SINGULARIDADES DAS SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

I.M. Khalatnikov e *E.M. Lifshitz*

L.D. Landau Institute of Theoretical Physics,
Institute for Physical Problems,
Academy of Science of the U.S.S.R.

ÍNDICE

Pág.

1. *INTRODUÇÃO*

Em 1919 Einstein salientou as novas possibilidades que foram introduzidas pela Teoria da Relatividade Geral quando aplicada à questão das propriedades do Universo como um todo. As realizações posteriores da Cosmologia Relativística estão principalmente ligadas à solução das equações gravitacionais de Einstein encontrada pela primeira vez por A.A. Friedmann, em 1922.

Como se sabe, esta solução se baseia na suposição de completa uniformidade e isotropia da distribuição de matéria no Universo ("modelo cosmológico isotrópico"). Há então dois casos possíveis, associados respectivamente a ter o Universo curvatura constante positiva (chamado "modelo fechado"), ou curvatura constante negativa ("modelo aberto"). A característica mais importante destas soluções é serem não-estacionárias. A idéia de um Universo em expansão, que se segue desta propriedade, é completamente confirmada pelas observações astronômicas. É seguro presumir que o modelo isotrópico fornece, em seus traços gerais, uma descrição adequada não somente do estágio atual do Universo mas também de uma parte considerável de sua evolução.

Outra propriedade importante do modelo isotrópico é a presença de um ponto singular em relação ao tempo em sua métrica. A presença de tal ponto singular significa que o domínio da variável tempo é limitado pelo menos numa direção.

No entanto, o fato de o modelo isotrópico dar uma descrição adequada do estado atual do Universo não significa, necessariamente, que também seja adequado para descrever os está gios iniciais da evolução do Universo. Além do mais, há a questão de em que medida a presença de um ponto singular é uma propriedade inerente aos modelos cosmológicos relativísticos, ou se é apenas uma consequência das suposições simplificadoras específicas em que se baseiam estes modelos. Esta questão é essencial, já que no Universo real a suposição de uniformidade só pode ser justificada, na melhor das hipóteses, aproximadamente.

A resposta afirmativa à questão da generalidade da existência de singularidades nas soluções das equações de Einstein foi dada pela primeira vez por um teorema notável descoberto por Penrose [1] e que foi subsequentemente seguido por outros teoremas do mesmo tipo, notadamente por Hawking [2] . Estes teoremas relacionam a existência de uma singularidade a algumas condições muito gerais que são certamente independentes da escolha do sistema de referência, não deixando dúvidas quanto à natureza física da singularidade. No entanto, a generalidade das demonstrações geométricas desses teoremas tem suas desvantagens: os teoremas não dão qualquer indicação sobre o verdadeiro caráter da singularidade, sobre as leis de evolução da métrica nas vizinhanças da singularidade.

As respostas a tais questões podem ser obtidas somente por métodos analíticos. Em nossas investigações, buscamos tais métodos, que nos levaram à construção analítica da solução geral contendo uma singularidade. Os resultados desta pesquisa constituem o tema deste artigo.

O critério analítico para o grau de generalidade de uma solução é o número de funções arbitrárias das coordenadas espaciais contidas na solução. É claro que só consideramos funções "fisicamente arbitrárias", em número tal que não possa ser reduzido por escolha arbitrária de sistema de referência. Uma solução geral deveria conter um número de funções arbitrárias tais que quaisquer condições poderiam ser satisfeitas em um momento qualquer do tempo, escolhido ao acaso como tempo inicial. Este número pode ser facilmente estabelecido a partir de considerações físicas. As condições iniciais arbitrárias devem fixar a distribuição inicial no espaço da densidade de matéria e das três componentes da velocidade da matéria. Devem fixar também quatro quantidades que definam o campo gravitacional livre (isto é, não relacionado à matéria). Pode-se chegar a este último número considerando, por exemplo, ondas gravitacionais fracas. Como estas são ondas transversas, seu campo é determinado por duas quantidades independentes (componentes do tensor métrico). Estas quantidades satisfazem uma equação de segunda ordem (equação de onda) e, consequentemente, suas condições iniciais devem ser dadas por quatro funções. Assim, a solução geral das equações gravitacionais deve conter oito funções arbitrárias das coordenadas espaciais.

Para evitar mal entendidos, é importante salientar que um sistema de equações diferenciais não-lineares, tal como as equações de Einstein, não tem solução geral única. Em princípio, podem existir várias soluções gerais, cada uma delas contendo somente uma parte finita da variedade total de condições iniciais possíveis. Cada uma dessas soluções contém o número necessário de funções arbitrárias que, no entanto, podem estar sujeitas a condições específicas (por exemplo, sob a forma de desigualdades). Portanto, a existência de uma solução geral com uma singularidade, não elimina a possibilidade de existên -

cia de outras soluções gerais não-singulares. Não há motivo , por exemplo, para se duvidar da existência de uma solução ge - ral não-singular que descreva um objeto não muito massivo está vel e isolado.

Obter a solução geral de uma forma exata, válida por todo o espaço e para todos os tempos, é obviamente um problema insolúvel. No entanto, tal solução não é necessária para se ob ter uma resposta para o problema em questão, isto é, descobrir a natureza da singularidade; é suficiente investigar a forma da solução na vizinhança do ponto singular. Chamamos a atenção mais uma vez que, por ponto singular queremos dizer singulari dade física, ou seja, a divergência da densidade de matéria e dos invariantes do tensor quadridimensional de curvatura.

O assunto deste artigo se encontra exposto na seguin te sequência.

No §2 fixamos a escolha do sistema de referência que é usado em todas as soluções subsequentes (sistema síncrono) . A razão é esclarecida com a ocorrência inevitável de uma singu laridade fictícia (de coordenada) em tal sistema.

No §3 fazemos uma generalização da solução de Fried mann. Mostramos que a solução de Friedmann é, na verdade, um caso particular de uma classe mais geral de soluções, que é ca racterizada por uma lei quase-isotrópica de aproximação à sin- gularidade. Esta classe de soluções é a única que requer a exis tência de matéria no espaço.

No §4 derivamos uma extensa classe de soluções, que é uma generalização da solução particular (devida a Kasner) , que descreve um espaço plano anisotrópico não-estacionário. O número de funções arbitrárias de coordenadas espaciais na solu ção deste tipo é apenas uma unidade menor que o necessário para a solução mais geral.

No §5 mostra-se que generalizações adicionais levam, inevitavelmente, a um modo oscilatório de aproximação à singularidade. A pista para compreendermos este processo está relacionada à regra para substituição das "eras de Kasner", deduzidas nesta seção. O §5.8 contém uma investigação detalhada do regime oscilatório para modelos homogêneos dos tipos VIII e IX de Bianchi. Em particular, fazemos uma investigação estatística para a região assintótica de proximidade arbitrária do ponto singular.

O §9 contém uma exposição da solução não-homogênea geral. Estas propriedades reproduzem em grande parte, as dos modelos homogêneos. Tecemos então algumas considerações gerais sobre o problema das singularidades em cosmologia relativística.

2. *SISTEMAS DE REFERÊNCIA SÍNCRONOS*

Quando se investiga questões ligadas à Teoria da Relatividade Geral é de importância fundamental a escolha apropriada de um sistema de referência adequado ao problema em consideração.

Como veremos abaixo, as propriedades mais gerais das soluções cosmológicas em relação a suas singularidades, não dependem da presença ou da ausência de matéria. Não se deve usar o chamado sistema "co-movente", largamente empregado em cosmologia (isto é, o sistema que se move com a matéria em cada ponto), na investigação destas propriedades.

A escolha natural do sistema de referência é, neste caso, um sistema sujeito às condições(*)

$$
\begin{aligned}
g_{0\alpha} &= 0 \\
g_{00} &= 1
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Como se sabe, colocar as componentes $g_{0\alpha}$ do tensor métrico iguais a zero é a condição que permite a sincronização dos relógios em diferentes pontos do espaço. Se, além disto, $g_{00} = 1$, a coordenada tempo $x^0 = t$ é o tempo próprio em cada ponto do espaço. A um sistema de referência que satisfaça estas condições denominaremos de sistema síncrono. O elemento fundamental de distância em tal referencial é dado pela expressão

---

(*) Seguiremos sempre a notação usada em "Teoria Clássica dos Campos" de Landau e Lifshitz [3]. Em particular, índices latinos correspondem a 0,1,2,3 e índices gregos aos valores espaciais 1,2,3. A matriz g_{ik} tem assinatura (+---). Além disso, usamos sempre o sistema de unidade onde a velocidade da luz e a constante gravitacional de Einstein são postas iguais a um.

$$ds^2 = dt^2 - d\ell^2 \quad , \quad d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (2.2)$$

O tensor tridimensional $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ define a métrica espacial.

As equações gravitacionais em um sistema de referên - cia síncrono tem a seguinte forma (veja o §97 da ref. [3]):

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\, x_\alpha^\alpha}{\partial t} - \frac{1}{4}\, x_\alpha^\beta\, x_\beta^\alpha = T_0^0 - \frac{1}{2}\, T \qquad (2.3)$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2}\, (x_{\alpha;\beta}^\beta - x_{\beta;\alpha}^\beta) = T_\alpha^0 \qquad (2.4)$$

$$R_\alpha^\beta = -\, P_\alpha^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\, (\sqrt{\gamma}\, x_\alpha^\beta) = T_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\, \delta_\alpha^\beta\, T \qquad (2.5)$$

Aqui $x_{\alpha\beta}$ é a notação para o tensor tridimensional

$$x_{\alpha\beta} = \frac{\partial\, \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \qquad (2.6)$$

e todas as operações de levantar e abaixar índices e diferencia ção covariante são feitas no espaço tridimensional de métrica $\gamma_{\alpha\beta}$. Note-se que

$$x_\alpha^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\, \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\, \ell n\, \gamma \qquad (2.7)$$

onde γ é o determinante do tensor $\gamma_{\alpha\beta}$. O tensor $P_{\alpha\beta}$ na equação (2.5) é o tensor de Ricci tridimensional, expresso em termos do tensor métrico tridimensional $\gamma_{\alpha\beta}$, da mesma forma que R_{ik} é expresso em termos de g_{ik}. Contém somente derivadas espaciais de $\gamma_{\alpha\beta}$ (e não derivadas temporais).

Como L.D. Landau salientou há muito tempo, o determinante do tensor métrico em um sistema de referência síncrono deve atingir o valor zero em um tempo finito. Isto é independente de qualquer suposição sobre distribuição, movimento, ou equação de estado da matéria, ou sobre o caráter do campo gravitacional (a prova desta esserção pode ser encontrada no §97 da referência [3]). No entanto, esse resultado não tem relação direta com a questão da existência de uma singularidade física verdadeira. O fato do determinante $-g = \gamma$ ir a zero, tanto pode estar ligado a uma singularidade verdadeira quanto a uma singularidade fictícia, que desaparece quando se passa para outro sistema de referência. A origem de tal singularidade fictícia em um sistema de referência síncrono fica clara a partir das seguintes considerações geométricas [4].

No sistema de referência síncrono, linhas de mesmo tempo são geodésicas no espaço quadridimensional. De fato, o quadri-vetor $u^i = dx^i/ds$, que é tangencial à linha de universo x^1, x^2, x^3 = const, tem componentes $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$ e satisfaz automaticamente às equações da geodésica

$$\frac{du^i}{ds} = \Gamma^i_{k\ell}\, u^k\, u^\ell = \Gamma^i_{00} = 0 \quad ,$$

já que, quando as condições (2.1) são válidas, os símbolos de Christoffel Γ^α_{00} Γ^0_{00} são identicamente nulos.

Também é fácil ver que estas linhas são normais à hipersuperfície t = const, já que a normal a tal hipersuperfície é um quadri-vetor $n_i = \frac{\partial t}{\partial x^i}$ com componentes covariantes $n_\alpha = 0$, $n_0 = 1$. As componentes contravariantes correspondentes, pelas condições (2.1), são $n = 0$, $n^0 = 1$, isto é, elas coincidem com as componentes do quadri-vetor u_i tangente às linhas de tempo.

Por outro lado, essas propriedades podem ser usadas para uma construção geométrica de um sistema de referência síncro no em qualquer espaço-tempo. Para tal, escolhe-se primeiro uma hipersuperfície tipo-espaço, ou seja, uma hipersuperfície cuja normal em cada ponto esteja dentro do cone de luz de vértice no ponto. Constroi-se a seguir um conjunto de geodésicas normais a essa hipersuperfície. Todos os intervalos elementares nesta hipersuperfície são do tipo-espaço. Se estas linhas forem escolhidas como linhas coordenadas do espaço e a coordenada tempo t for determinada como o comprimento das linhas geodésicas medido a partir da hipersuperfície original, então temos um sistema de referência síncrono.

É claro que uma construção deste tipo, com a consequente escolha de um sistema de referência síncrono é, em princípio, sempre possível. Além do mais, esta escolha não é nem mesmo única, já que uma métrica da forma (2.2) permite qualquer transformação das coordenadas do tri-espaço que não envolva o tempo. Além disso, como a escolha da hipersuperfície inicial é arbitrária, há uma transformação que corresponde a esta arbitrariedade.

Mas as linhas geodésicas de um conjunto arbitrário se interceptam, em geral, em algumas hipersuperfícies que as envolvam (análogos quadri-dimensionais de superfícies cáusticas em ótica geométrica) e consequentemente, a intercessão das linhas de coordenadas dará origem a uma singularidade na métrica do sistema de coordenadas considerado. Assim, existe uma razão geométrica para o aparecimento de uma singularidade relacionada de modo óbvio com propriedades específicas do sistema síncrono, não tendo, portanto, conteúdo físico.

Uma métrica do quadri-espaço arbitrária permite também, em geral, a existência de famílias de linhas geodésicas ti po-tempo que não se interceptam. O fato do determinante g inevitavelmente ir a zero no sistema síncrono significa que as propriedades de curvatura do espaço-tempo real (expressas pela desigualdade $R_0^0 \geq 0$, e que são permitidas pelas equações de Einstein) implicam em intercessão mútua das linhas de tempo — se, é claro, não aparece "antes" uma singularidade verdadeira(*).

O caráter da singularidade fictícia da métrica é claro mesmo a partir de considerações geométricas. Como a hipersuperfície cáustica certamente contém em si intervalos tipo-tempo (os elementos de comprimento das linhas geodésicas no ponto onde tocam a cáustica), não é tipo-espaço. Além disso, um dos valores principais do tensor métrico vai a zero na cáustica quando a distância entre duas linhas geodésicas vizinhas, se interceptando no ponto onde tocam a cáustica, vai a zero (a direção principal correspondente fica, obviamente, ao longo da normal à cáustica). Essa distância vai a zero como a primeira potência da distância a partir do ponto de intercessão. Em vista disto, o valor principal do tensor métrico, e com ele o determinante γ, tende a zero como o quadrado desta última distância.

A construção analítica da métrica espacial na vizinhança da singularidade fictícia no sistema de referência síncrono é dada na referência [4] (veja também o apêndice B da referência [5]). Não a reproduziremos aqui, mas apenas observaremos que a métrica contém, no caso geral, uma função arbitrária a mais do que o número de funções "fisicamente arbitrárias"

(*) Não consideramos, é claro, o caso trivial, a saber, um feixe de lin paralelas no espaço-tempo plano.

indicadas acima. O aparecimento de uma função "extra" é justamente devido ao caráter fictício da singularidade: ela reflete a arbitrariedade na escolha da hipersuperfície a partir da qual se constrói o sistema de referência síncrono.

A singularidade fictícia pode ser removida por uma transformação do sistema de referência. É claro que seu caráter qualitativo é independente da presença ou ausência de matéria, e que a densidade de matéria não tem singularidade e permanece finita. Isto fica especialmente claro se notarmos que a matéria se move (no sistema de referência síncrono) em linhas de universo que não coincidem com as linhas de tempo e, em geral, nem são geodésicas.

Esta última circunstância significa que o sistema de referência não pode ser escolhido, de uma maneira geral, de tal modo que seja ao mesmo tempo síncrono e co-movente (em um sistema co-movente as linhas de universo da matéria coincidem com as linhas de tempo). A única excessão é no caso de matéria do tipo (pressão p = 0). Sem interagirem entre si, as partículas de poeira se movem em linhas geodésicas.

Por isso, neste caso, a propriedade de ser um sistema co-movente não está em contradição com a de ser síncrono. Em um sistema de referência "síncrono-co-movente", a densidade de matéria se torna infinita na cáustica simplesmente como resultado da intercessão, sobre a cáustica, das trajetórias das partículas. É claro que essa singularidade na densidade também é de natureza não física, e pode ser removida pela introdução de uma pressão de matéria infinitesimal mente pequena mas diferente de zero(*). Para matéria com outras equações de estado, uma situação análoga pode ocorrer somente em casos particulares onde não existe gradiente de pressão em algumas direções.

(*) Mas, mesmo nesse caso, um sistema de referência síncrono-co-movente pode ser introduzido somente se a matéria se move "sem rotação". Em um sistema de referência co-movente as componentes contravariantes da quadri-velocidade são $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$. Se o sistema de referência é também síncrono, então as componentes covariantes são $u_\alpha = 0$, $u_0 = 1$, e por esse motivo, seu quadri-rotor é $u_{i;k} - u_{k;i} \equiv u_{i,k} - u_{k,i} = 0$. Mas esta igualdade tensorial deve também ser válida para qualquer outro sistema de referência. Assim, em um sistema síncrono, mas não co-movente, se obtém a condição $\mathrm{rot}\, v = 0$ para a velocidade tridimensional.

