.8)$$

A condição de integrabilidade de (3.8) ẽ dada pelas identidades de Bianchi

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = -\nabla_\mu \left[(\rho_s \Sigma^\mu{}_\alpha \Sigma^{\alpha\mu})/(-\gamma) \right] = 0 \qquad (3.9)$$

De (3.9) se deduz(12)

$$\nabla_\mu (\rho_s \Sigma^{\mu\nu}/\sqrt{-\gamma}) = 0 , \qquad (3.10)$$

$$\Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu (\Sigma^\nu{}_\beta/\sqrt{-\gamma}) = 0 . \qquad (3.11)$$

(3.10) ẽ uma equação de conservação e (3.11) ẽ equivalente a

$$\nabla^A \nabla_A X^\mu + \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} \gamma^{AB} \partial_A X^\alpha \partial_B X^\beta = 0 . \qquad (3.11')$$

Esta equação ẽ a generalização de (2.6) para um espaço curvo(11). Pode-se deduzir que a equação (3.4) ẽ uma consequẽncia das identidades de Bianchi e de (3.3). Portanto, o sistema das equações de Einstein para uma nũvem de "strings" e suas condições de integrabilidade são:

$$G^{\mu\nu} = - \rho_s \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha{}^\nu/(-\gamma) \qquad (3.12)$$

$$\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\alpha]} = 0 \qquad (3.13)$$

$$\nabla_\mu (\rho_s \Sigma^{\mu\nu}/\sqrt{-\gamma}) = 0 \qquad (3.14)$$

$$\Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\Sigma^\nu_\beta \sqrt{\gamma} \right] = 0 \qquad (3.15)$$

Agora estudaremos a solução das equações (3.12) — — (3.15) para simetria esférica.

A métrica de um espaço-tempo com simetria esférica é

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \ , \qquad (3.16)$$

onde $\nu = r(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$. Além disso supomos que o espaço tempo é estático. Um $\Sigma^{\mu\nu}$ com a simetria esférica tem $\Sigma^{01} = -\Sigma^{10} \neq 0$ e $\Sigma^{23} = -\Sigma^{32} \neq 0$, i.é, a parte "elétrica" e a parte "magnética" do bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ têm somente componentes radiais ; ademais $\Sigma^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu}(r)$. A equação (3.13) e a condição $-\gamma > 0$ nos dá $\Sigma^{23} = 0$. A equação (3.15) se satisfaz identicamente e (3.14) nos dá

$$\Sigma^{01}/(-\gamma)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\rho_s\, r^2}\, e^{-(\lambda+\nu)/2} \quad , \qquad (3.16)$$

onde "a" é uma constante de integração.

De (3.16) e do fato que $\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} = -2\gamma$, temos

$$\rho_s = a/r^2 \quad . \qquad (3.17)$$

As equações (3.12) são equivalentes a

$$2\nu'' - \lambda'\nu' + 4\nu'/r + \nu'^2 = 0 \quad , \qquad (3.18a)$$

$$2\nu'' - \lambda'\nu' - 4\lambda'/r + \nu'^2 = 0 \quad , \qquad (3.18b)$$

$$e^{-\lambda}\, |1 + \tfrac{1}{2}\, r\, (\nu' - \lambda')| - 1 = -a \quad , \qquad (3.18c)$$

que tem por solução

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - a - 2m/r \quad . \qquad (3.19)$$

É interessante destacar que (3.19) é a solução geral para a simetria em consideração[11]. A métrica (3.19) representa uma partícula centrada na origem do sistema de coordenadas e "strings" orientados radialmente.

A métrica (3.19) para o caso $m = 0$ pode ser escrita como

$$ds^2 = (1-a)du^2+2drdu - r^2 d\Omega^2 \qquad (3.20)$$

o que mostra que $a = 1$ não é uma singularidade da métrica. Também esta pode ser deduzida das relações

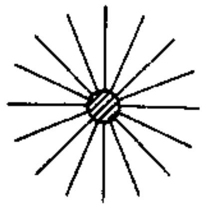

Figura 2

$$R = 2a/r^2 \qquad (3.21)$$

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48m^2}{r^6} + \frac{16ma}{r^5} + \frac{4a^2}{r^4} \qquad (3.22)$$

O "embedding" da métrica (3.19) no caso $m = 0$, é da classe 1 e a topologia do espaço é $R \times R \times S^3$, i.é, um hipercone em um espaço de 5 dimensões, no caso geral é da classe 2.

Outros aspectos estudados dos "strings" na Relatividade Geral são: o estudo das equações de movimento (3.11') em um espaço-tempo dado, e.g., a métrica de Schwarzschild[12], e o estudo das equações de Einstein no limite das interações fracas[13].

NOTAS E REFERÊNCIAS

1 - Os índices μ, ν, etc, tomam os valores 0, 1, 2, 3, e os índices A, B, etc, os valores 0 a 1. As unidades são tais que $c = 8\pi G = 1$ e a signatura de $\eta_{\mu\nu}$ é -2.

2 - C. Rebbi. Phys. Rep. 12, 1 (1974), J. Scherk, Rev. Mod. Phys. 47, 123 (1973).

3 - Veja, A.P. Balachandran et al., Phys. Rev. D 13, 361 (1976) e a bibliografia citada.

4 - Veja, por exemplo, S.-H.H. Tye. Phys. Rev. D 13 , 3416 (1976) e bibliografia citada.

5 - Para uma teoria geral de cordas veja, P.S. Letelier, J. Math. Phys. 19, 1898 (1978).

6 - R. Osserman,A.. Survery of Minimal Surfaces (Van Nostrand, New York 1969).

7 - P.S. Letelier, Phys. Rev. D 15, 1055 (1977), 18,359 (1978).

8 - A. Hanson, et al., Constrained Hamiltonian Systems (Ac. Naz. dei Lincei, Roma 1976); P.S. Letelier, Classical Dynamics for n-dimensional Strings, (SILARG 3, México) , por aparecer.

9 - D.G.B. Edlen and A.G. Wilson, Relativity and the Question of Discretization in Astronomy (Springer, New York 1970).

10 - J.A. Schouten. Ricci-Calculus (Springer) Berlin 1954, pp 23 e 8.

11 - P.S. Letelier, Clouds of Strings in General Relativity , Phys. Rev. D, em prensa.

12 - Nota-se que a definição de ρ_s no presente trabalho difere por um fator $\sqrt{-\gamma}$ da definição da densidade usada na Ref.11.

13 - P.S. Letelier, trabalho em preparação.

14 - P.S. Letelier e J. Stachel, The String Gravitational Field in the, Weack Field Approximation, trabalho em preparação.