3. *SOLUÇÃO QUASE-ISOTRÓPICA*

A solução de Friedmann não contém funções arbitrárias de coordenadas; só contém um parâmetro arbitrário constante (relacionado com a distribuição média de densidade de matéria no espaço). Mas esta solução é, na verdade, um caso particular de uma classe mais geral de soluções que se pode chamar de quase-isotrópica. A distribuição espacial de matéria nestas soluções é não-homogênea, mas a contração do espaço em direção ao ponto singular se faz de maneira quase-isotrópica: as dimensões lineares decrescem com a mesma potência do tempo t em todas as direções [7].

Como é bem sabido, a maneira mais natural de se formular o modelo isotrópico é no sistema de referência co-movente. Este sistema exibe explicitamente a isotropia e a homogeneidade do espaço. Por esse motivo, as quantidades $g_{0\alpha}$ se anulam automaticamente (de tal modo que o sistema de referência é também síncrono) e a singularidade acontece simultaneamente em todo o espaço. A variação da métrica com o tempo, nesta solução, depende da equação de estado da matéria. Na vizinhança da singularidade deve-se usar a equação ultra-relativística $p = \varepsilon/3$ (p é a pressão, ε é a densidade de energia da matéria). Então a métrica, quando $t \to \infty$, tem a forma $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \simeq a_{\alpha\beta}t$ onde $a_{\alpha\beta}$ são funções definidas das coordenadas que correspondem à curvatura espacial constante. Como são funções do tempo, $\gamma_{\alpha\beta}$ podem ser expandidos em séries de potências inteiras de t.

Formularemos a solução quase-isotrópica em um sistema síncrono que, no entanto, não é ainda um sistema estritamente co-movente. Buscaremos a métrica espacial da forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = t\, a_{\alpha\beta} + t^2\, b_{\alpha\beta} + \ldots \tag{3.1}$$

onde agora $a_{\alpha\beta}$ são funções arbitrárias das coordenadas.

O tensor inverso a (3.1) é:

$$\gamma^{\alpha\beta} = t^{-1}\, a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

onde o tensor $a^{\alpha\beta}$ é o inverso de $a_{\alpha\beta}$. Todas as operações de subir e abaixar índices e diferenciação covariante de outros tensores serão feitas nesta seção, usando a métrica independente do tempo $a_{\alpha\beta}$ ($b_\alpha^\beta = a^{\beta\gamma} b_{\alpha\gamma}$, etc.)

Com a equação de estado ultra-relativística, o tensor energia-momento da matéria é

$$T_i^{\ k} = (p+\varepsilon) u_i u^k - p\delta_i^k = \frac{\varepsilon}{3}\,(4\, u_i u^k - \delta_i^{\ k})$$

(u^i é a quadri-velocidade da matéria). As equações de Einstein (2.3-5) com os lados direitos explicitamente escritos, assumem as formas

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\, \varkappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4}\, \varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = \frac{\varepsilon}{3}\,(4\, u_0 u^0 - 1) \tag{3.3}$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2}\,(\varkappa_{\alpha;\beta}^\beta - \varkappa_{\beta;\alpha}^\beta) = \frac{4}{3}\,\varepsilon\, u_\alpha u^0 \tag{3.4}$$

$$R_\alpha^\beta = -P_\alpha^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\,(\sqrt{\gamma}\, \varkappa_\alpha^\beta) = \frac{\varepsilon}{3}\,(4\, u_\alpha u^\beta - \delta_\alpha^{\ \beta}) \tag{3.5}$$

(lembre-se que $u_0 = u^0$, $u_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} u^\beta$).

Calculando o lado esquerdo da equação (3.3) até segunda ordem em $1/t$ e da equação (3.4) até primeira ordem em $1/t$, encontramos

$$\frac{3}{4t^2} - \frac{b}{2t} = \frac{\varepsilon}{3}\,(4\,u_0{}^2 + 1) \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{2}\,(b^{\beta}_{\alpha;\beta} - b_{;\alpha}) = \frac{4}{3}\,\varepsilon\,u_\alpha u^0 \tag{3.7}$$

onde $b = b^{\alpha}_{\alpha}$. *Comparando os lados direitos destas equações* e usando a identidade

$$1 = u_i u^i = u_0{}^2 - \frac{1}{t}\,u_\alpha u^\beta a^{\alpha\beta}$$

pode-se facilmente ver que $\varepsilon \sim t^{-2}$, $u_\alpha \sim t^2$. Essa identidade motiva, $u_0{}^2 - 1 \sim t^3$. Da equação (3.6) calculamos os dois primeiros termos da expansão da densidade de energia

$$\varepsilon = \frac{3}{4t^2} - \frac{b}{2t} \tag{3.8}$$

e da equação (3.7) o primeiro termo da expansão da velocidade

$$u_\alpha = \frac{t^2}{2}\,(b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}) \tag{3.9}$$

Os símbolos de Christoffel tridimensionais, e com eles o tensor $P_{\alpha\beta}$, são, em primeira aproximação em $1/t$, independentes do tempo. Então, $P_{\alpha\beta}$ coincide com as expressões obtidas usando a métrica independente do tempo $a_{\alpha\beta}$. Usando esta, encontramos que na equação (3.5) os termos da ordem de t^{-2} se cancelam automaticamente e os termos proporcionais a t^{-1} nos dão

$$P_\alpha{}^\beta + \frac{3}{4}\,b_\alpha{}^\beta + \frac{5}{12}\,\delta_\alpha^\beta b = 0$$

Daí,

$$b_\alpha{}^\beta = -\frac{4}{3}\,P_\alpha{}^\beta + \frac{5}{18}\,\delta_\alpha{}^\beta\,P \tag{3.10}$$

Vemos que seis funções $a_{\alpha\beta}$ ainda são de fato bem arbitrárias. Dados os $a_{\alpha\beta}$, os coeficientes $b_{\alpha\beta}$ do próximo termo na expansão são determinados pelas fórmulas (3.10), e a partir destas, determinamos os coeficientes dos primeiros termos das expansões (3.8-9) para a densidade de matéria e suas velocidades. Note-se que quando $t \to 0$ a distribuição de matéria fica homogênea, com sua densidade tendendo a um valor independente das coordenadas. A distribuição de velocidade dada pela equação(3.9) pode ser transformada usando-se a relação

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{7}{9}\, b_{;\alpha}$$

que é uma consequência da equação

$$P^{\beta}_{\alpha;\beta} - \frac{1}{2}\, P_{;\alpha} = 0$$

satisfeita por qualquer tensor de Ricci. Temos então

$$u_{\alpha} = \frac{t^2}{2}\, b_{;\alpha}$$

isto é, nesta aproximação a velocidade é o gradiente de alguma função, e seu rotor é igual a zero (um rotor diferente de zero aparece, no entanto, no próximo termo da expansão).

A métrica (3.1) permite ainda a possibilidade de uma transformação arbitrária das coordenadas do tri-espaço (a escolha do tempo já foi completamente determinada pela condição $t = 0$ no ponto singular). Estas transformações podem ser usadas, por exemplo, para se reduzir o tensor $a_{\alpha\beta}$ à forma diagonal. Por isto a solução encontrada acima só contém 6-3=3 funções arbitrárias das coordenadas.

Ao modelo isotrópico corresponde um caso particular de funções $a_{\alpha\beta}$ bem definidas — as que correspondem ao espaço sotrópico de curvatura constante (*então* $P_\alpha{}^\beta$ = *const* $\delta_\alpha{}^\beta$).

A solução quase-isotrópica existe (analogamente ao caso particular da solução de Friedmann) somente para o espaço *contendo matéria*; *não se pode por* a densidade de matéria igual a zero nesta solução(*). Veremos mais tarde que, a este respeito, esta classe de soluções ocupa posição única, como se estivesse à parte das classes mais amplas (entre aquelas mais gerais), cujas propriedades são, em grande parte, independentes da presença ou ausência de matéria.

(*) *No vácuo, as equações de Einstein podem ser satisfeitas* por métricas quase-isotrópicas da forma $\gamma_{\alpha\beta} = t^2 a_{\alpha\beta}$ onde os a são funções das coordenadas. A equação (3.3) é então identicamente satisfeita ($x_\alpha^\beta = 2\delta_\alpha{}^\beta/t$) e e a equação (3.5) nos dá $P_\alpha{}^\beta = -2\delta_\alpha{}^\beta$, onde $P_\alpha{}^\beta$ é calculado só com a métrica $a_{\alpha\beta}$. *Mas este tipo de forma para* $P_\alpha{}^\beta$ implica em que o espaço tem curvatura constante negativa. A métrica do espaço-tempo correspondente pode ser escrita com a ajuda das coordenadas esféricas quadridimensionais x, θ, φ na forma

$$ds^2 = dt^2 - t^2 \left[dX^2 + \text{senh}^2 X(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)\right]$$

Mas pela transformação r = t senhX, τ = coshX tal métrica pode ser reduzida a uma forma Galileana

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$$

4. *SOLUÇÃO GENERALIZADA DE KASNER*

Para se construir a solução geral das equações de Einstein com a singularidade temporal, pode-se partir de uma simples solução exata particular (devida a Kasner [8]) para o campo no espaço vazio. Esta solução descreve um espaço uniforme com métrica Euclideana que depende do tempo, de acordo com a seguinte fórmula:

$$d\ell^2 = t^{2P_1}\, dx^2 + \tau^{2P_2}\, dy^2 + \tau^{2P_3}\, dz^2 \qquad (4.1)$$

(veja o §117 da referência [3]). Aqui, P_1, P_2, P_3 são três números arbitrários (os "expoentes de Kasner") que satisfazem à relação

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \qquad (4.2)$$

Portanto, só um destes números é independente. Os três números P_1, P_2, P_3 nunca são iguais, exceto nos dois casos seguintes e sendo aos pares: $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e $(0, 0, 1)$(*). Em todos os outros casos eles são distintos, um deles sendo negativo e os outros dois positivos. Vamos ordená-los segundo

$$P_1 < P_2 < P_3 \qquad (4.3)$$

(*) Quando $(P_1, P_2, P_3) = (0, 0, 1)$, a métrica $ds^2 = dt^2 - d\ell^2$, com $d\ell^2$ dado pela fórmula (4.1), pode ser reduzida à métrica Galileana pela transformação $t \operatorname{senh} z = \xi$, $t \cosh z = \tau$; isto é, a singularidade é fictícia e o espaço-tempo é, na verdade, plano.

Desta forma eles pertencem aos intervalos

$$-\frac{1}{3} \leq P_1 \leq 0 \quad , \quad 0 \leq P_2 \leq \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{2}{3} \leq P_3 \leq 1 \qquad (4.4)$$

Os números P_1, P_2, P_3 podem ser representados sob a forma paramétrica

$$P_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2} \;\; ; \;\; P_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2} \;\; ; \;\; P_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \qquad (4.5)$$

Conforme o parâmetro u varia no intervalo $u \geq 1$, P_1, P_2 e P_3 assumem todos os seus valores, preservando a ordenação definida pela relação (4.3). Os valores $u \leq 1$ podem ser reduzidos ao mesmo intervalo, já que

$$P_1\left(\frac{1}{u}\right) = P_1(u) \;\; ; \;\; P_2\left(\frac{1}{u}\right) = P_3(u) \;\; ; \;\; P_3\left(\frac{1}{u}\right) = P_2(u) \qquad (4.6)$$

A figura 1 da referência [14] mostra P_1, P_2, P_3 como funções de $1/u$. Podemos notar que $P_1(u)$ e $P_3(u)$ são funções que crescem monotonicamente com o parâmetro u e $P_2(u)$ é função que decresce monotonicamente com u.

No caso de uma solução generalizada somente a métrica limite (na vizinhança do ponto singular $t = 0$), isto é, os principais termos na expansão da métrica em potências de t, tem forma análoga à expressão (4.1). Em um sistema de referência síncrono esta métrica pode ser escrita sob a forma (2.2) com o elemento de comprimento espacial $d\ell$ dado por

$$d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

onde

$$\gamma_{\alpha\beta} = a^2\, \ell_\alpha \ell_\beta + b^2\, m_\alpha m_\beta + c^2\, n_\alpha n_\beta \qquad (4.7)$$

com

$$a = t^{P_\ell} \qquad b = t^{P_m} \qquad c = t^{P_n} \qquad (4.8)$$

Os vetores tridimensionais ℓ, m, n definem as direções nas quais as distâncias espaciais variam com o tempo de acordo com as leis das potências (4.8). Estes vetores, e também os números P_ℓ, P_m, P_n que satisfazem à equação (4.2), são funções das coordenadas espaciais. Aqui, os expoentes P_ℓ, P_m, P_n não estão necessariamente ordenados em sequência crescente; reservamos a notação P_1, P_2, P_3 para os números definidos pelas relações (4.5) que satisfazem às desigualdades (4.3). O determinante da métrica (4.7) é dado por

$$\gamma = a^2 b^2 c^2 v^2 = t^2 v^2 \qquad (4.9)$$

onde $v = (\ell\, [mn]\,)$. Introduzimos também a seguinte notação(*)

$$\lambda = \frac{1}{v}\, \ell \text{ rot } \ell \qquad \mu = \frac{1}{v}\, m \text{ rot } m \qquad \nu = \frac{1}{v}\, n \text{ rot } n \qquad (4.10)$$

Como os expoentes nas relações (4.8) são todos diferentes, a métrica espacial dada pela relação (4.7) é sempre anisotrópica. Ao nos aproximarmos do ponto singular, as distâncias lineares em cada elemento do espaço decresce em duas direções e cresce na terceira direção. O volume de cada elemento decresce linearmente com τ.

(*) Aqui e abaixo todos os símbolos de operações vetoriais (produto vetorial, rotacional, gradiente, etc) devem ser interpretados de maneira meramente formal como operações sobre componentes (covariantes) dos vetores ℓ, m, n como se as coordenadas x^1, x^2, x^3 fossem cartesianas.

Mostraremos agora como a métrica (4.7) pode ser posta em concordância com as equações de campo e quantas funções arbitrárias fisicamente diferentes a métrica contém.

Junto com o tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ introduzimos o tensor inverso contravariante

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{-2}\, \ell^{\alpha}\ell^{\beta} + b^{-2}\, m^{\alpha}m^{\beta} + c^{-2}\, n^{\alpha}n^{\beta} \tag{4.11}$$

A notação ℓ^{α}, m^{α}, n^{α} com índices em cima dá as componentes dos vetores

$$\tilde{\ell} = \frac{[mn]}{v} \qquad \tilde{m} = \frac{[n\ell]}{v} \qquad \tilde{n} = \frac{[\ell m]}{v} \tag{4.12}$$

inversos dos vetores ℓ, m, n tal que

$$\ell_{\alpha}\ell^{\alpha} = 1 \qquad \ell_{\alpha}m^{\alpha} = \ell_{\alpha}n^{\alpha} = 0\ , \ \ldots \tag{4.13}$$

Diferenciando o tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ em relação ao tempo e levantando os índices obtemos

$$x_{\alpha}^{\beta} = \frac{2\dot{a}}{a}\,\ell_{\alpha}\ell^{\beta} + \frac{2\dot{b}}{b}\,m_{\alpha}m^{\beta} + \frac{2\dot{c}}{c}\,n_{\alpha}n^{\beta} \tag{4.14}$$

(o ponto significa diferenciação em relação a t).

Consideremos primeiro:

(a) <u>o caso do espaço vazio</u>

Fazendo o lado direito das equações de Einstein (2.3-5) iguais a zero, temos

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\,(x_{\alpha}^{\alpha})^{\cdot} - \frac{1}{4}\,x_{\alpha}^{\beta}x_{\beta}^{\alpha} = 0 \tag{4.15}$$

$$R_{\alpha}^0 = \frac{1}{2}\,(x_{\alpha;\beta}^{\beta} - x_{\beta;\alpha}^{\beta}) = 0 \tag{4.16}$$

$$R_\alpha^\beta = - P_\alpha^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma}\, x_\alpha^\beta)^{\cdot} = 0 \qquad (4.17)$$

Inserindo (4.14) em (4.15) encontramos a equação

$$- R_0^0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0$$

que é automaticamente satisfeita pelas funções (4.8) devido à relação

$$P_\ell + P_m + P_n = P_\ell^{\,2} + P_m^{\,2} + P_n^{\,2}$$

Na equação (4.17) o segundo termo se torna identicamente zero já que (para as funções (4.8)) as quantidades $x_\alpha^\beta \sim \frac{1}{t}$ e $\sqrt{\gamma} \sim t$. Este termo é potencialmente da ordem de t^{-2}. Por esse motivo, para que as equações (4.17) (em seus termos principais) sejam satisfeitas, deve-se impor que o tensor P_α^β não contenha termos da ordem de t^{-2} ou maiores. Vamos esclarecer agora as condições sob as quais estes termos não aparecem.

O aparecimento de dependências temporais da métrica essencialmente diferentes nas direções ℓ, m, n, torna conveniente "projetar" todos os tensores nestas direções. Denotando as projeções correspondentes pelos índices ℓ, m, n, definimos as projeções segundo

$$P_{\ell\ell} = P_{\alpha\beta}\,\ell^\alpha \ell^\beta \quad , \quad P_{\ell m} = P_{\alpha\beta}\,\ell^\alpha \ell^m \; , \ldots \qquad (4.18)$$

Nesta notação temos, em particular,

$$g_{\ell\ell} = a^2 \quad , \quad g_{mm} = b^2 \quad , \quad g_{nn} = c^2 \qquad (4.19)$$

De modo correspondente definimos as componentes "mistas" do ten sor por:

$$P_{\ell}^{\ell} = \frac{P_{\ell\ell}}{g_{\ell\ell}} = a^{-2} P_{\ell\ell} \quad , \quad P_{\ell}^{m} = \frac{P_{\ell m}}{g_{mm}} = b^{-2} P_{\ell m}, \ \ldots \qquad (4.20)$$

Por uma questão de precisão, sejam

$$P_{\ell} = P_1 \quad , \quad P_m = P_2 \quad , \quad P_n = P_3$$

isto é, o expoente negativo P_1 está ligado à direção ℓ. Então temos que o termo de maior ordem nas componentes diagonais do tensor $P_{\alpha\beta}$ é(*)

$$P_{\ell}^{\ell} = - P_{m}^{m} = - P_{n}^{n} = \frac{\lambda^2 a^2}{2b^2c^2} = \frac{\lambda^2 t^{4P_1}}{2t^2}$$

Como $P_1 < 0$(**), este termo é de ordem mais alta que t^{-2}.

Portanto, se a equação (4.17) deve ser satisfeita, é de qualquer forma necessário que este termo não apareça, isto é, é necessário que(***)

$$\lambda = 0 \qquad (4.21)$$

(*) As expressões gerais para as componentes do tensor de Ricci tridimensional $P_{\alpha\beta}$ para uma métrica da forma (4.7) são bastante enfadonhas. Podem ser encontradas na íntegra no apêndice D da referência [5].

(**) O caso $(P_1,P_2,P_3) = (0,0,1)$ (onde a singularidade é fictícia) está, é claro, excluído das considerações.

(***) Um vetor que preencha a condição ℓ rot $\ell = 0$ pode ser representado como $\ell = \psi\nabla\phi$ com funções escalares ψ e ϕ . Geometricamente isto significa que a direção do vetor ℓ em cada ponto do espaço pode ser escolhida como a direção de uma das linhas coordenadas (x''). Como $\ell_\alpha dx^\alpha = \psi d\phi$, as superfícies ϕ = const serão as superfícies de coordenadas x'' = const.

Quando a condição (4.21) é satisfeita, os principais termos nas componentes do tensor $P_{\alpha\beta}$ tem as ordens de grandeza:

$$P_{\ell}^{\ell} \sim P_{m}^{m} \sim P_{n}^{n} \sim t^{-2P_3} \, \ell n^2 t$$

$$P_{\ell m} \sim t^{2(P_2-P_3)} \, \ell n \; t \quad ,$$

$$P_{\ell n} \sim P_{mn} \sim \ell n^2 \; t$$

e não desempenham papel importante, em primeira ordem, nas equações (4.17).

Só falta agora satisfazer às equações (4.16). Os maiores termos nestas equações poderiam ser da ordem de $t^{-1} \, \ell n \, t$. Tais termos aparecem quando se diferencia os expoentes $g_{\alpha\beta}$ em relação às coordenadas. Estas derivadas aparecem nas expressões

$$x_{\alpha;\beta}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\sqrt{\gamma} \; x_{\alpha}^{\beta}) - \frac{1}{2} \, x^{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \qquad (4.22)$$

Calculando estes termos,encontramos

$$x^{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = 4 \sum P_1 \, t^{-2P_1-1} \, \ell^{\beta} \ell^{\alpha} \sum t^{2P_1} \, \ell n \; t \, \frac{\partial P_1}{\partial x^{\alpha}} \, \ell_{\beta} \ell_{\gamma} =$$

$$= 4 \, \frac{\ell n t}{t} \sum P_1 \frac{\partial P_1}{\partial x^{\alpha}} = 2 \, \frac{\ell n t}{t} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \sum P_1{}^2$$

e por motivo da relação (4.2) estes termos se cancelam identicamente (o somatório é sempre sobre permutações cíclicas dos vetores ℓ, m, n e das funções P_1, P_2, P_3).

Assim, os principais termos nas equações (4.16) são termos da ordem de $1/\tau$. Como $x_{\alpha}^{\beta} = 2/\tau$ é independente das coordenadas, temos que, nesta aproximação, $x_{\beta;\alpha}^{\beta} = 0$. Para calcular a expressão (4.22) escrevemos:

$$x^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{2}{vt} \sum \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (P_1 \ell_\alpha \boxed{mn}_\beta - \frac{P_1}{2v} \boxed{mn}_\beta \boxed{mn}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ell_\beta \ell_\gamma \right\} =$$

$$= \frac{2}{vt} \sum \left\{ \ell_\alpha \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (P_1 \boxed{mn}_\beta + P_1 \boxed{mn}_\beta (\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ell_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ell_\beta) \right\} =$$

$$= \frac{2}{vt} \sum \left\{ \ell_\alpha \boxed{mn} \nabla P_1 + \ell_\alpha P_1 \operatorname{div} \boxed{mn} - P_1 \left[\boxed{mn} \operatorname{rot} \ell \right]_\alpha \right\}$$

Expandindo as expressões vetoriais e reagrupando termos na soma, obtemos a equação:

$$R^0_\alpha = \frac{1}{2} x^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{vt} \sum \ell_\alpha \left\{ \boxed{mn} \nabla P_1 + (P_3 - P_1)\, m \operatorname{rot} n + (P_1 - P_2)\, n \operatorname{rot} m \right\} = 0 \tag{4.23}$$

Projetando esta equação nas direções ℓ, m, n obtemos as relações

$$vP_{1,\ell} + (P_3 - P_1)\, m \operatorname{rot} n + (P_1 - P_2)\, n \operatorname{rot} m = 0$$
$$vP_{2,m} + (P_1 - P_2)\, n \operatorname{rot} \ell + (P_2 - P_3)\, \ell \operatorname{rot} n = 0$$
$$vP_{3,n} + (P_2 - P_3)\, \ell \operatorname{rot} m + (P_3 - P_1)\, m \operatorname{rot} \ell = 0 \tag{4.24}$$

(as letras ℓ, m, n que vêm após a vírgula nos índices denotam diferenciação na direção correspondente, de acordo com a definição $f_{,\ell} = \ell^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}$, ...).

Com isto, concluímos a verificação da solução (4.7) — — os primeiros termos da expansão do tensor métrico em potências de t na vizinhança do ponto singular. Os próximos termos desta expansão podem ser expressos em termos das quantidades que aparecem em (4.7); os cálculos relevantes podem ser encontra -

dos no apêndice E da referência [5].

Vamos descobrir agora qual é o número de funções arbitrárias na solução assim obtida. Na expressão (4.7) aparecem dez diferentes funções de coordenadas: três componentes de cada um dos vetores ℓ, m, n e uma função no expoente de t (qualquer uma das funções P_1, P_2, P_3 que estão ligadas entre si pelas relações (4.2)). Entre estas dez funções existem quatro relações (4.21) e (4.24). Além disso, o sistema de referência que estamos usando permite uma transformação arbitrária das três coordenadas espaciais entre si. Por este motivo, a solução que obtivemos contém somente 10-4-3 = 3 funções fisicamente arbitrárias das três coordenadas espaciais. Este número é menor de uma unidade do que o necessário para fornecer condições iniciais arbitrárias para o campo gravitacional no vácuo.

Note que a solução que consideramos é, em essência, anisotrópica, já que os expoentes P_1, P_2, P_3, que definem as leis de acordo com as quais as distâncias lineares variam nas três diferentes direções espaciais, não podem ser iguais. Chamamos também a atenção para uma peculiaridade matemática desta solução — uma das suas funções arbitrárias está no expoente temporal.

(b) <u>solução em espaço contendo matéria</u>

O grau de generalidade da "solução generalizada de Kasner" não é reduzido pela presença de matéria. A matéria pode ser inserida na métrica (4.7) com todas as quatro novas funções de coordenadas que são necessárias para estabelecer a distribuição inicial de densidade de matéria e as três componentes da velocidade de seu movimento.

O comportamento da matéria na vizinhança de um ponto singular é determinado pelas equações de movimento da matéria em um dado campo gravitacional. Estas são equações hidrodinâmicas, a saber:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}\,\sigma\, u^i) = 0 \tag{4.25}$$

$$(P+\varepsilon)u^k\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2}u^\ell\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^i}\right\} = -\frac{\partial P}{\partial x^i} - u_i u^k\frac{\partial P}{\partial x^k} \tag{4.26}$$

onde u^i é o quadri-vetor velocidade, ε e σ são as densidades de energia e entropia da matéria (veja por exemplo o §125 da referência [9]). Para a equação de estado ultra-relativística $P = \varepsilon/3$, a entropia $\sigma \sim \varepsilon^{3/4}$. Os principais termos nas equações (4.25-26) são os que contêm derivadas em relação ao tempo. Segue-se de (4.25) e das componentes espaciais da equação (4.26) que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\, u_0\, \varepsilon^{3/4}) = 0 \quad , \quad 4\varepsilon\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$$

que implica em

$$abc\, u_0\, \varepsilon^{3/4} = \text{const} \quad , \quad u_\alpha\, \varepsilon^{1/4} = \text{const} \tag{4.27}$$

Aqui, "const" significa quantidades independentes do tempo. Além do mais, da identidade $u_i u^i = 1$ (levando em conta que todas as componentes covariantes u_α são da mesma ordem) obtemos

$$u_0^2 \simeq u_n u^n = u_n^2/c^2$$

onde u_n é a velocidade na direção n, que corresponde à potência (positiva) mais alta de t (assumimos que $P_n = P_3$). A partir destas relações encontramos

$$\varepsilon \sim 1/a^2b^2 \quad , \quad u_\alpha \sim \sqrt{ab} \tag{4.28}$$

ou

$$\varepsilon \sim t^{-2(P_1+P_2)} = t^{-2(1-P_3)} \quad , \quad u_\alpha \sim t^{(1-P_3)/2} \tag{4.29}$$

Agora é fácil verificar que as componentes do tensor energia-momento da matéria, que aparecem no lado direito das equações (3.3) e (3.5) são, na verdade, de uma ordem mais baixa em $1/t$ do que os termos mais importantes que aparecem do lado esquerdo destas mesmas equações (termos $\sim t^{-2}$). Na equação (3.3) temos

$$T_0^0 \sim \varepsilon\, u_0{}^2 \sim t^{-(1+P_3)}$$

e como $P_3 < 1$, esta desigualdade é de ordem mais baixa que o termo $\sim t^{-2}$. O mesmo se dá na equação (3.5): as componentes espaciais do tensor $T_i{}^k$ "projetadas" nas direções ℓ, m, n, têm ordens de grandeza

$$\begin{aligned} T_\ell^\ell &\sim \varepsilon \sim t^{-2(1-P_3)} , \\ T_m^m &\sim \varepsilon\, u_m u^m \sim t^{-(1+2P_2-P_3)} \\ T_n^n &\sim \varepsilon\, u_n u^n \sim t^{-(1+P_3)} \end{aligned}$$

que são mais baixas que t^{-2}.

Na equação (3.4), porém, temos:

$$T_\alpha^0 \sim \varepsilon\, u_\alpha u^0 \sim \frac{1}{t}$$

isto é, a mesma ordem de grandeza que o lado esquerdo desta equação. Todavia, isto ainda não altera o caráter da solução. De fato, de acordo com (4.29) escrevemos:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)}\, t^{-2(1-P_3)} \quad , \quad u_\alpha = u_\alpha^{(0)}\, t^{(1-P_3)/2}$$

para os primeiros termos das expansões destas quantidades. Ao mesmo tempo

$$u_0{}^2 \approx u_n^{(0)2}\, t^{-(3P_3-1)}$$

Equiparando a expressão (4.23) para R_α^0 à quantidade $T_\alpha^0 = \frac{4}{3}\varepsilon u_\alpha u^0$ encontramos como resultado as equações

$$vP_{1,\ell}+(P_3-P_1)m\,\mathrm{rot}\,n+(P_1-P_2)n\,\mathrm{rot}\,m = -\frac{4}{3}\,\varepsilon^{(0)}u_\ell^{(0)}u_0^{(0)} \;\ldots \qquad (4.30)$$

em vez da (4.23). Assim, somente as relações entre as funções que aparecem em (4.7) sofrem alterações(*). O número total de funções fisicamente arbitrárias é agora sete: além das três funções que já aparecem na ausência de matéria, aparecem agora a função $\varepsilon^{(0)}$ e as três funções $u_\alpha^{(0)}$.

O comportamento da métrica próximo à singularidade ($t \to 0$) na solução que acabamos de considerar não depende da presença ou ausência de matéria (e é, consequentemente, independente de sua equação de estado). O comportamento é tal que em cada ponto do espaço as distâncias lineares decrescem em duas direções (como t^{P_2} e t^{P_3}), e crescem (como $t^{-|P_1|}$) na terceira direção; os volumes decrescem proporcionalmente a t. As leis que

(*) A forma dos termos seguintes na expansão do tensor métrico também é alterada. Os primeiros termos que se seguem na relação (4.7) são agora os termos relacionados com a presença de matéria (veja o apêndice E da referência [5]).

governam estas variações (isto é, os valores de P_1, P_2, P_3) variam no espaço, sendo determinadas pelas condições iniciais dadas.

A densidade de matéria tende ao infinito, de acordo com a regra $\varepsilon \sim t^{-2(1-P_3)}$ em cada ponto do espaço. Esta circunstância por si só, já é um indicador da natureza física (e não fictícia) da singularidade.

A velocidade com que a matéria se move nesta solução (no sistema de referência em consideração), tende à velocidade da luz quando $t \to 0$. De fato, o escalar tridimensional $u_\alpha u^\alpha \simeq u_m u^n$ tende ao infinito como $t^{-(3P_3-1)}$ quando $t \to 0$. Isto significa que a matéria em cada ponto se move principalmente na direção $\varkappa$, com o valor absoluto de sua velocidade tridimensional v $(v^2 = v_\alpha v^\alpha)$, tendendo à unidade segundo

$$\sqrt{1-v^2} \sim t^{(3P_3-1)/2} \qquad (4.30)$$

O tempo próprio τ da matéria em movimento está relacionado com o tempo t por

$$d\tau = dt\,\sqrt{1-v^2}$$

Então

$$\tau \sim t^{(3P_3+1)/2} \qquad (4.31)$$

No sistema de referência co-movente, a densidade de energia tende ao infinito, de acordo com(*)

(*) No caso particular em que $(P_1, P_2, P_3) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, a matéria pode ser "inserida" na métrica (4.7) de outra forma, quando sua densidade de energia tende ao infinito como $\varepsilon \sim t^{-4/3}$ e sua velocidade tende a zero, de acordo com $u_\alpha \sim t^{1/3}$, $u_m \sim u_n \sim t$. Contudo, a matéria então traz em si não quatro, mas somente duas funções arbitrárias, isto é, as condições iniciais para a matéria devem ter uma certa característica particular. A esta classe pertence, em particular, a solução geral para o colapso centralmente simétrico da matéria (veja referência [6]).

$$\varepsilon \sim \tau^{\frac{-4(1-P_3)}{3P_3+1}} \qquad (4.32)$$

Antes de passarmos à generalização final da solução obtida, faremos ainda algumas observações acessórias sobre as singularidades nos modelos homogêneos dos tipos I-VII da classificação de Bianchi.

A escolha natural do sistema de referência síncrono para modelos homogêneos é fixada pela condição de homogeneidade espacial em hipersuperfícies t = const. Com tal escolha, as linhas de coordenadas do tempo não se interceptam, e as singularidades *nas soluções das equações de Einstein são* singularidades verdadeiras(*). As quantidades (4.10) (assim como as quantidades análogas "não diagonais" (ℓ rot m)/v cte) são reduzidas a números constantes intimamente relacionados às constantes de estrutura do grupo de movimentos correspondentes (veja, por exemplo, o §116 da referência [3]). As equações de Einstein ficam reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Nos modelos dos tipos I-VII, é sempre possível escolher as direções ℓ, m, n, tal que pelo menos uma das quantidades (4.10) seja zero. Em todos estes casos a solução geral para o espaço vazio tem uma singularidade do tipo de Kasner. Mas as equações também podem ter soluções particulares com outros tipos de singularidades. Por exemplo, as equações de Einstein para o espaço vazio homogêneio do tipo VI_h da classificação de Bianchi tem uma solução particular exata

$$d\ell^2 = a^2\, e^{-2(1+h)z}\, dx^2 + b^2\, e^{2(1+h)z}\, dy^2 + c^2 dz^2 \qquad (4.33)$$

(*) Afora as exclusões óbvias do tipo da fórmula (4.1) com $(P_1, P_2, P_3)=(0,1,1)$.

onde h = const, com

$$a = t^{S_1} \quad , \quad b = t^{S_2} \quad , \quad c = (1+h^2)t \qquad (4.34)$$

$$S_1 = \frac{1+h}{1+h^2} \quad , \quad S_2 = \frac{1-h}{1+h^2} \quad , \quad S_1+S_2=S_1{}^2+S_2{}^2$$

Essa solução também pode ser apresentada sob a forma

$$d\ell^2 = (\tfrac{t}{\xi})^{2S_1}\, dx^2 + (\tfrac{t}{\xi})^{2S_2}\, dy^2 + (\tfrac{t}{\xi})^2\, dz^2 \qquad (4.35)$$

fazendo-se a transformação $(1+h^2)z = \ell n\ \xi$. Os expoentes $(S_1, S_2, 1)$ não pertencem ao tipo de Kasner.

Todavia, o significado físico desta solução particu - lar é muito restrito, já que sua generalização não pode levar a uma solução de caráter geral(*). O mesmo se pode dizer para outros tipos de singularidades que podem aparecer nos modelos homogêneos com matéria tipos I-VII da classificação de Bianchi.

(*) Para a solução particular (4.35) tal generalização foi investigada no apêndice G da referência [5].

5. *APROXIMAÇÃO OSCILATÓRIA DO PONTO SINGULAR*

Das quatro condições impostas sobre as funções do coordenadas na solução (4.7-8), as três condições que se seguem da equação $R^0_\alpha = 0$ são "naturais"; elas refletem a estrutura das equações gravitacionais. A condição adicional (4.21) leva à "perda" de uma função arbitrária.

A solução geral é, por definição, completamente estável. A aplicação de qualquer perturbação é equivalente a uma mudança nas condições iniciais em algum instante de tempo, e como a solução geral satisfaz condições iniciais arbitrárias, a perturbação não pode mudar a forma da solução. Mas, para a solução (4.7-8) a presença da restrição $\lambda = 0$ provoca uma instabilidade em relação a perturbações que violam esta condição. Consequentemente, qualquer perturbação deste tipo deve levar nosso sistema para um novo estado que, ipso facto, já será bem geral. É claro que a perturbação não deve ser tratada como pequena; a transição para um novo estado fica fora da região de perturbações infinitesimais.

Esta abordagem é, de fato, factível. Ela conduz a complicados regimes oscilatórios de evolução para um ponto singular. Suas características mais importantes podem ser demonstradas em modelos especiais que permitem uma investigação analítica. Já que a matéria não afeta as propriedades qualitativas da evolução desses modelos, primeiramente daremos o tratamento para o caso do espaço vazio.

Discutiremos modelos com uma métrica espacial homogênea específica. Como é bem sabido, a suposição de homogeneidade do espaço (sem qualquer outra simetria) admite ainda uma ampla classe de métricas. Todos os espaços homogêneos (mas anisotrópicos) possíveis podem ser classificados, de acordo com Bianchi, em nove tipos (veja o §116 da referência [3]). Vamos considerar espaços dos tipos VIII e IX.

Se a métrica espacial for representada sob a forma (4.7), então para cada tipo de espaço homogêneo os vetores ℓ, m, n são certas funções das coordenadas espaciais. A forma real de tais dependências é aqui irrelevante. Só é importante que, no caso dos espaços tipos VIII e IX, as quantidades λ, μ, ν em (4.10) se reduzam a constantes e que todos os produtos "mistos" ℓ rot m, ℓ rot n, m rot ℓ, etc, se anulem. Para um espaço tipo IX, as quantidades λ, μ, ν, têm o mesmo sinal, e podemos supor que $\lambda = \mu = \nu = 1$ (esta escolha é equivalente à escolha $\lambda = \mu = \nu = -1$). Para um espaço tipo VIII, duas destas constantes têm o mesmo sinal, opostos ao da terceira constante; podemos supor, por exemplo, que $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$(*).

Nosso propósito é investigar o efeito da perturbação, que é representada pelos termos nas equações de Einstein que contêm λ no "regime de Kasner". Os espaços tipos VIII e IX são os adequados para tal investigação. Como nenhuma das quantidades λ, μ, ν, se anula, a condição (4.21) não pode ser satisfeita, não importa qual das direções ℓ, m, n, esteja associada à potência negativa do tempo.

As equações de Einstein para o modelo em questão têm a forma:

(*) As quantidades λ, μ, ν, são as constantes de estrutura do grupo de movimentos do espaço

$$- R_{\ell}^{\ell} = \frac{(\dot{a}bc)^{\cdot}}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left[\lambda^2a^4 - (\mu b^2 - \nu c^2)^2\right] = 0$$

$$- R_{m}^{m} = \frac{(a\dot{b}c)^{\cdot}}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left[\mu^2b^2 - (\lambda a^2 - \nu c^2)^2\right] = 0$$

$$- R_{n}^{n} = \frac{(ab\dot{c})^{\cdot}}{abc} + \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left[\nu^2c^4 - (\lambda a^2 - \mu b^2)^2\right] = 0 \quad (5.1)$$

$$R_0^0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0 \quad (5.2)$$

(as outras componentes R_{ℓ}^0, R_m^0, R_n^0, R_{ℓ}^m, R_{ℓ}^n, R_m^n se anulam identicamente)(*). Observa-se que estas equações contêm somente funções do tempo, refletindo a homogeneidade do espaço. Acentuamos que no caso considerado, as equações (5.1) e (5.2) são equações exatas cujas validades não ficam restritas ã vizinhança do ponto singular $t = 0$.

Podemos simplificar as derivadas em relação ao tempo que aparecem nas equações (5.1) e (5.2) se introduzirmos, em vez das quantidades a, b, c, seus logarítmos α, β, γ:

$$a = e^{\alpha} \qquad b = e^{\beta} \qquad c = e^{\gamma} \quad (5.3)$$

e uma nova variãvel τ (no lugar de t):

$$dt = abc\, d\tau \quad (5.4)$$

Encontramos então

(*) Podemos chegar a estas equações usando-se as fórmulas para $P_{\alpha\beta}$ dadas no apêndice D da referência [5], ou nas fórmulas para espaços homogêneos dadas no §116 da referência [3].

$$
\begin{aligned}
2\alpha_{\tau\tau} &= (\mu b^2 - \nu c^2)^2 - \lambda^2 a^4 \\
2\beta_{\tau\tau} &= (\lambda a^2 - \nu c^2)^2 - \mu^2 b^4 \\
2\gamma_{\tau\tau} &= (\lambda a^2 - \mu b^2)^2 - \nu^2 c^4
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

$$
\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta+\gamma)_{\tau\tau} = \alpha_\tau\beta_\tau + \alpha_\tau\gamma_\tau + \beta_\tau\gamma_\tau \tag{5.6}
$$

Adicionando as equações (5.5) e usando a equação (5.6), obtemos uma equação que contém somente derivadas primeiras, e que representa a primeira integral do sistema (5.5):

$$
\alpha_\tau\beta_\tau + \alpha_\tau\gamma_\tau + \beta_\tau\gamma_\tau = \frac{1}{4}\,(\lambda^2 a^4 + \mu^2 b^4 + \nu^2 c^4 - 2\lambda\mu a^2 b^2 - 2\lambda\nu a^2 c^2 - 2\mu\nu b^2 c^2) \tag{5.7}
$$

Esta equação relaciona as condições iniciais com as equações (5.5).

O regime de Kasner, dado pela equação (4.8), é a solução das equações (5.5) correspondendo ao caso em que todos os termos do lado direito podem ser desprezados. No entanto, uma situação deste tipo não pode persistir indefinidamente (para $t \to 0$) já que sempre existem termos crescentes desse tipo no lado direito da equação (5.5). Se a potência negativa corresponde à função $a(t)(P_\ell = P_1)$, a perturbação do regime de Kasner é devida aos termos $\lambda^2 a^4$; os termos restantes decrescem com t decrescente.

Mantendo no lado direito das equações (5.5) somente estes termos crescentes, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$
\alpha_{\tau\tau} = -\frac{1}{2}\,\lambda^2 e^{4\alpha} \qquad \beta_{\tau\tau} = \gamma_{\tau\tau} = \frac{1}{2}\,\lambda^2 e^{4\alpha} \tag{5.8}
$$

(no que se segue colocamos $\lambda^2 = 1$). A solução destas equações descreve a evolução da métrica a partir do estado inicial dado por (4.8), que se caracteriza por um dado conjunto de expoentes (com $P_\ell < 0$). Sejam $P_\ell = P_1$, $P_m = P_2$, $P_n = P_3$, tal que

$$a \sim t^{P_1} \qquad b \sim t^{P_2} \qquad c \sim t^{P_3} \tag{5.9}$$

Obtemos então

$$abc = \Lambda t \qquad \tau = \Lambda^{-1} \ell n\, t + \text{const} \tag{5.10}$$

onde Λ é uma constante. Portanto, as condições iniciais para as equações (5.8) podem ser formuladas como se segue(*)

$$\alpha_\tau = \Lambda P_1 \qquad \beta_\tau = \Lambda P_2 \qquad \gamma_\tau = \Lambda P_3 \qquad \text{para} \quad \tau \to \infty \tag{5.11}$$

As equações (5.8) podem ser integradas facilmente e a solução que satisfaz à condição (5.11) tem a forma:

$$a^2 = \frac{2|P_1|\Lambda}{\cosh(2|P_1|\Lambda\tau)}$$

$$b^2 = b_0{}^2\, e^{2\Lambda(P_2-|P_1|)\tau} \cosh\,(2|P_1|\Lambda\tau)$$

$$c^2 = c_0{}^2\, e^{2\Lambda(P_3-|P_1|)\tau} \cosh\,(2|P_1|\Lambda\tau) \tag{5.12}$$

onde b_0, c_0 são constantes.

É fácil verificar que no limite $t\to\infty$ as formas assín-

---

(*) Acentuamos novamente que estamos considerando a evolução do modelo na direção $t \to 0$; portanto, as condições "iniciais" correspondem a um instante de tempo posterior e não a um anterior.

tóticas das funções (5.12) são idênticas às leis de potência (5.9). No limite $t \to -\infty$, as formas assintóticas destas funções e da função $t(\tau)$ são dadas por(*):

$$a \sim e^{-\Lambda P_1 \tau} \qquad b \sim e^{\Lambda(P_2+2P_1)\tau} \qquad c \sim e^{\Lambda(P_3+2P_1)\tau}$$

$$t \sim e^{\Lambda(1+2P_1)\tau}$$

Expressando a, b e c como funções de t obtemos

$$a \sim t^{P'_\ell} \qquad b \sim t^{P'_m} \qquad c \sim t^{P'_n} \tag{5.13}$$

onde

$$P' = \frac{|P_1|}{1-2|P_1|} \qquad P'_m = \frac{2|P_1|-P_2}{1-2|P_1|} \qquad P'_n = \frac{P_3-2|P_1|}{1-2|P_1|} \tag{5.14}$$

Além disso,

$$abc = \Lambda' t \qquad \Lambda' = (1-2|P_1|)\Lambda \tag{5.15}$$

Consequentemente, o efeito da perturbação é substituir uma "era de Kasner" por outra, tal que a potência negativa de t é transferida da direção ℓ para a direção m : se original-

(*)Note-se que no limite $\tau \to -\infty$ os valores assintóticos de α_τ, β_τ, γ_τ podem ser obtidos sem o conhecimento da solução completa das equações (5.8). De fato, a primeira dessas equações tem a forma correspondente ao movimento unidimensional de uma "partícula" no campo de uma parede potencial exponencial (α faz o papel da coordenada). Usando esta analogia, podemos dizer que a solução de Kasner inicial corresponde a um movimento livre com a velocidade constante $\alpha_\tau = \Lambda P_1$. A partícula é refletida pela parede e se move com velocidade $\alpha_\tau = -\Lambda P_1$. Já que, de acordo com as equações (5.8), $\alpha_\tau + \beta_\tau = \text{const}$ e $\alpha_\tau + \gamma_\tau = \text{const}$, encontramos que β_τ e γ_τ assumem os valores $\beta_\tau = \Lambda(P_2+2P_1)$, $\gamma_\tau = \Lambda(P_3+2P_1)$.

mente P_ℓ é negativo, então na nova solução teremos $P'_m < 0$. Durante a translação a função a(t) atinge um máximo e b(t) um mínimo. Portanto, a quantidade b que anteriormente decrescia, agora cresce; a quantidade α decresce e a quantidade c(t) continua sendo uma função decrescente. A perturbação $\lambda^2 e^{4\alpha}$ que anteriormente crescia nas equações (5.8), fica amortecida e, eventualmente, se anula. Como resultado de uma posterior evolução, os termos de perturbação, nas equações (5.5), que contém μ^2 (em vez de λ^2) crescem, o que leva a uma nova substituição de uma era de Kasner por outra, etc.

As regras que governam as alternâncias da potência negativa do tempo de uma direção para outra, podem ser convenientemente expressas por meio da parametrização (4.5): se

$$P_\ell = P_1(u) \qquad P_m = P_2(u) \qquad P_n = P_3(u)$$

então,

$$P'_\ell = P_2(u-1) \qquad P'_m = P_1(u-1) \qquad P'_n = P_3(u-1) \quad (5.16)$$

A maior das duas potências positivas permanece positiva.

Este processo, onde uma era de Kasner é substituida por outra, com a substituição dos expoentes P_ℓ, P_m, P_n, definida pela regra (5.16), dá uma indicação da natureza real da evolução da métrica na vizinhança de um ponto singular(*).

As mudanças sucessivas (5.16), acompanhadas pela alternância da potência negativa entre as direções ℓ e m, conti-

---

(*) A regra (5.16) de troca das eras de Kasner foi descoberta pelos autores em 1962. O modelo homogêneo do tipo IX de Bianchi foi introduzido em conexão com isso, em artigo de Belinsky com um do nosso Grupo [12] .

nuam enquanto a parte inteira do valor inicial de u não for exaurido, isto é, até que u fique menor que um. Quando u fica menor que um, então, de acordo com (4.6), o valor $u < 1$ se transforma em $u > 1$; nesta ocasião ou o expoente P_ℓ ou P_m são negativos e P_n fica sendo o menor dos dois números positivos ($P_n = P_2$). A próxima sequência de mudanças alternará a potência negativa entre as direções n e ℓ ou n e m. Para um valor inicial (irracional) arbitrário de u, as mudanças (5.16) se repetem indefinidamente.

É claro que para uma solução exata os expoentes P , P_m e P_n perdem seu sentido literário. Devido ao resultante "esmagamento" (mesmo que seja pequeno) destes números (e, portanto também do parâmetro u), não faz sentido considerar qualquer valor bem definido de u (por exemplo, valor racional). Portanto, somente as conclusões que se referem aos valores gerais (irracionais) de u têm verdadeiro significado.

Consequentemente, a evolução do nosso modelo em direção de um ponto singular consiste de séries sucessivas de oscilações nas quais distâncias em dois eixos oscilam e no terceiro eixo decresce monotonicamente; o volume decresce de acordo com uma lei próxima a $\sim t$. Na transição de uma série para outra, os eixos nos quais as distâncias decrescem monotonicamente são trocados entre si. A ordem na qual os pares de eixos são trocados adquire assintoticamente um caráter estocástico.

A cada (s-ésima) série de oscilações corresponde uma sequência decrescente de valores do parâmetro u, que começa em um certo número máximo $u^{(s)}_{máx}$, e continua por valores $u^{(s)}_{máx} - 1$, $u^{(s)}_{máx} - 2$, ..., até o menor valor $u^{(s)}_{min} < 1$. Denotamos

$$U_{min}^{(s)} = x^{(3)} \quad , \quad U_{máx}^{(s)} = K^{(s)} + x^{(s)} \qquad (5.17)$$

isto é, $K^{(s)} = [U_{máx}^{(s)}]$. Os colchetes significam a parte inteira do número. O inteiro $K^{(s)}$ determina o comprimento da série, medida como o número de eras de Kasner que contêm — em completa distinção de sua duração no tempo. Para a próxima série:

$$U_{máx}^{(s+1)} = \frac{1}{x^{(s)}} \qquad K^{(s+1)} = \left[\frac{1}{x^{(s)}}\right] \qquad (5.18)$$

A ordenação das séries de diferentes comprimentos também adquire assintoticamente um caráter estocástico.

Em relação à duração no tempo, as séries sucessivas se condensam na direção t=0. Mas uma variável natural para a descrição desta evolução parece ser, em vez do tempo universal t, seu logarítmo, $\ell n\, t$. Então a aproximação para o ponto singular se "estica" para $-\infty$.

De acordo com as regras (5.12) uma das funções a, b, c, atinge um máximo quando uma das eras de Kasner substitui uma outra. Este máximo é dado por

$$a_{máx} = \sqrt{2\Lambda|P_1(u)|} \qquad (5.19)$$

(supõe-se que este valor seja grande se comparado a b_0, c_0); o valor de u em (5.19) corresponde à era precedente. Portanto, é fácil concluir que a altura dos máximos sucessivos pertencentes a uma série decresce. De fato, na próxima era de Kasner o parâmetro u assume o valor $u' = u-1$, e a constante Λ é substituída, de acordo com (5.15), por $\Lambda' = (1-2|P_1(u)|)$. Portanto, a razão entre dois máximos sucessivos é dada por

$$\frac{a'_{m\bar{a}x}}{a_{m\bar{a}x}} = \left[\frac{P_1(u-1)}{P_1(u)}\ (1-2|P_1(u)|)\right]^{1/2}$$

e, finalmente,

$$\frac{a'_{m\bar{a}x}}{a_{m\bar{a}x}} = \sqrt{\frac{u-1}{u}} \equiv \sqrt{\frac{u'}{u}} \qquad (5.20)$$

Esta análise dos modos oscilatórios de aproximação à singularidade em modelos homogêneos ainda está incompleta no seguinte aspecto.

A métrica em qualquer espaço homogêneo pode ser representada de uma forma bem geral como

$$d\ell^2 = \gamma_{ab}(t)\ (e^a_\alpha\ dx^\alpha)(e^b_\beta\ dx^\beta) \qquad (5.21)$$

onde $e^1 \equiv \ell$, $e^2 \equiv m$, $e^3 \equiv n$ são os três vetores de base que são funções definidas (para cada tipo de Bianchi) das coordenadas espaciais; os coeficientes γ_{ab} são funções do tempo (os índices gregos α, β enumerando as três coordenadas x^1, x^2, x^3 e índices latinos a, b, denotando os vetores de base e^1, e^2, e^3). Enquanto isso, a métrica da forma

$$d\ell^2 = (a^2\ \ell_\alpha\ \ell_\beta + b^2\ m_\alpha\ m_\beta + c^2\ n_\alpha\ n_\beta) \qquad (5.22)$$

que usamos na discussão precedente, corresponde somente a um caso particular de uma matriz diagonal γ_{ab} com os elementos $\gamma_{11} = a^2$, $\gamma_{22} = b^2$, $\gamma_{33} = c^2$. Uma redução artificial, como esta, do número de funções desconhecidas não levou a nenhuma contradição devido às componentes não diagonais do tensor de Ricci P^β_α se anularem identicamente como resultado da simetria específica dos modelos tipos VIII e IX; assim, o resto das equações de Einstein (para o campo no vácuo) constitui um sistema auto-consistente. No entanto a restrição da métrica pela condição de uma matriz diagonal γ_{ab} leva ao desaparecimento de certas propriedades que são inerentes ao caso mais geral.

Em particular, esta deficiência da métrica (5.23) se manifesta quando se tenta introduzir matéria no modelo. No contexto deste caso "diagonal" a matéria deveria estar em repouso em relação ao sistema de referência (isto é, o referencial teria de ser não somente síncrono, mas também co-movente)(*). Na verdade, uma velocidade não-nula para a matéria implicaria no aparecimento de componentes não-nulas T^0_α do tensor energia-momento, enquanto que as componentes R^0_α do tensor de Ricci se anulam identicamente, devido à maior simetria do caso diagonal. Assim, a necessidade da métrica não diagonal (em γ_{ab}) (5.22) surge tão logo introduzimos a matéria no tensor energia-momento.

Esta questão é investigada em artigo de V.A. Belinskii com os presentes autores [13]. Mencionaremos somente alguns resultados finais da investigação (para o modelo homogêneo do tipo IX) a fim de dar um esboço geral da situação.

A propriedade básica do modelo, isto é, o modo oscilatório de evolução com a troca das eras de Kasner de acordo com as regras (5.16), se mantém para o caso "não diagonal" mais geral. Porém, uma outra propriedade do caso "diagonal" desapare-

---

(*) A lei de evolução da densidade de energia da matéria (em cada uma das eras de Kasner) poderia ser encontrada para este caso fazendo $u^\alpha=0$, $u^0=1$ nas relações (4.27): $\epsilon \sim (abc)^{-1/3} \sim t$. Esta lei não corresponde à fórmula (4.29) e não tem qualquer significado geral.

ce: os vetores (independentes do tempo) constantes ℓ, m, n, não coincidem mais com os "eixos de Kasner" em cujas direções as distâncias variam com o tempo, de acordo com a lei de potência com expoentes P_1, P_2, P_3. *No caso geral, as direções dos eixos de* Kasner ℓ_k, m_k, n_k, são diferentes da base constante ℓ, m, n, e a troca das eras de Kasner se faz acompanhar por uma rotação dos eixos de Kasner.

Em cada era de Kasner a métrica espacial pode ser escrita como

$$d\ell^2 = (a^2\, \ell_{k\alpha}\ell_{k\beta} + b^2\, m_{k\alpha}m_{k\beta} + c^2\, n_{k\alpha}n_{k\beta})\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (5.23)$$

com seus próprios ℓ_k, m_k, n_k. Sejam, em *uma destas eras*, $P_\ell = P_1(u)$, $P_m = P_2(u)$, $P_n = P_3(u)$ e vamos supor que $a^2 \gg b^2$ e $a^2 \gg c^2$ (*veremos no* §7 que estas condições podem certamente ser cumpridas no limite assintótico da vizinhança da singularidade, quando as amplitudes das oscilações crescem rapidamente). Acontece que ao passar para a próxima era (da mesma série), o eixo ℓ_k fica na mesma direção e os novos eixos m_k' e n_k' permanecem respectivamente nos planos ℓ_k, m_k e ℓ_k, n_k. Os ângulos θ_m' e θ_n' entre os eixos m_k' e n_k' e a direção de $\ell_k = \ell_k'$ estão relacionados aos mesmos ângulos θ_m e θ_n para a direção inicial de m_k e n_k pelas equações

$$\frac{\mathrm{tg}\ \theta_m'}{\mathrm{tg}\ \theta_m} = -\frac{2u-1}{2u+1} \qquad\qquad \frac{\mathrm{tg}\ \theta_n'}{\mathrm{tg}\ \theta_n} = \frac{u-2}{u+2} \qquad (5.24)$$

Isto implica em $|\theta_m'/\theta_n| < 1$, $|\theta_n'/\theta_n| < 1$, isto é, com o passar *sucessivo de eras de Kasner, os eixos de Kasner se aproximam* .

Um efeito análogo acompanha a transição de uma série de oscilações para outra.

O modelo homogêneo com a rotação dos eixos requer a presença de matéria em movimento. As leis de variação da densidade e da velocidade desta matéria com o tempo (durante cada uma das eras de Kasner) são dadas pelas fórmulas (4.28-29), que têm (como vimos no §4) um caráter geral para um regime de Kasner.

6. *O CASO DE PEQUENAS OSCILAÇÕES*

Numa sequência infinita dos números u, construída de acordo com as regras (5.17-18), sempre haverá pequenos valores arbitrários (mas nunca nulos) de $x^{(s)}$ e, com eles, grandes comprimentos arbitrários $K^{(s+1)}$. Os expoentes de Kasner correspondentes a grandes valores do parâmetro u são

$$p_1 \simeq -\frac{1}{u} \quad , \quad p_2 \simeq \frac{1}{u} \quad , \quad p_3 \simeq 1-\frac{1}{u^2} \quad .$$

Os dois primeiros expoentes são próximos de zero, portanto, também próximos entre si, e portanto também a dependência temporal das duas "perturbações" (duas em três) (isto é, termos no lado direito de (5.5) que contêm λ, μ e ν) são semelhantes. Se os valores absolutos destes termos são próximos entre si (por causa das condições iniciais) no início de uma longa série no instante em que uma era de Kasner substitui outra, eles permanecem próximos durante a maior parte da duração de toda a série. Neste caso, que chamaremos de caso de pequenas oscilações, é insuficiente considerar somente um tipo de perturbação. É então necessário levar em conta simultaneamente o efeito de duas "perturbações". Isto será feito aqui para modelos homogêneos sem matéria, isto é, no contexto do caso "diagonal" com direções fixas dos eixos de Kasner(*).

Vamos considerar uma longa série de oscilações durante a qual duas de três funções a,b,c (digamos a e b) oscilam, tal que seus valores absolutos se mantêm próximos e a terceira

(*) Um caso mais geral de pequenas oscilações no modelo homogêneo com eixos em rotação (na presença de matéria) é considerado na referência [13].

função ($\underline{c}$) decresce monotonicamente. Já que a função $\underline{c}$ decresce rapidamente, vamos investigar a solução das equações na região onde $\underline{c}$ pode ser desprezada em comparação com $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Primeiramente, discutiremos o modelo tipo IX, colocando então $\lambda = \mu = \nu = 1$ (estes resultados foram encontrados na referência [12]).

Desprezando a função c, podemos escrever as duas primeiras equações (5.5) sob a forma

$$\alpha_{\tau\tau} + \beta_{\tau\tau} = 0 \tag{6.1}$$

$$\alpha_{\tau\tau} - \beta_{\tau\tau} = e^{4\beta} - e^{4\alpha} \tag{6.2}$$

e como a terceira tomamos a equação (5.7) sob a forma

$$\gamma_{\tau}(\alpha_{\tau} + \beta_{\tau}) = - \alpha_{\tau}\beta_{\tau} + \frac{1}{4} (e^{2\alpha} - e^{2\beta})^2 \tag{6.3}$$

Escreveremos a solução da equação (6.1) como

$$\alpha + \beta = \frac{2\, a_0{}^2}{\xi_0} (\tau - \tau_0) + 2\, \ell n\, a_0$$

onde a_0, ξ_0 são constantes positivas e τ_0 é o limite superior do τ da série. Além disso, é conveniente introduzir a nova variável (em vez de τ) por

$$\xi = \xi_0 \exp \left\{\frac{2\, a_0{}^2}{\xi_0} (\tau-\tau_0)\right\} \tag{6.4}$$

Então encontramos

$$\alpha + \beta = \ell n \frac{\xi}{\xi_0} + 2\, \ell n\, a_0 \tag{6.5}$$

Introduzindo a notação $\chi = \alpha-\beta$, transformamos as equações (6.2) e (6.3) para as formas

$$\chi_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\chi_\xi + \frac{1}{2}\,\mathrm{senh}\,2\chi = 0 \qquad (6.6)$$

$$\gamma_\xi = -\frac{1}{4\xi} + \frac{\xi}{8}\left(2\chi_\xi^2 + \cosh 2\chi - 1\right) \qquad (6.7)$$

Quando τ decresce de τ_0 para $-\infty$, ξ decresce de ξ_0 para 0. As pequenas oscilações com a e b próximos (isto é, pequeno χ) são obtidas quando ξ_0 é muito grande. De fato, para grandes valores de ξ, até primeira ordem em $1/\xi$, a solução da equação (6.6) para grande ξ tem a seguinte forma:

$$\chi = \alpha-\beta = \frac{2A}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{sen}\,(\xi-\xi_0) \qquad (6.8)$$

onde A é uma constante; χ é pequeno por causa do fator $1/\sqrt{\xi}$ (consequentemente, podemos escrever nas equações (6.7) $\mathrm{senh}\,2\chi \approx 2\chi$)(*). Segue-se da equação (6.7) que

$$\gamma_\xi \approx \frac{\xi}{4}\left(\chi_\xi^2 + \chi^2\right) = A^2 \qquad \gamma = A^2(\xi-\xi_0) + \text{const}$$

Expressando α e β a partir das relações (6.5) e (6.8), e expandindo e^α, e^β de acordo com as aproximações mencionadas acima, finalmente obtemos(**)

(*) A constante no argumento do seno não é necessariamente idêntica a ξ_0 que aparece em (6.4-5); no entanto, escolhendo-as iguais não alteramos a natureza da solução.

(**) Um cálculo mais acurado fornece um termo logarítmico que varia lentamente no argumento do seno e um fator multiplicativo em $c(\xi)$ (veja o apêndice B da referência [14]).

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \left[1 \pm \frac{A}{\sqrt{\xi}} \operatorname{sen} (\xi - \xi_0) \right] \tag{6.9}$$

$$c = c_0 \exp \left[-A^2 (\xi_0 - \xi) \right] \tag{6.10}$$

Integrando a expressão $dt = abcd\tau$ obtemos a seguinte relação entre ξ e t:

$$\frac{t}{t_0} = \exp \left[- A^2 (\xi_0 - \xi) \right] \tag{6.11}$$

A constante c_0 (o valor de c em $\xi = \xi_0$) deve satisfazer à desigualdade $c_0 << a_0$.

Vamos discutir agora a região $\xi << 1$. Os principais termos na solução da equação (6.6) são dados por:

$$X = \alpha - \beta = \kappa \, \ell n \, \xi + \text{const}$$

onde κ é a constante que satisfaz a $-1 < \kappa < 1$. Esta condição garante que o último termo em (6.6) é pequeno (sen2X contém $\xi^{2\kappa}$ e $\xi^{-2\kappa}$). Expressando α, β e t, usando a equação acima, obtemos

$$a \sim \xi^{(1+\kappa)/2} \quad b \sim \xi^{(1-\kappa)/2} \quad c \sim \xi^{-(1-\kappa^2)/4} \quad t \sim \xi^{(3+\kappa^2)/4} \tag{6.12}$$

Esta é novamente uma solução de Kasner, onde a potência negativa de t corresponde a $c(t)$(*).

(*) Substituindo, na equação (6.6), senh2X por 2X e resolvendo esta equação para todos os ξ, obtemos

$$X = c_1 \, J_0(\xi) + c_2 \, N_0(\xi)$$

onde J_0, N_0 são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipos. Esta solução representa uma interpolação entre dois casos limites e nos permite estimar, em termos de ordem de grandeza, a relação entre os parâmetros constantes que aparecem em (6.9) e (6.12).

Qualitativamente, estes resultados levam novamente ao mesmo tipo de evolução do modelo como descrito no §5. Durante um grande intervalo de tempo (correspondendo a grandes valores decrescentes de ξ) as funções a e b fazem pequenas oscilações, ficando próximas entre si $[(a-b)/a < 1/\xi]$, e seus valores médios decrescem lentamente ($\sim \sqrt{\xi}$). O período de oscilações em relação à variável ξ é constante ($\Delta\xi = 2\pi$), o que significa que o período de oscilações também é constante em relação ao tempo logarítmico: $\Delta \ln t = 2\pi A^2$. A terceira função decresce monotonicamente, aproximadamente de acordo com a lei $c = c_0 t/t_0$.

Tal evolução só pode durar enquanto ξ for grande comparado com a unidade. Quando $\xi \sim 1$, as fórmulas (6.9) e (6.10) deixam de ser válidas. A duração desta evolução corresponde ao intervalo de tempo de t_0 a t_1, que está relacionado com ξ_0 por

$$A^2\xi_0 = \ln (t_0/t_1) \tag{6.13}$$

A relação entre ξ e t neste período é dada por

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\ln (t/t_1)}{\ln (t_0/t_1)} \tag{6.14}$$

Segue-se da equação (6.12) que após este período, a função decrescente começa a crescer e as funções a e b decrescem. Esta era de Kasner termina quando o termo c^2/a^2b^2, nas equações (5.1), se tornam comparáveis a t^{-2} e é então substituído por um novo período de oscilações.

$$\varepsilon \sim (\xi_0/\xi)^2 \tag{6.15}$$

Conforme ξ varia de ξ_0 a $\xi \sim 1$, a densidade cresce de $\xi_0^{\,2}$.

Salientamos que, embora a função $c(t)$ tenha aproximadamente a forma $c \sim t$, a métrica (6.9-10) não coincide com a métrica de Kasner caracterizada pelos expoentes (0,0,1). Esta última corresponde aqui à solução exata compatível com as equações (5.5) e (5.6) (obtidas por A. Taub), na qual

$$a^2 = b^2 = \frac{P}{2}\frac{\cosh(2P\tau+\delta_1)}{\cosh^2(P\tau+\delta_2)} \qquad c^2 = \frac{2P}{\cosh(2P\tau+\delta_1)} \tag{6.16}$$

onde P, δ_1, δ_2 são constantes. Substituindo $t = e^{P\tau}$, obtemos, na região limite de grandes valores negativos de τ: $a=b=$const e $c = t$ const. Nesta métrica a singularidade em $t = 0$ não é física.

Vamos investigar os modelos tipo VIII [15]. Colocamos agora $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$, nas equações (5.5-7). Se a função que decresce monotonicamente é a, então nada muda na discussão acima: desprezando a^2 nos lados direitos das equações (5.5-7), obtemos novamente as equações (6.6) e (6.7) (com a correspondente mudança na notação). Contudo, se nem b nem c decrescem monotonicamente, então são necessárias algumas modificações. Seja c a função monotonicamente decrescente.

Com a mesma notação obtemos novamente a equação (6.6) e daí também as expressões (6.9) para as funções $a(\xi)$ e $b(\xi)$. A equação (6.7) é substituída por

$$\gamma_\xi = -\frac{1}{4\xi} + \frac{\xi}{8}\left(2\chi_\xi^{\,2} + \cosh 2\chi + 1\right) \tag{6.17}$$

Para grandes ξ o termo principal tem agora a forma

$$\gamma_\xi \simeq \frac{\xi}{8}\; 2 \qquad \gamma \simeq \frac{1}{8}\left(\xi^2 - \xi_0^{\,2}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{c}{c_0} = \frac{t}{t_0} = \exp\left\{-\frac{1}{8}\left(\xi_0{}^2-\xi^2\right)\right\} \tag{6.18}$$

A dependência temporal da função c é novamente dada por $c = c_0 t/t_0$, mas a dependência temporal de ξ fica modificada. A duração da série de oscilações está relacionada com ξ_0 por

$$\xi_0 = \sqrt{8 \ln t_0/t_1} \tag{6.19}$$

Por outro lado, a quantidade ξ_0 define o número de oscilações das funções a e b durante a série (igual a $\xi_0/2\pi$). Para uma dada duração da série (em relação ao tempo logarítmico, isto é, para um dado valor da razão t_0/t_1), o número de oscilações no modelo tipo VIII é, em geral, menor que no modelo tipo IX. O período de oscilações é agora dado por $\Delta \ln t = \pi\xi/2$; em contraste com o modelo tipo IX, o período de oscilações não fica mais constante, mas decresce lentamente junto com a quantidade ξ.

7. EVOLUÇÃO DO MODELO NA REGIÃO ASSINTÓTICA DE TEMPOS ARBITRARIAMENTE PEQUENOS

A série de pequenas oscilações discutida no §6 viola a evolução "regular" definida pelas regras estabelecidas no §5; este fato dificulta a investigação da evolução durante grandes períodos de tempo, incluindo muitas séries. Todavia, pode-se mostrar que na região assintótica de tempos arbitrariamente pequenos, suficientemente afastada do instante inicial de tempo quando condições iniciais arbitrárias são impostas, tal comportamento "anômalo" na evolução do modelo para um ponto singular não ocorre. Mesmo para séries longas, nos instantes em que uma era de Kasner substitui outra, as duas funções oscilantes são tão diferentes que a substituição de fato de uma era por outra é causada somente por um tipo de perturbação. Aqui e nas seções seguintes, faremos uma análise estatística da evolução dos modelos nesta região assintótica. Esta análise se aplica a ambos os modelos, tipos VIII e IX.(*)

Em cada era de Kasner temos abc = Λt, isto é, $\alpha+\beta+\gamma = \ln \Lambda + \ln t$. Como resultado da transição de uma era de Kasner para outra, a constante Λ varia de uma quantidade da ordem de 1 (veja (5.5)). Na região assintótica quando $|\ln t|$ é arbitrariamente grande, podemos desprezar não somente tais variações mas também a constante $\ln \Lambda$. Em outras palavras, neste limite desprezamos todas as quantidades cujas razões em relação a $|\ln t|$ tendem a zero quando $t \to 0$. Encontramos então

---

(*) Os conteúdos dos §7 e §8 se baseiam em artigo de I. M. Fifshitz com os presentes autores [16] .

$$\alpha + \beta + \gamma = \Omega \tag{7.1}$$

onde Ω denota o "tempo logarítmico":

$$\Omega = - \ln t \tag{7.2}$$

Nesta aproximação, a troca de duas eras é instantânea. Podemos também desprezar a constante $\frac{1}{2} \ln (2|P_1|\Lambda)$ no lado direito da condição (5.19), que define o instante em que uma era substitui uma outra, isto é, podemos substituir (5.19) pela condição $\alpha = 0$ (ou pelas condições $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$, se os expoentes negativos iniciais correspondem ou à função b, ou à função c)(*). Então, supomos que

$$\alpha_{máx} = 0 \quad , \quad \beta_{máx} = 0 \quad , \quad \gamma_{máx} = 0 \tag{7.3}$$

tal que as quantidades α, β, γ, assumem só valores negativos relacionados entre si em cada instante de tempo pela relação (7.1).

Supondo a troca instantânea de duas eras, estamos desprezando as "larguras" das regiões de transição em comparação com as durações das eras; de fato, como mostraremos mais tarde, isto se justifica. Mas a condição (5.19) pode ser substituída pela condição (7.3), contanto que a quantidade $\ln(|P_1|\Lambda)$ seja pequena se comparada às amplitudes de oscilação das funções α, β, γ, correspondentes. No entanto, como já observamos no §6, durante a transição de uma série para outra podem ocorrer valores muito pequenos de $|P_1|$. Seus valores absolutos e as probabilidades de suas ocorrências não estão relacionadas à amplitude

(*) Isto significa que também desprezamos o decréscimo gradual (definido por (5.20)) nos máximos das funções oscilantes que ocorrem durante a série.

das oscilações alcançadas até esse instante. Portanto, em princípio, $|P_1|$ pode ficar tão pequeno que a condição acima não seja satisfeita. Um decréscimo tão grande em $\alpha_{máx}$ pode ocorrer em situações especiais quando o acoplamento de duas eras de Kasner definidas pela regra (5.16) se torna incorreta (isto inclui a situação discutida no §6)$^{(*)}$. Tais situações "perigosas" invalidariam os argumentos usados na análise estatística feita no §8. Contudo, como já mencionamos, a probabilidade de tais casos tende assintoticamente a zero. Discutiremos novamente este problema no final do §8.

Vamos considerar uma série que contenha K eras de Kasner, que correspondam aos seguintes valores do parâmetro u:

$$u_n = K + X - 1 - n \qquad n = 0,1,\ldots,K-1 \tag{7.4}$$

Além disto, sejam α e β as funções oscilantes nesta série (veja a figura 2 na referência [12])$^{(**)}$

Vamos denotar o início de uma era caracterizada pelo parâmetro u_n por Ω_n. Em cada um destes instantes Ω_n uma das quantidades α ou β se anula e a outra atinge um mínimo. Denotaremos estes valores mínimos de α ou β por

$$\alpha_n = - \delta_n \, \Omega_n \tag{7.5}$$

$^{(*)}$Esta questão foi discutida também por Doroshkovitch e Novokov [17] .

$^{(**)}$A definição dos limites de uma série de acordo com (7.4) é natural no sentido de que inclui todas as eras nas quais a terceira função $\gamma(t)$ decresce monotonicamente. Se classificássemos a série em relação à sequência de valores de u decrescentes de K+X a 1+X, a função $\gamma(t)$ decresceria monotonicamente também na primeira era da próxima série.

(sem distinguir entre α e β). As quantidades δ_n que medem os mínimos em unidades de Ω_n variam entre 0 e 1. A função γ decresce monotonicamente durante uma dada série de oscilações. Segue-se da equação (7.1) que seu valor no instante Ω_n é

$$\gamma_n = - \Omega_n \, (1-\delta_n) \tag{7.6}$$

Durante a era que se inicia no instante Ω_n e termina no Ω_{n+1}, uma das funções α, β cresce de $-\delta_n\Omega_n$ a 0, e a outra decresce de 0 a $-\delta_{n+1}\Omega_{n+1}$, de acordo com as leis lineares

$$\text{const} + |P_1(u_n)|\Omega \qquad \text{e} \qquad \text{const} - P_2(u_n)\Omega$$

Isto nos fornece a seguinte fórmula de recorrência:

$$\delta_{n+1}\Omega_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n}\,\delta_n\Omega_n = \frac{1+u_0}{u_n}\,\delta_0\Omega_0 \tag{7.7}$$

De modo análogo, a duração logarítmica de uma era é dada por:

$$\Delta_{n+1} = \Omega_{n+1}-\Omega_n = \frac{f(u_n)}{u_n}\,\delta_n\Omega_n = \frac{f(u_n)(1+u_{n-1})}{f(u_{n-1})u_n}\,\Delta_n \tag{7.8}$$

onde, por simplificação, denotamos $f(u) = 1+u+u^2$. Para a duração total de n eras obtemos

$$\Omega_n-\Omega_0 = \left[n(n-1) + \frac{nf(u_{n-1})}{u_{n-1}}\right]\delta_0\Omega_0 \tag{7.9}$$

Da equação (7.7) obtemos que $|\alpha_{n+1}| > |\alpha_n|$, ou seja, as amplitudes das oscilações das funções α e β crescem durante a série (embora os coeficientes δ_n possam ser pequenos). Se o valor do mínimo no início de uma série é grande, os valores dos mínimos subsequentes não podem ser pequenos, isto é, a diferença $|\alpha-\beta|$, nos instantes em que uma era de Kasner substitui outra, permanece grande. Frisamos que esta asserção é independente do comprimento da série K e, portanto, mesmo no caso de séries longas a troca de duas eras é governada pela regra (5.16).

A amplitude da última oscilação da função α ou β em uma dada série está relacionada à amplitude da primeira oscilação pela fórmula $|\alpha_{K-1}| = |\alpha_0|(K+X)/(1+X)$. Já para comprimentos K da ordem de várias unidades, podemos desprezar X comparado com K, e portanto, o acréscimo na amplitude das oscilações das funções α e β é proporcional ao comprimento da série. Para as funções $a = e^{\alpha}$ e $b = e^{\beta}$ isto significa que se a amplitude das oscilações no início de uma série é A_0, então no final desta série a amplitude é $A_0{}^{K/(1-X)}$.

Durante uma série as durações (em relação ao tempo logarítmico) de eras sucessivas também crescem. Das equações (7.8) temos que $\Delta_{n-1} > \Delta_n$(*). A duração total de uma série é

$$\Omega_0'-\Omega_0 = \Omega_K-\Omega_0 = K(K+X+\frac{1}{X})\delta_0\Omega_0 \qquad (7.10)$$

(o termo que contém $1/X$ vem da última era (a K-ésima) cuja duração é longa para pequenos X; veja a figura 2 da referência [12]). O instante Ω_K no qual a K-ésima era de uma dada série

(*) Podemos ver que estas durações das eras de Kasner são longas comparadas às durações das regiões de transição entre duas eras. Da equação (5.12) tiramos que as durações das regiões de transição são grandes quando $|P_1|$ é pequeno, isto é, quando u é grande, e são da ordem de $1/|P_1| \sim u$. No entanto, mesmo neste caso, $\Delta_n \sim u_n|\alpha_n| \gg u_n$.

termina representa, ao mesmo tempo, o começo da próxima série, Ω_0'.

Na primeira era de Kasner da nova série de oscilações a função γ cresce a partir de seu valor mínimo $\gamma_K = -\Omega_K(1-\delta_K)$, alcançado na era precedente. Este valor representa a amplitude inicial $\delta_0'\Omega_0'$ de uma nova sequência de oscilações. É dado por

$$\delta_0'\Omega_0' = (\frac{1}{\delta_0} + K^2 + KX - 1)\delta_0\Omega_0 \qquad (7.11)$$

Claramente $\delta_0'\Omega_0' > \delta_0\Omega_0$. Mesmo para um comprimento comparativamente curto K, a amplitude cresce consideravelmente: a amplitude inicial de oscilações da função $c=e^\gamma$ é $A_0 \sim A_0^{K^2}$ (deixamos de lado os casos "perigosos" de um limite superior muito baixo das oscilações, mencionado anteriormente).

Da equação (4.29) se segue que a densidade de matéria cresce nas primeiras (K-1) eras, de acordo com a fórmula

$$\ell n \frac{\varepsilon_{n+1}}{n} = 2 \left[1 - P_3(u_n)\right]\Delta_{n+1}$$

Para a última (K-ésima) era de uma dada série deve-se notar que para $u = X < 1$, $P_2(x)$ (em vez de $P_3(x)$) é o maior expoente. Levando isto em conta encontramos que a densidade de matéria cresce durante toda a série de oscilações de acordo com a fórmula

$$\ell n \frac{\varepsilon_K}{\varepsilon_0} = \ell n \frac{\varepsilon_0'}{\varepsilon_0} = 2(K-1+X)\delta_0\Omega_0 \qquad (7.12)$$

Mesmo para valores não muito grandes de K encontramos $\varepsilon_0'/\varepsilon_0 \sim A_0^{2K}$. Na próxima série (de comprimento K') a densidade cresce ainda mais rapidamente, já que a amplitude inicial A_0' também cresce: $\varepsilon_0''/\varepsilon_0' \sim A_0'^{2K'} \sim A_0^{2K^2K'}$, etc. Estas fórmulas demonstram o rápido crescimento na densidade de matéria.

8. *ANÁLISE ESTATÍSTICA DA EVOLUÇÃO DO MODELO NA VIZINHANÇA DA SINGULARIDADE*

A sequência dos comprimentos $K^{(s)}$ das séries sucessivas de oscilações (medidas pelo número de eras de Kasner que contêm) adquire assintoticamente um caráter estocástico. A fonte deste comportamento aleatório é a regra (5.17-18), que define as transições de uma série de oscilações para outra na sequência infinita de valores do parâmetro u.

Esta regra significa que se a tendência começa pelo número $K^{(0)}+X^{(0)}$, então os comprimentos $K^{(1)},K^{(2)},\ldots,$ são os números que aparecem na expansão de $X^{(0)}$ em fração contínua infinita

$$X^{(0)} = \cfrac{1}{K^{(1)} + \cfrac{1}{K^{(2)} + \cfrac{1}{K^{(3)} + \cdots}}} \tag{8.1}$$

Portanto, na investigação da nossa sequência podemos usar resultados bem conhecidos da teoria de frações contínuas(*).

Passando para a descrição probabilística, vamos consi

(*) Como já observamos no §5, estamos interessados somente nas propriedades de uma sequência que corresponda a um número irracional geral $X^{(0)} < 1$. Portanto, não é necessário considerar o caso de números racionais $X^{(0)}$ (para os quais a expansão em fração contínua é finita). Propriedades especiais das frações contínuas periódicas também não são de interesse (tais frações representam números quadráticos irracionais, isto é, os números que são raízes de equações quadráticas com coeficientes inteiros). Notamos que nestes dois casos os valores absolutos de todos os elementos da expansão (os números $K^{(1)},K^{(2)},\ldots$) são limitados. Esta propriedade é excepcional; o conjunto de todos os números $X^{(0)} < 1$ com esta propriedade é de medida zero no intervalo (0,1).

derar, em vez de um valor bem definido $x^{(0)}$, uma distribuição de probabilidade $w_0(x)$ de $x^0 = x$ no intervalo (0,1). Então também os números $x^{(s)}$ que definem o fim de cada série são distribuídos com alguma probabilidade. Seja $w_s(x)dx$ a probabilidade de que o último termo da s-ésima série, $x^{(x)} = x$, fique no intervalo dx. Mostraremos que com s crescente estas distribuições tendem a uma certa distribuição de probabilidade estacionária (independente de s) $w(x)$, na qual as condições iniciais ficam completamente "esquecidas"

O último termo da (s+1)-ésima série pode ser gerado pelos termos iniciais (desta série) $u_{máx}^{(s+1)} = x+k$, onde $k = 1,2, \ldots$; eles correspondem aos números $x^{(s)} = 1/(k+x)$ da série precedente. Isto permite que se derive a seguinte fórmula que expressa a distribuição de probabilidade $w_{s+1}(x)$ em termos de $w_s(x)$:

$$w_{s+1}(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} w_s\left(\frac{1}{k+x}\right) \left|d\,\frac{1}{k+x}\right|$$

ou

$$w_{s+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\, w_s\left(\frac{1}{k+x}\right) \qquad (8.2)$$

Se, com s crescente, a distribuição $w_s(x)$ tende a uma distribuição estacionária $w(x)$ (independente de s), então $w(x)$ satisfaz à seguinte equação:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\, w\left(\frac{1}{k+x}\right) \qquad (8.3)$$

Esta equação tem a solução

$$w(x) = \frac{1}{(1+x)\ \ln 2} \tag{8.4}$$

(normalizada à unidade)$^{(*)}$. Isto pode ser facilmente verificado substituindo-se esta função na equação (8.3). A soma no lado direito de (8.3) fica então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k-1} = \frac{1}{x+1}$$

Podemos ter alguma idéia sobre a taxa com que a dis - tribuição estacionária (8.4) se estabelece considerando-se o seguinte exemplo. Sejam os valores iniciais de $x^{(0)}$ distribuídos em um intervalo estreito $\delta x^{(0)}$. Da equação (8.2) (ou diretamente da expansão (8.1)) temos que as larguras das distribuições $w_s(x)$ (em torno de outros números especificados) são dados por:

$$\delta^{(s)} \approx k^{(1)^2}\ k^{(2)^2}\ \ldots\ k^{(s)^2}\ \delta x^{(0)} \tag{8.5}$$

(esta expressão é válida contanto que $\delta x^{(s)} << 1$).

Conhecendo-se $w(x)$, podemos encontrar a probabilidade $W(k)$ para uma série ter um comprimento k. O último termo da série precedente deve ficar no intervalo entre $1/(k+1)$ e $1/k$ para que o comprimento da s-ésima série seja k. Portanto, a probabilidade da série ser de comprimento k é dada por

$$W_s(k) = \int_{1/(k+1)}^{1/k} w_{s-1}(x)dx \tag{8.6}$$

(*) Este resultado já era conhecido por Gauss.

No limite quando as funções $w_s(x)$ deixam de ser dependentes de s, a distribuição de probabilidade estacionária para o comprimento k da série é obtido inserindo (8.4) em (8.6):

$$W(k) = \frac{1}{\ell n\ 2}\ \ell n\ \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \qquad (8.7)$$

As fórmulas (8.4) e (8.7) constituem a base para a investigação das propriedades estatísticas da evolução do modelo.

A complicação que surge nesta análise é devida a um lento decréscimo da função de distribuição (8.7) para grandes k:

$$W(k) \simeq 1/k^2\ \ell n\ 2 \qquad (8.8)$$

O valor médio, $\bar{k}$, calculado usando esta distribuição, diverge logaritmicamente. Um corte na sequência em valores muito grandes mas finitos de N daria $\bar{k} \sim \ell n\ N$. Todavia, o significado de tal valor médio é,neste caso,muito restrito por causa de sua instabilidade; como a função W(k) cai muito devagar, as flutuações em k divergem ainda mais rapidamente que o valor médio $\bar{k}$. Uma propriedade característica mais adequada da sequência considerada é a probabilidade de que um número selecionado aleatoriamente nesta sequência pertença a uma série de comprimento k (onde k é grande). Esta probabilidade é $\ell n\ k/\ell n\ N$. É pequena se $1 \ll k \ll N$. Neste sentido, pode-se dizer que existe uma grande probabilidade de que um número selecionado aleatoriamente na sequência pertença a uma longa série.

Vamos escrever novamente a fórmula de recorrência que governa a transição de uma série de oscilações para outra. O índice sobrescrito s enumera as séries sucessivas (e não as eras de Kasner em uma série!) começando de uma série que definimos como inicial (s=0); $\Omega^{(s)}$ e $\varepsilon^{(s)}$ denotam, respectivamente, o início da s-ésima série e a correspondente densidade de matéria. $\delta_s\Omega_s$ é a amplitude inicial de oscilações de duas funções α, β, γ (o par de funções que oscila nesta série); $k^{(s)}$ é o comprimento da s-ésima série e a quantidade $x^{(0)}$ define a duração da próxima série; $k^{(s+1)} = [1/x^{(s)}]$. Das equações (7.10-12) tiramos que:

$$\frac{\Omega^{(s+1)}}{\Omega^{(s)}} = 1 + \delta^{(s)}k^{(s)}\ (k^{(s)} + x^{(s)} + \frac{1}{x^{(s)}}) \equiv e^{\xi s} \qquad (8.9)$$

$$\delta^{(s+1)} = 1 - \frac{(1 + k^{(s)}/x^{(s)})\ \delta^{(s)}}{1 + \delta^{(s)}k^{(s)}(1 + x^{(s)} + 1/x^{(s)})} \qquad (8.10)$$

$$\ell n\ \frac{\varepsilon^{(s+1)}}{\varepsilon^{(s)}} = 2\ (k^{(s)} + x^{(s)} - 1)\ \delta^{(s)}\Omega^{(s)} \qquad (8.11)$$

(por conveniência futura introduzimos em (8.9) a quantidade ξ_s).

As quantidades $\delta^{(s)}$ (que assumem valores no intervalo (0,1)) também têm uma distribuição estacionária. Esta distribuição satisfaz a uma equação integral que expressa o fato das quantidades $\delta^{(s)}$ e $\delta^{(s+1)}$ (relacionadas por (8.10)) terem a mesma distribuição. Esta equação integral pode ser resolvida numericamente (veja a referência [16]). Como não há singularidades na equação (8.10), a distribuição é completamente estável e os valores médios correspondentes de δ (ou de suas potências) são números finitos bem definidos. Em particular, o valor médio de δ é $\bar{\delta} = 0{,}5$.

Nosso objetivo é encontrar uma estimativa estatística do número s de séries de oscilações que ocorrem durante um grande intervalo de tempo Ω.

A aplicação sucessiva da fórmula (8.9) nos dá

$$\Omega^{(s)}/\Omega^{(0)} = \exp\left(\sum_{p=0}^{s-1} \xi_p\right) \tag{8.12}$$

Contudo, tomar a média diretamente desta equação não faz sentido, *já que (por causa de uma grande cauda da função $W(k)$),* o valor médio da quantidade $e^{\xi s}$ é instável, como discutido anteriormente. Esta instabilidade pode ser removida tomando-se o logarítmo da equação (8.12): o intervalo de tempo "log log"

$$\tau_s \equiv \ln\left(\Omega^{(s)}/\Omega^{(0)}\right) = \sum_{p=0}^{s-1} \xi_p \tag{8.13}$$

é representado por uma soma das quantidades ξ_p que têm distribuições estatísticas estacionárias. Os valores médios das quantidades ξ_s e de suas potências (calculados usando as distribuições de x, k e δ) são finitos; um cálculo numérico nos dá $\overline{\xi} = 2{,}1$, $\overline{\xi^2} = 6.8$.

Tomando a média da equação (8.13) para um dado s, obtemos

$$\overline{\tau}_s = 2{,}1\ s \tag{8.14}$$

que define o intervalo de tempo "log log" médio durante o qual ocorrem s séries sucessivas de oscilações.

A flutuação média quadrática desta quantidade é dada por

$$\overline{(\tau_s-\overline{\tau}_s)^2} = \sum_{p,q=0}^{s-1} \left(\overline{\xi_p\xi_q} - \overline{\xi}_p\overline{\xi}_q\right) = s \sum_{p=0}^{s-1} \left(\overline{\xi_0\xi_p} - \overline{\xi}^2\right)$$

Na última igualdade, utilizamos o fato de que, no limite estacionário, a correlação estatística entre ξ_p e ξ_q depende somente da diferença $|p-q|$. Por causa da fórmula de recorrência que relaciona $x^{(s)}$, $k^{(s)}$, $\sigma^{(s)}$ e $x^{(s+1)}$, $k^{(s+1)}$, $\delta^{(s+1)}$, esta correlação de fato não se anula. No entanto, decresce rapidamente com $|p-q|$ crescente e um cálculo numérico mostra que mesmo para $|p-q| = 1$ ela é apenas $\overline{\xi_0\xi_1}-\overline{\xi}^2 = -0,4$. Restringindo o somatório somente aos dois primeiros termos obtemos

$$\left[\overline{(\tau_s-\overline{\tau}_s)^2}\right]^{1/2} = 1,4\ \sqrt{s} \qquad (8.15)$$

Quando $s \to \infty$, a flutuação relativa (a razão entre a flutuação média quadrática (8.15) e o valor médio (8.14)) tende a zero como $\sim s^{-1/2}$. Em outras palavras, a relação estatística (8.14) tem um caráter de quase certeza. Naturalmente, esta certeza se deve a, de acordo com (8.13), τ_s poder ser escrito como a soma de um grande número de termos quase independentes. Isto implica em que a distribuição de todos os valores diferentes τ_s (para um dado s) ã gaussiana:

$$P(\tau_s) \sim \exp\left\{\frac{(\tau_s-2,1s)^2}{4s}\right\} \qquad (8.16)$$

Por causa desta certeza, podemos também inverter a relação (8.14), ou seja, calcular o número médio de séries, $\overline{s}_\tau$, que ocorrem durante um intervalo de tempo "log log" τ :

$$\overline{s}_\tau = 0,47\ \tau \qquad (8.17)$$

A distribuição correspondente é novamente gaussiana mas a quantidade aleatória é agora s_τ (para um dado τ):

$$P(s_\tau) \sim \exp\left\{-\frac{(s_\tau-0{,}47\tau)^2}{0{,}43\tau}\right\} \tag{8.18}$$

Vejamos agora a densidade de matéria. Levando (8.12) em conta, obtemos de (8.11) a seguinte expressão:

$$\ln\ln\frac{\varepsilon^{(s+1)}}{\varepsilon^{(s)}} = \eta_s + \sum_{p=0}^{s-1}\xi_p \quad , \quad \eta_s = \ln\left[2\delta^{(s)}(k^{(s)}+x^{(s)}-1)\Omega^{(0)}\right]$$

A variação total na energia após s séries de oscilações é dada por

$$\ln\ln\frac{\varepsilon^{(s)}}{\varepsilon^{(0)}} = \ln\sum_{p=0}^{s-1}\exp\left\{\sum_{q=0}^{p}\xi_q + \eta_p\right\} \tag{8.19}$$

A contribuição mais importante para esta expressão vem do último termo da soma, que contém o maior expoente. Mantendo somente este termo e tomando a média da equação (8.19), obtemos no lado direito o termo $s\bar{\xi}$, que é idêntico a (8.14). Todos os outros termos na soma (e também os termos η_p nos expoentes) levam somente a uma correção da ordem de $1/s$. Assim, obtemos

$$\overline{\ln\ln\frac{\varepsilon^{(s)}}{\varepsilon^{(0)}}} = \overline{\ln\frac{\Omega^{(s)}}{\Omega^{(0)}}} \tag{8.20}$$

Por causa da certeza da relação entre τ_s e s, a relação (8.20) pode ser escrita como

$$\overline{\ln\frac{\varepsilon_\tau}{(0)}} = \tau \qquad \text{ou} \qquad \overline{\ln\ln\frac{\varepsilon^{(s)}}{\varepsilon^{(0)}}} = 2{,}1\ s$$

Estas equações determinam o valor da média do "log log" do acréscimo na densidade, a média sendo tomada sobre o intervalo de tempo "log log" τ ou sobre o número de séries s.

Frisamos novamente que as relações estatísticas estáveis só valem para intervalos de tempo "log log" e incrementos de densidade "log log". Quanto à quantidades como $\ell n(\varepsilon^{(s)}/\varepsilon^{(0)})$, por exemplo, as flutuações relativas crescem exponencialmente, conforme a região sobre a qual se toma a média cresce, e,portanto a noção de média estatística perde o sentido.

Falta mostrar que na região limite assintótica os casos "perigosos" mencionados no §7 (que violam a evolução regular governada pelas equações de recorrência (8.9-11)) não ocorrem.

Os casos "perigosos" são aqueles onde valores muito pequenos dos parâmetros $u = x$ (e portanto também de $|P_1| \simeq x$) ocorrem no fim de uma série de oscilações. Vamos definir o critério de seleção destes casos pela desigualdade

$$x^{(s)} \exp |\alpha^{(s)}| \lesssim 1 \qquad (8.21)$$

onde $|\alpha^{(s)}|$ é o valor absoluto do mínimo inicial das funções que oscilam na s-ésima série (na verdade a amplitude final seria mais apropriada, mas isto só reforçaria nosso critério).

A quantidade $x^{(0)}$ na primeira série de oscilações é determinada pelas condições iniciais. "Perigosos" são os valores no intervalo $\delta x^{(0)} \sim \exp(-\alpha^{(0)})$ e também nos intervalos que levam a casos "perigosos" na próxima série. Da equação (8.7) vemos que se o valor inicial $x^{(0)}$ pertence a um certo intervalo de largura $\delta x^{(0)} \sim \delta x^{(s)}/k^{(1)^2}k^{(2)^2}\ldots k^{(s)^2}$, então $x^{(s)}$ cairá no intervalo "perigoso" $\delta x^{(s)} \sim \exp(-|\alpha^{(s)}|)$. No total,uma fração λ de todos os valores possíveis de $x^{(0)}$ levarão a casos "perigosos"; esta fração λ da unidade inicial é dada por

$$\lambda = \exp(-|\alpha^{(0)}|) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{(k)} \frac{\exp(-|\alpha^{(s)}|)}{k^{(1)^2} k^{(2)^2} \ldots k^{(s)^2}} \tag{8.22}$$

(a primeira soma é feita sobre todos os valores de $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots$ $\ldots, k^{(s)}$ de 1 a ∞). É fácil ver que esta expressão converge para um número $\lambda << 1$ cuja ordem de grandeza já está determinada pelo primeiro termo da expressão (8.22).

Para provar isto, é suficiente fazer uma majoração na qual assumimos que $|\alpha^{(s)}| = (s+1)|\alpha^{(0)}|$, independentemente dos comprimentos de $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots$ (Na verdade, os números $|\alpha^{(s)}|$ crescem consideravelmente mais rápido; mesmo no caso mais desfavorável $k^{(1)} = k^{(2)} = \ldots = 1$, $|\alpha^{(s)}|$ cresce como $g^s|\alpha^{(0)}|$, onde $g > 1$). Levando em conta que

$$\sum 1/k^{(1)^2} \ldots k^{(s)^2} = (\pi^2/6)^s$$

obtemos

$$\lambda = \exp(-\alpha^{(0)}) \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{\pi^2}{6} \exp(-|\alpha^{(0)}|)\right]^s = \exp(-\alpha^{(0)}) \quad .$$

Se o valor inicial $x^{(0)}$ está fora do intervalo "perigoso" λ, os casos perigosos não podem ocorrer. Se $x^{(0)}$ fica neste intervalo, pode ocorrer um caso perigoso, mas depois de abandoná-lo, o modelo evolui "regularmente" com um novo valor inicial de $x^{(0)}$ que pode cair no intervalo "perigoso" só acidentalmente (com probabilidade λ). As repetições desta situação podem levar a um caso "perigoso" somente com as probabilidades λ^2, λ^3, ..., que convergem assintoticamente a zero. Estas considerações provam nossa asserção anterior.

9. *SOLUÇÃO GERAL COM UMA SINGULARIDADE TEMPORAL*

Nas seções anteriores descrevemos um novo tipo de singularidade em soluções cosmológicas das equações de Einstein , que tem uma complexa natureza oscilatória. A descrição desta solução foi dada para modelos especiais com espaços homogêneos dos tipos VIII e IX da classificação de Bianchi. Todavia, este tipo de singularidade é, na verdade, inerente às soluções (não-homogêneas) gerais.

Esta asserção já fica bastante evidente a partir do raciocínio que nos levou a esta singularidade. A "perda" de uma das funções arbitrárias na solução generalizada de Kasner no §4 foi causada pela imposição de uma condição adicional ($\lambda=0$), que era "não natural" no sentido de que não era uma consequência das equações de Einstein. E o aparecimento de oscilações (as substitutas das eras de Kasner) durante a evolução da métrica na vizinhança da singularidade é devido justamente à rejeição desta condição adicional.

Falta mostrar que todas as propriedades qualitativas da aproximação oscilatória do ponto singular em modelos homogêneos se mantêm no caso (não-homogêneo) geral. É necessário construir expressões analíticas que descrevam, no caso geral, cada um dos elementos constitucionais do regime oscilatório: as várias eras de Kasner e os períodos de transição entre cada duas das eras sucessivas. A resposta à primeira questão é dada pela solução generalizada de Kasner construída no §4. Acentuamos que se essa solução age somente durante um período limitado de tempo, que não alcança $t=0$ (uma era de Kasner), então não há necessidade de impormos a condição $\lambda=0$ e a solução contém todo o conjunto de funções arbitrárias de coordenadas necessário.

Uma descrição analítica da alternância das eras de Kasner foi feita em artigo dos presentes autores com Belinskii [18] . Remetemos o leitor a este artigo, indicando aqui somente os resultados finais.

Uma análise do processo de destruição da métrica de Kasner (4.7-8) pelos termos que contêm λ mostra que, depois de cortarmos todos os termos desprezíveis, ficamos com as seguintes equações gerais para as funções a(t), b(t), c(t)

$$
\begin{aligned}
- R_\ell^\ell &= \frac{(\dot{a}bc)^{\cdot}}{abc} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{a^2}{b^2c^2} = 0 \\
- R_m^m &= \frac{(a\dot{b}c)^{\cdot}}{abc} - \frac{\lambda^2}{2}\frac{a^2}{b^2c^2} = 0 \\
- R_n^n &= \frac{(ab\dot{c})^{\cdot}}{abc} - \frac{\lambda^2}{2}\frac{a^2}{b^2c^2} = 0 \\
- R_0^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

Estas equações diferem das equações correspondentes para os modelos homogêneos somente pela quantidade $\lambda = (\ell \, \mathrm{rot} \, \ell)/(\ell \, [mn])$ não ser mais uma constante, mas função das coordenadas espaciais. Como, no entanto, (9.1) é um sistema de equações diferenciais ordinárias em relação ao tempo, esta diferença não afeta às soluções das equações nem à lei de alternância dos expoentes de Kasner (a regra (5.19)) que se segue desta solução. Assim, a lei de alternância dos expoentes derivada para os modelos homogêneos permanece válida também no caso geral.

O fenômeno de rotação dos eixos de Kasner durante a transição entre as eras de Kasner sucessivas também está presen te no caso geral, e é possível derivar fórmulas gerais que governem este processo. Como no caso de um modelo homogêneo, um dos eixos de Kasner (o eixo ℓ_k, que corresponde ao expoente negativo do tempo) fica em repouso, e os eixos m_k e n_k rodam nos planos ℓ_k, m_k e ℓ_k, n_k, respectivamente. Acentuamos que no caso (não-homogêneo) geral este fenômeno ocorre tanto na presença como na ausência de matéria (enquanto que modelos homogêneos com rotação dos eixos requerem presença de matéria). Os termos do tensor energia-momento nas equações de Einstein para os modelos homogêneos são imitados no caso geral pelos termos que são devidos à não-homogeneidade da métrica espacial.

Foi salientado no §6 que a evolução "regular" do modelo homogêneo pode ser violada pela ocorrência de uma série de pequenas oscilações. Embora a probabilidade de ocorrência de tais eventos tenda a zero quando $t \to 0$ (veja o fim do §8), uma construção completa da solução geral deve incluir também este caso; esta parte do problema está resolvida na referência [20] (veja também o §7 da referência [14]).

Deve-se lembrar que os expoentes de Kasner e as direções dos eixos de Kasner que caracterizam a aproximação oscilatória à singularidade no modelo não-homogêneo geral são funções das coordenadas espaciais e, portanto, variam de ponto a ponto no espaço. É claro que esta característica complica muito uma imagem da situação geral, se comparada à imagem da situação de modelos homogêneos onde cada uma das eras sucessivas de Kasner se refere a todo o espaço.

Sempre que falamos de soluções cosmológicas das equações de Einstein, temos em mente soluções para todo o espaço como um todo. Sob este aspecto é de especial interesse o problema de se a existência de pontos singulares leva a quaisquer restrições sobre as propriedades da geometria espacial. No momento só podemos concluir que não há conexão direta entre o ponto singular e ser o universo finito ou infinito; isto é demonstrado pela existência de modelos homogêneos abertos e fechados com pontos singulares oscilatórios (modelos de tipos VIII e IX).

Mas ao mesmo tempo e generalidade da solução dá motivo de crer que o mesmo tipo de regime oscilatório descreve também o estágio final do colapso gravitacional de um corpo isolado sem simetria esférica (sua contração dentro da esfera de Schwarzschild). Neste problema também surge a questão do acoplamento das soluções interna e externa das equações de Einstein.

A aproximação oscilatória do ponto singular modifica a noção de finitude do tempo. Existe um número infinito de oscilações entre qualquer instante finito do tempo universal t e o instante t = 0. Sob este ponto de vista o processo é infinito. Seria mais apropriado descrever este processo introduzindo, em vez de t, seu logarítmo $\ln t$, que estica a evolução toda para $-\infty$.

Falamos sempre em chegar à singularidade na direção decrescente do tempo. No entanto, como as equações de Einstein são simétricas em relação à inversão temporal, poderíamos, da mesma forma, falar em aproximação à singularidade na direção crescente do tempo. Mas como o futuro e o passado não são fisicamente equivalentes, existe uma distinção física essencial entre os dois casos na própria formulação do problema. Uma singularidade no futuro só pode fazer sentido fisicamente se surgir para condições iniciais arbitrárias especificadas. em qualquer instante arbitrário de tempo anterior. Não há motivo porque a distribuição de matéria ou do campo alcançada em qualquer instante no processo de evolução do universo deva corresponder a condições específicas, necessárias para a realização de alguma solução particular da equação gravitacional. Note-se que este argumento, se aplicado ao colapso gravitacional de um corpo finito, apoia novamente a asserção sobre o modo oscilatório de seus estágios finais.

No que diz respeito à questão da existência de uma singularidade no passado, uma investigação baseada somente nas equações gravitacionais dificilmente pode dar uma resposta definida. Parece natural pensar que a escolha da solução correspondente ao universo real está ligada com alguns requisitos profundamente físicos. É impossível o estabelecimento destes requisitos, baseando-nos somente na teoria da gravitação existente.Eles só podem ser avaliados no decorrer de futuras sínteses de teorias físicas. Neste sentido, em princípio, poderia ocorrer que estes requisitos levassem a uma seleção de algum tipo particular de singularidade (por exemplo, isotrópica). Todavia, por causa da generalidade do modelo oscilatório, parece razoável presumir, a priori, que é ele que descreve os estágios iniciais da evolução do universo.

Enfatizamos mais uma vez que todas as propriedades básicas da solução geral das equações de Einstein na vizinhança da singularidade não dependem da presença ou não de matéria . Neste sentido, o estágio inicial da expansão do universo neste modelo poderia ser chamado de "estágio do vácuo". Com o desenvolvimento no tempo o efeito da matéria sobre a evolução da métrica cresce gradualmente e, finalmente, se torna predominante.

É natural esperar que este efeito leve gradualmente a uma "isotropização" do espaço e, portanto, a uma aproximação às propriedades do modelo de Friedmann, que dá uma descrição satisfatória dos estágios mais posteriores da evolução do universo. Uma revisão dos artigos pertinentes está fora do alcance deste artigo.

Uma última observação sobre a questão de em que medida se justifica uma discussão de um "estado singular" do universo nas bases da teoria de gravitação existente. Obviamente, os limites reais de aplicabilidade física da equação de Einstein em sua forma atual só podem ser esclarecidos no decorrer de futuras sínteses de teorias física, e neste sentido, o problema não pode ser resolvido no momento. É, no entanto, essencial que a teoria gravitacional não perca sua consistência lógica (ou seja, não leve a nenhuma contradição interna) para qualquer densidade de matéria. Em outras palavras, a teoria, enquanto teoria, não é limitada por quaisquer condições auto-impostas que pudessem tornar sua aplicação para densidades arbitrárias logicamente inválida e contraditória. Só poderiam surgir restrições como resultado de fatores "externos" à própria teoria da gravitação. Esta circunstância torna a consideração do problema das singularidades no contexto da teoria existente, de qualquer forma, formalmente válida e necessária.

10. *RESUMO*

1 - O objetivo dos estudos descritos neste artigo é elucidar as propriedades analíticas da singularidade na solução cosmológica geral das equações de Einstein. O número de funções independentes das coordenadas espaciais "fisicamente arbitrárias" que uma solução geral deve conter,é tal que, quaisquer condições físicas (distribuição e movimento da matéria, distribuição do campo gravitacional livre) possam ser satisfeitas no instante de tempo $t=t_0$ que foi escolhido como instante "inicial" ; por "fisicamente arbitrário" entendemos que o número destas funções não pode ser reduzido por qualquer escolha do sistema de referência. Este número é quatro para o espaço vazio, e oito para o espaço com matéria (§1). Uma solução que seja geral neste sentido é, por consequência, completamente estável: a aplicação de qualquer perturbação (não necessariamente pequena) é equivalente a uma mudança nas condições iniciais, e como a solução geral admite condições iniciais arbitrárias, a perturbação não pode modificar o caráter da solução(*).

(*) Em artigo que circulou sob a forma de pré-print, Barrow e Tipler (BT), expressam dúvidas quanto ao número de funções arbitrárias indicado ser realmente suficiente. Estas dúvidas parecem ser completamente infundadas. De qualquer forma, BT não dão qualquer indicação quanto ao possível significado das funções extras. No mesmo artigo, BT "refutam" quase todos os nossos resultados relativos às soluções nao-homogêneas. Seus eloquentes argumentos são: 1) ou irrelevantes ao problema; 2) ou expressões de dúvidas sobre os resultados que são deduzidos por nós por cálculos analíticos e que deveriam ser refutados (se não incorretos) por uma análise destes cálculos e não por "papo furado"; 3) chamando a atenção para as restrições que nós mesmos reconhecemos; 4) ou referências extensivas a asserções tomadas de nossos artigos anteriores, as quais nós nos furtamos. Debater estes argumentos seria uma luta inglória, e nem tentaremos fazê-lo aqui. Um leitor atento e sem preconceitos, pode encontrar respostas a todas estas questões no texto deste nosso artigo.

2 - Todos os resultados que se seguem, são formulados em um sistema de referência síncrono, definido pelas condições (2.1). Em tais sistemas o determinante do tensor métrico, inevitavelmente, vai a zero em tempo finito, como resultado de atingir ou uma singularidade verdadeira, ou uma singularidade fictícia, devida meramente à intercessão das linhas de coordenadas do tempo em alguma hipersuperfície cáustica tipo-tempo (§2). A forma geral da métrica espacial próxima de tal singularidade fictícia é dada por (2.9); contém uma função arbitrária extra como resultado do caráter fictício da singularidade (veja a nota no pé da página 937).

3 - Estamos interessados, é claro, em uma singularidade verdadeira, que não pode ser removida por qualquer transformação do sistema de referência. É sabido que a densidade de matéria e os invariantes de curvatura tendem ao infinito em uma singularidade deste tipo (como fica sempre implícito nas discussões sobre os estágios iniciais da evolução do universo). Sem prejudicar o grau de generalidade, podemos supor que a singularidade é simultânea em todo o espaço (não há necessidade de nos estendermos em uma prova especial desta asserção, já que ela é corroborada pelos resultados, ou seja, a construção real da solução); assumimos, por convenção, este instante de tempo como $t = 0$. O procedimento analítico adotado por nós, consiste da construção da solução na vizinhança temporal da singularidade, isto é, na região de t suficientemente pequeno. Nesta região, não ocorre a intercessão das linhas de tempo no sistema síncrono.

4 - A solução de Friedmann (o modelo isotrópico) é um caso particular de uma classe mais geral de soluções que contêm três funções fisicamente arbitrárias das coordenadas espaciais (§3). Nesta solução, a métrica espacial e a distribuição de matéria são não-homogêneas mas a contração do espaço se dá de forma quase-isotrópica: as dimensões lineares decrescem com a mesma potência de t em todas as direções. Esta solução existe somente para espaço com matéria. Fica à parte da solução geral.

5 - A construção da solução geral começa por uma generalização da métrica de Kasner (4.1), que é uma solução particular para um espaço Euclideano vazio homogêneo mas anisotrópico (tipo I de Bianchi). Nesta solução as distâncias lineares decrescem com o tempo na vizinhança da singularidade em duas direções como t^{P_2} e t^{P_3}, e cresce na terceira direção como $t^{-|P_1|}$ ($P_1 < 0$), os "expoentes de Kasner" P_1, P_2, P_3, sendo sujeitos às relações (4.2). Na solução generalizada (§4), os expoentes P_1, P_2, P_3 se referem às três direções (os "eixos de Kasner") dadas pelos vetores ℓ, m, n que são funções das coordenadas espaciais; os expoentes P_1, P_2, P_3 também são funções destas coordenadas. Na principal aproximação em relação à grande variável $1/t$ (quando $t \to 0$), todas as derivadas espaciais desaparecem das componentes 00 e $\alpha\beta$ das equações de Einstein, contanto que a condição adicional (4.21) $\lambda = (\ell \operatorname{rot} \ell)/v = 0$, seja obedecida ($\ell$ sendo a direção associada ao expoente negativo P_1); também as quantidades relacionadas com a matéria desaparecem das equações nesta aproximação. Esta é a razão do caráter da evolução na vizinhança da singularidade, no caso não-homogêneo permanecer o mesmo que na solução homogênea. Também não depende da pre

sença ou não de matéria; a matéria só altera as relações (que se originam das componentes 0α das equações de Einstein) entre as funções espaciais que aparecem na solução. Frisamos que estes resultados são deduzidos numa detalhada investigação analítica das equações e não subentendem qualquer suposição a priori. Mesmos os próximos termos (os primeiros que se seguem ao principal) da expansão da solução foram investigados; estes termos dependem da presença de matéria. Deve-se enfatizar que ao falar de matéria estamos sempre considerando a equação de estado ultra-relativística $p = \varepsilon/3$ (embora atualmente não exista prova geral da desigualdade $p \leq \varepsilon/3$, também não existem teorias realísticas que refutem esta asserção). A solução generalizada de Kasner contém uma função fisicamente arbitrária, a menos do que é necessário para o caso geral: três para o espaço vazio ou sete para o espaço contendo matéria.

6 - A generalização final é feita rejeitando a condição $\lambda = 0$ (por consequência aumentando de um o número de funções *independentes) e investigando a influência exercida na evo*lução da métrica pelos termos da equação de Einstein que contêm λ. Tal investigação é feita primeiramente para os casos mais simples de modelos homogêneos dos tipos VIII e IX de Bianchi, onde as quantidades λ, μ, ν (4.10) são reduzidas a constantes (§5). Mostra-se que estes termos levam a uma troca de uma "era de Kasner" com dados valores dos expoentes P_ℓ, P_m, P_n, por uma era de Kasner com outros expoentes P'_ℓ, P'_m, P'_n, de acordo com a regra (5.16). Esta regra é um indicador do caráter da solução que dela decorre. A evolução da métrica espacial na vizinhança da singularidade em $t=0$ adquire um complexo caráter oscilatório, com-

posto de uma sucessão infinita de séries de oscilações nas quais as distâncias na direção de dois eixos oscila e na direção do outro eixo decresce monotonicamente; os volumes decrescem, de acordo com uma lei próxima a t_0. Na transição de uma série para outra, os eixos em cujas direções as distâncias decrescem monotonicamente, são permutados. A introdução de matéria neste modelo não modifica a lei de alternância dos expoentes de Kasner, mas introduz uma nova característica: a alternância das eras de Kasner se faz acompanhar por certas rotações dos eixos de Kasner. Uma descrição detalhada da evolução oscilatória na vizinhança da singularidade é dada nos §§5 e 7.

7 - Uma propriedade notável desta evolução é que se torna expontaneamente estocástica. Isto significa que numa recessão suficiente (na direção $t \to 0$) a partir do instante de tempo $t = t_0$, no qual as condições "iniciais" são prescritas, a evolução admite uma descrição estatística que não depende destas condições (§8).

8 - No caso não-homogêneo geral, a solução das equações de Einstein na vizinhança da singularidade repete, em grande parte, as propriedades da solução oscilatória construída para *modelos homogêneos* tipos VIII e IX de Bianchi, com a diferença que as direções dos eixos de Kasner e os valores dos expoentes de Kasner se tornam funções das coordenadas espaciais. A lei de alternância das eras de Kasner em cada ponto do espaço permanece *a mesma. Tal generalização do modelo homogêneo não* impõe qualquer condição adicional (do tipo de desigualdades ou o apa-

recimento de funções espaciais ou suas derivações; veja expansão detalhada na referência [16][(*)]. A única suposição é que existe, pelo menos, uma "era de Kasner", um intervalo de tempo em que a solução generalizada de Kasner é válida; esta suposição é expressa pelas desigualdades (1.8) na referência [16]). Lembramos que, essencialmente a mesma suposição é feita para a construção da solução oscilatória das equações (5.1) nos modelos homogêneos. Todas as propriedades qualitativas da solução geral são independentes da presença ou não de matéria; lembramos novamente que supomos $p = \varepsilon/3$ como equação de estado ultra-relativistica da matéria (a equação $p=\varepsilon$ mudaria a situação e removeria as oscilações; veja a referência [20]).

9 - Para um sistema de equações diferenciais não lineares, tal como as equações de Einstein, a noção de solução geral não é única. Em princípio, podem existir várias soluções gerais, cada uma delas contendo apenas uma parte finita do conjunto total de todas as condições "iniciais" possíveis. Uma investigação especial seria necessária para elucidar o grau de generalidade das soluções com uma singularidade em uma hipersuperfície nula ou tipo-tempo. Também seria necessária uma investigação especial para esclarecer a questão de se a existência da singularidade do tipo discutido aqui impõe qualquer restrição na geometria espacial global. No momento só podemos concluir que não

(*) Contrário às dúvidas expressas por M.A. MacCallum (nas páginas 574-575 da referência [19]). Sua observação de que "é difícil ver" porque a singularidade geral na solução geral é do tipo espaçialmente homogêneo sem qualquer tentativa de analisar nossos cálculos, não podemos encarar como uma objeção.

há conexão direta com ser o espaço *finito ou infinito; isto fi*ca calro quando se observa que as soluções obtidas compreendem modelos homogêneos abertos e fechados (tipos VIII e IX,respectivamente). *Também podemos* salientar que as condições para a existência deste tipo de singularidade aparentemente não se sobrepõe às condições para a validade dos teoremas de Hawking--Penrose (ou pelo menos de alguns deles). Como dito por S. W. Hawking e W. Israel, "o Universo deve conter matéria suficiente para satisfazer à principal condição do teorema de Hawking Penrose" (página 15 da referência [19] e também referência [21]). Enquanto isso, a singularidade do tipo oscilatório também pode existir na solução geral na ausência de matéria.

Referências

1. R. Penrose, Phys. Rev. Lett., 14, 57, 1965.
2. S. Hawking, Phys. Rev. Lett., 15, 689, 1965.
3. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, 4a. edição, Pergamon Press, 1971.
4. E.M. Lifshitz, V.V. Sudakov, I.M. Khalatnikov, JETP, 40 , 1847, 1961, (Soviet Physics JETP, 13, 1298, 1961).
5. E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, Adv. Phys., 12, 185, 1963.
6. E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, JETP, 39, 149, 1960 (Soviet Physics JETP, 12, 108, 1961).

7. E. Kasner, Amer. J. Mathem., 43, 217, 1921.

8. E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, JETP, 39, 800, 1960 (Soviet Physics JETP, 12, 558, 1961).

9. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1959.

10. V.A. Belinskii, I.M. Khalatnikov, JETP, 56, 1700, 1969(Soviet Physics JETP, 29, 911, 1969).

11. V.A. Belinskii, E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, JETP, 60, 1969, 1970 (Soviet Physics JETP, 33, 1061, 1971).

12. V.A. Belinskii, E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, Adv.Phys., 19, 525, 1 ,1970).

13. E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, JETP Letters, 11, 200,1970.

14. E.M. Lifshitz, I.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, JETP, 59 , 322, 1970 (Soviet Physics JETP, 32, 173, 1971).

15. A.G. Doroshkevich, I.D. Novikov, Astron. J. (USSR),47,948, 1970.

16. V.A. Belinskii, E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, JETP, 62, 1606, 1972 (Soviet Physics JETP, 35, 838, 1972).

17. V.A. Belinskii, I.M. Khalatnikov, JETP, 57, 2163, 1969 ; 59, 314, 1970 (Soviet Physics JETP, 30, 1174,1970; 32,169, 1971).

18. J.D. Barrow, F.J. Tipler, Physics Reports, (a ser publicado).

19. General Relativity, Editado por S.W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, 1979.

20. V.A. Belinskii, I.M. Khalatnikov, JETP, 63, 1121, 1972.

21. S.W. Hawking, Theoretical Advances in General Relativity , preprint, Universit, of Cambridge, 1978.